1
```
maple_mode(0);cas_setup(0,0,0,1,0,1e-10,25,[1,50,0,25],0,0,0);//radians,pas de cmplx, pas de  Sqrt
```
[[], Warning: some commands like subs might change arguments order , 0, 0, 0, 1, 0, 0.9999999

2
```
B:=matrix(3,3)::;B[0,0]:=1::;B[1,1]:=2::;B[2,2]:=3::;B[0,2]:=-2::;B[2,0]:=-2::;B;
```
$$\left(\text{Done}, \text{Done}, \text{Done}, \text{Done}, \text{Done}, \text{Done}, \begin{bmatrix} 1, & 0, & -2 \\ 0, & 2, & 0 \\ -2, & 0, & 3 \end{bmatrix}\right)$$

3
```
X:=[x,y,1];C1:=X*B*X;C2:=y^2-x;
```
$$([x, y, 1], (x-2)\cdot x+2\cdot y\cdot y-2\cdot x+3, y^2-x)$$

4
```
IMPL1:=implicitplot(C1=0,x=0..8,y=-3..3,xstep=0.1,ystep=0.1,color=blue)::;
```
Ellipsis of center (2,0)

Done

5
```
IMPL2:=implicitplot(C2=0,x=0..8,y=-7..7,numpoints=2000,color=red)::;
```
Done

6
```
IMPL:=IMPL1,IMPL2::;
```
Done

7
la matrice de C2dual est l'inverse de celle de C2
equation de mt mu on simplifie par t-u car mt different de m

8
```
A:=B^(-1);
```
$$\begin{bmatrix} -3, & 0, & -2 \\ 0, & \frac{1}{2}, & 0 \\ -2, & 0, & -1 \end{bmatrix}$$

9
```
dte:=simplify(det(matrix([[t^2,t,1],[u^2,u,1],[x,y,1]]))/(t-u));
```
$$t\cdot u-t\cdot y-u\cdot y+x$$

10
Le vecteur normal a cette droite est donc: (ce sont aussi les coordonnees dans
la base duale de l'equation de cette droite). On remarque que le vecteur normal
a la droite (mu_,m_t) n'est autre que [1,-t-u,t.u]. On pourra donc travailler
avec somme et produit.

11

undef

12
```
DTE:=simplify([coeff(dte,x,1),coeff(dte,y,1),subst(dte,x=0,y=0)]);
```
$$[1, -t-u, t\cdot u]$$

13
```
P:=normal(DTE*A*DTE);//on remarque qu'elles s'expriment facilement avec somme et produit
```
$$-t^2\cdot u^2-\left(\frac{-1}{2}\right)\cdot t^2-3\cdot t\cdot u-\left(\frac{-1}{2}\right)\cdot u^2-3$$

14
```
a:=coeff(P,t,2);b:=coeff(P,t,1);c:=coeff(P,t,0);
```
$$\left(\frac{-2\cdot u^2+1}{2}, \frac{-6\cdot u}{2}, \frac{u^2-6}{2}\right)$$

15
```
a:=unapply(a,u); b:=unapply(b,u); c:=unapply(c,u);// On cree les fonctions
```
$$\left(u \rightarrow \frac{-2\cdot u^2+1}{2}, u \rightarrow \frac{-6\cdot u}{2}, u \rightarrow \frac{u^2-6}{2}\right)$$

16
```
complex_mode:=1;//pour les solves, on se met en mode complexe
```
1

17
```
sol1:=solve(P,u);
```
$$\left[\left(\frac{1}{-2\cdot t^2+1}\right)\cdot\left(3\cdot t+\sqrt{2\cdot t^4-4\cdot t^2+6}\right), \left(\frac{1}{-2\cdot t^2+1}\right)\cdot\left(3\cdot t-\left(\sqrt{2\cdot t^4-4\cdot t^2+6}\right)\right)\right]$$

18
```
s1:=simplify(sol1[0]+sol1[1]);//la somme des racines
```
$$\frac{-6\cdot t}{2}$$

19 p1:=simplify(sol1[0]*sol1[1]);//leur produit

$$\frac{-t^2+6}{2\cdot t^2-1}$$

20 On obtient ci dessous l'equation de D1 a facteur pres.. Comme elle est de degre 2 en t, D1 decrit donc une conique duale lorsque t varie

21

undef

22 D1:=[1,-s1,p1];

$$\left[1,\ -\left(\frac{-6\cdot t}{2\cdot t^2-1}\right),\ \frac{-t^2+6}{2\cdot t^2-1}\right]$$

23 simplify(D1*(2*t^2-1));

$$\left[2\cdot t^2-1,\ 6\cdot t,\ -t^2+6\right]$$

24 Pour d2 il faut mieux guider les simplifications.
!!ATTENTION, lors de calculs lourds, il FAUT toujours preferer NORMAL a EXPAND!!
normal va developper en simplifiant et n'utilisera pas les memes objets en interne.

25

Pour trouver t_(n+1) et t_(-n-1) a partir des precedents nous allons utiliser somme et produit.
Notons sn=t_n+t_(-n) et pn=t_n*t_(-n). Alors comme t_(n-1) et t_(n+1) sont lesracines de l'equation en t: P(t_n,t)=0
s_(n+1)=-s_(n-1)-b(t_n)/a(t_n)-b(t_(-n))/a(t_(-n)). Il faudra peut etre aider le logiciel a simplifier
les radicaux en regroupant les t_n avec les t_(-n). Ce calcul sera plus simple:
1) simplifier cette expression b(t_n).a(t_(-n))+b(t_(-n)).a(t_(n))
2) simplifier a(t_n).a(t_(-n)) puis faire le rapport.

