1 `restart;maple_mode(1);cas_setup(0,0,0,1,0,1e-10,10,[1,50,0,25],0,0,0); #radians,pas de cmplx, pas de  Sqrt`

Warning: some commands like subs might change arguments order 0 0 0 1 0 1e-10 10 [1 50 0 25] 0 0

2 `Factor(x^23-1) mod 2;`

$$(1\cdot x+1)\cdot(1\cdot x^{11}+1\cdot x^{9}+1\cdot x^{7}+1\cdot x^{6}+1\cdot x^{5}+1\cdot x+1)\cdot(1\cdot x^{11}+1\cdot x^{10}+1\cdot x^{6}+1\cdot x^{5}+1\cdot x^{4}+1\cdot x^{2}+1)$$

3 Astuce: pour recuperer directement le second facteur, on utilise factors, mais
il en faut la forme inerte pour travailler sur Z/2Z, d'ou les
guillemets. Attention, ca ne marche pas toujours, par exemple si P:=x^23-1,
'factors(P)' mod 2 ne marche pas. En revanche, on peut introduire les nombres
modulaires comme en mode xcas grace a makemod, ou bien basculer en mode xcas,
creer a:=1%2; et revenir en mode maple, puis utiliser a.

4 `'factors(x^23-1)' mod 2)`

$$\left[1,\begin{bmatrix}1\cdot x+1 & 1\\ 1\cdot x^{11}+1\cdot x^{9}+1\cdot x^{7}+1\cdot x^{6}+1\cdot x^{5}+1\cdot x+1 & 1\\ 1\cdot x^{11}+1\cdot x^{10}+1\cdot x^{6}+1\cdot x^{5}+1\cdot x^{4}+1\cdot x^{2}+1 & 1\end{bmatrix}\right]$$

5 `g:=('factors(x^23-1)' mod 2)[2][2,1];`

$$1\cdot x^{11}+1\cdot x^{9}+1\cdot x^{7}+1\cdot x^{6}+1\cdot x^{5}+1\cdot x+1$$

6 `PP:=x^23-1;`

$$x^{23}-1$$

7 `('factors(PP)' mod 2); # ne marche pas!`

$$[1\ [PP\quad 1]]$$

8 `a:=makemod(1,2);factors(x^23-a); #donne un resultat modulaire`

$$\left(1\%2,\ \left[1,\begin{bmatrix}1\%2\cdot x+1\%2 & 1\\ 1\%2\cdot x^{11}+1\%2\cdot x^{9}+1\%2\cdot x^{7}+1\%2\cdot x^{6}+1\%2\cdot x^{5}+1\%2\cdot x+1\%2 & 1\\ 1\%2\cdot x^{11}+1\%2\cdot x^{10}+1\%2\cdot x^{6}+1\%2\cdot x^{5}+1\%2\cdot x^{4}+1\%2\cdot x^{2}+1\%2 & 1\end{bmatrix}\right]\right)$$

9 On ne peut pas creer F2[x]/g avec GF car les racines de g ne sont pas
primitives dans (F_2^11) puisqu'elles sont d'ordre 23, et la commande GF veut
un polynome irreductible dont les racines engendre le groupe multiplicatif du
corps voulu.

10 `purge(a,FF); # pour eviter les Pb dans la ligne suivante.`

(1 % 2 ,   No such variable FF)

11 `FF:=GF(2,11,['a','FF']);`

$$GF(2,a^{11}+a^{9}+1,[a\quad FF],undef)$$

12 `factor(g,FF(a));`

Evaluation time: 0.89

$(x+FF(a^{10}+a^{7}+a^{4}+a))\cdot(x+FF(a^{10}+a^{8}+a^{5}+a))\cdot(x+FF(a^{10}+a^{8}+a^{6}+a^{3}+a^{2}+a))\cdot(x+FF(a^{10}+a^{9}+a^{4}+a^{3}+a))\cdot(x+FF(a^{10}+a^{9}$
$(x+FF(a^{7}+a^{4}+a^{3}+a))\cdot(x+FF(a^{8}+a^{7}+a^{6}+a^{4}))\cdot(x+FF(a^{9}+a^{8}+a^{4}+a^{3}+a^{2}))\cdot(x+FF(a^{9}+a^{8}+a^{6}+a^{2}))\cdot(x+FF(a^{9}+a^{8}+a^{7}+a^{5}+$

