```
1 art;maple_mode(0);cas_setup(0,0,0,1,0,1e-10,10,[1,50,0,25],0,0,0); //radians,pas de cmplx, pas de  Sqrt
```

[[], Warning: some commands like subs might change arguments order , 0, 0, 0, 1, 0, 0.1000000000

```
2 ----------Exercice----------
3 On prend une conique passant par (0,0,1),  puis on change de variable.
4 C:=add(add(rand(20)()*x[ii]*x[jj],ii=0..2),jj=0..1);
```

$7 \cdot (x[0]) \cdot (x[0]) + 3 \cdot (x[1]) \cdot (x[0]) + 13 \cdot (x[2]) \cdot (x[0]) + 2 \cdot (x[0]) \cdot (x[1]) + 9 \cdot (x[1]) \cdot (x[1]) + 17 \cdot (x[2]) \cdot (x[1]$

```
5 C:=normal(subst(C,x[0]=x[0]-x[2],x[1]=x[1]-x[2]));
```

$$7 \cdot (x[0])^2 + 5 \cdot (x[0]) \cdot (x[1]) - 6 \cdot (x[0]) \cdot (x[2]) + 9 \cdot (x[1])^2 - 6 \cdot (x[1]) \cdot (x[2]) - 9 \cdot (x[2])^2$$

```
6 On cree la fonction associee a l'equation de la conique. On verifie qu'elle
  contient: (1,1,1)
7 c:=unapply(C,x);c([1,1,1])
```

$$(x \to 7 \cdot (x[0])^2 + 5 \cdot (x[0]) \cdot (x[1]) - 6 \cdot (x[0]) \cdot (x[2]) + 9 \cdot (x[1])^2 - 6 \cdot (x[1]) \cdot (x[2]) - 9 \cdot (x[2])^2 , 0)$$

```
8 purge(u,v,a);M:=[1,1,1]+a*[u,v,0];
```

(No such variable u , No such variable v , No such variable a , $[1 + u \cdot a, 1 + v \cdot a, 1]$)

```
9 s:=simplify(c(M)/a);
```

$$7 \cdot a \cdot u^2 + 5 \cdot a \cdot u \cdot v + 9 \cdot a \cdot v^2 + 13 \cdot u + 17 \cdot v$$

```
10 para:=-coeff(s,a,1)*[1,1,1]+coeff(s,a,0)*[u,v,0];
```

2 2 2 2 2 2

```
11 normal(c(para));  // verification:
```

$$0$$

```
12 Caff:=normal(c(x,y,1)); // l'equation affine.
```

$$7 \cdot x^2 + 5 \cdot x \cdot y - 6 \cdot x + 9 \cdot y^2 - 6 \cdot y - 9$$

```
13 normal([para[0]/para[2],para[1]/para[2]]); // la forme parametrique affine parametree par  P1
```

$$\left[\frac{-6 \cdot u^2 - 12 \cdot u \cdot v + 9 \cdot v^2}{7 \cdot u^2 + 5 \cdot u \cdot v + 9 \cdot v^2}, \frac{7 \cdot u^2 - 8 \cdot u \cdot v - 8 \cdot v^2}{7 \cdot u^2 + 5 \cdot u \cdot v + 9 \cdot v^2} \right]$$

```
14 normal(subst([para[0]/para[2],para[1]/para[2]],v=1));// la conique affine moins un point  parametree par R
```

$$\left[\frac{-6 \cdot u^2 - 12 \cdot u + 9}{7 \cdot u^2 + 5 \cdot u + 9}, \frac{7 \cdot u^2 - 8 \cdot u - 8}{7 \cdot u^2 + 5 \cdot u + 9} \right]$$

```
15 la tangente au point para est la droite AB
16 A1:=[seq(diff(para[j],u),j=0..2)];
```

$$[-7 \cdot 2 \cdot u - 5 \cdot v + 13 \cdot u + 17 \cdot v + u \cdot 13 , -7 \cdot 2 \cdot u - 5 \cdot v + v \cdot 13 , -7 \cdot 2 \cdot u - 5 \cdot v]$$

```
17 B1:=[seq(diff(para[j],v),j=0..2)];
```