26 Cote syntaxe, subs est plutot proche de maple et l'ordre des arguments depend du mode: maple ou xcas. L'avantage de subst est que sa syntaxe ne depend pas du mode maple ou xcas. En general il vaut mieux creer une fonction. Par exemple avec unapply. La syntaxe suivante est plutot proche de l'usage de subs et du logiciel maple. On preferera en fait la methode utilisee dans la procedure Dn(P,n) en fin de fichier. (ou l'on a transforme a,b,c en des fonctions)

27

undef

28 tmp1:=simplify(normal(b(sol1[0])*a(sol1[1])+b(sol1[1])*a(sol1[0])));

$$\frac{36\cdot t^3-117\cdot t}{4\cdot t^4-4\cdot t^2+1}$$

29 tmp2:=simplify(normal(a(sol1[0])*a(sol1[1])));

$$\frac{-72\cdot t^2+121}{16\cdot t^4-16\cdot t^2+4}$$

30 tmp3:=simplify(normal(c(sol1[0])*c(sol1[1])));

$$\frac{121\cdot t^4-216\cdot t^2}{16\cdot t^4-16\cdot t^2+4}$$

31 s2:=simplify(-2*t-tmp1/tmp2);

$$\frac{-226\cdot t}{72\cdot t^2-121}$$

32 p2:=simplify(tmp3/(tmp2*t^2));

$$\frac{-121\cdot t^2+216}{2}$$

33
```
D2:=[1,-s2,p2];//c'est encore une conique
```

$$\left[1,\ -\left(\frac{-226\cdot t}{72\cdot t^2-121}\right),\ \frac{-121\cdot t^2+216}{72\cdot t^2-121}\right]$$

34
```
simplify(denom(D2[1])*D2);
```

$$\left[72\cdot t^2-121,\ 226\cdot t,\ -121\cdot t^2+216\right]$$

35
```
sol2:=solve(u^2-s2*u+p2=0,u);
```

$$\left(\frac{1}{2}\right)\cdot\left(-113\cdot t+\sqrt{8712\cdot t^4-17424\cdot t^2+26136}\right),\ \left(\frac{1}{2}\right)\cdot\left(-113\cdot t-\left(\sqrt{8712\cdot t^4-17424\cdot}\right.\right.$$

36
```
tmp1:=simplify(normal(b(sol2[0])*a(sol2[1])+b(sol2[1])*a(sol2[0])));
tmp2:=simplify(normal(a(sol2[0])*a(sol2[1])));
tmp3:=simplify(normal(c(sol2[0])*c(sol2[1])));
s3:=simplify(-s1-tmp1/tmp2);
p3:=simplify(tmp3/(tmp2*p1));
D3:=[1,-s3,p3];
```

$$\left(\frac{106446\cdot t^3-187467\cdot t}{5184\cdot t^4-17424\cdot t^2+14641},\ \frac{28900\cdot t^4-207892\cdot t^2+96721}{20736\cdot t^4-69696\cdot t^2+58564},\ \frac{96721\cdot t^4-623676\cdot t^2+260100}{20736\cdot t^4-69696\cdot t^2+58564},\ \frac{}{144}\right.$$

37
```
simplify(denom(D3[2])*D3);// D3 donne encore une conique dans le plan dual
```

$$\left[14450\cdot t^2-96721,\ 169542\cdot t,\ -96721\cdot t^2+43350\right]$$

38 qui enveloppe la conique d'equation: (le lieu des points du plan ou
les tangentes a cette conique sont identiques).

39
```
discrim:=(P,t)->normal(coeff(P,t,1)^2-4*coeff(P,t,0)*coeff(P,t,2));
```

```
// Success
// End defining discrim
```

$$(P,\ t)\ \mathrm{->}\ \mathrm{normal}(\ \mathrm{coeff}(P,t,1)^2-(4\cdot\mathrm{coeff}(P,t,0))\cdot\mathrm{coeff}(P,t,2))$$

40
```
gamma3:=discrim(simplify([x,y,1]*(denom(D3[2])*D3)),t);
```

$$5590473800\cdot x^2-39925437364\cdot x+28744489764\cdot y^2+16771421400$$

41 On verifie que l'equation gamma3 est bien une combi lineaire de C1 et
C2 Donc gamma3 contient C1 inter C2. (gamma3 en vert)

42
```
simplify(gamma3-coeff(gamma3,x,2)*(C1-coeff(C1,y,2)*C2)-coeff(gamma3,y,2)*C2);
```

$$0$$

43
```
complex_mode:=0;//Pb avec le mode complexe et ce dessin en version <0.9.1
```

$$0$$

44
```
G3:=implicitplot(gamma3=0,x=0..8,y=-3..3,color=green):;
```

```
Ellipsis of center (9981359341/2795236900,0)
```

Done

45
```
complex_mode:=1;
```

$$1$$

47 Prog Edit Ajouter | 1 | nxt | OK (F9) | Save

```
DI:=proc(tt,ii)
sol:=solve(subst(P,t=tt),u):;s0:=2*tt:;p0:=tt^2:;
for j from 2 to ii do
tmp1:=simplify(normal(b(sol[0])*a(sol[1])+b(sol[1])*a(sol[0])));
tmp2:=simplify(normal(a(sol[0])*a(sol[1])));
tmp3:=simplify(normal(c(sol[0])*c(sol[1])));
s2:=simplify(-s0-tmp1/tmp2);
p2:=simplify(tmp3/(tmp2*p0));
s0:=simplify(sol[0]+sol[1]);
p0:=simplify(sol[0]*sol[1]);
sol:=solve(u^2-s2*u+p2=0,u);
end do;
simplify(denom(p2)*([1,-s2,p2]));
end proc:;
```

48 DI(t,3);//c'est le meme que celui trouve avant.

$$[14450 \cdot t^2 - 96721,\ 169542 \cdot t,\ -96721 \cdot t^2 + 43350]$$

M

49 DI(t,6);//c'est toujours une conique duale.

$$[40173829230002545800 \cdot t^2 - 76187486312803124281,\ 134534108782574036962 \cdot t,\ -7618748631$$

M

50

51 Prog Edit Ajouter | 1 | nxt | OK (F9) | Save

```
dessin:=proc(tt,ii)
local T,sol,newt,imax,j;
sol:=solve(subst(P,t=tt),u);
T:=[tt,sol[0]];
for j from 2 to ii do
newt:=-T[j-2]-b(T[j-1])/a(T[j-1]);
T:=[op(T),newt];
end do;
T:=[sol[1],op(T)];
for j from 2 to ii do
newt:=-T[1]-b(T[0])/a(T[0]);
T:=[newt,op(T)];
end do;
T;end proc:;
```

52 imax:=3;//attention si on change imax, la conique verte est gamma3, elle n'est pas recalculee.

