

Chapitre 6

Épreuve orale de modélisation

6.1 Organisation des épreuves de Modélisation

Deux textes au choix sont proposés à l'épreuve de modélisation. Le jury souhaite rappeler ce qu'il attend des candidats dans cette épreuve. Les remarques concernant l'organisation de l'épreuve de modélisation s'appliquent à toutes les options, y compris à l'épreuve d'« analyse des systèmes informatiques » qui en est la version pour l'option D (informatique). Des remarques supplémentaires, spécifiques à cette épreuve, seront données plus loin, dans le cadre de la partie du rapport consacrée à l'option informatique.

Les textes sont surmontés du bandeau suivant :

Il est rappelé que le jury n'exige pas une compréhension exhaustive du texte. Il vous est conseillé de construire un exposé évitant la paraphrase et mettant en lumière vos connaissances, à partir des éléments du texte. Vous êtes libre d'organiser votre discussion comme vous l'entendez. Des pistes de réflexion, largement indépendantes les unes des autres, vous sont proposées en fin de texte; vous n'êtes pas tenu de les suivre. Le propos devra être illustré par des traitements ou des simulations numériques sur ordinateur, ou, à défaut, des propositions de telles illustrations. Le jury souhaiterait que le plan de la présentation soit annoncé au début de l'exposé.

et se terminent par le texte suivant :

Les pistes de réflexion suivantes ne sont qu'indicatives : vous n'êtes pas obligé de les suivre. Vous pouvez choisir d'étudier certains des points proposés, de façon plus ou moins approfondie, mais aussi toute autre question à votre initiative. Vos investigations comporteront une partie traitée sur ordinateur et, si possible, des représentations graphiques de vos résultats. À défaut, si vos traitements ou simulations numériques n'ont pas abouti, il est conseillé d'expliquer ce que vous auriez souhaité mettre en œuvre.

L'interrogation dure 1 heure et 5 minutes, pendant laquelle le candidat gère comme il le désire le tableau et les illustrations informatiques qu'il entend présenter. Le candidat doit préparer un exposé d'environ 40 minutes, les 25 minutes restantes étant occupées par les questions du jury.

Le texte est court, environ 5 pages, motivé par un problème concret. Il peut présenter des arguments rapides, voire heuristiques (signalés comme tels). Il ne contient pas d'assertion délibérément trompeuse et se conclut par une liste de suggestions.

Le candidat dispose pendant sa préparation et l'interrogation d'un ordinateur dont la configuration est décrite sur le site de l'agrégation de mathématiques, à l'adresse <http://www.agreg.org>.

6.2 Recommandations du jury, communes aux options A, B, C

6.2.1 Recommandations pour l'exposé

Recommandations du jury, communes aux 3 options

Le jury tient à souligner les attentes partagées entre les trois options A (Probabilités et Statistiques), B (Calcul Scientifique) et C (Calcul Formel).

Dans cette épreuve, le candidat est appelé à **faire preuve d'initiative** pour s'exprimer et manifester ses qualités pédagogiques et de synthèse. Le texte fourni est un point de départ pour construire et exposer un traitement mathématique d'un problème «concret» en s'appuyant sur les éléments, généralement partiels, disséminés dans le texte. La présentation doit s'appuyer sur un dosage cohérent et harmonieux entre introduction motivée de modèles, preuves mathématiques, illustrations informatiques, critiques éventuelles du texte, réponses aux questions et mise en lumière de connaissances. Il n'y a pas de «format type» et des prestations très différentes, dans leur forme et leur contenu, sur un même texte, éventuellement traité de façon partielle mais en profondeur, peuvent conduire également à des notes élevées.

Comme le candidat se le voit rappeler en début d'épreuve, il doit exposer son travail à un public qui n'est pas censé connaître le texte, et ce de façon à le lui faire comprendre. Le jury, tout en étant conscient des difficultés du concours, attend un minimum d'aisance au tableau, la manifestation d'une certaine volonté de capter l'attention de l'auditoire et un discours clair et précis. Il est recommandé aux candidats de consacrer une partie de leur temps de préparation à s'interroger sur la stratégie d'exploitation du tableau et d'utilisation de l'outil informatique qui leur permettra de mettre au mieux en valeur leurs connaissances et leur compréhension du texte ou d'une partie de celui-ci. En début d'épreuve, il est demandé au candidat d'annoncer **le plan** qui va structurer sa présentation. Répondre à cette requête ne peut s'improviser et doit faire l'objet d'une réflexion préalable durant la préparation. Le jury regrette de ne pas voir davantage de dessins (soignés) ou schémas explicatifs qui peuvent rendre l'argumentation plus claire et convaincante. La capacité à revenir sur le problème de départ et à conclure quant à l'efficacité de l'approche mathématique proposée pour y répondre est une qualité très appréciée. La rigueur et la clarté de l'organisation, la gestion du temps, la pertinence des choix opérés parmi les différentes questions soulevées par le texte sont des éléments de l'évaluation. Les qualités de synthèse sont aussi appelées à s'exprimer : il vaut mieux indiquer les étapes cruciales d'un raisonnement que de se lancer dans un long calcul fastidieux qu'on aura du mal à mener à bien. À un survol superficiel de l'intégralité du texte sans apport mathématique ou critique scientifique, le candidat doit préférer une discussion fouillée d'une portion du texte, bâtie sur des arguments mathématiques solides, des simulations pertinentes accompagnées de commentaires de bon aloi.

