1
```
restart;maple_mode(1);cas_setup(0,0,0,1,0,1e-10,10,[1,50,0,25],0,0,0); #radians,pas de cmplx, pas de  Sqrt
```
[] Warning: some commands like subs might change arguments order 0 0 0 1 0 1e-10 10 [1 50 0 25] 0 0

2 -----------------------------------------------Exercice-----------------------------------

3
```
L:=[];d:=2;purge(x);
```
( [], 2, No such variable x )

4
```
for i from 0 to d do for j from 0 to d-i do L:=[op(L),x[1]^i*x[2]^j] od; od;
```
$$\left[1 \quad x[2] \quad (x[2])^2 \quad x[1] \quad (x[1])\cdot(x[2]) \quad (x[1])^2\right]$$

5 On prend une liste de 5 points entiers, dont (1,1), et on cherche la conique
passant par ces points.

6
```
M:=[[1,1],[-3,2],[2,2],[1,5],[-6,3],[x,y]];
```
$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 2 \\ 2 & 2 \\ 1 & 5 \\ -6 & 3 \\ x & y \end{bmatrix}$$

7
```
f1:=unapply(L,x);
```
```
proc(x)
 [1,x[2],(x[2])^2,x[1],x[1]*x[2],(x[1])^2];

end;
```

8
```
P:=det(matrix([seq(f1(M[i]),i=1..6)]));
```
$$560 \cdot y^2 + 1360 \cdot y \cdot x + (-4720) \cdot y + 420 \cdot x^2 + (-2300) \cdot x + 4680$$

9
```
D2:=unapply(diff(P,y),x,y);
```
( x, y )-> 560 ·2 ·y + 1360 ·x -4720

10
```
D1:=unapply(diff(P,x),x,y);
```
( x, y )-> 1360 ·y + 420 ·2 ·x -2300

11
```
v:=[-D2(1,1),D1(1,1)];
```
$$\left[2240 \quad -100\right]$$

12 On rajoute un point sur la tangente dependant de t, et 2 autre point au
hazard. On s'assurera que la situation est assez generale, par exemple, pas 4
points alignes. Le determinant trouve est divisible par t, et on en cherche la
limite lorsque t tend vers 0, autrement dit, on cheche le coeff de t du determinant.

13
```
M:=[op(M),[1,1]+t*v,[-3,1],[3,4]];
```
$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 2 \\ 2 & 2 \\ 1 & 5 \\ -6 & 3 \\ x & y \\ 1+2240 \cdot t & 1 - 100 \cdot t \\ -3 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

14
```
L:=[];d:=3;purge(x);
```
( [], 3, No such variable x )

15
```
for i from 0 to d do for j from 0 to d-i do L:=[op(L),x[1]^i*x[2]^j] od; od;
```
$$\left[1 \quad x[2] \quad (x[2])^2 \quad (x[2])^3 \quad x[1] \quad (x[1])\cdot(x[2]) \quad (x[1])\cdot(x[2])^2 \quad (x[1])^2 \quad (x[1])^2\cdot(x[2]) \quad (x[1])^3\right]$$

16
```
f1:=unapply(L,x);
```
```
proc(x)
 [1,x[2],(x[2])^2,(x[2])^3,x[1],x[1]*x[2],x[1]*(x[2])^2,(x[1])^2,(x[1])^2*x[2],(x[1])^3];
```

17 (matrix([seq(f1(M[i]),i=1..9)]));

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 2 | 4 | 8 | -3 | -6 | -12 | 9 | 18 |
| 1 | 2 | 4 | 8 | 2 | 4 | 8 | 4 | 8 |
| 1 | 5 | 25 | 125 | 1 | 5 | 25 | 1 | 5 |
| 1 | 3 | 9 | 27 | -6 | -18 | -54 | 36 | 10 |
| 1 | $y$ | $y^2$ | $y^3$ | $x$ | $x \cdot y$ | $x \cdot y^2$ | $x^2$ | $x^2$ |
| 1 | $1-100 \cdot t$ | $(1-100 \cdot t)^2$ | $(1-100 \cdot t)^3$ | $1+2240 \cdot t$ | $(1+2240 \cdot t) \cdot (1-100 \cdot t)$ | $(1+2240 \cdot t) \cdot (1-100 \cdot t)^2$ | $(1+2240 \cdot t)^2$ | (1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | -3 | -3 | -3 | 9 | 9 |