3

M

53 l:=dessin(.1,imax);//on dessine t0=0.1 jusque timax

$$[0.756024937237227765692888 59,\ -1.24567041545014045553974 52,\ 2.79729804530523954842796$$

M

54 ddte:=(u,t)->line(u^2+i*u,t^2+i*t):;

// Success
// End defining ddte

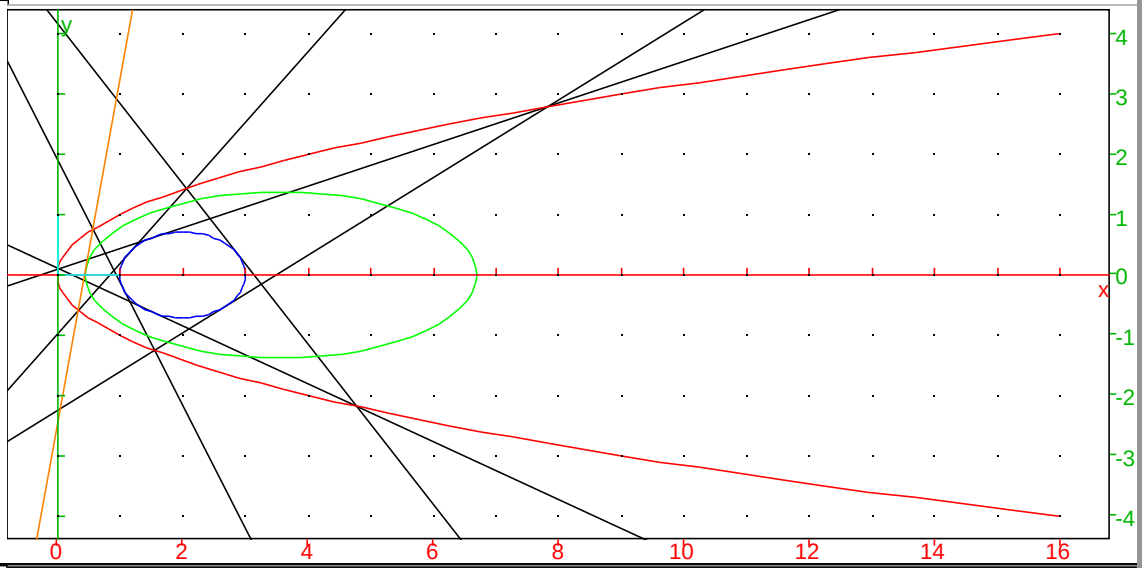
Done

M

55 dtei:=line(l[0]^2+i*l[0],l[2*imax]^2+i*l[2*imax],'color'=350):;

Done

56 seq(ddte(l[ii-1],l[ii]),ii=1..2*imax),IMPL,G3,dtei;



57

58 Fig Edit Graphe Repere Mode Step Landscape

1 x:=3;//on dessinera la droite (t_3,t_-3) en ocre

3

2 para:=element(-2.5..2.5,0.5);//notre parametre t0 dans

parameter([para,-2.500000000000000000000000,2.

3 l:=dessin(para,imax):;

"Done"

4 dtei:=droite(l[0]^2+i*l[0],l[2*imax]^2+i*l[2*imax],'coule

"Done"

5 seq(ddte(l[ii-1],l[ii]),ii=1..2*imax),IMPL,G3,dtei;

[droite(y=(-5.056085464463192563072989 0+5.10482

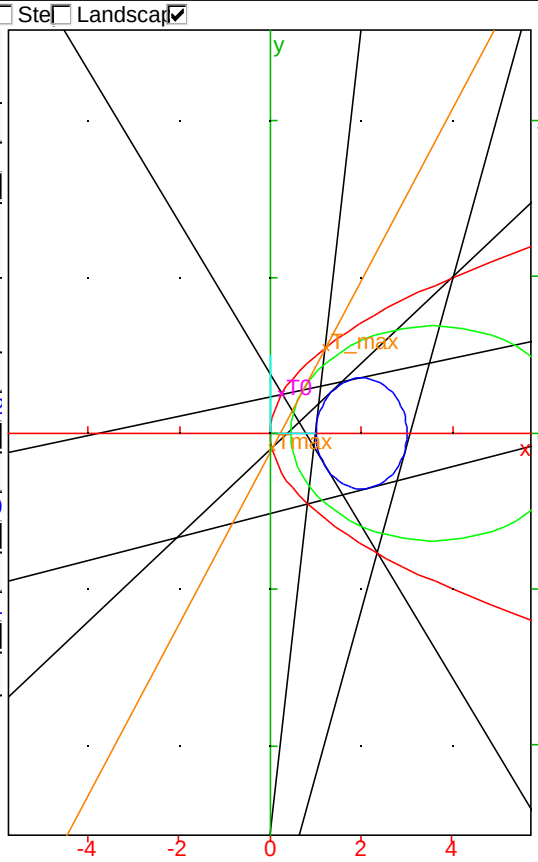
6 T0:=point(l[imax]^2+i*l[imax],'couleur'=256);//le point

point(0.250000000000000000000000+0.50000000

7 Tmax:=point(l[2*imax]^2+i*l[2*imax],couleur=350);T_

[point(0.351620208498439533836665 40e-1,-0.18751

8



59 maple_mode(0);

Warning: some commands like subs might change arguments order

60 B:=matrix(3,3):;B[0,0]:=1:;B[1,1]:=2:;B[2,2]:=3:;B[0,2]:=-2:;B[2,0]:=-2:;B;

(Done , Done , Done , Done , Done , Done , $\begin{bmatrix} 1, & 0, & -2 \\ 0, & 2, & 0 \end{bmatrix}$)

