Université de Paris 7 | **TP00 Découverte xcas** | **agreg 2013 (F.Han[1])**

Minimum à retenir/réviser avant l'épreuve, et donc à archiver cette annnée : 1) Etre habitué à utiliser l'aide.

2) opérations classiques en mode exact, approché, algèbre linéaire, calcul modulaire et polynomial. Notamment, pgcd, couples de Bezout, produit de matrices, noyau (y compris pour un élément de $M_n(\mathbb{Z}\ /p\mathbb{Z}\ )$,

3) Quelques instructions de programmation : boucles `for`, `while` , suite : `seq`. Créer une fonction une procédure, créer une fonction à partir d'un symbole, passer en mode debug et afficher une variable pas à pas.

4) Quelques instructions graphique de base, et surtout savoir obtenir ces fonctions et leurs options via les menus déroulant. Ex fonctions (paramétriques, implicites, statistiques ; ex histogrammes) et géométrie (points, droites...) et options d'affichage via le menu déroulant.

Exercice I: Découverte xcas

NB : Certaines syntaxes dépendent de la langue choisie (ou de la version installée). Il se peut que dans nos salles certaines instructions francaises ne marchent pas. **I Choisir sa configuration**

⚠ Lors du premier lancement, les valeurs par défaut ne coïncident pas forcément avec vos préférences. Au premier lancement on répond à quelques questions, on peut ensuite modifier/affiner ses choix dans le menu Cfg. Ensuite, sauvez vos préférences grâce au menu. Il faut donc choisir le mode xcas ou maple, et étudier la configuration du "cas" pour ne pas mal interpréter les réponses. (On peut l'obtenir rapidement en cliquant sur la barre grise entre les boutons SAUVER et STOP)

Les différences entre les modes xcas et maple : i et I, les tableaux commencent à 0 contre 1 le symbole % est réservé au calcul modulaire pour xcas, au dernier résultat pour maple. Les commentaires sont `//` resp `#`. L'instruction subs prend ses arguments dans des ordres inversés. (On utilisera donc plutot `subst`)

Pour la configuration du "cas", je conseille de :
COCHER radians, et de DÉCOCHER : approx, complex, `Cmpx_var`, Sqrt. On travaillera ainsi en mode exact dans le corps engendré par les coefficients de l'expression, alors que si l'on coche complex ou Sqrt, on rajoute I et des racines carrées ce qui ne permet pas par exemple une factorisation de polynôme sur un corps prescrit.

1) a) Comment obtenir de l'aide sur un mot donné que l'on connait à peu près (par exemple sqrt) on fait : ?sqrt. Par exemple, comment fait on $\sqrt[3]{23}$?

b) Donner une valeur approchée des résultats précédents. (Soit en forçant xcas a être en flottants (Ex 23. ou approx(23)), soit avec evalf ou approx).

c) Trouver la syntaxe des constantes réelles ou complexes π, e, i (où $i^2 = -1$). Faire afficher (sans que la précision par défaut soit modifiée pour la suite.) les 1000 premières décimales de π.

d) Faire ?digits. Que faut il faire pour travailler par défaut avec 1000 chiffres ?

Exercice II: aide html, bulles, menus

1) AIDE BULLE SUR UN MOT CONNU : Tapez `seq(` et étudiez les paramètres de cette fonction avec l'aide bulle[2]. Cette méthode est utile lorsque l'on connait le mot mais pas très bien les arguments ou les options.

2) ETUDIER LE MENU AIDE. RÉFÉRENCE[3] CALCUL FORMEL. Cette méthode est la plus adaptée (avec les menus déroulants, ou bien lorque ces derniers sont trop succincts) pour trouver une instruction dont on ne connait pas le mot clef.

Par exemple trouver la fonction pgcd de deux entiers en utilisant ce menu.

a) Comment ajouter un élément à une liste ? Ex ajoutez l'élément 55 à la liste `l:=[1,33,4]`.

b) `a:=1111;`. Comment libérer la variable `a` ?

3) LES MENUS DÉROULANTS sont aussi rapides[4] pour obtenir les instructions selon leur thèmes. (Notez le menu Scolaire où l'on trouve les instruction par niveau scolaire).