Men

18 EQ:=matrix([seq(f1(M[i]),i=1..9)]);

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 2 | 4 | 8 | -3 | -6 | -12 | 9 | 18 |
| 1 | 2 | 4 | 8 | 2 | 4 | 8 | 4 | 8 |
| 1 | 5 | 25 | 125 | 1 | 5 | 25 | 1 | 5 |
| 1 | 3 | 9 | 27 | -6 | -18 | -54 | 36 | 10 |
| 1 | $y$ | $y^2$ | $y^3$ | $x$ | $x \cdot y$ | $x \cdot y^2$ | $x^2$ | $x^2$ |
| 1 | $1-100 \cdot t$ | $(1-100 \cdot t)^2$ | $(1-100 \cdot t)^3$ | $1+2240 \cdot t$ | $(1+2240 \cdot t) \cdot (1-100 \cdot t)$ | $(1+2240 \cdot t) \cdot (1-100 \cdot t)^2$ | $(1+2240 \cdot t)^2$ | (1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | -3 | -3 | -3 | 9 | 9 |

Men

19 Q:=coeff(det(EQ),t);#pour que 0 soit racine double.

3 2 2 2

Men

20 Autre m'ethode pour trouver Q avec une tangente imposee en 1,1, on derive par rapport a t la ligne correspondante, et l'on remplace.

21 EQ[7]:=unapply(diff(EQ[7],t),t)(0);

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 2 | 4 | 8 | -3 | -6 | -12 | 9 | 18 | -27 |
| 1 | 2 | 4 | 8 | 2 | 4 | 8 | 4 | 8 | 8 |
| 1 | 5 | 25 | 125 | 1 | 5 | 25 | 1 | 5 | 1 |
| 1 | 3 | 9 | 27 | -6 | -18 | -54 | 36 | 108 | -216 |
| 1 | $y$ | $y^2$ | $y^3$ | $x$ | $x \cdot y$ | $x \cdot y^2$ | $x^2$ | $x^2 \cdot y$ | $x^3$ |
| 0 | -100 | -200 | -300 | 2240 | 2140 | 2040 | 4480 | 4380 | 6720 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | -3 | -3 | -3 | 9 | 9 | -27 |
| 1 | 4 | 16 | 64 | 3 | 12 | 48 | 9 | 36 | 27 |

Men

22 simpify(det(EQ)/Q); # c'est bien constant.

$$\text{simpify}\left(\frac{2165452800 \cdot y^3 + 498240000 \cdot y^2 \cdot x + (-17368128000) \cdot y^2 + 263884800 \cdot y \cdot x^2 + (-1307251200) \cdot y \cdot x + 35133657600 \cdot y + (-1}{2165452800 \cdot y^3 + 498240000 \cdot y^2 \cdot x + (-17368128000) \cdot y^2 + 263884800 \cdot y \cdot x^2 + (-\ 1307251200 \cdot y) \cdot x + 35133657600 \cdot y -}\right.$$

Men

23 P:=normal(z^2*subs(y=y/z,x=x/z,P));

$$420 \cdot x^2 + 1360 \cdot x \cdot y + (-2300) \cdot x \cdot z + 560 \cdot y^2 + (-4720) \cdot y \cdot z + 4680 \cdot z^2$$

Men

24 Q:=normal(z^3*subs(y=y/z,x=x/z,Q));

$$263884800 \cdot x^2 \cdot y + (-187468800) \cdot x^2 \cdot z + 498240000 \cdot x \cdot y^2 + (-1307251200) \cdot x \cdot y \cdot z + 961843200 \cdot x \cdot z^2 + 2165452800 \cdot y^3 + (-17368$$

Men

25 DP:=implicitplot(subs(z=1,P),x=-5..5,y=-5..5,couleur=bleu):

Hyperbola of center (1201/284,-523/568)