$$[-5 \cdot u - 9 \cdot 2 \cdot v + u \cdot 17 , -5 \cdot u - 9 \cdot 2 \cdot v + 13 \cdot u + 17 \cdot v + v \cdot 17 , -5 \cdot u - 9 \cdot 2 \cdot v]$$

```
18 AB:=simplify(a*A1+b*B1);
19 factor(c(AB));   // On trouve bien une racine double
```

$$2439 \cdot (a \cdot v - u \cdot b)^2$$

```
20 tgte:=add(unapply(diff(C,x[j]),x)(para)*x[j],j=0..2);
```

$$(14 \cdot (-7 \cdot u^2 - 5 \cdot u \cdot v - 9 \cdot v^2 + u \cdot (13 \cdot u + 17 \cdot v)) + 5 \cdot (-7 \cdot u^2 - 5 \cdot u \cdot v - 9 \cdot v^2 + v \cdot (13 \cdot u + 17 \cdot v)) - 6 \cdot (-7 \cdot u^2 -$$
$$(5 \cdot (-7 \cdot u^2 - 5 \cdot u \cdot v - 9 \cdot v^2 + u \cdot (13 \cdot u + 17 \cdot v)) + 18 \cdot (-7 \cdot u^2 - 5 \cdot u \cdot v - 9 \cdot v^2 + v \cdot (13 \cdot u + 17 \cdot v)) - 6 \cdot (-7 \cdot u^2 -$$

```
21 verification: ca doit etre nul.
22 simplify(unapply(tgte,x)(A1));
```

23 simplify(unapply(tgte,x)(B1));

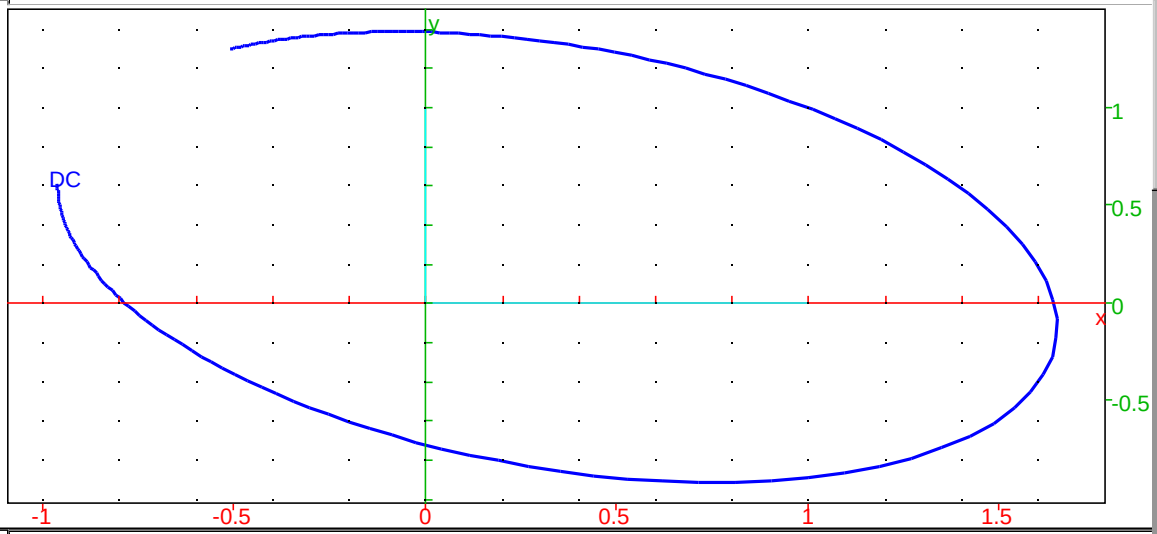
$$0$$

24 paff:=w->subst((w[0]+i*w[1])/w[2],v=1);

// Warning: v, declared as global variable(s)
// End defining paff

$$w \;\; \text{->} \;\; \text{subst}\left(\frac{w[0]+i\cdot(w[1])}{w[2]}, v=1\right)$$