61 Bs:=B+s*[[0,0,-1],[0,2,0],[-1,0,0]];

$$\begin{bmatrix} 1, & 0, & -2-s \\ 0, & 2+2\cdot s, & 0 \\ -2-s, & 0, & 3 \end{bmatrix}$$

62 X:=[x,y,1];Cs:=X*Bs*X;C2:=y^2-x;

$$([x, y, 1], (x-s-2)\cdot x+y\cdot(2+2\cdot s)\cdot y+x\cdot(-2-s)+3, y^2-x)$$

63 As:=Bs^(-1);

$$\begin{bmatrix} \frac{6\cdot s+6}{-2\cdot s^3-10\cdot s^2-10\cdot s-2}, & 0, & \frac{2\cdot s^2+6\cdot s+4}{-2\cdot s^3-10\cdot s^2-10\cdot s-2} \\ 0, & \frac{-s^2-4\cdot s-1}{-2\cdot s^3-10\cdot s^2-10\cdot s-2}, & 0 \\ \frac{2\cdot s^2+6\cdot s+4}{-2\cdot s^3-10\cdot s^2-10\cdot s-2}, & 0, & \frac{2\cdot s+2}{-2\cdot s^3-10\cdot s^2-10\cdot s-2} \end{bmatrix}$$

64 dte:=simplify(det(matrix([[t^2,t,1],[u^2,u,1],[x,y,1]]))/(t-u));//la dte (mu,mt)

$$t\cdot u-t\cdot y-u\cdot y+x$$

65 DTE:=simplify([coeff(dte,x,1),coeff(dte,y,1),subst(dte,x=0,y=0)]);//coordonnees duales de cette droite

$$[1, -t-u, t\cdot u]$$

66 Ps:=normal(DTE*As*DTE);//on remarque qu'elles s'expriment facilement avec somme et produit

$$\frac{s^2\cdot t^2-2\cdot s^2\cdot t\cdot u+s^2\cdot u^2-2\cdot s\cdot t^2\cdot u^2+4\cdot s\cdot t^2-4\cdot s\cdot t\cdot u+4\cdot s\cdot u^2-6\cdot s-2\cdot t^2\cdot u^2+t^2-6\cdot t\cdot u+u^2-6}{2\cdot s^3+10\cdot s^2+10\cdot s+2}$$

67 as:=coeff(Ps,t,2);bs:=coeff(Ps,t,1);cs:=coeff(Ps,t,0);

$$\left(\frac{s^2-2\cdot s\cdot u^2+4\cdot s-2\cdot u^2+1}{2\cdot s^3+10\cdot s^2+10\cdot s+2}, \frac{-2\cdot s^2\cdot u-4\cdot s\cdot u-6\cdot u}{2\cdot s^3+10\cdot s^2+10\cdot s+2}, \frac{s^2\cdot u^2+4\cdot s\cdot u^2-6\cdot s+u^2-6}{2\cdot s^3+10\cdot s^2+10\cdot s+2}\right)$$

68 as:=unapply(as,u); bs:=unapply(bs,u); cs:=unapply(cs,u);// On cree les fonctions

$$\left(u \to \frac{s^2-2\cdot s\cdot u^2+4\cdot s-2\cdot u^2+1}{3\quad 2}, u \to \frac{-2\cdot s^2\cdot u-4\cdot s\cdot u-6\cdot u}{3\quad 2}, u \to \frac{s^2\cdot u^2+4\cdot s\cdot u^2-6\cdot s+}{3\quad 2}\right.$$

69 complex_mode:=1;//pour les solves, on se met en mode complexe

$$1$$

70 sol1:=solve(Ps,u);//resolution formelle de l'equation de degre 2 en u. NB:P(u,t)=P(t,u)

$$\left(\frac{1}{s^2-2\cdot s\cdot t^2+4\cdot s-2\cdot t^2+1}\right)\cdot\left(s^2\cdot t+2\cdot s\cdot t+3\cdot t+\sqrt{\frac{2\cdot s^3\cdot t^4-4\cdot s^3\cdot t^2+6\cdot s^3+10\cdot s^2\cdot t^4-20\cdot s^2\cdot t^2}{-20\cdot s\cdot t^2+30\cdot s+2\cdot t^4-4\cdot t^2+6}}\right.$$

71 s1:=simplify(sol1[0]+sol1[1]);

$$\frac{2\cdot s^2\cdot t+4\cdot s\cdot t+6\cdot t}{s^2-2\cdot s\cdot t^2+4\cdot s-2\cdot t^2+1}$$

72 p1:=simplify(sol1[0]*sol1[1]);

$$\frac{s^2\cdot t^2+4\cdot s\cdot t^2-6\cdot s+t^2-6}{s^2-2\cdot s\cdot t^2+4\cdot s-2\cdot t^2+1}$$

73 D1:=[1,-s1,p1];//D1 decrit donc une conique duale

$$\left[1, -\left(\frac{2\cdot s^2\cdot t+4\cdot s\cdot t+6\cdot t}{s^2-2\cdot s\cdot t^2+4\cdot s-2\cdot t^2+1}\right), \frac{s^2\cdot t^2+4\cdot s\cdot t^2-6\cdot s+t^2-6}{s^2-2\cdot s\cdot t^2+4\cdot s-2\cdot t^2+1}\right]$$

74 D1:=([as(t),-bs(t),cs(t)]);//le meme sans denominateur

$$\left[\frac{s^2-2\cdot s\cdot t^2+4\cdot s-2\cdot t^2+1}{3\quad 2}, -\left(\frac{-2\cdot s^2\cdot t-4\cdot s\cdot t-6\cdot t}{3\quad 2}\right), \frac{s^2\cdot t^2+4\cdot s\cdot t^2-6\cdot s+t^2-6}{3\quad 2}\right.$$