Done

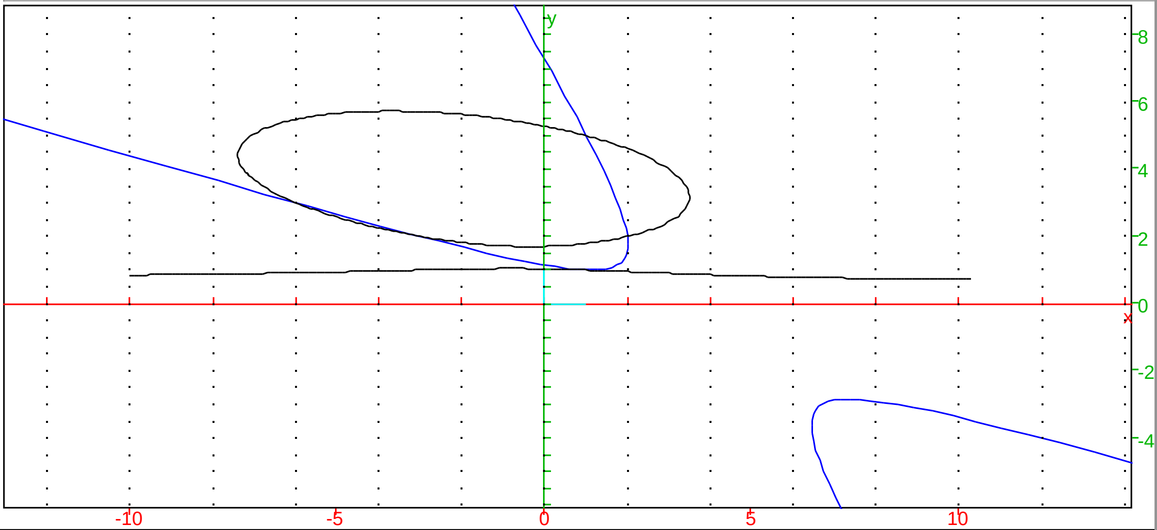
Men

26 DQ:=implicitplot(subs(z=1,Q),x,y,xstep=0.01,ystep=0.01):

Evaluation time: 1

Done

27 DP,DQ;




28 On cree les fonctions de x,y,z avec unapply. attention avec cette syntaxe ([x,y,z]), P1 sera une fonction de (x,y,z) et non d'un vecteur: [x,y,z], d'ou le op(v) dans la suite.

29 P1:=unapply(P,[x,y,z]);

$$(x, y, z) \to 420 \cdot x^2 + 1360 \cdot x \cdot y + (-2300 \cdot x) \cdot z + 560 \cdot y^2 + (-4720 \cdot y) \cdot z + 4680 \cdot z^2$$

30 Q1:=unapply(Q,[x,y,z]);

$$(x, y, z) \to 263884800 \cdot x^2 \cdot y + (-187468800 \cdot x^2) \cdot z + 498240000 \cdot x \cdot y^2 + (-1307251200 \cdot x) \cdot y \cdot z + 961843200 \cdot x \cdot z^2 + 21654528$$

31 v:=t*[a1,b1,c1]+[a2,b2,c2];

$$[a1 \cdot t + a2 \quad b1 \cdot t + b2 \quad c1 \cdot t + c2]$$

32 P1(op(v));

2 2

33 R:=resultant(P1(op(v)),Q1(op(v)),t);

Done

34 P1:=unapply(P,[x,y,z]);

$$(x, y, z) \to 420 \cdot x^2 + 1360 \cdot x \cdot y + (-2300 \cdot x) \cdot z + 560 \cdot y^2 + (-4720 \cdot y) \cdot z + 4680 \cdot z^2$$

35 Q1:=unapply(Q,[x,y,z]);

$$(x, y, z) \to 263884800 \cdot x^2 \cdot y + (-187468800 \cdot x^2) \cdot z + 498240000 \cdot x \cdot y^2 + (-1307251200 \cdot x) \cdot y \cdot z + 961843200 \cdot x \cdot z^2 + 21654528$$

36 vv:=[a1,b1,c1]+t*[a2,b2,c2];

$$[a1 + a2 \cdot t \quad b1 + b2 \cdot t \quad c1 + c2 \cdot t]$$

37 simplify(resultant(P1(op(vv)),Q1(op(vv)),t)/R);

Evaluation time: 0.42

1

38 M:=matrix([[a1,b1,c1],[a2,b2,c2]]);

$$\begin{bmatrix} a1 & b1 & c1 \\ a2 & b2 & c2 \end{bmatrix}$$

39 Pour creer une matrice en rayant une colonne, on utilise delcols. Pour convertir une matrice en une liste, il y a mat2list.