13 On note t la premiere racine de g trouvee dans F2048

14 `t:=subs(x=0,factors(factor(g,FF(a)))[2][1,1]);`

Evaluation time: 0.92

$$0+FF(a^{10}+a^{7}+a^{4}+a)$$

15 On va maintenant comparer les racines de g avec les puissances de l'une d'entre
elles: t. On va illustrer que ce sont les t^i ou i est un carre modulo
23. On cree la liste des carres avec la fonction ensembles pour simplifier les
doublons.

16 `carres:={seq(i^2 mod 23 ,i=1..22)};`

$$[1\ \ 4\ \ 9\ \ 16\ \ 2\ \ 13\ \ 3\ \ 18\ \ 12\ \ 8\ \ 6]$$

17 `P:=1;for i in carres do P:=P*(x-t^i) od;`

$(FF(a^{10}+a^{7}+a^{4}+a)+x)\cdot(FF(a^{7}+a^{4}+a^{3}+a)+x)\cdot(FF(a^{9}+a^{8}+a^{4}+a^{3}+a^{2})+x)\cdot$
$(FF(a^{10}+a^{9}+a^{7}+a^{6}+a^{4}+a^{2}+a)+x)\cdot(FF(a^{9}+a^{8}+a^{7}+a^{5}+a^{2})+x)\cdot$
$(FF(a^{10}+a^{8}+a^{5}+a)+x)\cdot(FF(a^{10}+a^{9}+a^{7}+a^{2})+x)\cdot(FF(a^{8}+a^{7}+a^{6}+a^{4})+x)\cdot$

18 `normal(P);#On retrouve bien g`

$$x^{11}+x^9+x^7+x^6+x^5+x+FF(1)$$

19 `g;`

$$x^{11}+x^9+x^7+x^6+x^5+x+1$$

20 On n'etait pasoblige de trouver une racine de g dans F2^11 defini par GF, on
pouvait travailler modulo g.

21 `purge(t);`

$$0+FF(a^{10}+a^7+a^4+a)$$

22 `P:=1;for i in carres do P:=P*(x-t^i) od;`

$$(\,1,\ (x-t)*(x-t^4)*(x-t^9)*(x-t^{16})*(x-t^2)*(x-t^{13})*(x-t^3)*(x-t^{18})*(x-t^{12})*(x-t^8)*(x-t^6)\ \,)$$

23 `Rem(P,subs(x=t,g),t) mod 2; #On travaille dans F2[t]/(g(t))`

$$1*x^{11}+1*x^9+1*x^7+1*x^6+1*x^5+1*x+1$$

24 G23 a 2^{23-deg(g)} elements. Le cardinal d'une boule de rayon 3 est la somme
de C_23^i pour i allant de 0 'a 3. L'annulation du terme suivant signifie que
G23 a les invariants numeriques d'un code binaire 3 correcteur parfait de
dimension 12 dans un espace vectoriel de dimension 23.

25 `normal(2^23-add(seq(binomial(23,i),i=0..3))*2^12);`

$$0$$

26 il y a 4 entiers consecutifs donc la distance est au moins 5

27 `sort(op(carres));`

$$(\,1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 8,\ 9,\ 12,\ 13,\ 16,\ 18\ \,)$$

28 `G:=matrix(12,23,(i,j)->(coeff(Rem(x^(i-1)*g,x^23-1,x) mod 2,x,j-1)));`

// Warning: x,g, declared as global variable(s)

$$\begin{bmatrix}
1&1&0&0&0&1&1&1&0&1&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&1&1&0&0&0&1&1&1&0&1&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&1&1&0&0&0&1&1&1&0&1&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&1&1&0&0&0&1&1&1&0&1&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&1&1&0&0&0&1&1&1&0&1&0&1&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&1&1&0&0&0&1&1&1&0&1&0&1&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&1&1&0&0&0&1&1&1&0&1&0&1&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&1&1&0&0&0&1&1&1&0&1&0&1&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&0&0&0&1&1&1&0&1&0&1&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&0&0&0&1&1&1&0&1&0&1&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&0&0&0&1&1&1&0&1&0&1&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&0&0&0&1&1&1&0&1&0&1
\end{bmatrix}$$

