

1 -----EXERCICE-----

2 v1:= [seq(j, j=1..4)];

$$[1, 2, 3, 4] \quad (1)$$

3 v2:= [a, b, c, d];

$$[a, b, c, d] \quad (2)$$

4 t*v1+v2;

$$[a + t, b + 2 \cdot t, c + 3 \cdot t, d + 4 \cdot t] \quad (3)$$

5 M:= [[1, 2, 3, 4], [5, 6, 7, 8]];

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix} \quad (4)$$

6 M[0];

$$[1, 2, 3, 4] \quad (5)$$

7 M

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix} \quad (6)$$

8 [v1]; // une matrice ligne

$$(1 \ 2 \ 3 \ 4) \quad (7)$$

9 M*v1; //est bien un vecteur.

$$[30, 70] \quad (8)$$

10 M*v2;

$$[a + 2 \cdot b + 3 \cdot c + 4 \cdot d, 5 \cdot a + 6 \cdot b + 7 \cdot c + 8 \cdot d] \quad (9)$$

11 v1*v2; // produit scalaire

$$a + 2 \cdot b + 3 \cdot c + 4 \cdot d \quad (10)$$

12 diag(seq(1,4)); diag(1\$4); // l'identite

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (11)$$

[13] `diag(seq(j,j=1..4));`

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \quad (12)$$

[14] `A:=matrix(4,4)+1;`

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (13)$$

[15] `v:=[seq(1,j=1..4)];`

$$[1,1,1,1] \quad (14)$$

[16] `[op(A),v]; //on ajoute une ligne facilement.`

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (15)$$

[17] `A*v; // Attention il retourne une ligne,pour xcas les vecteurs sont en ligne`

$$[1,1,1,1] \quad (16)$$

[18] `f:=(x,y)->x+10^y;`
`// Succs`
`// End defining f`

$$(x,y)->x+10^y \quad (17)$$

[19] `matrix(6,6,f);`

$$\begin{pmatrix} 1 & 10 & 100 & 1000 & 10000 & 100000 \\ 2 & 11 & 101 & 1001 & 10001 & 100001 \\ 3 & 12 & 102 & 1002 & 10002 & 100002 \\ 4 & 13 & 103 & 1003 & 10003 & 100003 \\ 5 & 14 & 104 & 1004 & 10004 & 100004 \\ 6 & 15 & 105 & 1005 & 10005 & 100005 \end{pmatrix} \quad (18)$$

[20] `matrix(6,6,(x,y)->x+10^y);`
`// Succs`

$$\begin{pmatrix} 1 & 10 & 100 & 1000 & 10000 & 100000 \\ 2 & 11 & 101 & 1001 & 10001 & 100001 \\ 3 & 12 & 102 & 1002 & 10002 & 100002 \\ 4 & 13 & 103 & 1003 & 10003 & 100003 \\ 5 & 14 & 104 & 1004 & 10004 & 100004 \\ 6 & 15 & 105 & 1005 & 10005 & 100005 \end{pmatrix} \quad (19)$$

[21] `V:=matrix(6,6,(k,l)->x[k]^l);`
// Attention: x, declared as global variable(s). If symbolic variables are required, declare them as local and run purge

$$\begin{pmatrix} 1 & x[0] & (x[0])^2 & (x[0])^3 & (x[0])^4 & (x[0])^5 \\ 1 & x[1] & (x[1])^2 & (x[1])^3 & (x[1])^4 & (x[1])^5 \\ 1 & x[2] & (x[2])^2 & (x[2])^3 & (x[2])^4 & (x[2])^5 \\ 1 & x[3] & (x[3])^2 & (x[3])^3 & (x[3])^4 & (x[3])^5 \\ 1 & x[4] & (x[4])^2 & (x[4])^3 & (x[4])^4 & (x[4])^5 \\ 1 & x[5] & (x[5])^2 & (x[5])^3 & (x[5])^4 & (x[5])^5 \end{pmatrix} \quad (20)$$

[22] `dv:=det(V);`

Temps mis pour l'evaluation: 1.49

Done

[23] `factor(dv);`

$$(-(x[4]+x[5])(x[3]-(x[5]))(x[3]-(x[4]))(x[2]-(x[5]))(x[2]-(x[4]))(x[2]-(x[3]))(x[1]-(x[5]))(x[1]-(x[4]))(x[1]-(x[3]))(x[0]-(x[5]))(x[0]-(x[4]))(x[0]-(x[3]))(x[0]-(x[2]))(x[0]-(x[1]))(x[0]-(x[0])))) \quad (21)$$