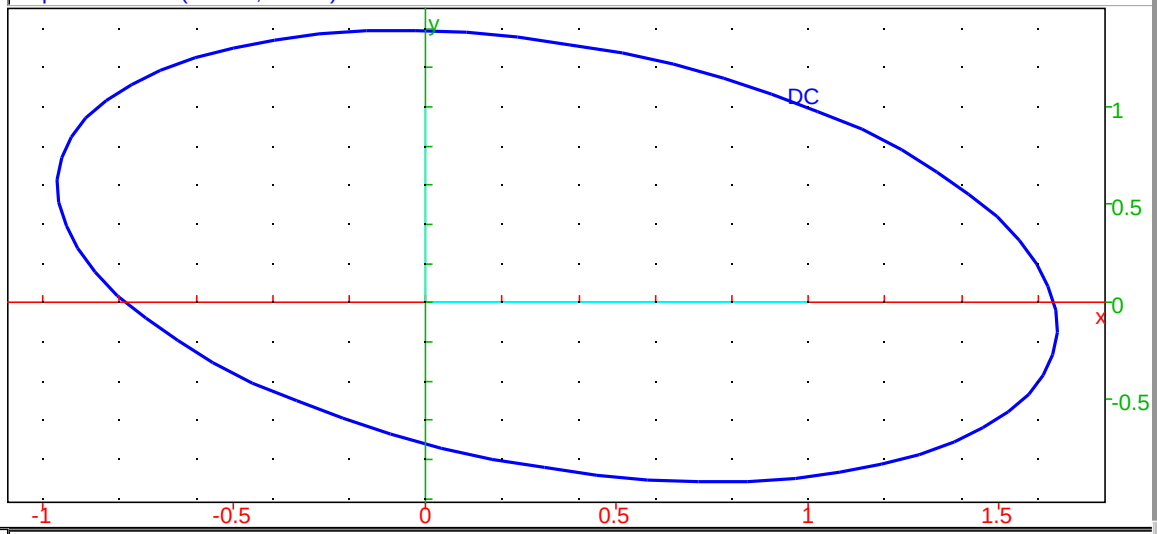
25 DC:=plotparam(paff(para),u=-5..5,affichage=bleu+line_width_2);



26 La version implicite est ici plus jolie car on fait bouger le parametre dans un segment au lieu de R

27 DC:=implicitplot(Caff,x,y,affichage=bleu+line_width_2);

Ellipsis of center (78/227,54/227)



29 Fig Edit Graphe Repere Mode Step Landscape

1 DC;

plotparam(Done,t=0.0..6.283185307)

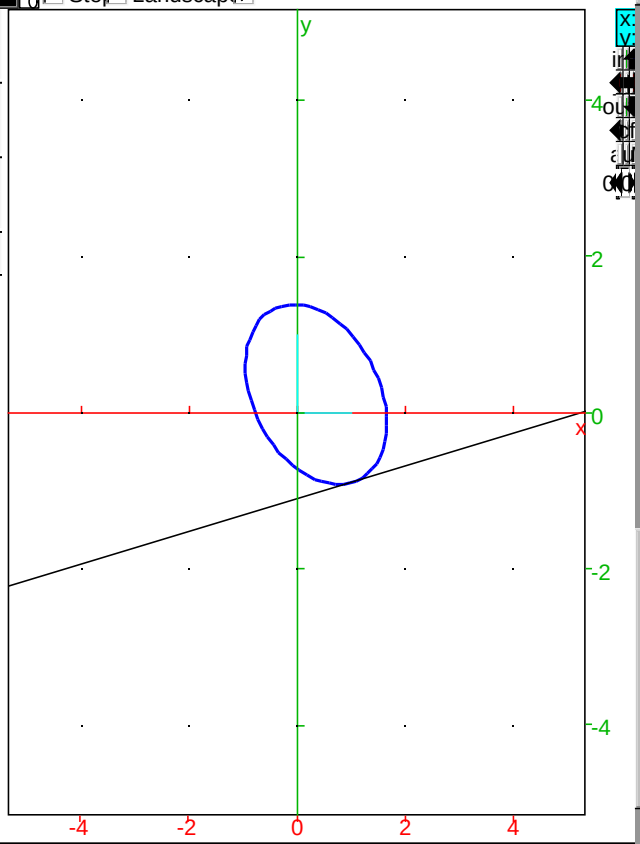
2 u:=element(-3..3);

parameter(u,-3,3,0,0.06)

3 droite(paff(A1),paff(B1));

droite(y=((32*x)/153-56/51))

