TP10 Méthodes type Newton, Polynomes d'endomorphismes

agreg 2013 (F.Han[1])

Exercice I:

[2] Lorsque l'on considère la décomposition de Dunford d'un endomorphisme $u = d+n$ de $\mathbb{C}^n$ et sa preuve utilisant les sous espaces caractéristiques, on ne voit pas comment trouver d et n sans connaitre les valeurs propres de u, et bien que d et n soient des polynômes en u les propriétes des coefficients de d et n en fonction de ceux de u sont assez dissimulées. Par exemple, on peut trouver un argument simple pour montrer que si u est réel, d et n aussi, mais que peut on dire avec d'autres corps ?

1) Créer les matrices companion C_1 et C_2 des polynômes $(x^3-8)^2$ et $(x^2-4)^3$. Ainsi que la matrice A diagonale par blocs de C_1 et C_2.

a) Justifier sans calculs que sa décomposition de Dunford est réelle.

b) ⚠ On se mettra en mode complexe, en on activera les racines carrées, pour donner une chance à jordan de fonctionner. De tête, et aussi avec votre logiciel, donner la forme de jordan de A.

c) Quelle est sa forme de jordan rationnelle de A (avec et sans les racines carrées et le mode complexe activés) ? Que représente ses blocs diagonaux ? (On pourra aussi s'aider de `rat_jordan(companion((x^3-2)^2,x));`. Quelle est la décomposition de dunford de `rat_jordan(A)` ?

d) Trouver la décomposition de jordan de A en récupérant la matrice de passage.

Exercice II: syntaxe préléminaire

1) On pose `p:=x^2+1`; En utilisant le symbole p, créer la fonction f qui à x associe la dérivée de p. On pose `u:=x^2;` vérifier `f(x);` et `f(u);`

2) Comment obtient t'on les couples de bezout des polynômes. x^2+2 et x ?

Exercice III: Mini texte[3] sur la Décomposition de "Dunford"

Nous allons donc fournir une preuve algorithmique de cette décomposition qui permettra de résoudre ces problèmes.

Soit k un corps de caractéristique nulle, et $k[u]$ une k-algèbre de dimension finie. Notons m le polynôme minimal de u sur k. (On suppose $\deg m > 1$). On a alors $k[u] \simeq k[X]/(m)$. Il s'agit de montrer qu'il existe des éléments[4] s_u, n_u de $k[u]$ tels que : $u = s_u + n_u$, le polynôme minimal de s_u soit sans facteurs multiples, et que n_u soit nilpotent. Nous allons pour cela créer une suite récurrente comme dans la méthode de Newton, qui sera stationnaire de limite s_u. Notons $\mathcal{N}$ le radical nilpotent de $k[u]$, autrement dit l'ensemble des éléments nilpotents de $k[u]$ (c'est un idéal, et on pourrait montrer que c'est l'intersection des idéaux premiers de $k[u]$ ce que l'on n'utilisera pas). Notons $p(u)$ un générateur de $\mathcal{N}$ où $p \in k[X]$. On remarque alors que p est sans facteurs multiples, nous allons trouver un élément s dans $k[u]$ tel que $p(s) = 0$ par la méthode de Newton (Qui se terminera ici en un nombre fini d'itérations).

Comme p et p' sont premiers entre eux, on peut écrire un multiple de $p'(u)$ comme la somme d'un élément nilpotent et d'un inversible, ce qui prouve que $p'(u)$ est un inversible de $k[u]$.

On considère alors la suite récurrente d'éléments de $k[u]$:

$$u_0 = u, u_{n+1} = u_n - p(u_n)/p'(u_n)$$

On peut montrer de l'on a dans $k[X, Y]$:

$$p(X+Y) - p(X) - Y.p'(X) \in (Y^2)$$

On en déduit donc que si la suite est bien définie jusqu'à l'entier n (ie $p'(u_{n-1})$ est inversible dans $k[u]$), alors $p(u_n) \in \mathcal{N}^{2^n}$. Nous pouvons alors montrer que u_{n+1} existe encore lorsque n est supérieur à 1 puisque $p'(u_n) - p'(u_{n-1})$ est nilpotent. Il est en effet dans l'idéal engendré par $u_n - u_{n-1}$ qui est inclus dans $(p(u_{n-1})) \subset \mathcal{N}$, et comme l'anneau $k[u]$ est commutatif, la somme d'un nilpotent et d'un inversible est un inversible. On peut donc conclure que $p'(u_n)$ est inversible et donc que u_{n+1} existe.

Il est maintenant clair que la suite u_n est constante à partir d'un certain rang, notons s_u sa limite, alors l'élément $n_u = u - s_u$ est nilpotent et p est le polynôme minimal de s_u.

1) a) Trouver un exemple à coefficients entiers de matrice où l'algorithme fasse au moins deux itérations avec des valeurs propres différentes et non rationnelles.

1. http ://www.math.jussieu.fr/~han/agreg
2. On pourra dans un premier temps ne lire que l'introduction et passer à l'exercice suivant si le temps presse.
3. Cf leçon polynômes d'endomorphismes, ...
4. décomposition semi-simple+nilpotent

b) Programmez cette methode pour trouver la réduction de Dunford de votre exemple, et vérifier que N et S commutent bien.

2) Expliquer pourquoi p est sans facteurs multiples, et comment trouver facilement p à partir de m. Justifier la caractéristique nulle.

3) On pourra expliquer pourquoi dans un anneau commutatif la somme d'un inversible et d'un nilpotent est un inversible

4) Pourquoi n_u est il nilpotent, et pourquoi p est il le polynôme minimal de s_u

5) a) Expliquer le lien avec la décomposition de Dunford.

b) Montrer que l'on peut travailler avec le polynôme caractéristique à la place du polynôme minimal.