40

undef

41 det(delcols(M,2..2));

$$a1 \cdot c2 - c1 \cdot a2$$

42 mat2list(M);

$$[a1 \quad b1 \quad c1 \quad a2 \quad b2 \quad c2]$$

43 L:=[A-det(delcols(M,3..3)),B-det(delcols(M,2..2)),C-det(delcols(M,1..1))];

44 GBL:=gbasis(L,mat2list(M));

$$\left[ -b1\cdot c2+c1\cdot b2+C \quad -a1\cdot c2+c1\cdot a2+B \quad -a1\cdot b2+b1\cdot a2+A \quad -a2\cdot C+b2\cdot B-c2\cdot A \quad a1\cdot C-b1\cdot B+c1\cdot A \right]$$

Mer

45 sous maple on utilise gbasis et normalf du paquet Grobner

46 duale:=greduce(R,GBL,mat2list(M));

Evaluation time: 0.62

$$\begin{aligned}
&10478133296106829538087927808000000000000 \cdot C^{6}+(-716005775233966685102675066880000000000)\cdot C^{5}\cdot B+314343998883\\
&943031996649614658427913502720000000000 \cdot C^{4}\cdot B^{2}+(-1330140810089116971918384168960000000000)\cdot C^{4}\cdot B\cdot A+\\
&293969850807441606485244641280000000000 \cdot C^{4}\cdot A^{2}+244489776909159355888718315520000000000 \cdot C^{3}\cdot B^{3}+\\
&1018707403788163982869659648000000000000 \cdot C^{3}\cdot B^{2}\cdot A+(-3056122211364491948608978944000000000000)\cdot C^{3}\cdot B\cdot A^{2}+\\
&465694813160303535026130124800000000000 \cdot C^{3}\cdot A^{3}+(-803323552701523597920074465280000000000)\cdot C^{2}\cdot B^{4}+\\
&1912259326539496390701046824960000000000 \cdot C^{2}\cdot B^{3}\cdot A+(-1507686957606482694647096279040000000000)\cdot C^{2}\cdot B^{2}\cdot A^{2}\\
&474426590907059226307870064640000000000 \cdot C^{2}\cdot B\cdot A^{3}+(-523906664805341476904396390400000000000)\cdot C^{2}\cdot A^{4}+\\
&523906664805341476904396390400000000000 \cdot C\cdot B^{5}+(-381287628274998519302644039680000000000)\cdot C\cdot B^{4}\cdot A+\\
&660704516171180640318322114560000000000 \cdot C\cdot B^{3}\cdot A^{2}+(-445320665084540255368736931840000000000)\cdot C\cdot B^{2}\cdot A^{3}+\\
&125155481036831575038272471040000000000 \cdot C\cdot B\cdot A^{4}+(-116423703290075883756532531200000000000)\cdot C\cdot A^{5}+17463555\\
&(-617045627437402183909622415360000000000)\cdot B^{5}\cdot A+858624811764309642704427417600000000000 \cdot B^{4}\cdot A^{2}+\\
&(-599582071943890801346142535680000000000)\cdot B^{3}\cdot A^{3}+221205036251144179137411809280000000000 \cdot B^{2}\cdot A^{4}+\\
&(-40748296151526559314786385920000000000)\cdot B\cdot A^{5}+29105925822518970939133132800000000000 \cdot A^{6}
\end{aligned}$$

Mer

47 On obtient bien une equation de degre: dP.dQ dont les facteurs irrreductibles
sur C sont les equations des droites duales des points solutions du systeme:
P(x,y)=Q(x,y)=0.