[24] `f2(u,v):=#("x"+u)^v;`

// Interprete f2

// Succs lors de la compilation f2

`(u,v)->#("x"+u)^v`

(22)

[25] `V8:=matrix(8,8,f2);`

$$\begin{pmatrix} 1 & x0 & x0^2 & x0^3 & x0^4 & x0^5 & x0^6 & x0^7 \\ 1 & x1 & x1^2 & x1^3 & x1^4 & x1^5 & x1^6 & x1^7 \\ 1 & x2 & x2^2 & x2^3 & x2^4 & x2^5 & x2^6 & x2^7 \\ 1 & x3 & x3^2 & x3^3 & x3^4 & x3^5 & x3^6 & x3^7 \\ 1 & x4 & x4^2 & x4^3 & x4^4 & x4^5 & x4^6 & x4^7 \\ 1 & x5 & x5^2 & x5^3 & x5^4 & x5^5 & x5^6 & x5^7 \\ 1 & x6 & x6^2 & x6^3 & x6^4 & x6^5 & x6^6 & x6^7 \\ 1 & x7 & x7^2 & x7^3 & x7^4 & x7^5 & x7^6 & x7^7 \end{pmatrix} \quad (23)$$

```
[26] d8:=det_minor(V8); // en taille 8x8 seule cette methode abouti
```

Temps mis pour l'evaluation: 3.22

Done

```
[27] factor(d8);
```

Temps mis pour l'evaluation: 1.35

$$(x6-x7) \cdot (x5-x7) \cdot (x5-x6) \cdot (x4-x7) \cdot (x4-x6) \cdot (x4-x5) \cdot (x3-x7) \cdot (x3-x6) \cdot (x3-x5) \cdot (x3-x4) \cdot (x2-x7) \cdot (x2-x6) \quad (24)$$

[28] -----EXERCICE-----

```
[29] fjj:=(ii,j)->if(ii=j-1) then 1 else 0 fi;
```

// Succs

// End defining fjj

```
(ii,j)->expr("if ((ii==(j-1))) 1; ",0)
```

(25)

```
[30] JJ(n):=matrix(n,n,fjj);//forme classique d'ordre n.
```

// Interprete JJ

// Attention: fjj, declared as global variable(s). If symbolic variables are required, declare them as local and run purge lors de la compilation JJ

```
(n)->matrix(n,n,fjj)
```

(26)

```
[31] JJ(5);
```

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (27)$$

```
[32] Jbasic(L):=diag([seq(JJ(l),l=L)]);//l parcourt la liste L
```

// Interprete Jbasic

Warning, une fonction algébrique définie par d'autres fonctions peut conduire des erreurs d'évaluation

Vous voulez dire peut être Jbasic:=unapply(diag([seq(JJ(l),l=L)]),L)

// Attention: l, declared as global variable(s). If symbolic variables are required, declare them as local and run purge lors de la compilation Jbasic

```
(L)->diag([seq(JJ(1),1=L)])
```

(28)

33 Jbasic([3,2,2,1]);

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(29)

34

35 J(L):={
 local j,n;
 a:=L[0];
 n=size(L);
 for(j:=0;j<n-1;j++){
 if(L[j]<L[j+1]){return "Erreur";}
 }
 return diag([seq(JJ(1),1=L)]);
 }

```
J(L):={
  local j,n;
  a:=L[0];
  n=size(L);
  for(j:=0;j<n-1;j++){
    if(L[j]<L[j+1]){return "Erreur";}
  }
  return diag([seq(JJ(1),1=L)]);
}
```

// Interprete J
// Attention: a,l, declared as global variable(s). If symbolic variables are required, declare them as local and run purge lors de la compilation J

```
expr ((L) -> {local j, n; a := L[0]; n = (size(L)); for(j := 0; j < (n - 1); j++) if((L[j]) < (L[j + 1])) return("Erreur")})
```

(30)

36 J([3,2,1,1]);

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (31)$$

[37] Comme chaque bloc a un noyau de dimension 1 et qu'ils sont en somme directe,

La dimension du noyau de $J(L)$ est le nombre de blocs.