4

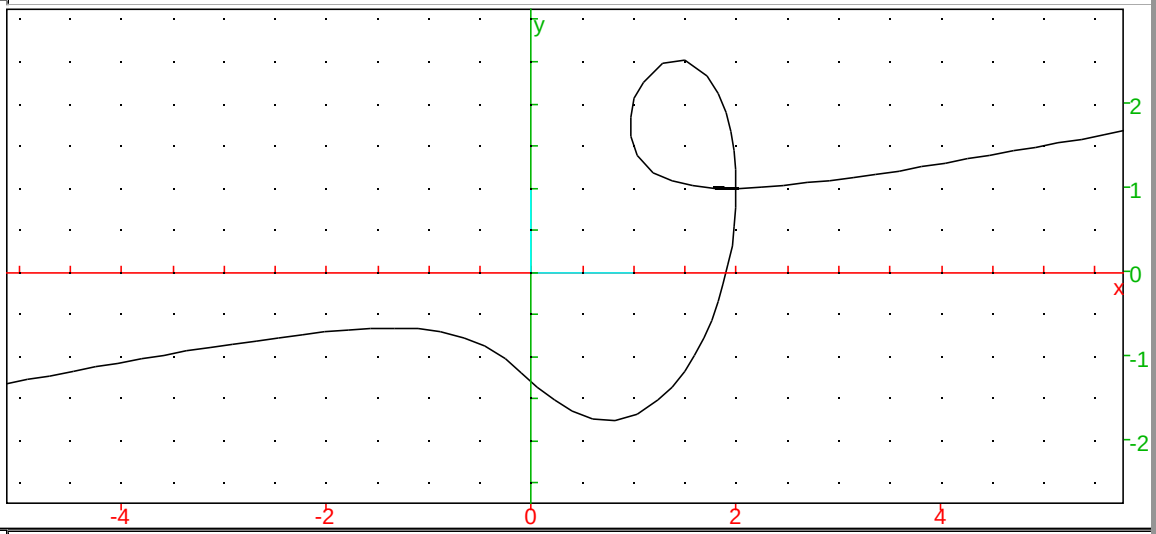


30 ----------Exercice----------

31 P:=normal(add((rand(-5,5)*x+rand(-5,5)*y+rand(-5,5))*(x-2)^j*(y-1)^(2-j),j=0..2));

$-2.082009041 \cdot x^3 + 8.59497101 \cdot x^2 \cdot y + 3.642948815 \cdot x^2 - 1.682952559 \cdot x \cdot y^2 - 17.40913067 \cdot x \cdot y - 4.87$

32 implicitplot(P,x,y,xstep=0.01);



33 fP:=unapply(P,x,y);

$(x, y) \rightarrow -2.082009041 \cdot x^3 + 8.59497101 \cdot x^2 \cdot y + 3.642948815 \cdot x^2 - 1.682952559 \cdot x \cdot y^2 - 17.40913067$

34 intersec:=normal(fP(a*t+2,b*t+1)/t^2);

$-2.082009041 \cdot a^3 \cdot t + 8.59497101 \cdot a^2 \cdot b \cdot t - 0.2541344194 \cdot a^2 - 1.682952559 \cdot a \cdot b^2 \cdot t + 13.60484826 \cdot$

35 On resout l'equation de degre 1 en t: intersec=0 en recuperant les coefficients. C'est toujours plus raisonnable d'eviter d'utiliser une fonction sophistiquee telle que solve, dont on ne sait pas trop ce quelle fait. Meme si ici ca marche tres bien.

36 t0:=normal(-coeff(intersec,t,0)/coeff(intersec,t,1));

$$\frac{-0.2541344194 \cdot a^2 + 13.60484826 \cdot a \cdot b - 0.002959207632 \cdot b^2}{2.082009041 \cdot a^3 - 8.59497101 \cdot a^2 \cdot b + 1.682952559 \cdot a \cdot b^2 - 1.405893313 \cdot b^3}$$

37 xab:=a*t0+2;yab:=b*t0+1; //les coordonn{\'e}es du point Mab.

$$\left(\frac{a \cdot (-0.2541344194 \cdot a^2 + 13.60484826 \cdot a \cdot b - 0.002959207632 \cdot b^2)}{2.082009041 \cdot a^3 - 8.59497101 \cdot a^2 \cdot b + 1.682952559 \cdot a \cdot b^2 - 1.405893313 \cdot b^3} + 2, \frac{b \cdot (-0.254134}{2.082009041 \cdot a^3} \right.$$