48

undef

Mer

49 factor(duale);

2

Mer

50 duale:=quo(duale,content(duale,A));

$$\begin{aligned}
&36\cdot C^{6}+(-246)\cdot C^{5}\cdot B+108\cdot C^{5}\cdot A+324\cdot C^{4}\cdot B^{2}+(-457)\cdot C^{4}\cdot B\cdot A+101\cdot C^{4}\cdot A^{2}+84\cdot C^{3}\cdot B^{3}+35\cdot C^{3}\cdot B^{2}\cdot A+(-105)\cdot C^{3}\cdot B\cdot A^{2}\\
&(-518)\cdot C^{2}\cdot B^{2}\cdot A^{2}+163\cdot C^{2}\cdot B\cdot A^{3}+(-18)\cdot C^{2}\cdot A^{4}+18\cdot C\cdot B^{5}+(-131)\cdot C\cdot B^{4}\cdot A+227\cdot C\cdot B^{3}\cdot A^{2}+(-153)\cdot C\cdot B^{2}\cdot A^{3}+43\cdot C\cdot B\cdot
\end{aligned}$$

Mer

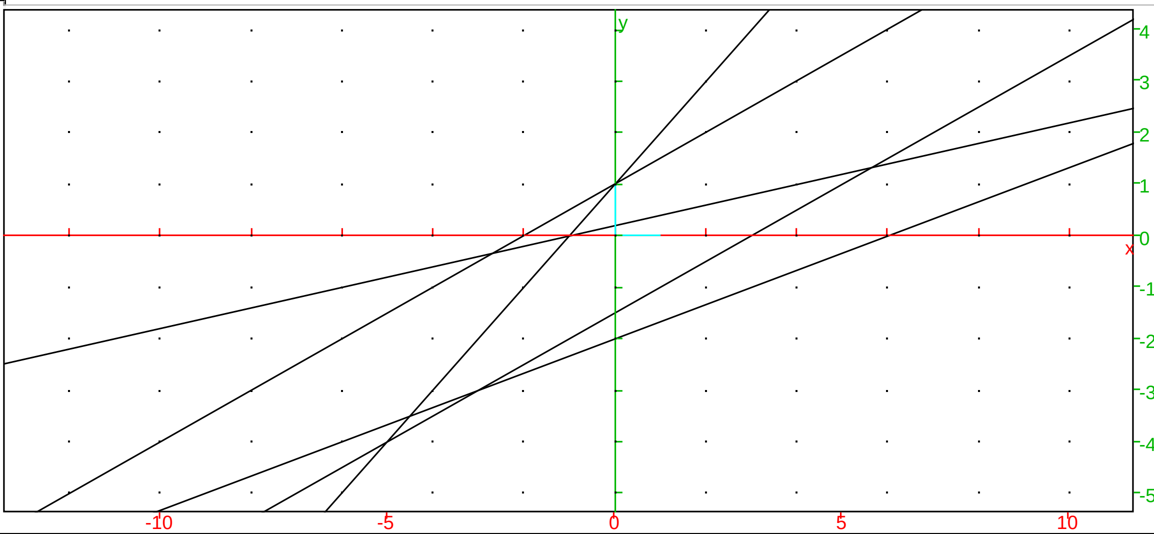
51 Pour le dessin implicite, il vaut mieux bien mieux donner une forme
FACTORISEE, sinon c'est trop long, et pire on abandonne si on lui fait
chercher les bornes en A et B sans les donner avec A= ..

52

undef

Mer

53 implicitplot(subs(C=1,factor(duale)),A,B);




54 soit M un point du plan, et LM l'equation de la droite duale de M. la
multiplicite de M dans l'intersection de P et Q sera par definition la
multiplicite du facteur LM dans le polynome R de degre dP.dQ en A,B,C. Par
construction, le theoreme de Bezout sera vrai avec cette definition.