[38] `ker(J([3,2]));`

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad (32)$$

[39] `length(ker(J([3,2])));`

2 (33)

[40] `rank(J([3,3]));`

4 (34)

[41]

```
[42] Mv1(P,Q):={
local M,u,v,n;
n:=degree(Q,x); // on precise la variable c'est plus prudent
M:=matrix(n,n); // on cree une matrice nulle
for(v:=0;v<n;v++){
R:=rem(x^v*P,Q,x); // reste de la division par Q
for(u:=0;u<n;u++){
M[u,v]:=coeff(R,x,u);
};
};
return(M);
}
```

```
Mv1(P,Q):={
local M,u,v,n;
n:=degree(Q,x); // on precise la variable c'est plus prudent
M:=matrix(n,n); // on cree une matrice nulle
for(v:=0;v<n;v++){
R:=rem(x^v*P,Q,x); // reste de la division par Q
for(u:=0;u<n;u++){
M[u,v]:=coeff(R,x,u);
};
};
return(M);
}
```

```

    };
  };
  return(M);
}

```

// Interprete Mv1
// Attention: x,R, declared as global variable(s). If symbolic variables are required, declare them as local and run purge lors de la compilation Mv1

```

expr((P,Q) -> {local M, u, v, n; n := degree(Q, x); M := matrix(n, n); for(v := 0; v < n; v++) {R := rem(x^v
(35)

```

43 Mv1(x+2, x^4-1);

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad (36)$$

44
45 M(P,Q) := {
 local n, f;
 n := degree(Q, x);
 f := (u, v) -> {
 coeff(rem(x^v * P, Q, x), x, u);
 }
 return(matrix(n, n, f));
};

```

M(P,Q) := {
  local n, f;
  n := degree(Q, x);
  f := (u, v) -> {
    coeff(rem(x^v * P, Q, x), x, u);
  }
  return(matrix(n, n, f));
};

```

// Attention: x,P,Q, declared as global variable(s). If symbolic variables are required, declare them as local and run purge
// End defining f
// Interprete M
// Attention: x,P,Q, declared as global variable(s). If symbolic variables are required, declare them as local and run purge lors de la compilation M

expr((P, Q) -> {local n, f; n := degree(Q, x); f := (u, v) -> {coeff(rem(x^v * P, Q, x), x, u); }; return(matrix

[46] M(x+2, x^4-1);

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad (38)$$

[47] P:=x^5-2*x^4+x^3-2*x^2-2*x+4;

$$x^5 - 2 \cdot x^4 + x^3 - 2 \cdot x^2 - 2 \cdot x + 4 \quad (39)$$

[48] Q:=(x^2-1)^2*(x^2+2)^5*(x^3-5*x^2+8*x-4)

$$(x^2 - 1)^2 (x^2 + 2)^5 (x^3 - 5 \cdot x^2 + 8 \cdot x - 4) \quad (40)$$

[49] N:=M(P, Q);

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 128 & 384 & 0 & -768 & 1920 \\ -2 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -256 & -640 & 384 & 1536 & -4608 \\ -2 & -2 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 224 & 416 & -640 & -960 & 4896 \\ 1 & -2 & -2 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -160 & -256 & 416 & 320 & -3360 \\ -2 & 1 & -2 & -2 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -112 & -496 & -256 & 1088 & -1360 \\ 1 & -2 & 1 & -2 & -2 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 368 & 992 & -496 & -2464 & 6608 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & -2 & -2 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -400 & -832 & 992 & 1904 & -8464 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & -2 & -2 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 368 & 704 & -832 & -1216 & 7424 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & -2 & -2 & 4 & 0 & 0 & 0 & -160 & -112 & 704 & 128 & -3616 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & -2 & -2 & 4 & 0 & 0 & -40 & -280 & -112 & 944 & -472 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & -2 & -2 & 4 & 0 & 134 & 362 & -280 & -916 & 2954 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & -2 & -2 & 4 & -178 & -400 & 362 & 788 & -3586 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & -2 & -2 & 141 & 233 & -400 & -460 & 2843 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & -2 & -87 & -114 & 233 & 110 & -1735 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 42 & 45 & -114 & -31 & 770 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & -15 & -6 & 45 & -18 & -271 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & -6 & 15 & 57 \end{pmatrix} \quad (41)$$