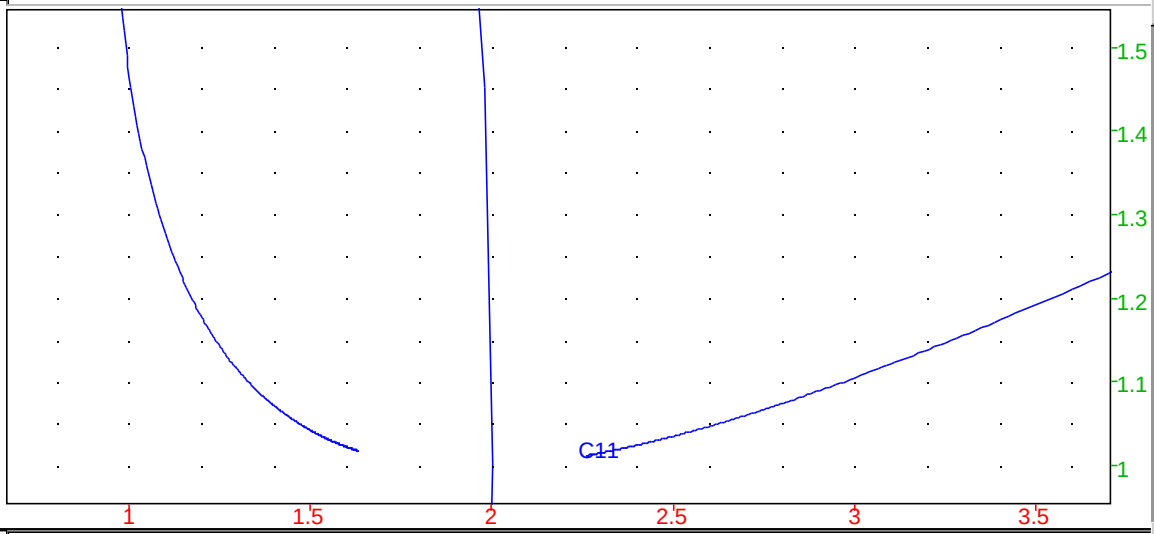
38 if normal(fP(xab,yab))==0 then print("c'est bon, le point trouve est bien sur la cubique") fi; // verification.

undef

39 Ma:=subst(xab+i*yab,b=1);

$$\frac{a \cdot (-0.2541344194 \cdot a^2 + 13.60484826 \cdot a - 0.002959207632)}{2.082009041 \cdot a^3 - 8.59497101 \cdot a^2 + 1.682952559 \cdot a - 1.405893313} + 2 + i \cdot \left(\frac{-0.2541344194 \cdot a^2 + 13.60484826 \cdot a - 0.002959207632}{2.082009041 \cdot a^3 - 8.59497101 \cdot a^2 + 1.682952559 \cdot a - 1.405893313} + 1 \right)$$

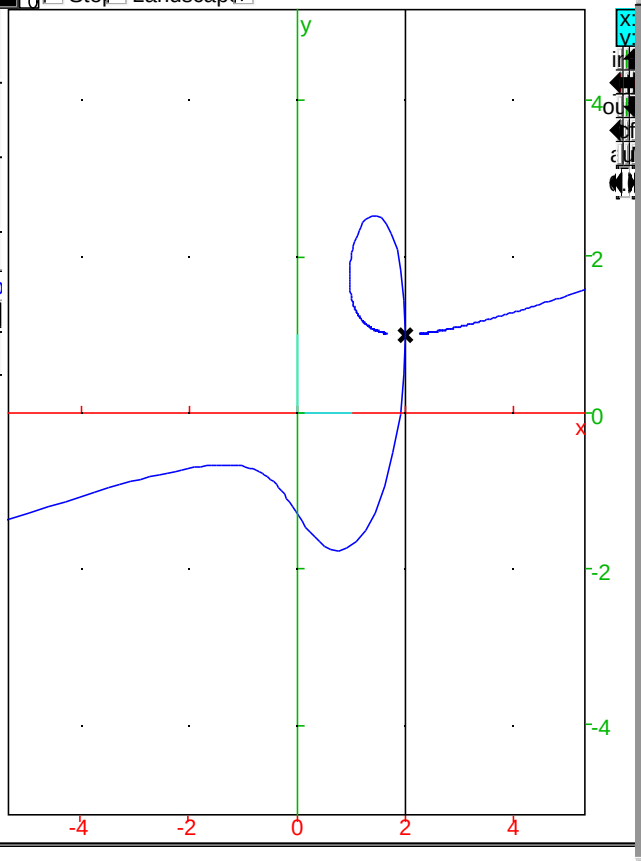
40 C11:=paramplot(Ma,a=-20..20,affichage=blue);//NB la langue des couleurs peut poser PB