75 On cree une procedure Dn(P,n) (pour n>=2) qui retourne le vecteur normal a la droite mt_n,mt_(-n)

76 Prog Edit Ajouter | 15 | nxt | OK (F9) | Save

```
Dn:=proc(PP,n)
local sol,s0,p0,p2,s2,j,tmp1,tmp2,tmp3;
sol:=solve(PP,u);s0:=2*t;p0:=t^2;
for j from 2 to n do
tmp1:=simplify(normal(bs(sol[0])*as(sol[1])+bs(sol[1])*as(sol[0])));
tmp2:=simplify(normal(as(sol[0])*as(sol[1])));
tmp3:=simplify(normal(cs(sol[0])*cs(sol[1])));
s2:=simplify(-s0-tmp1/tmp2);
p2:=simplify(tmp3/(tmp2*p0));
s0:=simplify(sol[0]+sol[1]);
p0:=simplify(sol[0]*sol[1]);
sol:=solve(u^2-s2*u+p2=0,u);
end do;
normal(denom(p2)*([1,-s2,p2]));
end proc:;
```

// Warning: u,t, declared as global variable(s)
// End defining Dn

Done

77 la condition tn=t-n s'exprime par l'annulation du discriminant. on voit qu'il existe des facteurs dans k[s], donc des valeurs de s dans une cloture algebrique qui annulent ce discriminant de maniere independante de t, ce qui illustre bien le theoreme. Le facteur det(Bs) est present et correspond a des coniques degenerees, donc il ne nous int{\'e}resse pas. Les facteurs restant apparaissent avec multiplicite 2.
Dans le cas n=6=2*3 on trouve un facteur irred de degre 4 et un polynome reduit de degre 12 (qui est ici reducible un de degre 4 et un de degre 8). Il faut alors comprendre que l'un des facteurs de degre 4 correspond au cas 3-poncelet(ie t2=t_-1) car c'est un casparticulier du cas 6-poncelet.
En conclusion, les solutions donnant une situation de 6-poncelet non degeneree sont pour les s solution du polynome de degre 12 restant.

78 factor(det(Bs));

$$-2 \cdot (s+1) \cdot (s^2+4 \cdot s+1)$$

79 [l1,l2,l3]:=Dn(Ps,2);

$$s^8-8 \cdot s^7 \cdot t^2+16 \cdot s^7-72 \cdot s^6 \cdot t^2+76 \cdot s^6-280 \cdot s^5 \cdot t^2+64 \cdot s^5-664 \cdot s^4 \cdot t^2-242 \cdot s^4-984 \cdot s^3 \cdot t^2-368 \cdot s^3-920 \cdot s^2 \cdot t^2+124 \cdot s^2 \quad -2 \cdot s^8 \cdot t-16 \cdot s^7 \cdot t-136 \cdot s^6 \cdot t-848 \cdot -456 \cdot s \cdot t^2+352 \cdot s-72 \cdot t^2+121 \quad , -2888 \cdot s^2 \cdot t-1072 \cdot s \cdot t-226 \cdot t$$

80 ponc4:=factor(l2^2-4*l1*l3);//les cas t2=t_(-2)

$$32 \cdot (s+1) \cdot (s^2+2 \cdot s+3)^2 \cdot (s^2+4 \cdot s+1) \cdot (s^4+8 \cdot s^3+6 \cdot s^2-16 \cdot s-11)^2 \cdot (t^4-2 \cdot t^2+3)$$

81 [l1,l2,l3]:=Dn(Ps,3);

Evaluation time: 1.13

$$s^{18}-18 \cdot s^{17} \cdot t^2+36 \cdot s^{17}-402 \cdot s^{16} \cdot t^2+441 \cdot s^{16}-4400 \cdot s^{15} \cdot t^2+1728 \cdot s^{15}-32496 \cdot s^{14} \cdot t^2-6588 \cdot s^{14}-180312 \cdot s^{13} \cdot t^2-87984 \cdot s^{13}-777240 \cdot s^{12} \cdot t^2-308748 \cdot s^{12}-2646288 \cdot s^{11} \cdot t^2-59904 \cdot s^{11}-7138512 \cdot s^{10} \cdot t^2+3382686 \cdot s^{10}-14953420 \cdot s^9 \cdot t^2+ \quad -2 \cdot s^{18}14477752 \cdot s^9-23420556 \cdot s^8 \cdot t^2+34010622 \cdot s^8-26119632 \cdot s^7 \cdot t^2+ \quad -76017 53781696 \cdot s^7-19263760 \cdot s^6 \cdot t^2+61514676 \cdot s^6-7892760 \cdot s^5 \cdot t^2+ \quad -31032 52477200 \cdot s^5-472152 \cdot s^4 \cdot t^2+33533316 \cdot s^4+1013520 \cdot s^3 \cdot t^2+ \quad -81085 15763584 \cdot s^3+316368 \cdot s^2 \cdot t^2+5194089 \cdot s^2-19890 \cdot s \cdot t^2+1063620 \cdot s-14450 \cdot t^2+96721 \quad , -34061$$

82 ponc6:=factor(l2^2-4*l1*l3);//les cas t3=t_(-3)

$$8 \cdot (s+1) \cdot (s^2+4 \cdot s+1) \cdot (s^4+4 \cdot s^3+18 \cdot s^2+44 \cdot s+17)^2 \cdot (3 \cdot s^4+20 \cdot s^3+30 \cdot s^2+12 \cdot s-5)^2 \cdot$$

8 7 6 5 4 3 2 2 4 2

83 [l1,l2,l3]:=Dn(Ps,4);