1. http ://www.math.jussieu.fr/~han/agreg
2. Laisser la souris sur la ligne avec la parenthèse ouverte, et attendre que la bulle apparaisse.
3. C'est le plus utile. à retenir
4. mais parfois incomplets

a) Quelle est la valeur théorique de

$$44.\arctan(1/57) + 7.\arctan(1/239) - 12.\arctan(1/682) + 24.\arctan(1/12943)$$

Lorsque l'on a de la chance [5], le logiciel peut repondre tout de suite. Il faut cependant être prêt à l'aider. Ex : calculer la tangente en demandant de développer au sens trigonométrique.

b) On pose : `l1:=[1,33,4]` et `l2:=[11,133,14]`. Quelle instruction permet de créer une liste en juxtaposant $l1$ et $l2$?

c) Affectez à `a` la valeur $e^{2i\pi/5}$. Commentez la réponse et expliquez la notion de polynôme pour xcas. Calculez a^5. On peut déssiner un point par son affixe complexe. Essayer `p:=point(1)`. On aimerait avoir ce point en bleu et grosse croix. Il existe une façon intéractive. On tape `point(1,` et l'on va chercher l'option d'attributs (on remarquera le racourci clavier pour cette option) dans le menu déroulant pour les graphiques.

d) Tout objet géométrique peut être transformé par une similitude via les opérations usuelles sur les complexes (pour une liste d'objets (⚠ elle doit être entre [6] CROCHET) on peut faire aussi la multiplication par un complexe, en revanche, pour l'addition c'est un peu plus compliqué, il vaut mieux ajouter un vecteur de même taille pour translater les éléments terme à terme). Par exemple, en utilisant `seq` et le point p et a, créez les sommets d'un pentagone régulier en utilisant `seq`.

e) Etudiez la fonction `element` qui est particulierement utile en mode géométrie. Choisissez un point M sur le cercle unité,

4) Cherchez dans les menus déroulants comment utiliser les unités physiques. Ajoutez $1dm^3$ et $3cl$ via xcas.

5) L'index (ou complétion par tabulation). Utile pour obtenir un mot clef et ses synonymes, mais aussi des intructions connexes non équivalentes.

On peut aussi obtenir l'index par le menu aide. Par exemple on définit le symbole `P:=x/(x^2+1)` et la fonction `Q(x):=sin(1/x)` (syntaxe équivalente : `Q:=x->sin(1/x)`)

a) Etudiez les types de `P Q Q(x) Q(5) Q(6/pi)` (on pourra simplifier). D'une manière générale, il vaut mieux effectuer les calculs compliqués avec des symboles plutot qu'avec des fonctions. Les résultats seront le plus souvent bien plus lisibles et rapides.

b) Calculer les dérivées de P et Q.

c) (A retenir !) Comment obtenir à partir du symbole P défini ci dessus, la fonction $x \mapsto \dfrac{x}{x^2+1}$?

En déduire la dérivée de $\dfrac{\sin(1/x)}{(\sin(1/x))^2+1}$

6) la recherche systématique dans le html par F12 Cette méthode est la plus longue (beaucoup d'accès disques), mais elle permet de chercher une chaine de caractère dans tout le contenu de l'aide html.

Vous pouvez maintenant demander le memento

Exercice III: Illustration groupe des nombres complexes de module 1.

1) Etudiez la composition des fonctions sous xcas avec le symbole `@@`. (Attention aux parenthèses). Calculez $\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{65536}}}}$

2) Etudiez la fonction `element`. (Particulièrement utile en mode geometrie2d. cf menu deroulant nouvelle figure 2d). Crées le cercle unité `C`, et choisissez un point $m0$ sur C d'argument 3 grâce à cette commande.

3) Affectez à `a` l'affixe de `m0` et créez la liste de 10 éléments contenant les points $m_0, m_1, \dots, m_9$ d'affixe les itérés i ièmes de `sqrt` calculés en a.

4) Selectionnez le mode pointeur dans le menu déroulant de votre fenêtre de géométrie et déplacez m_0 sur le cercle. Expliquez les choix pour la racine carrée et pourquoi m_i aura un élément dans le domaine de convergence de la série $\sum \dfrac{(z-1)^n}{n}$ et donc que m_0 est dans l'image de la fonction exponentielle.

5. ici c'est le cas
6. $(a, b, c) * 6$ a un autre sens

Exercice IV: Dénombrement et séries génératrices.

1) Afficher le coefficient de t^3 dans la série formelle associée à $\prod_{i=1}^{4} \frac{1}{1-a_i.t}$?

2) Généraliser l'exemple précédent pour en déduire de manière théorique le nombre d'éléments croissants dans $\{1,2,3,4\}^n$, puis dans $\{1,\ldots,k\}^n$

3) Quel est le cardinal de :
$\{(x_1,\ldots,x_5) \in \mathbb{N}^5 | x_1+3x_2+2x_3+x_4+4x_5 = 208\}$

4) En adaptant la formule $\sum_{n>0} p_n.t^n = \Pi_{i=1}^{\infty} \frac{1}{1-t^i}$ où p_n est le nombre de partitions[7] de n, calculer p_{50}.

5) Trouver le coefficient de $a^3b^2cd^2$ dans $(a+b+c+d)^8$. Vérifier votre réponse théorique avec la forme développée (utiliser `normal` pour développer un calcul lourd). (On pourra étudier l'aide de coeff pour recupérer le coefficient d'un monôme).

