Université de Paris 7 | **Coniques de Poncelet**[1] | agreg 2013 (F.Han)

Oral blanc. Préparation 4h

1 Propriétés élémentaires des coniques

1.1 Définitions et premières propriétés

On considère une forme quadratique non nulle Q sur $\mathbb{R}^3$ que l'on identifie à sa matrice dans la base canonique. On définit l'ensemble

$$C_Q = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \middle| \begin{pmatrix} x & y & 1 \end{pmatrix}.Q.\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \right\}$$

On utilisera ici la terminologie géométrique[2] pour le mot conique. On dira donc que C_Q est une conique de $\mathbb{R}^2$ si cet ensemble contient au moins deux éléments distincts. En particulier la signature de Q n'est pas quelconque[3].

On dira que C_Q est une conique dégénérée si ce lieu contient une droite. On pourrait montrer que cette condition est équivalente au fait que Q soit une forme quadratique dégénérée.

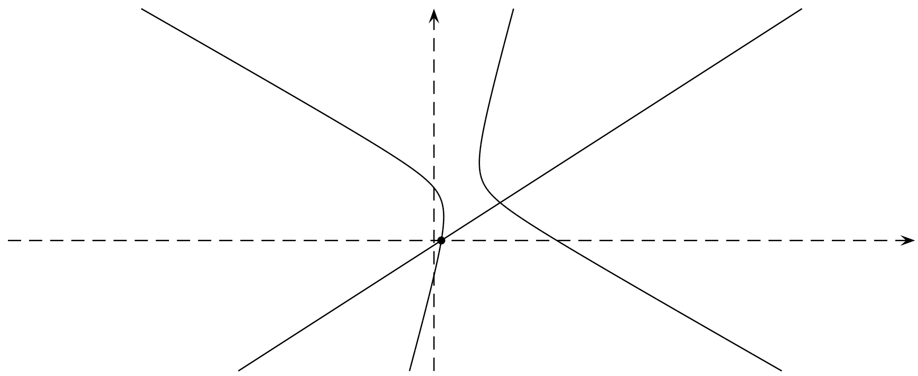
1.2 Tangentes ; Conique duale

On rappelle que si C_Q est une conique non dégénérée, alors la tangente en un point (x_0, y_0) de C_Q a pour équation $\begin{pmatrix} x_0 & y_0 & 1 \end{pmatrix}.Q.\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0$.

On en déduit qu'une droite affine d'équation $u_0.x + u_1.y + u_2 = 0$ est tangente à C_Q si et seulement si $\sum_{0 \le i,j \le 2} a_{i,j} u_i.u_j = 0$ où la matrice $(a_{i,j})$ est l'inverse de Q. L'ensemble des droites tangentes à C_Q sera appelé la conique duale de C_Q.

1.3 Paramétrisation

On peut aussi montrer que toute conique non dégénérée, éventuellement privée d'un point peut être paramétrée avec des fractions rationnelles. Par exemple la conique d'équation $2x^2 + 3x.y - y^2 + y - 15x + 6$ déssinée ci dessous peut être paramétrée en utilisant les droites contenant un fixe ω de cette conique.



2. plutot que la définition algébrique qui est moins restrictive
3. Quelles sont les possibilités ?

2 La correspondance biquadratique

On considère 2 coniques C_1 et C_2 non dégénérées du plan affine $\mathbb{R}^2$. On suppose [4] de plus que C_2 est paramétrée par (t^2, t), on notera m_t le point de C_2 correspondant. Pour deux points distincts de C_2 : m_t et m_u, la droite $(m_t m_u)$ est tangente à C_1 si et seulement si t, u vérifient une équation du type : $P(t,u) = 0$ où P est un polynôme symétrique [5] en t, u de degré 2 en t et aussi en u. On notera

