Université de Paris 7 | **TP20** | **agreg 2013 (F.Han[1])**

Exercice I: Localisation des zéros. Th Rolle, Suites de Sturm

DÉFINITION : *Soit $R \in \mathbb{R}(x)$. On dit que R a un saut de $-\infty$ à $+\infty$ en un réel t si $\lim_{x\to t, x<t} R(x) = -\infty$ et $\lim_{x\to t, x>t} R(x) = +\infty$. On appelle indice de Cauchy $I_{a,b}(R)$ le nombre de sauts dans $]a,b[$ de $-\infty$ à $+\infty$ moins le nombre de sauts dans $]a,b[$ de $+\infty$ à $-\infty$.*

EXEMPLE : Si R n'a que des pôles simples, $I_{a,b}(R)$ est la somme des signes des résidus des pôles de R qui sont dans $]a,b[$.

On considère une famille $P_1 \dots P_n$ d'éléments de $\mathbb{R}[x]$ et deux réels a, b avec $a < b$. On dit que $(P_1, \dots, P_n)$ est de Sturm sur $[a,b]$ si :

- $\forall k \in \{2, \dots, n-1\}, \forall x \in]a,b[, P_k(x) = 0 \Rightarrow P_{k-1}(x)P_{k+1}(x) < 0$
- $\forall x \in]a,b[, P_n(x) \neq 0$

On dira que c'est une suite de sturm généralisée s'il existe un élément d de $\mathbb{R}[x]$ divisant tous les P_i pour i appartenant à $\{1, \dots, n\}$ tel que (P_i/d) soit de Sturm.

PROPOSITION : *Si $(P_i)_{1\leq i\leq n}$ est une suite de Sturm généralisée sur $[a,b]$ telle que $P_1(a).P_1(b) \neq 0$, alors $I_{a,b}(R) = V(a) - V(b)$ où V(x) est le nombre de variation de signes dans la suite des termes non nuls de $P_1(x), \dots, P_n(x)$*

Application : On souhaite trouver le nombre de zéros d'un polynôme P dans l'intervalle $[a,b]$. On pose $P_1 = P$ et $P_2 = P'$. Puis on note pour $i > 2$ P_i l'opposé du reste de la division de P_{i-2} par P_{i-1}. Alors P_i est de Sturm généralisé sur $[a,b]$ et l'indice de Cauchy de P_1/P_2 est le nombre de zéros de P dans $[a,b]$.

1) Etudier les fonctions `sign` (quelle est la valeur retournée, ou -1,0,2) et `horner`. Comment evaluer un polynôme du type : `P:=2*x^3+4*x-5` en $\sqrt{3}$?

2) Ecrire un programme qui calcule les P_i.

3) En déduire un programme qui calcule le nombre de zéros de P dans $[a,b]$. (On n'utilisera pas la commande sturm de votre logiciel.)

4) Etudier la commande xcas correspondante ainsi que sa documentation. Quelle différence constatez vous ?

Exercice II: Coût[2] des opérations élementaires

Préparez un exposé sur les résultats suivants :

- Modèle à coût fixe : Ex les flottants, les opérations dans $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$.
- Modèle à coût bilinéaire :

Opérations dans $\mathbb{Z}$:

$M \pm N$	$O(\sup(\log N, \log M))$
$M.N, M \leq N$	Méthode classique : $O(\log N.\log(M))$; T.F discrète : $O(\log N.\log^3(\log N))$
$M/N, M \leq N$	$O(\log M.\log(N/M))$
$N = a^n$	$O(\log n)$ multiplications, donc le coût est en : $O(n^2) = O((\log N)^2)$
$u \wedge v$, Bezout, $u, v \leq N$	$O((\log N)^2)$. Cas le pire et suite de Fibonacci

(NB : pour TF discrete, on peut ameliorer le $O(\log N.\log^3(\log N))$. Cf Knuth vol2 page 311)

Opérations dans $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$

$\pm$	$O(\log N)$
. ou /	$O((\log N)^2)$
a^n	$O((\log n.(\log N)^2)$

- Pivot de Gauss sur une matrice de taille n : $O(n^3)$ multiplications et additions de coefficients.
- Symbole de Jacobi : même ordre de grandeur que le pgcd.

1. http ://www.math.jussieu.fr/~han/agreg
2. Il faut connaitre ces résultats et savoir les démontrer sauf éventuellement le cout de la multiplication rapide.