[50] pcar(N,x); // N est nilpotente

$$x^{17} \quad (42)$$

[51] pmin(N,x); // N est d'ordre 5

$$x^5 \quad (43)$$

[52] $N1 := \ker(N);$

$$\begin{pmatrix} 32 & -48 & 48 & -48 & 0 & 24 & -40 & 48 & -30 & 21 & -9 & 3 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 96 & -112 & 96 & -96 & -48 & 72 & -96 & 104 & -42 & 33 & -6 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 96 & -112 & 96 & -96 & -48 & 72 & -96 & 104 & -42 & 33 & -6 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ -192 & 288 & -192 & 176 & 96 & -240 & 192 & -216 & 84 & -22 & 12 & 15 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 480 & -912 & 1008 & -912 & 176 & 456 & -840 & 912 & -666 & 399 & -157 & 57 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (44)$$

[53] $\text{size}(N1); // \text{ il y a donc 5 blocs}$

$$5 \quad (45)$$

[54] $\text{size}(\ker(\text{idn}(5))); // \text{ donne bien 0 alors que rowdim}([\])$ donne une erreur.

$$0 \quad (46)$$

[55] *la difference des dimensions des noyaux de $N^{(k+1)}$ et N^k est le nombre de blocs de jordan de taille au moins k*

[56] $\text{seq}(\text{size}(\ker(N^{(k+1)})) - \text{size}(\ker(N^k)), k=0..4); // \text{ donc } N \text{ semblable a } J([5,5,3,2,2])$

$$5, 5, 3, 2, 2 \quad (47)$$

[57] $J55322 := J([5, 5, 3, 2, 2]);$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (48)$$

[58] $\text{seq}(\text{size}(\ker(J55322^{(k+1)})) - \text{size}(\ker(J55322^k)), k=0..4); // \text{ donc } N \text{ semblable a } J([5,5,3,2,2])$

$$5, 5, 3, 2, 2 \quad (49)$$

[63] Pour montrer que a_1, a_2 est libre modulo $\ker(N^4)$ on montre que a_1, a_2 complete

une base de $\ker(N^4)$ en une base de QQ^{17}

[64] `rank(verifN4)==17;` // oui, donc a_1, a_2 est libre modulo $\ker(N^4)$

vrai (54)

[65] `N3:=ker(N^3);`

$$\begin{pmatrix} -4 & 0 & -4 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & -4 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 16 & 0 & 12 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 16 & 0 & 12 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -48 & 0 & -32 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -48 & 0 & -32 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 128 & 0 & 80 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 128 & 0 & 80 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -320 & 0 & -192 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -320 & 0 & -192 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 768 & 0 & 448 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 768 & 0 & 448 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1792 & 0 & -1024 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

(55)

[66] `a3:=N3[0];` // essayons le premier, sinon il faut faire une combi lineaire

$$[-4, 0, -4, 0, -1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0]$$

(56)

[67] `N2:=ker(N^2);`

$$\begin{pmatrix} 8 & -8 & 12 & -12 & 6 & -6 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 8 & 0 & 4 & 0 & -6 & 0 & -5 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -40 & 48 & -60 & 64 & -30 & 24 & -5 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -40 & 0 & -12 & 0 & 34 & 0 & 19 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 152 & -192 & 228 & -240 & 114 & -80 & 19 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 152 & 0 & 36 & 0 & -126 & 0 & -61 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -488 & 640 & -732 & 768 & -366 & 240 & -61 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -488 & 0 & -92 & 0 & 402 & 0 & 179 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1432 & -1920 & 2148 & -2240 & 1074 & -672 & 179 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1432 & 0 & 228 & 0 & -1166 & 0 & -493 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(57)

[68] `verifN3:=[seq(j, j=N2), N^2*a1, N^2*a2, a3];`

$$\begin{pmatrix}
8 & -8 & 12 & -12 & 6 & -6 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
8 & 0 & 4 & 0 & -6 & 0 & -5 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-40 & 48 & -60 & 64 & -30 & 24 & -5 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-40 & 0 & -12 & 0 & 34 & 0 & 19 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
152 & -192 & 228 & -240 & 114 & -80 & 19 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
152 & 0 & 36 & 0 & -126 & 0 & -61 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\
-488 & 640 & -732 & 768 & -366 & 240 & -61 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\
-488 & 0 & -92 & 0 & 402 & 0 & 179 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\
1432 & -1920 & 2148 & -2240 & 1074 & -672 & 179 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\
1432 & 0 & 228 & 0 & -1166 & 0 & -493 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
16 & -16 & -12 & 16 & -16 & 12 & 5 & -8 & 6 & -4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 16 & -16 & -12 & 16 & -16 & 12 & 5 & -8 & 6 & -4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-4 & 0 & -4 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix}
\tag{58}$$