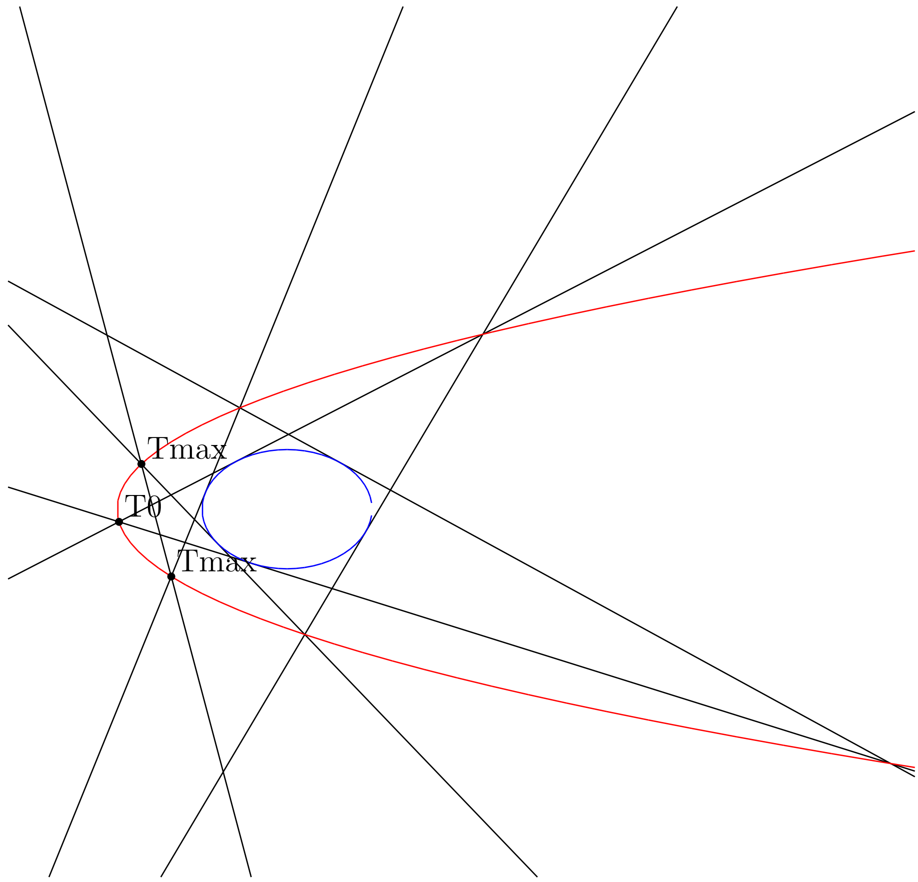
$$P(t,u) = a(u)t^2 + b(u)t + c(u)$$

Par exemple si C_1 a pour équation $x^2 - 4.x + 2.y^2 + 3 = 0$ on trouve $P(t,u) = -2.t^2.u^2 + t^2 + u^2 - 6.t.u - 6$

Pour $t_0 \in \mathbb{R}$, on note $\{t_1, t_{-1}\}$ les racines (éventuellement complexes) de $P(t, t_0) = 0$. Pour $i \in \mathbb{N}^*$, on note t_{i+1} la racine du polynôme [6] $\dfrac{P(t,t_i)}{(t - t_{i-1})}$ et t_{-i-1} la racine du polynôme $\dfrac{P(t,t_{-i})}{(t - t_{1-i})}$. On remarquera que si t_1 ou t_{-1} est réel, alors $\forall i \in \mathbb{Z}$, $t_i \in \mathbb{R}$.

De plus, on montre facilement que t_{i+1} s'exprime en fonction de t_{i-1} et de $a(t_i), b(t_i)$, ce qui nous permet d'obtenir les t_i par récurrence, et aussi d'affirmer que t_i sera toujours une fraction rationnelle en t_1, et que $t_i + t_{-i}$ et $t_i.t_{-i}$ seront des fractions rationnelles en t_0. Nous aurons en fait un résultat plus précis que l'on pourra illustrer [7] :

Proposition 1 *Pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, il existe une conique Γ_i telle que pour tout choix de t_0, si t_i et t_{-i} sont distincts et réels, la droite $(m_{t_i} m_{t_{-i}})$ est tangente à Γ_i.*



De plus, on pourrait aussi illustrer que si C_1 et C_2 se coupent en 4 points distincts, alors Γ_i contient $C_1 \cap C_2$. On pourrait aussi trouver une extension de cette remarque en terme d'algèbre linéaire qui serait plus simple à vérifier et qui resterait valable tant que $C_1 \neq C_2$.