Evaluation time: 3.87

$$s^{32} -32 \cdot s^{31} \cdot t^2 + 64 \cdot s^{31} -1312 \cdot s^{30} \cdot t^2 + 1456 \cdot s^{30} -27360 \cdot s^{29} \cdot t^2 +$$
$$12032 \cdot s^{29} -397024 \cdot s^{28} \cdot t^2 -53992 \cdot s^{28} -4485664 \cdot s^{27} \cdot t^2$$
$$-2075968 \cdot s^{27} -41150240 \cdot s^{26} \cdot t^2 -19479216 \cdot s^{26}$$
$$-312810208 \cdot s^{25} \cdot t^2 -69281664 \cdot s^{25} -1994822368 \cdot s^{24} \cdot t^2 +$$
$$362022204 \cdot s^{24} -10704056480 \cdot s^{23} \cdot t^2 + 6717988416 \cdot s^{23}$$
$$-48006926752 \cdot s^{22} \cdot t^2 + 50722169904 \cdot s^{22}$$
$$-177585650272 \cdot s^{21} \cdot t^2 + 261372519936 \cdot s^{21}$$
$$-532206308960 \cdot s^{20} \cdot t^2 + 1033054968168 \cdot s^{20}$$
$$-1258419947680 \cdot s^{19} \cdot t^2 + 3305799096000 \cdot s^{19}$$
$$-2228181260704 \cdot s^{18} \cdot t^2 + 8859012612432 \cdot s^{18}$$
$$-2531281869920 \cdot s^{17} \cdot t^2 + 20354418423168 \cdot s^{17}$$
$$-342721070176 \cdot s^{16} \cdot t^2 + 40733156223462 \cdot s^{16} +$$
$$5818435327904 \cdot s^{15} \cdot t^2 + 71653356320448 \cdot s^{15} +$$
$$14507380684960 \cdot s^{14} \cdot t^2 + 111261944067984 \cdot s^{14} + \quad -2 \cdot s^{32} \cdot t -64 \cdot s^{31} \cdot$$
$$20074249850720 \cdot s^{13} \cdot t^2 + 152642633291520 \cdot s^{13} + \quad -18686272 \cdot s^{27} \cdot$$
$$15905669956448 \cdot s^{12} \cdot t^2 + 184673924523816 \cdot s^{12} + \quad -6187719864 \cdot s^{24}$$
$$878202144160 \cdot s^{11} \cdot t^2 + 195904252167744 \cdot s^{11} \quad -323734038336 \cdot$$
$$-17778898200928 \cdot s^{10} \cdot t^2 + 180215290056816 \cdot s^{10} \quad -3722438491200 \cdot$$
$$-29743200887968 \cdot s^{9} \cdot t^2 + 141358643950464 \cdot s^{9} \quad -33206681395776$$
$$-30087856737440 \cdot s^{8} \cdot t^2 + 92473938038652 \cdot s^{8} \quad -157333108202688$$
$$-22034753326816 \cdot s^{7} \cdot t^2 + 49107540257472 \cdot s^{7} \quad -356910577548480$$
$$-12276464060896 \cdot s^{6} \cdot t^2 + 20479776536208 \cdot s^{6} \quad -385066468882368$$
$$-5273309250080 \cdot s^{5} \cdot t^2 + 6422258361344 \cdot s^{5} \quad -204649706433984$$
$$-1735858109984 \cdot s^{4} \cdot t^2 + 1421195094488 \cdot s^{4} \quad -61885582145472$$
$$-427344110304 \cdot s^{3} \cdot t^2 + 199314116672 \cdot s^{3} -74739707360 \cdot s^{2} \cdot t^2 + \quad -12598014866368$$
$$14081315056 \cdot s^{2} -8333986848 \cdot s \cdot t^2 + 203714176 \cdot s -444974112 \cdot t^2 + 829921 , \quad -1254477806272 \cdot$$

84 ponc8:=factor(l2^2-4*l1*l3);//les cas t4=t_(-4)

Evaluation time: 0.48

$$128 \cdot (s+1) \cdot (s^2+2 \cdot s+3)^2 \cdot (s^2+4 \cdot s+1) \cdot (s^4+8 \cdot s^3+6 \cdot s^2-16 \cdot s-11)^2 \cdot (s^8+8 \cdot s^7+68 \cdot s^6+424 \cdot s$$
$$(s^{16}+32 \cdot s^{15}+216 \cdot s^{14}-896 \cdot s^{13}-21652 \cdot s^{12}-151584 \cdot s^{11}-613496 \cdot s^{10}-1667008 \cdot s^{9}-3353322 \cdot s$$

85 factor(gcd(ponc4,ponc8));// le cas t2=t_(-2) => le cas t4=t_(-4)

$$32 \cdot (s+1) \cdot (s^2+2 \cdot s+3)^2 \cdot (s^2+4 \cdot s+1) \cdot (s^4+8 \cdot s^3+6 \cdot s^2-16 \cdot s-11)^2 \cdot (t^4-2 \cdot t^2+3)$$

86 On trouve donc que le cas ou C2 est exactement 8-circonscrite a C'_1 peut arriver lorsque s est racine du polynome de degre 24 constitue des facteurs reduits de:

87 factor(quo(ponc8,gcd(ponc4,ponc8)));

$$4 \cdot (s^8+8 \cdot s^7+68 \cdot s^6+424 \cdot s^5+1334 \cdot s^4+1976 \cdot s^3+1444 \cdot s^2+536 \cdot s+113)^2 \cdot$$
$$(s^{16}+32 \cdot s^{15}+216 \cdot s^{14}-896 \cdot s^{13}-21652 \cdot s^{12}-151584 \cdot s^{11}-613496 \cdot s^{10}-1667008 \cdot s^{9}-3353322 \cdot s$$

88 En fait le cas t2=t_(-1) est difficile a exprimer directement a cause des radicaux. En fait la bonne question est: (t2=t_(-1) ou t_(-2)=t1)

89 t1:=sol1[0];//On sauve la valeur de t_(-1)

$$\left(\frac{1}{s^2-2 \cdot s \cdot t^2+4 \cdot s-2 \cdot t^2+1}\right) \cdot (s^2 \cdot t+2 \cdot s \cdot t+3 \cdot t+\sqrt{2 \cdot s^3 \cdot t^4-4 \cdot s^3 \cdot t^2+6 \cdot s^3+10 \cdot s^2 \cdot t^4-20 \cdot s^2 \cdot t^2+}$$

90 tm1:=sol1[1];//On sauve la valeur de t_(-1)

$$\left(\frac{1}{\quad}\right)\cdot(s^2\cdot t+2\cdot s\cdot t+3\cdot t-(\sqrt{2\cdot s^3\cdot t^4-4\cdot s^3\cdot t^2+6\cdot s^3+10\cdot s^2\cdot t^4-20\cdot s^2\cdot t^2+}$$
$$s^2-2\cdot s\cdot t^2+4\cdot s-2\cdot t^2+1$$

