Université de Paris 7
(F.Han [1])

TP13 Réseaux ; modules

agreg 2013

Exercice I: Illustrations Géométriques

1) Syntaxes géométriques et nombres complexes.

a) On peut déssiner un point par son affixe complexe. Essayer `p:=point(2-3*i)`. On aimerait avoir ce point en bleu et grosse croix. Il existe une façon interactive. On tape `point(2-3*i,` et l'on va chercher dans le menu l'option d'attributs (on remarquera le raccourci clavier pour cette option) dans le menu déroulant pour les graphiques.

2) Créez avec `seq` la liste `l1` (entre crochets) des droites d'équation $x = k$ pour k entier variant de -15 à 15. (en pointillés verts)

Tout objet géométrique peut être transformé par une similitude via les opérations usuelles sur les complexes (pour une liste d'objets on peut faire aussi la multiplication par un complexe, en revanche, pour l'addition c'est un peu plus compliqué, il vaut mieux ajouter un vecteur de même taille pour translater les éléments terme à terme). ⚠ Attention aux syntaxes proches mais ayant un autre sens :

a) Comparez : `(a,b,c)*d`, `[a,b,c]*d`, `(a,b,c)+d`, `[a,b,c]+d` et `[a,b,c]+[d$3]`

b) En utilisant `l1`, créez la liste `l2` des droites horizontales puis le quadrillage d'intersection $\mathbb{Z}[i]$ en pointillés verts que l'on notera `ZI`

c) Créez l'ensemble des points à coordonnées entières en taille 2. (C'est un peu osé, mais on pourra tenter une intersection.) Comment fait on pour ne pas afficher le nom ?

d) Placez vous en mode géométrie intéractive. (Cf Menu déroulant, nouvelle figure 2d), et rappelez votre variable ZI pour afficher le reseau.

e) Trouvez un instruction qui récupère l'affixe a du point p et affichez les points du réseau $a.\mathbb{Z}[i]$. Déplacez le point p avec le mode pointeur, et expliquez une division Euclidienne dans $\mathbb{Z}[i]$. Ex : diviser (géométriquement) $10 + 7i$ par p. (On pourra aussi dessiner un cercle)

f) Vérifiez avec xcas.

g) Etudiez les attributs des objets graphiques, et affichez de nouveau `ZI` mais en rouge, sans tout redefinir.

Exercice II: Anneaux d'entiers

1) a) On considère maintenant l'anneau $R = \mathbb{Z}[i.\sqrt{5}]$. et I l'idéal engendré par 2 et $3+3i\sqrt{5}$. Donner une famille génératrice de I en tant que groupe abélien. Quel est le cardinal de R/I (On appellera ce nombre la norme de l'idéal I).

b) soit $z \in R$. Quelle est la matrice de la multiplication par z de R dans R ? Quel est son déterminant et le cardinal de $R/(z)$ (ie la norme de z). L'idéal I est il principal ?

c) Dessiner sur un même graphique le réseau associé à I et celui de $\mathbb{Z}[i\sqrt{5}]$.

d) Completer :

Une similitude conserve les $\boxed{}$. Déduire du dessin [2] que I n'est pas principal.

2) On prend maintenant $R = \mathbb{Z}[i.\sqrt[4]{5}]$ et $I = (2, 1+\sqrt{5})$. Calculer la norme de I et celle d'un élément z (On remarquera que c'est encore le déterminant de la multiplication par z). L'idéal I est il principal ?

1. http ://www.math.jussieu.fr/~han/agreg
2. On prendra garde au fait qu'il n'y a pas unicité de la base