29 GE:=augment(G,transpose(G*[1$23]) mod 2); #le code etendu

$$\begin{bmatrix}
1&1&0&0&0&1&1&1&0&1&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1\\
0&1&1&0&0&0&1&1&1&0&1&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1\\
0&0&1&1&0&0&0&1&1&1&0&1&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1\\
0&0&0&1&1&0&0&0&1&1&1&0&1&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&1\\
0&0&0&0&1&1&0&0&0&1&1&1&0&1&0&1&0&0&0&0&0&0&0&1\\
0&0&0&0&0&1&1&0&0&0&1&1&1&0&1&0&1&0&0&0&0&0&0&1\\
0&0&0&0&0&0&1&1&0&0&0&1&1&1&0&1&0&1&0&0&0&0&0&1\\
0&0&0&0&0&0&0&1&1&0&0&0&1&1&1&0&1&0&1&0&0&0&0&1\\
0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&0&0&0&1&1&1&0&1&0&1&0&0&0&1\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&0&0&0&1&1&1&0&1&0&1&0&0&1\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&0&0&0&1&1&1&0&1&0&1&0&1\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&0&0&0&1&1&1&0&1&0&1&1
\end{bmatrix}$$

30 VE:=Nullspace(GE) mod 2;

$$\begin{bmatrix}
1&0&1&0&0&1&0&0&1&1&1&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
1&1&1&1&0&1&1&0&1&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&1&1&1&1&0&1&1&0&1&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&1&1&1&1&0&1&1&0&1&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&1&1&1&1&0&1&1&0&1&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0\\
1&0&1&0&1&0&1&1&1&0&0&1&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0\\
1&1&1&1&0&0&0&1&0&0&1&1&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0\\
1&1&0&1&1&1&0&0&0&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0\\
0&1&1&0&1&1&1&0&0&0&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0\\
1&0&0&1&0&0&1&1&1&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0\\
0&1&0&0&1&0&0&1&1&1&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0\\
1&1&0&0&0&1&1&1&0&1&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1
\end{bmatrix}$$

31 Pour montrer que les espaces vectoriels engendr'es par les lignes de GE et
celles de VE sont les memes, on cree la matrice M suivante et l'on doit montrer
qu'elle est de rang 12. On ne dispose pas d'une instruction de rang modulaire,
on utilise donc Nullspace mod 2

32 M:=[op(GE),op(VE)];

$$\begin{bmatrix}
1&1&0&0&0&1&1&1&0&1&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1\\
0&1&1&0&0&0&1&1&1&0&1&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1\\
0&0&1&1&0&0&0&1&1&1&0&1&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1\\
0&0&0&1&1&0&0&0&1&1&1&0&1&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&1\\
0&0&0&0&1&1&0&0&0&1&1&1&0&1&0&1&0&0&0&0&0&0&0&1\\
0&0&0&0&0&1&1&0&0&0&1&1&1&0&1&0&1&0&0&0&0&0&0&1\\
0&0&0&0&0&0&1&1&0&0&0&1&1&1&0&1&0&1&0&0&0&0&0&1\\
0&0&0&0&0&0&0&1&1&0&0&0&1&1&1&0&1&0&1&0&0&0&0&1\\
0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&0&0&0&1&1&1&0&1&0&1&0&0&0&1\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&0&0&0&1&1&1&0&1&0&1&0&0&1\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&0&0&0&1&1&1&0&1&0&1&0&1\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&0&0&0&1&1&1&0&1&0&1&1\\
1&0&1&0&0&1&0&0&1&1&1&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
1&1&1&1&0&1&1&0&1&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&1&1&1&1&0&1&1&0&1&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0
\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

33
```
dim(Nullspace(M) mod 2);#c'est bien de rang 12
```

$$[12 \quad 24]$$

34
puisque le code etendu est egal a son dual, on a:
m.m'=0[2], et donc (m+m').(m+m')=m.m+m'.m' [4]
Donc si les poids de m et m' sont multiples de 4, celui de m+m' aussi
On en deduit que le code etendu a une distance multiple de 4, et comme elle vaut au moins 5, et qu'il y a des mots de poids 8, c'est 8. Donc celle de G23 est 7 ou 8, et comme il y a des lignes de poids 7 dans G cette distance vaut 7