91 t2:=simplify(normal(-t-bs(t1)/as(t1)));//On sauve la valeur de t_2

$$s^8\cdot t+8\cdot s^7\cdot t+68\cdot s^6\cdot t+2\cdot s^6\cdot(\sqrt{2\cdot s^3\cdot t^4-4\cdot s^3\cdot t^2+6\cdot s^3+10\cdot s^2\cdot t^4-20\cdot s^2\cdot t^2+30\cdot s^2+10\cdot}$$
$$20\cdot s^5\cdot(\sqrt{2\cdot s^3\cdot t^4-4\cdot s^3\cdot t^2+6\cdot s^3+10\cdot s^2\cdot t^4-20\cdot s^2\cdot t^2+30\cdot s^2+10\cdot s\cdot t^4-20\cdot s\cdot t^2+30\cdot s+2\cdot}$$
$$50\cdot s^4\cdot(\sqrt{2\cdot s^3\cdot t^4-4\cdot s^3\cdot t^2+6\cdot s^3+10\cdot s^2\cdot t^4-20\cdot s^2\cdot t^2+30\cdot s^2+10\cdot s\cdot t^4-20\cdot s\cdot t^2+30\cdot s+2\cdot}$$
$$40\cdot s^3\cdot(\sqrt{2\cdot s^3\cdot t^4-4\cdot s^3\cdot t^2+6\cdot s^3+10\cdot s^2\cdot t^4-20\cdot s^2\cdot t^2+30\cdot s^2+10\cdot s\cdot t^4-20\cdot s\cdot t^2+30\cdot s+2\cdot}$$
$$-50\cdot s^2\cdot(\sqrt{2\cdot s^3\cdot t^4-4\cdot s^3\cdot t^2+6\cdot s^3+10\cdot s^2\cdot t^4-20\cdot s^2\cdot t^2+30\cdot s^2+10\cdot s\cdot t^4-20\cdot s\cdot t^2+30\cdot s+2}$$
$$-140\cdot s\cdot(\sqrt{2\cdot s^3\cdot t^4-4\cdot s^3\cdot t^2+6\cdot s^3+10\cdot s^2\cdot t^4-20\cdot s^2\cdot t^2+30\cdot s^2+10\cdot s\cdot t^4-20\cdot s\cdot t^2+30\cdot s+2}$$
$$-66\cdot(\sqrt{2\cdot s^3\cdot t^4-4\cdot s^3\cdot t^2+6\cdot s^3+10\cdot s^2\cdot t^4-20\cdot s^2\cdot t^2+30\cdot s^2+10\cdot s\cdot t^4-20\cdot s\cdot t^2+30\cdot s+2\cdot t^4}$$
$$s^8-8\cdot s^7\cdot t^2+16\cdot s^7-72\cdot s^6\cdot t^2+76\cdot s^6-280\cdot s^5\cdot t^2+64\cdot s^5-664\cdot s^4\cdot t^2-242\cdot s^4-984\cdot s^3\cdot t^2-368\cdot s$$

92 tm2:=simplify(normal(-t-bs(tm1)/as(tm1)));//On sauve la valeur de t_2

$$s^8\cdot t+8\cdot s^7\cdot t+68\cdot s^6\cdot t-2\cdot s^6\cdot(\sqrt{2\cdot s^3\cdot t^4-4\cdot s^3\cdot t^2+6\cdot s^3+10\cdot s^2\cdot t^4-20\cdot s^2\cdot t^2+30\cdot s^2+10\cdot}$$
$$-20\cdot s^5\cdot(\sqrt{2\cdot s^3\cdot t^4-4\cdot s^3\cdot t^2+6\cdot s^3+10\cdot s^2\cdot t^4-20\cdot s^2\cdot t^2+30\cdot s^2+10\cdot s\cdot t^4-20\cdot s\cdot t^2+30\cdot s+}$$
$$-50\cdot s^4\cdot(\sqrt{2\cdot s^3\cdot t^4-4\cdot s^3\cdot t^2+6\cdot s^3+10\cdot s^2\cdot t^4-20\cdot s^2\cdot t^2+30\cdot s^2+10\cdot s\cdot t^4-20\cdot s\cdot t^2+30\cdot s+}$$
$$-40\cdot s^3\cdot(\sqrt{2\cdot s^3\cdot t^4-4\cdot s^3\cdot t^2+6\cdot s^3+10\cdot s^2\cdot t^4-20\cdot s^2\cdot t^2+30\cdot s^2+10\cdot s\cdot t^4-20\cdot s\cdot t^2+30\cdot s+}$$
$$50\cdot s^2\cdot(\sqrt{2\cdot s^3\cdot t^4-4\cdot s^3\cdot t^2+6\cdot s^3+10\cdot s^2\cdot t^4-20\cdot s^2\cdot t^2+30\cdot s^2+10\cdot s\cdot t^4-20\cdot s\cdot t^2+30\cdot s+}$$
$$140\cdot s\cdot(\sqrt{2\cdot s^3\cdot t^4-4\cdot s^3\cdot t^2+6\cdot s^3+10\cdot s^2\cdot t^4-20\cdot s^2\cdot t^2+30\cdot s^2+10\cdot s\cdot t^4-20\cdot s\cdot t^2+30\cdot s+}$$
$$66\cdot(\sqrt{2\cdot s^3\cdot t^4-4\cdot s^3\cdot t^2+6\cdot s^3+10\cdot s^2\cdot t^4-20\cdot s^2\cdot t^2+30\cdot s^2+10\cdot s\cdot t^4-20\cdot s\cdot t^2+30\cdot s+2\cdot t}$$
$$s^8-8\cdot s^7\cdot t^2+16\cdot s^7-72\cdot s^6\cdot t^2+76\cdot s^6-280\cdot s^5\cdot t^2+64\cdot s^5-664\cdot s^4\cdot t^2-242\cdot s^4-984\cdot s^3\cdot t^2-368\cdot s$$

