Université de Paris 7
(F.Han[1])

TP17 Courbes rationnelles

agreg 2013

Il existe des courbes planes que l'on peut paramétrer avec des fractions rationnelles. On les appelle des courbes rationnelles. Il est classique que les coniques non dégénérées sont rationnelles. De même, une courbe irréductible de degré 3 avec un point double est rationnelle. On a probablement déja rencontré ce genre de techniques par exemple pour calculer certaines intégrales.

On se propose d'illustrer sans démonstrations un phénomène plus général : Une courbe plane irréductible avec $\frac{(d-1)(d-2)}{2}$ points doubles est rationnelle.

En vous aidant des développements suivants, préparez un exposé sur les courbes planes rationnelles et leurs applications en intégration.

Exercice I: Paramétrisation d'une conique.

1) Créer une conique lisse (non dégénérée) du plan au hasard passant par le point $(1, 1)$. (ie donnez une forme quadratique non dégénérée nulle en $(1, 1, 1)$).

2) Trouver une paramétrisation par des fractions rationnelles de la conique affine $\mathcal{C}$ privée d'un point. Trouver aussi une paramétrisation de $\mathcal{C}$ par $\mathbb{P}_1$. Vérifiez votre résultat avec l'équation cartésienne.

3) a) Trouver une forme paramétrique de la tangente en un point général de $\mathcal{C}$.

b) Trouver son équation cartésienne.

c) Dessiner une partie affine de ces constructions. On pourra créer une fonction `paff` qui converti des coordonnées en l'affixe du point affine correspondant. On pourra ensuite donner la possibilité de déplacer le point en utilisant la fonction `element` pour faire bouger le paramètre.

Exercice II: Cubique plane rationnelle

Une courbe plane d'équation $P(x, y) = 0$ passant par $(1, 1)$ est dite singulière en ce point si $\frac{\partial P}{\partial x}$ et $\frac{\partial P}{\partial y}$ s'annulent en ce point.

1) Remarquer que cette courbe est singulière en $(2, 1)$ si et seulement si P est dans l'idéal $((x-2)^2, (x-2)(y-1), (y-1)^2)$. Créer un élément de degré 3 avec de petits coefficients entiers aléatoires[2] dans cet idéal, et essayer de dessiner la courbe d'équation $P(x, y) = 0$.

2) Pour $(a, b) \neq (0, 0)$, on note $d_{a,b}$ la droite passant par $(2, 1)$ et le point $(a + 2, b + 1)$. Calculer l'intersection de la droite $d_{a,b}$ avec la courbe précédente. Montrer qu'il y a une racine double connue et un point résiduel noté $M_{a,b}$. Justifiez ces expressions en terme de racines d'un polynôme à une variable.

3) Dessiner cette courbe paramétrée par $\mathbb{P}_1$ dans le plan affine. On pourra ensuite donner la possibilité de déplacer le point en utilisant la fonction `element` pour faire bouger le paramètre.

Exercice III: Quartiques rationnelles, élimination

1) Nous allons créer un polynôme de degré 4 avec 3 points singuliers. On explique ici un moyen d'obtenir un exemple assez général.

a) Choisir 3 points distincts non alignés, et différents de $(0, 0)$. On note $l_1, \ldots, l_3$ les équations des droites passant par deux de ces points. On considère l'idéal $I = (l_1.l_2, l_2.l_3, l_3.l_1)$. Quel est l'ensemble des points annulant tous les éléments de I ?

b) Décrire I^2. Déssiner une courbe dont l'équation est un élément assez général de degré 4 de I^2.

c) Trouver un élément irréductible P de I^2 de degré 4 nul en $(0, 0)$.

2) Nous allons maintenant paramétrer cette courbe de degré 4 avec des fractions rationnelles.

a) Prendre 2 coniques C_1, C_2 passant par les 3 points choisis et $(0, 0)$.

b) En projetant l'intersection de C_1 et $P = 0$ sur O_x et O_y, obtenir un point de la quartique $P = 0$ en général différent des 4 donnés.

c) En déduire une paramétrisation rationnelle de la quartique.

d) Faire une illustration graphique. On pourra ensuite donner la possibilité de déplacer le point en utilisant la fonction `element` pour faire bouger le paramètre.

---

1. http ://www.math.jussieu.fr/∼han/agreg
2. on pourra utiliser add et rand