4. Commentez cette hypothèse
5. que l'on peut expliciter en fonction de C_1
6. pourquoi est ce un polynôme ?
7. On pourra d'abord essayer d'illustrer cette proposition graphiquement mais aussi symboliquement. On pourra aussi expliquer comment obtenir l'équation cartésienne d'une conique dont on connait une forme paramétrique de la duale.

3 Paires de Poncelet

On dit que C_1 et C_2 sont en situation de Poncelet (plus précisément que C_2 est n-circonscrite à C_1), s'il existe un polygône à n côtés, avec $n \geq 3$ dont les sommets soient sur C_2 et les côtés soient tangents à C_1. (On entend par polygône la donnée d'un ensemble de n points du plan indexés par $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Ces points seront appelés des sommets, et on definit les cotés du polygône comme les droites passant par 2 sommets dont la différence des indices fait ± 1. Le théorème de Poncelet affirme que si deux coniques sont en situation de Poncelet pour un polygône à n côtés, alors toute tangente à C_1 est un coté d'un polygône ayant ses n sommets sur C_2 et ses n cotés tangents à C_1.

Lorsque $3 \leq n \leq 5$, il est très facile[8] de produire des exemples de coniques en situation de Poncelet. En revanche, pour $n \geq 6$ ça n'est pas si simple.

3.1 Exemple : cercles concentriques

On peut par exemple regarder le cas où C_i a pour équation $x^2 + y^2 = r_i^2.z^2$, et même raisonner dans le plan affine réel Euclidien avec $r_1 < r_2$. Dans ce cas, le polygône a n côtés est forcémenent régulier, et il existe si et seulement si $\dfrac{r_1}{r_2} = \cos(\dfrac{\pi}{n})$. Donc deux cercles concentriques ne sont pas toujours en situation de Poncelet.

Bien qu'il soit toujours possible de faire un changement de repère projectif (sur $\mathbb{C}$) qui ramène l'équation d'une conique non dégénérée sous la forme $x^2 + y^2 = r^2.z^2$, il n'est pas toujours possible[9] de transformer simultanément les équations de C_1 et C_2 sous la forme $x^2 + y^2 = r_i^2.z^2$. L'étude des cercles concentriques est donc trop restrictive. On peut par exemple produire facilement une paire de coniques en situation de Poncelet avec $n = 3$ qui ne puisse pas être obtenue depuis l'exemple précédent par changement de repère projectif.

3.2 Condition explicite

On cherche maintenant les coniques C_1' du pinceau de coniques C_1, C_2 telles que C_2 soit n-circonscrite à C_1'.

Par exemple, si C_1 a pour équation $x^2 - 4.x + 2.y^2 + 3 = 0$ on cherche les s tels que la conique C_1' d'équation $x^2 - 4.x + 2.y^2 + 3 + s.(y^2 - x) = 0$ soit non dégénérée et que C_2 soit n-circonscrite à C_1'. On pourrait par exemple expliciter sur cet exemple la condition ($t_2 = t_{-1}$ ou $t_1 = t_{-2}$) pour le cas $n = 3$, et la condition $t_3 = t_{-3}$ pour le cas $n = 6$.

4 Suggestions

Il s'agit d'un menu à la carte, le candidat est libre de choisir ses illustrations parmi celles ci ou d'en donner d'autres.

1) On pourra expliquer et démontrer de nombreux énoncés du textes.

2) On pourra suivre l'exemple donné et calculer l'équation de la droite $(m_{t_i} m_{t_{-i}})$ en guidant les simplifications pour tester la proposition 1.

3) On pourra faire une figure analogue à celle de l'énoncé.

4) On pourra trouver une équation en s exprimant la condition $t_3 = t_{-3}$ et l'on essayera de commenter certains diviseurs de cette équation.

8. Expliquer pourquoi. On pourra éventuellement produire un tel exemple.
9. comme l'indique leur intersection avec la droite d'equation $z = 0$