93 factor(normal(tm1-t2));//Ne donne rien: On n'obtient pas de facteur ne dependant que de s

$$-6\cdot s^9\cdot t^3+6\cdot s^9\cdot t-70\cdot s^8\cdot t^3+10\cdot s^8\cdot t-296\cdot s^7\cdot t^3-440\cdot s^7\cdot t-456\cdot s^6\cdot t^3-2984\cdot s^6\cdot t$$
$$1592\cdot s^3\cdot t^3-8792\cdot s^3\cdot t+216\cdot s^2\cdot t^3-2504\cdot s^2\cdot t-214\cdot s\cdot t^3+310\cdot s\cdot t+10\cdot t^3+250\cdot$$
$$(-3\cdot s^8+12\cdot s^7\cdot t^2-44\cdot s^7+116\cdot s^6\cdot t^2-208\cdot s^6+420\cdot s^5\cdot t^2-324\cdot s^5+844\cdot s^4\cdot t^2+82\cdot$$
$$(\sqrt{2\cdot s^3\cdot t^4-4\cdot s^3\cdot t^2+6\cdot s^3+10\cdot s^2\cdot t^4-20\cdot s^2\cdot t^2+30\cdot s^2+10\cdot s\cdot t^4-20\cdot s\cdot t^2+30\cdot s+}$$
$$s^{10}-10\cdot s^9\cdot t^2+20\cdot s^9+16\cdot s^8\cdot t^4-138\cdot s^8\cdot t^2+141\cdot s^8+160\cdot s^7\cdot t^4-760\cdot s^7\cdot t^2+384\cdot s^7+704\cdot s$$
$$-3564\cdot s^5\cdot t^2-1272\cdot s^5+3296\cdot s^4\cdot t^4-4300\cdot s^4\cdot t^2-1590\cdot s^4+3808\cdot s^3\cdot t^4-4632\cdot s^3\cdot t^2+480\cdot s^3+$$

94 factor(simplify(normal((tm1-t2)*(t1-tm2))));//il faut poser une question symetrique pour le faire apparaitre: 3*s^4+20

$$(-2\cdot(3\cdot s^4+20\cdot s^3+30\cdot s^2+12\cdot s-5)^2)\cdot(t$$
$$-(-2\cdot t^2\cdot s-2\cdot t^2+s^2+4\cdot s+1)\cdot(8\cdot t^2\cdot s^7+72\cdot t^2\cdot s^6+280\cdot t^2\cdot s^5+664\cdot t^2\cdot s^4+984\cdot t^2\cdot s^3+920\cdot t^2\cdot$$

95 Mieux vaut exprimer que D1= D2 ou que leur intersection avec la parabole
(u^2,u) est la meme. Pour cela on cherche les racines communes en u.

96 pol1:=D1*[u^2,u,1];

$$(s^2-2\cdot s\cdot t^2+4\cdot s-2\cdot t^2+1)\cdot\left(\frac{1}{\quad}\right)\cdot u^2+\left(-\left(\frac{-2\cdot s^2\cdot t-4\cdot s\cdot t-6\cdot t}{\quad}\right)\right)\cdot u+\frac{s^2\cdot t^2+}{\quad}$$

97 pol2:=Dn(Ps,2)*[u^2,u,1];

$$(s^8-8\cdot s^7\cdot t^2+16\cdot s^7-72\cdot s^6\cdot t^2+76\cdot s^6-280\cdot s^5\cdot t^2+64\cdot s^5-664\cdot s^4\cdot t^2-242\cdot s^4-984\cdot s^3\cdot t^2-368\cdot$$
$$(-2\cdot s^8\cdot t-16\cdot s^7\cdot t-136\cdot s^6\cdot t-848\cdot s^5\cdot t-2668\cdot s^4\cdot t-3952\cdot s^3\cdot t-2888\cdot s^2\cdot t-1072\cdot s\cdot t-226\cdot t)\cdot u+s$$
$$64\cdot s^5\cdot t^2-840\cdot s^5-242\cdot s^4\cdot t^2-1992\cdot s^4-368\cdot s^3\cdot t^2-2952\cdot s^3+124\cdot s^2\cdot t^2-2760\cdot s^2+352\cdot s\cdot t^2-136$$

98 le facteur de degre 4 qui est dans Q[s] et qui est premier avec det(As) ici(s^4+4*s^3+18*s^2+44*s+17) donne les c

99 ponc3:=factor(resultant(pol1,pol2,u));

$$(-4\cdot(s+1)^2\cdot(s^4+4\cdot s^3+18\cdot s^2+44\cdot s+17)^2)\cdot(-t^4+2\cdot t^2\cdot s+4\cdot t^2-3)\cdot(-1728\cdot t^2\cdot s^6-4428\cdot t^2\cdot s^5-75\ldots 9\cdot t^4\cdot s^8+120\cdot t^4\cdot s^7+580\cdot\ldots$$

100 factor(gcd(ponc3,ponc6));//montre que le cas 3-poncelet est cas particulier de 6-poncelet

$$4\cdot(s+1)\cdot(s^4+4\cdot s^3+18\cdot s^2+44\cdot s+17)^2$$

101 En cherchant les elements de Q[s] divisant ponc6 et pas pnc3 ni det(Bs) on trouve:
(3*s^4+20*s^3+30*s^2+12*s-5)*(s^8+16*s^7+28*s^6-224*s^5-1154*s^4-2096*s^3-1940*s^2-1088*s-311)
Les valeurs de s annulant ce polynome de degre 12 sont les cas de poncelet
d'ordre exactement 6.

102 factor(quo(ponc6,factor(gcd(ponc3*det(Bs),ponc6))));

$$(3\cdot s^4+20\cdot s^3+30\cdot s^2+12\cdot s-5)^2\cdot(s^8+16\cdot s^7+28\cdot s^6-224\cdot s^5-1154\cdot s^4-2096\cdot s^3-1940\cdot s^2-1088\cdot\ldots$$