Le candidat est invité à mobiliser ses connaissances, sur des aspects variés du programme, pour enrichir son propos, en étayant les arguments seulement esquissés dans le texte par des **énoncés précis**. Il est totalement illusoire de chercher à impressionner le jury par une logorrhée de mots savants : les textes proposés peuvent être discutés en exploitant un bagage technique qui n'utilise pas les éléments les plus sophistiqués du programme. Quoi qu'il en soit, le jury ne manque pas de s'attarder sur toute notion amenée par le candidat durant sa présentation et il est toujours dommageable de s'aventurer sur des terrains méconnus. Bien plus qu'une démonstration de virtuosité technique, le jury attend que le candidat montre sa maîtrise d'énoncés relativement simples «en situation» : c'est là que réside une des difficultés principales de l'épreuve. Nombre de candidats éprouvent des difficultés à **formaliser** précisément des notions de base du programme ou à mettre en œuvre certaines de leurs connaissances en algèbre, géométrie, et analyse pour l'étude des modèles. *A contrario*, utiliser une portion excessive du temps de parole pour recycler un développement d'une leçon d'analyse ou de mathématiques générales en s'éloignant des enjeux du texte est considéré comme un hors sujet sévèrement sanctionné. La paraphrase pure et simple d'amples portions du texte ne constitue en aucun cas un exposé satisfaisant. Les textes fournissent souvent des esquisses de démonstrations qui sont précisément destinées

à être complétées et commentées. Le jury n'est pas dupe des candidats qui tentent de faire semblant de connaître une notion ou d'avoir compris un point du texte ou une démonstration. Il ne se laisse pas tromper non plus par les candidats qui font des indications du texte un argument d'autorité, tentative maladroite de masquer des insuffisances techniques. Un regard critique («il faudrait prouver que... mais je n'ai pas réussi à le faire», «les hypothèses du théorème de XXX que je connais pour aborder des problèmes similaires ne sont pas satisfaites dans le cas présent»...) est une attitude bien plus payante.

Enfin, le jury s'alarme de l'extrême faiblesse des connaissances en **algèbre linéaire**, les manipulations et raisonnements les plus élémentaires sont excessivement laborieux (calcul matriciel, certains candidats semblant découvrir qu'il puisse exister des matrices non carrées, résolution de systèmes linéaires, norme de matrices, décomposition spectrale et réduction).

Illustration informatique

Le jury rappelle son fort attachement à cet aspect de l'épreuve, dont les ambitions sont clairement délimitées. Il ne s'agit en aucun cas, et pour aucune des 3 options, d'un exercice de programmation. L'objectif est d'être capable d'utiliser l'outil informatique pour illustrer, de façon pertinente, le contenu du texte. La réalisation de cet objectif constitue une part incompressible de la note finale attribuée à l'épreuve. Une très bonne évaluation peut résulter d'une exploitation judicieuse de programmes simples, reposant largement sur les routines standards des logiciels fournis. À ce propos il n'est évidemment pas réaliste de découvrir ces logiciels le jour de l'épreuve : la configuration informatique utilisée pour le concours et sa documentation sont accessibles et téléchargeables sur le site officiel de l'agrégation et permettent de se familiariser avec l'environnement offert pour l'épreuve. La forme et la nature des illustrations proposées n'obéissent à aucun format préétabli. En revanche, elles doivent faire la preuve d'une véritable réflexion scientifique et être agrémentées de commentaires, sur les résultats et les méthodes. Même si les simulations ne sont pas abouties («ça ne marche pas»), le jury sait valoriser la démarche suivie lorsqu'elle est clairement argumentée et permettrait, avec des aménagements mineurs, de mettre en évidence des aspects intéressants du texte.

6.3 Option A : probabilités et statistiques

Le niveau de la session 2015 de ce concours en ce qui concerne l'option A a été légèrement meilleur à celui de 2014. Comme lors des dernières sessions, on doit cependant regretter que de nombreux candidats, par manque de préparation ou de connaissances, aient présenté des exposés bien trop courts ou bien trop vides. Un nombre non négligeable de candidats ont montré un bon, voire un très bon niveau, mais il semble clair que le niveau des candidats ne se répartit pas selon une loi gaussienne.

Cette épreuve de modélisation, pour ce qui concerne ici l'option A, doit permettre au candidat de mettre en avant diverses qualités : les connaissances mathématiques, la réflexion et la mise en perspective de ses connaissances, l'aptitude à appliquer des mathématiques à des problèmes concrets de modélisation, la pertinence du choix des illustrations informatiques et les qualités pédagogiques de mise en forme d'un exposé construit et cohérent. La capacité du candidat à répondre aux questions qui lui sont posées fait partie intégrante de l'évaluation de cette leçon. Comme pour l'ensemble des oraux, le caractère dynamique de l'exposé apporte une valeur ajoutée conséquente sur l'évaluation.