[69] `rank(verifN3)==size(N3);//vrai`

vrai (59)

[70] `a4:=N2[0];`

`[8, -8, 12, -12, 6, -6, 1, -1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0]` (60)

[71] `a5:=N2[1];`

`[8, 0, 4, 0, -6, 0, -5, 0, -1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0]` (61)

[72] `N1:=ker(N); size(N1);`

$$\begin{pmatrix}
32 & -48 & 48 & -48 & 0 & 24 & -40 & 48 & -30 & 21 & -9 & 3 & -1 & 0 & 0 & 0 \\
96 & -112 & 96 & -96 & -48 & 72 & -96 & 104 & -42 & 33 & -6 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\
0 & 96 & -112 & 96 & -96 & -48 & 72 & -96 & 104 & -42 & 33 & -6 & 0 & 0 & -1 & 0 \\
-192 & 288 & -192 & 176 & 96 & -240 & 192 & -216 & 84 & -22 & 12 & 15 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
480 & -912 & 1008 & -912 & 176 & 456 & -840 & 912 & -666 & 399 & -157 & 57 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix}
\tag{62}$$

[73] `verifN2:=[seq(j, j=N1), N^3*a1, N^3*a2, N*a3, a4, a5];`

$$\begin{pmatrix}
32 & -48 & 48 & -48 & 0 & 24 & -40 & 48 & -30 & 21 & -9 & 3 & -1 & 0 & 0 & 0 \\
96 & -112 & 96 & -96 & -48 & 72 & -96 & 104 & -42 & 33 & -6 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\
0 & 96 & -112 & 96 & -96 & -48 & 72 & -96 & 104 & -42 & 33 & -6 & 0 & 0 & -1 & 0 \\
-192 & 288 & -192 & 176 & 96 & -240 & 192 & -216 & 84 & -22 & 12 & 15 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
480 & -912 & 1008 & -912 & 176 & 456 & -840 & 912 & -666 & 399 & -157 & 57 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
64 & -96 & -48 & 136 & -120 & 84 & 52 & -126 & 90 & -47 & -6 & 33 & -26 & 15 & -6 & 0 \\
0 & 64 & -96 & -48 & 136 & -120 & 84 & 52 & -126 & 90 & -47 & -6 & 33 & -26 & 15 & -6 \\
-16 & 8 & -8 & 4 & 12 & -6 & 10 & -5 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
8 & -8 & 12 & -12 & 6 & -6 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
8 & 0 & 4 & 0 & -6 & 0 & -5 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix}
\tag{63}$$

[74] rank(verifN2)==size(N2); //si on a des a4 a5 qui ne marchent pas
on peut faire ainsi:

vrai (64)

[75] [a4,a5]:=ranm(2,size(N2))*N2; // on prend donc une combinaison lineaire
random deslignes

$$\begin{pmatrix} -177424 & 145344 & -174936 & 168800 & -23836 & 50296 & 11918 & -44 & -48 & -82 & -48 & -55 \\ 201544 & -204776 & 239132 & -240684 & 75902 & -73150 & 1965 & -77 & 46 & 28 & 28 & -23 \end{pmatrix}$$

(65)

[76] verifN2:=[seq(j,j=N1),N^3*a1,N^3*a2,N*a3,a4,a5];

$$\begin{pmatrix} 32 & -48 & 48 & -48 & 0 & 24 & -40 & 48 & -30 & 21 & -9 & 3 \\ 96 & -112 & 96 & -96 & -48 & 72 & -96 & 104 & -42 & 33 & -6 & 0 \\ 0 & 96 & -112 & 96 & -96 & -48 & 72 & -96 & 104 & -42 & 33 & -6 \\ -192 & 288 & -192 & 176 & 96 & -240 & 192 & -216 & 84 & -22 & 12 & 15 \\ 480 & -912 & 1008 & -912 & 176 & 456 & -840 & 912 & -666 & 399 & -157 & 57 \\ 64 & -96 & -48 & 136 & -120 & 84 & 52 & -126 & 90 & -47 & -6 & 33 \\ 0 & 64 & -96 & -48 & 136 & -120 & 84 & 52 & -126 & 90 & -47 & -6 \\ -16 & 8 & -8 & 4 & 12 & -6 & 10 & -5 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ -177424 & 145344 & -174936 & 168800 & -23836 & 50296 & 11918 & -44 & -48 & -82 & -48 & -55 \\ 201544 & -204776 & 239132 & -240684 & 75902 & -73150 & 1965 & -77 & 46 & 28 & 28 & -23 \end{pmatrix}$$