41

42 Fig Edit Graphe Repere Mode Step Landscape

```
1 a:=element(-20..20,0);
  parameter(a,-20,20,0,0.4)
2 point(Ma,affichage=point_width_3);
  point(2.0,1.002104859)
3 droite(Ma,2+i);
  droite(x=2.0)
4 C11;
  [plotparam(2.0+1.002104859312*i,0=-20.0..4.0),p
5
```



43

44 ----------Exercice----------

45 Essayons (1,1) (1,0) (2,1). C'est l'ensemble des points annulant les elements de I.

46 q1:=(x+y-1)*(y-1);q2:=(x-y-1)*(x-1);q3:=(x-1)*(y-1); //Les coniques contenant les 3 points.

$$((x+y-1)\cdot(y-1),\ (x-y-1)\cdot(x-1),\ (x-1)\cdot(y-1))$$

47 I1:=[q1,q2,q3]; //l'ideal des 3 points.

$$[(x+y-1)\cdot(y-1),\ (x-y-1)\cdot(x-1),\ (x-1)\cdot(y-1)]$$

48 I2:=[q1^2,q1*q2,q2^2,q3^2,q2*q3,q1*q3]; //le carr{\'e} de l'id{\'e}al I1.

$$[((x+y-1)\cdot(y-1))^2,\ (x+y-1)\cdot(y-1)\cdot(x-y-1)\cdot(x-1),\ ((x-y-1)\cdot(x-1))^2,\ ((x-1)\cdot(y-1))^2,\ (x-y-1)\cdot(x-1)\cdot(x-1$$

49 P:=normal(([1,2,-3,0,-5,6]*transpose(I2))[0]-q2^2);

4 3 3 2 2 2 2 3 2 4 3

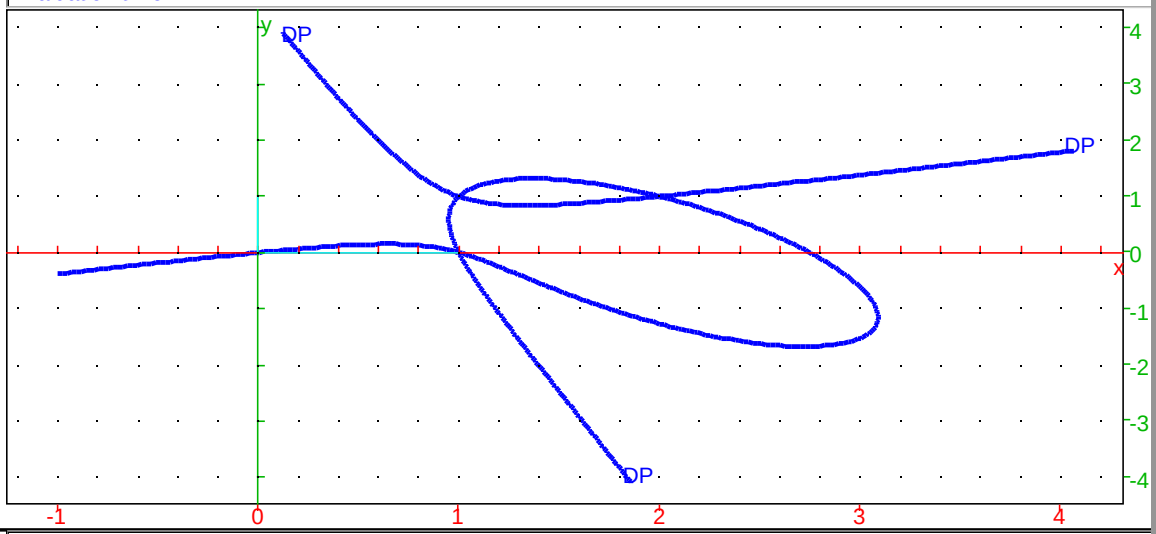
50 factor(P);

4 3 3 2 2 2 2 3 2 4 3

51 P est irreductible sur Q, mais on ne le sait pas sur C. En revanche, le dessin suivant ne ressemble ni a la reunion de 2 coniques, ni a la reunion d'une droite et d'une cubique. P est donc bien irreductible sur C.