55

undef

56 ----------------------------------------------Exercice-----------------------------------

57 Essayons (1,1) (1,0) (2,1)

58 q1:=(x+y-1)*(y-1);q2:=(x-y-1)*(x-1);q3:=(x-1)*(y-1); #Les coniques contenant les 3 points.

$$((x+y-1)\cdot(y-1),\ (x-y-1)\cdot(x-1),\ (x-1)\cdot(y-1))$$

59 I1:=[q1,q2,q3]; #l'ideal des 3 points.

$$[(x+y-1)\cdot(y-1)\quad (x-y-1)\cdot(x-1)\quad (x-1)\cdot(y-1)]$$

60 I2:=[q1^2,q1*q2,q2^2,q3^2,q2*q3,q1*q3]; #le carr'e de l'id'eal I1.qu Trouver un 'el'ement irr'eductible $P$ de $I^2$ de degr'e $4$ nul en

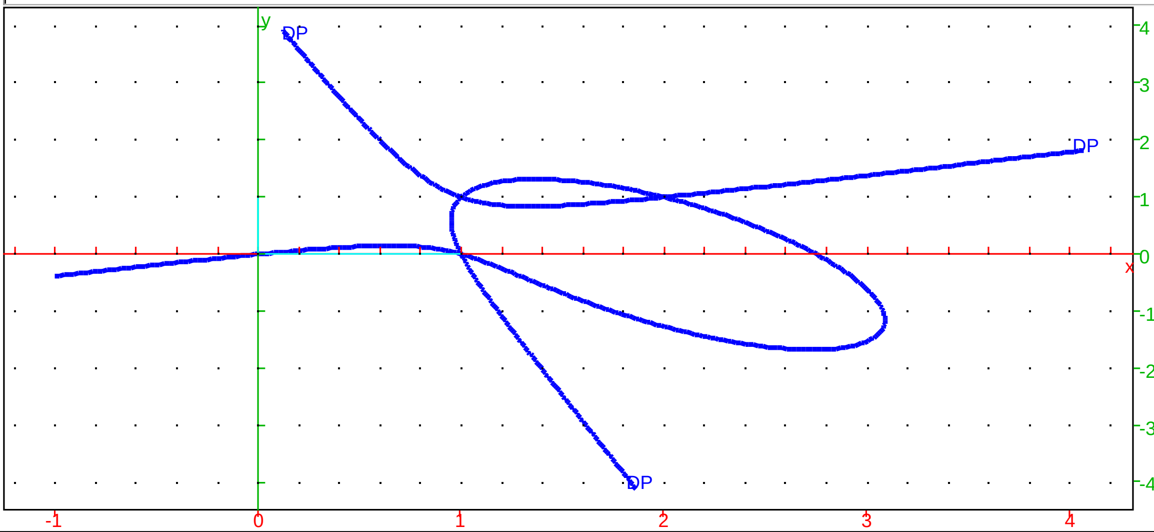
2 2 2

61 P:=normal(([1,2,-3,0,-5,6]*transpose(I2))[1]-q2^2);

4 3 3 2 2 2 2 3 2 4 3

62 DP:=implicitplot(P,x=-1..4,y=-4..4,xstep=0.01,ystep=0.01,couleur=blue+line_width_3);

Evaluation time: 2.54




63 On trouve 2 element de I1 de degre 2 sans terme constant.

64 C1:=q1-q2;

$$(x+y-1)\cdot(y-1)-(x-y-1)\cdot(x-1)$$

65 C2:=q1-q3;

$$(x+y-1)\cdot(y-1)-(x-1)\cdot(y-1)$$

66 Une conique passant par (0,0) et les 3 autres points coupe la quartique en
(0,0) et deux fois les 3 autres points. Ceci se voit sur le resultant. IL y a
un facteur de degre 5 qui ne depend pas de la conique passant par ces 4 points,
et dont les racines sont les projections des 4 points avec multiplicit'ees.

67 factor(gcd(resultant(P,C1,y),resultant(P,C2,y)));

$$2\cdot x\cdot(x-2)^{2}\cdot(x-1)^{4}$$

68 quo(resultant(P,C1,y),x*(x-2)^2*(x-1)^4,x);

$$2\cdot x-2$$

69 quo(resultant(P,C2,y),x*(x-2)^2*(x-1)^4,x);

$$16\cdot x-44$$

70 dernierfacteurx:=quo(resultant(P,C1+t*C2,y),x*(x-2)^2*(x-1)^4,x);

$$-44\cdot t^{4}-81\cdot t^{3}-84\cdot t^{2}-29\cdot t-2+(16\cdot t^{4}+15\cdot t^{3}+41\cdot t^{2}+23\cdot t+2)\cdot x$$

