Université de Paris 7 | **TP16 Résultants** | **agreg 2013 (F.Han [1])**

Exercice I: Equation d'une courbe paramétrée

On considère la courbe plane paramétrée :

$$t \mapsto (t.(t^2-1)^2, t^2+1)$$

1) Quelle est son équation cartésienne de son adhérence dans le plan affine réel ?
2) Faire un dessin à partir de la forme paramétrique et de l'équation cartésienne trouvée.
3) Même question avec la courbe paramétrée :

$$t \mapsto (\frac{\cos(t)+1}{\sin(t)+2}, \frac{\sin^3(t)}{\sin(t)-3}$$

Exercice II:

1) En utilisant un résultant, donner le polynôme minimal de $5^{1/3}+\sqrt{5}$ sur $\mathbb{Q}$.
2) En utilisant un résultant, donnez le polynôme minimal de $5^{1/3}+\sqrt{2}+5^{1/7}+1+2^{1/5}$ sur $\mathbb{Q}$.

Exercice III: Contour apparent

On considère un ballon modélisé par une sphère d'équation $(x-1)^2+(y-2)^2+(z-4)^2-4$. Les rayons du soleil arrivent selon le vecteur $(1,0,2)$.

1) Donnez une équation nulle sur le contour de l'ombre portée du ballon dans le plan $z=0$.

2) Dessinez le cylindre de base cette projection et d'axe parallele aux rayons du soleil en quadrillage non rempli sur le meme dessin que la sphere et le plan $z=0$.

Exercice IV: Intersections de courbes planes

On considère les courbes d'équation :

$$C_1 : xy = 4 \text{ et } C_2 : y^2 = (x-3).(x^2-16).$$

1) Tracer C_1, C_2 avec des couleurs différentes.

2) a) Donner une équation de la projection de $C_1 \cap C_2$ sur l'axe des x selon (Oy). Factoriser la sur $\mathbb{R}$.

b) Pourquoi ne trouve t'on pas 6 points ?

3) a) Etudier la projection sur l'axe des y de $C_1 \cap C_2$ depuis le point $(1,1)$. Ce point est il solution du système ?

b) Comment tester si la droite $y=-2x+1$ n'a pas de solutions communes (même dans $\mathbb{C}$) avec $C_1 \cap C_2$.

c) Etudier maintenant la projection depuis le point $(1,1)$ sur la droite $y=-2x$.

d) Pourquoi est il maintenant de degré 6 ? Pourquoi $(1,-2)$ est il dans la projection de $C_1 \cap C_2$

e) Trouver une valeur approchée des points de projection, et dessiner les droites passant par ces points et le centre de projection.

4) a) On prend maintenant $C_1 := (x-2)^2+y^2-4$ et $C_2 : y^2 = (x-3).(x^2-16)$. Dessiner C_1, C_2, et étudier le résultant en y de ces 2 équations. (Adapter le nombre de points pour obtenir un dessin assez joli)

b) Interpréter les racines de ce résultant en fonction de votre dessin, et aussi la multiplicité de ces racines.

c) Factoriser ce résultant de manière approchée, puis exacte dans $\mathbb{R}[x]$.

d) Trouver les coordonnées exactes des solutions réelles et complexes de $C_1 \cap C_2$. Dessiner sur l'axe des Ox les racines de ce résultant en même temps que les 2 courbes. Que remarquez vous ?

Exercice V: Enveloppes

On considère une famille de courbes algébriques planes $(\Gamma(t))_{t\in\mathbb{R}}$, dépendant de manière différentiable de t. On définit l'intersection $E(t)$ d'une courbe $\Gamma(t)$ et de sa "voisine" comme la limite de l'intersection

1. http ://www.math.jussieu.fr/~han/agreg

$\Gamma(t)\cap\Gamma(u)$ lorsque u tend vers t par valeurs différentes de t. L'enveloppe de la famille Γ sera par définition la réunion des ensembles $E(t)$ lorsque t décrit $\mathbb{R}$.

1) Comparer le resultant en t de $t^2.a + tb + c$ avec $2ta + b$ lorsque a est nul ou pas.

2) a) Trouver l'équation de l'enveloppe de la famille de courbes d'équations :

$$t^2.(x^2 + y^2 - 1) + t.(xy + y^2 - x^2) + (x^2 + 2y^2 - 1)$$

b) Factoriser votre résultant, et expliquer pourquoi l'un des facteurs ne compte pas dans l'équation de l'enveloppe. (Eventuellement corriger votre résultat précédent)

3) Dessiner cette enveloppe et quelques courbes $\Gamma(t)$. On pourra faire apparaitre un bouton.

Exercice VI: Polynôme minimal d'un algébrique. Cf [BPR] p 121 ou [Coh]

Soit θ un élément entier sur $\mathbb{Q}$, et a un élément de $\mathbb{Q}[\theta]$. Il s'agit de comprendre comment trouver le polynôme minimal de a sur $\mathbb{Q}$ connaissant a en fonction de θ et le polynôme minimal de θ sur $\mathbb{Q}$.

1) Choisir un polynôme P unitaire irreductible sur $\mathbb{Z}$ de degré n non ridicule (par exemple 4, mais on s'arrangera pour que les instructions suivantes soient facilement réutilisables après une réaffectation de P). On note θ une racine de P. On considère l'élément $a = \frac{1}{d}(\sum_{i=0}^{n-1} a_i.\theta^i)$. On notera H le polynôme $\sum_{i=0}^{n-1} a_i.x^i)$. (Pour illustrer la méthode, on pourra laisser des variables formelles pour les a_i)

a) Trouver la matrice de la multiplication par a dans $\mathbb{Q}[\theta] = \mathbb{Q}[X]/(P)$.

b) Calculer son polynôme caractéristique, et comparez le au résultant en y de $P(y)$ avec $dx - H(y)$.

c) Montrer que $d^{\deg P}.Res_y(P(y), d.x - H(y))$ est une puissance du polynôme minimal de a sur $\mathbb{Q}$. Illustrer ceci sur un exemple où ils ne sont pas égaux.

Exercice VII: intersection de surfaces

1) On considère les deux quadriques : $S_1 : x^2 + y^2/4 + z^2/9 = 1$ et $S_2 : x^2 + y^2 + z^2 = u$, dépendantes d'un paramètre u.

a) Etudier la projection de l'intersection $S_1 \cap S_2$ selon Oy. Que remarquez vous ? Pour quelles valeurs de u est ce dégénéré ?

b) Bien que l'équation soit très simple, quel déterminant permet de savoir si une conique est dégénérée ?

c) Faites des dessins.

d) Pour $u = 3$; étudier la projection de $S_1 \cap S_2$ sur le plan (xOy) depuis le point $(5, 5, 10)$.

e) Puis ajustez votre dessin. Pensez vous que l'équation de cette projection est irréductible sur $\mathbb{C}$?

2) Remarquez que les 3 projections de $S_1 \cap S_2$ selon Ox, Oy, Oz sont des coniques doubles. Comment ferait on avec $S_3 = 7x^2 + 4xy + 4xz + 5y^2 + 12yz + 6z^2 + 1$ et $S_4 = -x^2 - 2xy - 2xz - 4y^2 - 6yz - 3z^2 - 2$ pour trouver 4 points tels que les projections de $S_3 \cap S_4$depuis ces points soient des coniques doubles ?