Exercice V: Initiation à la géométrie

1) Découverte de quelques possibilités.

a) Ouvrir un écran de géométrie, dessiner quelque objets intéractivement. Comment supprimer un objet ?

b) Dessiner une droite d de vecteur directeur d'affixe $e^{2i\pi/3}$ passant par $(3,0)$. Déssiner la droite d'équation cartésienne $2x+3y+1=0$. Modifier la couleur, à la souris ou dans la commande. Dessiner le point A d'intersection de ces 2 droites.

c) Créer un paramètre t de $[-5,3]$ grâce à la fonction element, et tracer la droite perpendiculaire à d passant par $(t,0)$

Exercice VI: Editeur de programme

On peut créer des procédures courtes en ligne, et même sur plusieurs lignes en utilisant shift entrée. En revanche il est souvent plus clair d'utiliser l'éditeur de programmes. Programmez l'algorithme suivant (créez une fonction `quodicho`) et testez le en vérifiant avec l'intruction xcas correspondante. On pourra aussi tester le debugger avec `debug(quodicho(1111333,55))`.

Entrée: $a \geq 0$ et $b > 0$;
Sortie: Le quotient et le reste de la division de a par b
$n \leftarrow 0$;
tantque $2^n b \leq a$ **faire**
| $n \leftarrow n+1$;
ftantque
$\alpha \leftarrow 2^{n-1}$;$\beta \leftarrow 2^n$;
pour k *de* 1 *jusque* $n-1$ **faire**
| $\gamma = \frac{\alpha+\beta}{2}$;
| **si** $\gamma b \leq a$ **alors**
| | $\alpha \leftarrow \gamma$;
| **sinon**
| | $\beta \leftarrow \gamma$;
| **fsi**
fpour
retourner $q = \alpha$ et $r = a - bq$;

Exercice VII:

1) Exprimer $\cos 5a$ en fonction de $\cos a$ (où a est une variable formelle).

2) Calculer $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos 5x}{2+\sin x} dx$, ainsi qu'une primitive P de $\frac{\cos x}{2+\sin 3x}$. Dériver P et vérifiez que c'est correct. (Le jury apprécie l'esprit critique)

7. Une partition de n est une suite décroissante d'éléments de $\mathbb{N}^*$ de somme n.

3) Que se passe t'il avec $\int \frac{\cos(5*x)}{2+\sin(3*x)}$ et $\int \frac{1}{2+\sin(5*x)}$? Affichez un dessin de la réponse pour vérifier la continuité.

Exercice VIII:

1) Il existe dans xcas 3 façons de développer[8] : `expand`, `normal`, `simplify`. Lors de calculs lourds, il faut vraiment préférer "normal" qui optimisera les polynômes. "simplify" sera plus lent car il tentera des simplifications plus sophistiquées. On pourra l'utiliser après avoir fait un "normal" non satisfaisant. En fait, "expand" travaillera avec les objets les plus généraux et pourra être très lourd. Essayez, `P1:=(x^2-1)/(x-1)` et `P2:=-cos(5*x)+16*cos(x)*sin(x)^4-12*cos(x)*sin(x)^2+cos(x)`

2) Factoriser $x^{12}-1$ dans $\mathbb{Z}[x]$. En factorisant des polynômes judicieusement choisis, obtenir la valeur du polynôme cyclotomique Φ_{12} ?

3) On pose $a = e^{\frac{2i\pi}{12}}$. Vérifiez que a^{12} vaut bien 1 pour xcas. Etudier $e^{\frac{2i\pi}{9}}$.

4) Factorisez $P = (2x+1)^2(x^5-1)/(x-1)$ dans $\mathbb{R}[x]$ et dans $\mathbb{C}[x]$. Peut t'on espérer un résultat exact ?

a) Factoriser $X^{12}-1$ sur $\mathbb{Q}[\sqrt{3}]$ et sur $\mathbb{Q}[\sqrt{3}, i]$ et sur $\mathbb{Q}[e^{2i\pi/9}]$. (On peut tenter de rajouter une liste d'éléments en option de factor)

Exercice IX:

Construire 2 cercles $C_i(O_i, r_i)$, étudier comment trouver le centre d'une homothétie envoyant C_1 sur (C_2), et en déduire comment construire les tangentes communes aux 2 cercles. Préparer une illustration en vue d'un petit exposé.

Exercice X:

1) a) Effectuer un changement de variable pour que les inégalités $0 < a < b < c$ soient facile à lire.

b) Démontrer en demandant un calcul élémentaire au logiciel que

$$3/2 \leq \frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b}$$

(Il ne s'agit pas de trouver une instruction du logiciel pour résoudre directement ce problème en tenant compte des hypothèses, mais de poser une question judicieuse pour que la réponse rende la preuve évidente.)

8. sans compter les synonymes