Université de Paris 7 | **TP12 Anneaux principaux** | **agreg 2012-2013**
(F.Han [1])

TP12 Anneaux principaux

Exercice I: Matrices $GL(\mathbb{Z})$-équivalentes

[2] (Cf par exemple leçon "opérations lignes/colonnes") L'algorithme permettant d'obtenir les facteurs invariants : On le fait sur $\mathbb{Z}$ ou dans le cadre Euclidien, car on n'a pas d'algorithme pour obtenir les nombres de Bezout dans le cadre principal.

Cet algorithme est déjà programmé dans xcas sur $\mathbb{Z}$. Quelle est cette commande (retenir le nom Cf livres en anglais) ? On pourrait aussi le faire dans $k[x]$, mais nous nous limiterons ici à $\mathbb{Z}$. Nous allons procéder en quelques étapes. 1a) Trouver un minimum non nul (au sens du stathme) de la matrice. 1c) par opérations lignes/colonnes on fait diminuer les autres coefficients de sa ligne et de sa colonne. 2) On recommence 1a) et 1c) tant que c'est possible. lorsque l'on a fini, le minimum n'a que des 0 sur sa ligne et sur sa colonne. On garde cette valeur, on raye la ligne et la colonne, et l'on recommence avec la matrice plus petite. On obtient alors une matrice diagonale équivalente (dans l'anneau) à la matrice de départ, ce qui est déjà bien. (Quel théorème sur les groupes abélien de type fini cela prouve t'il ?) 3) On peut passer de cette forme aux diviseurs élémentaires par lemme chinois, ou en continuant l'algorithme de maniere un peu modifiée. On aurait pu aussi modifier l'algorithme avant de rayer une ligne et une colonne de manière à n'effectuer cette étape que lorsque le min divise tous les coefficients de la matrice.

1) a) Faire une procédure `minval` qui donne le couple (i, j) tel que $A_{i,j}$ soit un coefficient de la matrice A ayant la plus petite valeur absolue non nulle. (Elle pourra éventuellement retourner $(-1, -1)$ si A est la matrice nulle, et l'on utilisera les indices du logiciel. Ex en mode xcas on commence à 0.)

b) Prendre [3] un exemple à coefficients entiers noté A. Repérer son plus petit coefficient non nul : $A_{i,j}$ en valeur absolue, et créer une matrice $U \in GL(\mathbb{Z})$ telle que $(A.U)_{i,l}$ soit le reste de la division de $A_{i,l}$ par $A_{i,j}$ pour $l \neq j$, et $(A.U)_{i,j} = A_{i,j}$.

c) Faire une procédure `trans(A,i,j)` qui pour une matrice A telle que $A_{i,j} \neq 0$ donne une matrice A', $GL(\mathbb{Z})$-équivalente à A, telle que $\forall l \in \{1 \dots n\} - \{j\}$, $|A'_{i,l}| < |A_{i,j}|$ et $\forall l \in \{1 \dots n\} - \{i\}$ $|A'_{l,j}| < |A_{i,j}|$.

2) a) Essayer [4] de programmer la partie qui trouve une matrice diagonale $GL(\mathbb{Z})$-équivalente à A. On appellera cette procédure `Zequiv`. (On remarquera qu'une matrice dont les coefficients non nuls sont les seuls coefficients non nuls de leur ligne et de leur colonne est équivalente via des permutations à une matrice diagonale. Dans notre procédure on ne cherchera pas à trouver cette permutation.)

b) Obtient t'on forcément les diviseurs élémentaires ?

c) Modifiez votre programme pour ne rayer une ligne et une colonne que dans le cas où le min divise tous les coefficients de la matrice.

Exercice II:

1) On considère les sous groupes N_1, N_2, N_3 de $M = (\mathbb{Z}^4, +)$ engendré par les vecteurs $\begin{pmatrix} 8 & 4 & 60 & 0 \\ 8 & 12 & 18 & 36 \\ 16 & 16 & 32 & 32 \\ 32 & 32 & 32 & 32 \end{pmatrix}$, et $\begin{pmatrix} 8 & 4 & 60 & 0 \\ 8 & 12 & 18 & 36 \\ 16 & 16 & 32 & 32 \\ 24 & 28 & 40 & 68 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 8 & 4 & 60 & 0 & 16 \\ 8 & 12 & 18 & 36 & 28 \\ 16 & 16 & 32 & 32 & 32 \\ 24 & 28 & 40 & 68 & 68 \end{pmatrix}$. Décomposer M/N_i en produit de groupe monogènes. Quel est le cardinal de M/N_i ?

2) On considère le réseau engendré par les vecteurs $v_1 = (1, 2)$, $v_2 = (-1, 1)$, $v_3 = (0, 2)$.

a) Dessiner naïvement en bleu les points de ce réseau de coordonnées dans $[-5, 5]$

1. http ://www.math.jussieu.fr/~han/agreg
2. $A \sim B \iff \exists P, Q \in GL(\mathbb{Z}),\ P^{-1}.A.Q = B$
3. On s'entraine à la main sur un exemple, pour mieux faire la procédure de la question suivante
4. Remarquer que la décroissance stricte oblige l'algorithme à se terminer, ce qui donne une preuve du résultat suivant : Tout groupe abélien de type fini se décompose en produit de groupes monogènes. Du même genre : tout groupe abélien fini est isomorphe à un produit de groupe cyclique.

b) Rajouter en rouge ceux du réseau engendré par v_1, v_2. idem avec v_1, v_3 et v_2, v_3. Peut ont forcément extraire une base d'une famille génératrice ?

Exercice III: base adaptée

Lorsque M est un $\mathbb{Z}$ -module de type fini et N un sous module de M, on dit que $e_1, \ldots, e_n$ est une base adaptée de M pour N si l'ensemble $\{m_1e_1, \ldots, m_ne_n\}$ privé de 0 est une base de N où les (m_i) sont les diviseurs élémentaires de N éventuellement complétes par des zéros. Remarquer que si N est engendré par l'image de A, pour trouver une base adaptée il faut avoir conservé les opérations sur les lignes. En utilisant une fonction intégré dans le logiciel, trouver une base adaptée aux modules de l'exercice II.

Exercice IV: $k[x]$-modules de type fini

1) On considère la matrice sous forme de Jordan $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Répondre de tête aux questions suivantes : Quel est son polynôme minimal, le polynôme caractéristique ? Les diviseurs élémentaires ?

2) En déduire la forme de smith de $M - x.Id$, et vérifier votre réponse avec le logiciel. (On pourra chercher l'instruction pari pour la forme de smith d'une matrice à coefficients polynomiaux. Cf Menu aide¿Manuels¿Pari-GP)