Université de Paris 7
(F.Han [1])

TP02 : Algèbre Linéaire

agreg 2012-2013

Exercice I: Algèbre linéaire

1) a) Dans xcas les vecteurs se notent entre : `[ ]`. Par exemple, essayez : `v1:=[seq(j,j=1..4)]` et `v2:=[a,b,c,d]` Les matrices se notent `M:=[[1,2,3,4],[5,6,7,8]]` et leur lignes sont `M[0] M[1]` ...

Les vecteurs s'affichent en ligne, mais ce sont bien des vecteurs et non des matrices lignes. Remarquez la différence d'affichage entre `[v1]` et `v1`, et copiez [2] collez la sortie (noire) de `[v1]` dans une zone d'entrée pour étudier les `[]`.

b) Les lois usuelles en algèbre linéaire utilisent encore `+` et `*`. Calculez les images de v_1 et v_2 par M (remarquez que la sortie est bien un vecteur)

c) Que font `v1*v2` et le peut être peu recommandable `v2*M`

2) a) En utilisant l'instruction `seq` et une instruction pour créer des matrices diagonales par blocs, créer une matrice identité de taille 4, puis une matrice diagonale de valeurs propres $1, 2, 3, 4$

3) a) Essayer [3]/commenter `A:=matrix(4,4)+1;` et `A:=matrix(4,4,1);`.

b) Remaquez que la fonction opérande : `op` permet d'enlever les crochets d'une matrice ou d'un vecteur. On ajoute donc une ligne tres facilement. (testez aussi `op(a+b*c)` et `op((a+b)*c)`

4) Une syntaxe très utile et à retenir est de créer une matrice à partir d'une fonction : `V:=matrix(6,6,(k,l)->x[k]^l);`

a) Calculez le déterminant de V et factorisez le.

Exercice II: $SL(\mathbb{Z})$

On a souvent besoin d'obtenir "au hasard" une matrice à coefficients entiers de déterminant 1, et souvent on aimerait avoir des coefficients petits. (Par exemple pour créer un exemple ou un exercice avec un type de réponse voulu). Quel résultat sur $SL_n(\mathbb{Z})$ va nous être utile ?

1) a) Créer une fonction `T(a,b,l,n)` qui retourne la matrice carrée de taille n avec des 1 sur la diagonale, $T_{a,b} = l$ et 0 ailleurs. Quel est l'inverse de la matrice `T(a,b,l,n)` ?

b) Vérifiez que votre variable `a` est bien libre [4], et créez la matrice 5×5 `A` de coefficients `a[i,j]` avec $0 \leq i, j \leq n - 1$. Et illustrez/commentez le lien entre une opétation ligne ou colonne et T.

2) Créez une fonction qui retourne un élément de $SL_n(\mathbb{Z})$ au hasard un peu compliqué.

3) Améliorez votre fonction pour que la matrice retournée ait ses coefficients inférieurs à N en valeur absolue.

Exercice III: Introduction aux matrices nilpotentes

1) a) Créez une fonction `JJ(n)` qui retourne une matrice de taille $n \times n$ ayant pour seuls termes non nuls des 1 sur la droite $j - i = 1$.

b) Créez une fonction `J(L)` qui associe à une liste `L` décroissante [5] d'éléments de $\mathbb{N}^*$, une matrice diagonale par blocs constitués des $JJ(n)$ correspondants.

2) a) On considère la matrice

$$N = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

En demandant à xcas de calculer des rangs de certaines matrices, déterminer l'unique L pour que $J(L)$ et N puissent être semblable. (On rappelle que l'on impose à L d'être décroissante à valeur dans $\mathbb{N}^*$)

b) Combien y a t'il de possibilités en taille 8 pour J ? On pourra vérifier avec $\prod_{n\geq 1} \frac{1}{1-t^n}$

3) Donnez une base de $\ker N^2$, et choisissez deux vecteurs a, b de $\ker N^3$ indépendants modulo $\ker N^2$. Que devez vous demander à xcas pour prouver que a, b conviennent.

4) Prenez un vecteur c dans $\ker N^2$ tel que $N(a), N(b), c$ soient indépendants modulo $\ker N$.

1. http ://www.math.jussieu.fr/~han/agreg
2. Notez que l'on peut copier une sortie pour en faire une entrée, même si l'aspect semble différent.
3. avec une version recente
4. comment la libérer ?
5. exemple : [2,2,1,1]

Prouvez avec xcas que votre choix de c est légitime.

5) On considère la famille de vecteurs $N^2(a), N(a), a, N^2(b), N(b), b, N(c), c$. Vérifiez que c'est une base, et conjuguez N pour la matrice de passage associée.

Exercice IV: Syntaxe d'algèbre linéaire via la combinatoire des matrices nilpotentes

1) Affecter à n la valeur 5, et créer une matrice formelle $A = \begin{pmatrix} a_0 & \dots & a_{n-1} \\ a_n & \dots & a_{2n-1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n^2-n} & \dots & a_{n^2-1} \end{pmatrix}$. On pourra le faire de 2 façons différentes. En créant la matrice à partir d'une fonction, ou bien en convertissant une liste $[a_0, \dots, a_{n^2-1}]$ en une matrice.

2) a) Créer une matrice J nilpotente de taille 5 avec 2 blocs de jordan de taille 2, et calculez le commutateur : $AJ - JA$

b) En déduire la matrice C de l'application linéaire de $\mathcal{M}_n \to \mathcal{M}_n$, $M \mapsto MJ - JM$ dans la base de votre choix. Quelle est la dimension du commutateur de J ?

c) Dessinez au brouillon la partition, et comparez[6] avec la somme des carrés des hauteurs des colonnes.

3) a) Trouver une façon d'obtenir le noyau d'une matrice à coefficients dans $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Vous devez toujours avoir un esprit critique sur ce que vous demandez à l'ordinateur, illustrez donc avec un exemple de taille 1×1 que votre instruction fait ce que vous voulez.

b) En déduire une base du commutateur de J dans $\mathcal{M}_5(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$.

c) Trouver un moyen rapide d'obtenir via votre logiciel un élément de coordonnées données (par exemple $(1, \dots, 1)$ dans cette base. (par ex avec un produit de listes).

4) a) Etudier `[1,2,3]*[a,b,c,d,e]`. Faites trouver l'écriture en base 2 de 67 et de 0. Comment créer une liste vide ? Comment enlever les crochets de `[1,2,3]`. Comment ajouter un élément à une liste ?

b) k étant un nombre donné, comment pouvez vous obtenir facilement la liste de tous les vecteurs de $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^k$.

c) Créez une liste `LCOM` de tous les éléments non nuls du commutateur de J. (⚠ il y en a probablement pour 2 à 3 min, on testera d'abord que c'est correct avec liste plus courte)

d) Comment selectionner des éléments dans une liste. Par exemple, selectionnez les éléments de $GL_2(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ du commutateur de J. Quel est le cardinal du stabilisateur de J sur $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$? (Vérifiez le à la main)

6. un élément du commutateur est déterminé par le choix de l'image des vecteurs primitifs de chaque bloc.