35

undef

36

37

undef

38
```
MU:=proc(U,n)
local PU;
PU:=[seq(coeff(convert(series(U,x=0,2*n),polynom),x,i),i=0..2*n+1)];
matrix(n+1,n+1,(i,j)->PU[i+j-1]);
end;
```

```
// Warning: PU, declared as global variable(s)
// Warning: x,i,j, declared as global variable(s)
// End defining MU
```

```
proc(U,n)
  local PU;
  PU:=[seq(coeff(convert(series(U,x=0,2*n),polynom),x,i),i=(0 .. (2*n+1)))];
  matrix(n+1,n+1, (i,j)->PU[i+j-1]);

end;
```

39
```
scalU:=proc(p,q,n)
local PU;
([seq(coeff(p,x,i),i=0..n)]*MU(U,n)*transpose([seq(coeff(q,x,i),i=0..n)]))[1];
end;
```

```
// Warning: x,i,MU,U, declared as global variable(s)
// End defining scalU
```

```
proc(p,q,n)
  local PU;
  ([seq(coeff(p,x,i),i=(0 .. n))]*MU(U,n)*transpose(seq(coeff(q,x,i),i=(0 .. n))))[1];

end;
```

40
```
purge(u):U:=add(u[i]*x^i,i=0..6);
```

$$(\text{Done},\ u[0]+(u[1])\cdot x+(u[2])\cdot x^2+(u[3])\cdot x^3+(u[4])\cdot x^4+(u[5])\cdot x^5+(u[6])\cdot x^6)$$

41
```
scalU(1,x,3);scalU(x^2,x^2,3);
```

$$(u[1],\ u[4])$$

42
```
U:=1/(x+1/(x^2+1/(x^3+x+1+1/(x+2+1/x))));
```

$$\frac{1}{x+\frac{1}{x^2+\frac{1}{x^3+x+1+\frac{1}{x+2+\frac{1}{}}}}}$$

43 factor(gramschmidt([1,x,x^2,x^3,x^4],(p,q)->scalU(p,q,4)));

// Success

$$\left[1,\ \frac{\sqrt{3}\cdot(x+3)}{3},\ \frac{\sqrt{3}\cdot(x^2+3\cdot x-3)}{3},\ \frac{\sqrt{273}\cdot(-3\cdot x^3-20\cdot x^2-21\cdot x+42)}{-273*I},\ \frac{\sqrt{32214}\cdot(-273\cdot x^4-1194\cdot x^3-498\cdot x^2-77\cdot x-4}{-32214*I}\right.$$

44 S:=[seq(pade(U,x,2*i-1,i),i=1..4)]

$$\left[\frac{1}{3\cdot x+1},\ \frac{1}{-3\cdot x^2-(-3)\cdot x+1},\ \frac{3\cdot x^2+(-11)\cdot x-3}{42\cdot x^3+(-21)\cdot x^2+(-20)\cdot x-3},\ \frac{626\cdot x^3+192\cdot x^2+375\cdot x+273}{483\cdot x^4+77\cdot x^3+498\cdot x^2+1194\cdot x+273}\right]$$

45 On constate bien que les denominateurs des approximants de pade coincident a facteur
pres avec les polyn^omes reciproques des orthonormalises de schmidt
(NB le polynome reciproque d'une polynome est le polynome cree a
partir de la suite des coefficients pris dans l'ordre inverse. (Le
facteur vient de la norme 1)

46
```
recip:=proc(P)
normal(x^degree(P)*subs(x=1/x,P))
end;
```

// Warning: x, declared as global variable(s)
// End defining recip

```
proc(P)
  normal(x^(degree(P))*subs(x=(1/x),P));

end;
```

47 seq(recip(denom(i)),i=S); #donne bien les polyn^omes obtenus par gramschmidt

$$(x+3,\ -x^2-3\cdot x+3,\ -3\cdot x^3-20\cdot x^2-21\cdot x+42,\ 273\cdot x^4+1194\cdot x^3+498\cdot x^2+77\cdot x+483\ )$$