(66)

[77] rank(verifN2)==size(N2);

vrai (67)

[78]

[79] tP:=[seq(N^k*a1,k=4..0),seq(N^k*a2,k=4..0),seq(N^k*a3,k=2..0),seq(N^k*a4,k=1..0),seq(N^k*a5,k=1..0)];

$$\begin{pmatrix}
 1920 & -4224 & 3168 & -960 & -2784 & 6336 & -5712 & 3552 & -648 & \\
 64 & -96 & -48 & 136 & -120 & 84 & 52 & -126 & 90 & \\
 16 & -16 & -12 & 16 & -16 & 12 & 5 & -8 & 6 & \\
 4 & -2 & -2 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & \\
 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\
 768 & 384 & -2880 & 2208 & -1632 & -576 & 3936 & -3504 & 2592 & \\
 0 & 64 & -96 & -48 & 136 & -120 & 84 & 52 & -126 & \\
 0 & 16 & -16 & -12 & 16 & -16 & 12 & 5 & -8 & \\
 0 & 4 & -2 & -2 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & \\
 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\
 -64 & 64 & -16 & 0 & 96 & -96 & 56 & -32 & -28 & \\
 -16 & 8 & -8 & 4 & 12 & -6 & 10 & -5 & 2 & \\
 -4 & 0 & -4 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\
 -729024 & 937504 & -570848 & 485248 & 490160 & -758496 & 573024 & -548864 & 132652 & \\
 -177424 & 145344 & -174936 & 168800 & -23836 & 50296 & 11918 & -44 & -48 & \\
 883232 & -1332400 & 987376 & -817648 & -436736 & 1076424 & -1000504 & 970496 & -406862 & \\
 201544 & -204776 & 239132 & -240684 & 75902 & -73150 & 1965 & -77 & 46 &
 \end{pmatrix}$$

(68)

[80] `P:=transpose(tP);`// car la matrice de passage veut les coord des vecteurs en colonne

$$\begin{pmatrix}
 1920 & 64 & 16 & 4 & 1 & 768 & 0 & 0 & 0 & 0 & -64 & -16 & -4 & -729024 & -177424 & \\
 -4224 & -96 & -16 & -2 & 0 & 384 & 64 & 16 & 4 & 1 & 64 & 8 & 0 & 937504 & 145344 & \\
 3168 & -48 & -12 & -2 & 0 & -2880 & -96 & -16 & -2 & 0 & -16 & -8 & -4 & -570848 & -174936 & \\
 -960 & 136 & 16 & 1 & 0 & 2208 & -48 & -12 & -2 & 0 & 0 & 4 & 0 & 485248 & 168800 & \\
 -2784 & -120 & -16 & -2 & 0 & -1632 & 136 & 16 & 1 & 0 & 96 & 12 & -1 & 490160 & -23836 & \\
 6336 & 84 & 12 & 1 & 0 & -576 & -120 & -16 & -2 & 0 & -96 & -6 & 0 & -758496 & 50296 & \\
 -5712 & 52 & 5 & 0 & 0 & 3936 & 84 & 12 & 1 & 0 & 56 & 10 & 0 & 573024 & 11918 & \\
 3552 & -126 & -8 & 0 & 0 & -3504 & 52 & 5 & 0 & 0 & -32 & -5 & 0 & -548864 & -44 & \\
 -648 & 90 & 6 & 0 & 0 & 2592 & -126 & -8 & 0 & 0 & -28 & 2 & 0 & 132652 & -48 & \\
 -1896 & -47 & -4 & 0 & 0 & -888 & 90 & 6 & 0 & 0 & 36 & -1 & 0 & -39158 & -82 & \\
 2454 & -6 & 1 & 0 & 0 & -1092 & -47 & -4 & 0 & 0 & -33 & 0 & 0 & 31082 & -48 & \\
 -2124 & 33 & 0 & 0 & 0 & 1386 & -6 & 1 & 0 & 0 & 24 & 0 & 0 & -23244 & -55 & \\
 1362 & -26 & 0 & 0 & 0 & -1302 & 33 & 0 & 0 & 0 & -10 & 0 & 0 & 48729 & 65 & \\
 -624 & 15 & 0 & 0 & 0 & 852 & -26 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & -42833 & 20 & \\
 234 & -6 & 0 & 0 & 0 & -360 & 15 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 21451 & -72 & \\
 -60 & 1 & 0 & 0 & 0 & 138 & -6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -10157 & 86 & \\
 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & -30 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2774 & 16 &
 \end{pmatrix}$$