71 xt:=solve(dernierfacteurx,x);

$$\frac{44\cdot t^{4}+81\cdot t^{3}+84\cdot t^{2}+29\cdot t+2}{16\cdot t^{4}+15\cdot t^{3}+41\cdot t^{2}+23\cdot t+2}$$

72 On peut ne pas avoir de chance avec les 2 coniques choisies, ici le pgcd est
de degre 8 , et pas 7,

73 factor(gcd(resultant(P,C1,x),resultant(P,C2,x)));

$$y^{4}\cdot(y-1)^{4}$$

74 Mais en prenant  une combinaison lineaire generale on voit le facteur
correspondant aux 1+3*2 racines deja connues, On simplifie donc par ce polynome
de degre 7.

75 factor(resultant(P,C1+t*C2,x));

$$y^{3}\cdot(y-1)^{4}\cdot(16\cdot t^{4}\cdot y+15\cdot t^{3}\cdot y+77\cdot t^{3}+41\cdot t^{2}\cdot y+73\cdot t^{2}+23\cdot t\cdot y+6\cdot t+2\cdot y)$$

76 dernierfacteury:=quo(resultant(P,C1+t*C2,x),y^3*(y-1)^4,y);

$$77\cdot t^{3}+73\cdot t^{2}+6\cdot t+(16\cdot t^{4}+15\cdot t^{3}+41\cdot t^{2}+23\cdot t+2)\cdot y$$

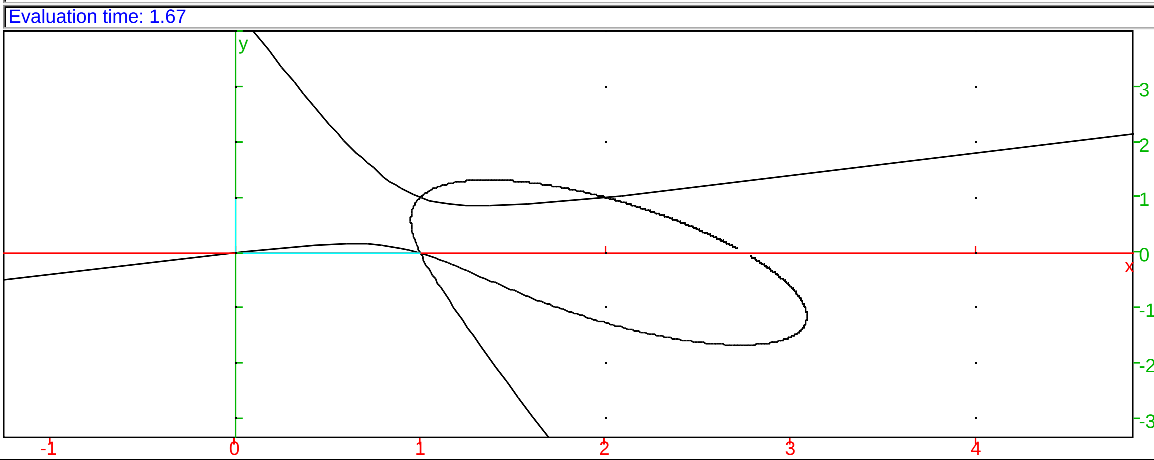
77 yt:=solve(dernierfacteury,y);

$$\frac{-77\cdot t^{3}-73\cdot t^{2}-6\cdot t}{16\cdot t^{4}+15\cdot t^{3}+41\cdot t^{2}+23\cdot t+2}$$

78 On verifie graphiquement la parametrisation.

79 paramplot(xt+I*yt,t=-75..75,tstep=0.01);

Evaluation time: 1.67




80

81 Fig Edit Graphe Frame Mode <Save figure as text>

1 t:=element((-10) .. 10,2.9)

parameter(t,-10,10,2.9,0.2)

2 implicitplot(C1+t*C2,x,y);

Variable t should be purged
Hyperbola of center (1.0,0.5)

[plotparam(1.0+0.5*I+(0.1925517545+0.9812868194*I)*(0.4

3 DP;

Done

4 point(xt+I*yt,couleur=red+point_width_3);

point(3.07697646,-1.31307697)

5