52 DP:=implicitplot(P,x=-1..4,y=-4..4,xstep=0.01,ystep=0.01,couleur=blue+line_width_3);

Evaluation time: 1



53 On trouve 2 element de I1 de degre 2 sans terme constant.

54 C1:=q1-q2;

$$(x+y-1)\cdot(y-1)-(x-y-1)\cdot(x-1)$$

55 C2:=q1-q3;

$$(x+y-1)\cdot(y-1)-(x-1)\cdot(y-1)$$

56 Une conique passant par (0,0) et les 3 autres points coupe la quartique en
(0,0) et deux fois les 3 autres points. Ceci se voit sur le resultant. IL y a
un facteur de degre 5 qui ne depend pas de la conique passant par ces 4 points,
et dont les racines sont les projections des 4 points avec multiplicit{\'e}es.

57 factor(gcd(resultant(P,C1,y),resultant(P,C2,y)));

$$2\cdot x\cdot(x-2)^2\cdot(x-1)^4$$

58 quo(resultant(P,C1,y),x*(x-2)^2*(x-1)^4,x);

$$2\cdot x-2$$

59 quo(resultant(P,C2,y),x*(x-2)^2*(x-1)^4,x);

$$16\cdot x-44$$

60 dernierfacteurx:=quo(resultant(P,C1+t*C2,y),x*(x-2)^2*(x-1)^4,x);

$$-44\cdot t^4-81\cdot t^3-84\cdot t^2-29\cdot t-2+(16\cdot t^4+15\cdot t^3+41\cdot t^2+23\cdot t+2)\cdot x$$

61 xt:=solve(dernierfacteurx,x);

$$\left[\left(\frac{1}{16\cdot t^4+15\cdot t^3+41\cdot t^2+23\cdot t+2}\right)\cdot(44\cdot t^4+81\cdot t^3+84\cdot t^2+29\cdot t+2)\right]$$

62 On peut ne pas avoir de chance avec les 2 coniques choisies, ici le pgcd est
de degre 8 , et pas 7,

63 factor(gcd(resultant(P,C1,x),resultant(P,C2,x)));

$$y^4\cdot(y-1)^4$$

64 Mais en prenant une combinaison lineaire generale on voit le facteur
correspondant aux 1+3*2 racines deja connues, On simplifie donc par ce polynome
de degre 7.

65 factor(resultant(P,C1+t*C2,x));

$$y^3\cdot(y-1)^4\cdot(16\cdot t^4\cdot y+15\cdot t^3\cdot y+77\cdot t^3+41\cdot t^2\cdot y+73\cdot t^2+23\cdot t\cdot y+6\cdot t+2\cdot y)$$

66 dernierfacteury:=quo(resultant(P,C1+t*C2,x),y^3*(y-1)^4,y);

3 2 4 3 2

67 yt:=solve(dernierfacteury,y);

$$\left[\left(\frac{1}{16\cdot t^4+15\cdot t^3+41\cdot t^2+23\cdot t+2}\right)\cdot(-77\cdot t^3-73\cdot t^2-6\cdot t)\right]$$

68 On verifie graphiquement la parametrisation.

69 paramplot(xt+i*yt,t=-75..75,tstep=0.01);

Evaluation time: 0.85

[]

70

71 Fig Edit Graphe Repere Mode Step Landscape

1 t:=element(-10..10,-1,0.1);

parameter(t,-10,10,-1,0.1)

2 implicitplot(C1+t*C2,x,y);

[droite(x=1),droite(y=(x/2))]

3 DP;

Done

4 mm:=point(xt+i*yt,couleur=rouge+point_width_3)

pnt(pnt[point[(20+10*i)/21],1048577,"mm"])

5