(69)

[81] `rank(P);`

17 (70)

[82] `P^(-1)*N*P==J([5,5,3,2,2]);`// Elles sont bien semblables

vrai (71)

83

84 $SL_n(Z)$ est engendré par les transvections. Cf opérations ligne/colonne

```
85 T(a,b,l,n):={
local M ;
M:=idn(n);
if(a !=b){ M[a,b]:=1};
M;};
// Interprete T
// Succs lors de la compilation T
```

expr((a,b,l,n) -> {local M; M:=idn(n); if(a<>b)M[a,b]:=1; ; M; }, 0) (72)

86 T(2,3,1,5);

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & l & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (73)$$

87 purge(a); // ou bien:

5 (74)

88 a:='a'; //NB: 'a' est la forme inerte, "a" est la chaîne de caractères.

Nosuchvariablea (75)

```
89 A:=matrix(5,5,(u,v)->a[u,v]);
// Attention: a, declared as global variable(s). If symbolic variables are required,
declare them as local and run purge
```

$$\begin{pmatrix} a[0,0] & a[0,1] & a[0,2] & a[0,3] & a[0,4] \\ a[1,0] & a[1,1] & a[1,2] & a[1,3] & a[1,4] \\ a[2,0] & a[2,1] & a[2,2] & a[2,3] & a[2,4] \\ a[3,0] & a[3,1] & a[3,2] & a[3,3] & a[3,4] \\ a[4,0] & a[4,1] & a[4,2] & a[4,3] & a[4,4] \end{pmatrix} \quad (76)$$

90

```
91 randSL(n):={
local j,m,M,a,b,l;
m:=alea(15*n); //pour ne pas avoir trop de zeros selon n.
```

```

M:=idn(n);
for(j:=0;j<m;j++){
a:=alea(n);b:=alea(n);l:=alea(2*n)-n;
M:=M*T(a,b,l,n);
}
M;}

```

```

randSL(n):={
local j,m,M,a,b,l;
m:=alea(15*n);//pour ne pas avoir trop de zeros selon n.
M:=idn(n);
for(j:=0;j<m;j++){
a:=alea(n);b:=alea(n);l:=alea(2*n)-n;
M:=M*T(a,b,l,n);
}
M;}

```

// Interprete randSL
// Succs lors de la compilation randSL

$\text{expr}((n) \rightarrow \{\text{local } j, m, M, a, b, l; m := \text{alea}(15 * n); M := \text{idn}(n); \text{for}(j := 0; j < m; j++) \{ a := \text{alea}(n); b := \text{alea}(n); l := \text{alea}(2 * n) - n; M := M * T(a, b, l, n); \}$
(77)

92 $M := \text{randSL}(10); \det(M);$

{	313	-688	-85	-116602	-3872	0	1877	-4817	4098	29295
	39350	-88591	-10948	-14948512	-497284	96	234536	-620137	525233	3755654
	326634	-731489	-90395	-123516560	-4107427	762	1947134	-5120423	4338900	3103217
	-37	-5449	-681	-860404	-30932	-3	-281	-38151	32921	216277
	105	-48	-6	-14519	-413	-3	651	-336	501	3647
	16562	-29797	-3673	-5134816	-167716	1	99389	-208614	177416	1289942
	18323	-23448	-2875	-4179779	-131663	15	109834	-164139	138905	1049797
	24	280	35	42994	1568	0	144	1961	-1662	-10808
	2245	-4256	-525	-730394	-23968	0	13470	-29797	25363	183491
	8547	-460	-33	-313319	-2636	-9	51569	-3220	2609	78372

(78)

93