Le jury tient à rappeler que l'exposé doit être construit par le candidat en s'appuyant sur le contenu du texte et des suggestions qui y sont présentes, mais que la paraphrase simple des résultats avec un suivi linéaire de la structure du texte ne saurait constituer un exposé satisfaisant. Les textes ne sont en général que survolés dans leurs premières parties, qui reprennent souvent des notions simples du programme, alors que l'intérêt scientifique se situe dans les dernières parties du texte qui permettent

de mathématiques générales, en centrant leur propos sur des problématiques motivées par les préoccupations du calcul scientifique (approximation de solutions d'équations linéaires ou non linéaires, d'équations différentielles, convergence d'algorithmes, analyse matricielle,...).

6.5 Option C : Algèbre et Calcul formel

Généralités

La ligne directrice du calcul formel est la recherche de l'*effectivité*, puis de l'*efficacité* (souvent en temps, parfois en espace) du calcul algébrique, en allant des aspects les plus élémentaires (calcul avec les entiers, les polynômes, les entiers modulo, les séries formelles) aux aspects plus avancés (élimination, géométrie effective, codes correcteurs d'erreur). La quasi-totalité des sujets posés dans le cadre de l'option rentrent totalement dans l'une ou l'autre, souvent les deux, de ces grandes problématiques. Cette "grille de lecture" peut accompagner la lecture des candidats, et la construction de leur exposé de façon utile espérons-le ; et, rêvons tout haut, d'expliquer non seulement *ce que* le texte fait, mais aussi *pourquoi* il le fait. La capacité à percevoir ces problématiques fait la différence entre bonnes et excellentes prestations, et peut aussi expliquer les notes honorables de certains candidats dont le niveau mathématique était pourtant limité.

Construction de l'exposé

Comme dans tout oral, la construction de l'exposé doit être une préoccupation importante des candidats. Le jury préférera toujours un traitement approfondi d'une partie, même modeste, du texte à un survol général sans réelle compréhension ni contribution personnelle. Cela ne dispense pas d'une réflexion permettant de produire un tout **cohérent** et **intelligible** par un public qui, dans l'esprit de l'épreuve, découvre le texte à travers l'exposé du candidat. Que penserait un tel public face à un enseignant qui se contente d'une brève introduction à la problématique avant de s'engager dans un long tunnel de théorèmes énoncés sans lien avec le problème de départ ? Ce d'autant plus qu'ils ne sont, dans ce cas, que rarement prouvés autrement que par la répétition des éléments de démonstration, souvent fragmentaires, donnés dans le texte.

Néanmoins, dans l'ensemble, les candidats semblent avoir perçu la nécessité d'utiliser, au mieux, le temps qui leur est consacré. Le jury apprécie de voir de plus en plus de candidats qui se sont appropriés le texte et en donnent une présentation pertinente et autre qu'un paraphrasage linéaire.

Les candidats ayant le réflexe de se saisir, seuls, d'une question de complexité, sont perçus très positivement par le jury. Pour prendre un exemple, quand le texte parle de cryptographie, comparer le coût du système proposé et le coût d'une attaque, même naïve, est une initiative intéressante et actuellement inexistante. Une telle étude est beaucoup plus à sa place qu'un exposé détaillé de RSA plaqué sur un texte qui n'en parle pas – la mention rapide de RSA dans un texte introduisant un système de chiffrement pour comparer des complexités restant bien sûr pertinente. Plus largement, une réflexion minimale sur les ordres de grandeur (est-ce qu'un calcul faisable représente $10^1, 10^{10}, 10^{100}, 10^{1000}$ opérations élémentaires) permettrait souvent de mieux situer les problèmes soulevés par un texte, ou de proposer des valeurs de paramètres réalistes quand ce sujet n'est pas évoqué par le texte.

Illustration informatique

Si un bel effort est produit par la majorité des candidats, le jury observe tout de même une certaine régression par rapport à 2014 : un certain nombre de candidats préfèrent ne pas toucher à l'outil informatique. Si les candidats pensent ainsi consacrer plus de temps à l'analyse du texte et la préparation de leur exposé oral cette stratégie n'est en aucun cas payante, bien au contraire.

Le principal défaut de l'illustration est le fait qu'elle soit souvent perçue comme une corvée, plutôt que comme un outil permettant d'aider à la compréhension du texte, ou de mettre ce dernier en valeur : mener des calculs du texte à l'aide du logiciel choisi (cela impose d'en connaître les limites, de savoir les expliquer, de se limiter si nécessaire à un cas particulier), étudier des exemples ou mener une étude expérimentale, comparer une méthode présentée dans le texte avec la solution implantée dans le système choisi, etc. Le jury est souvent surpris de voir des candidats développer de longs et fastidieux calculs au tableau alors qu'ils auraient pu utiliser l'outil informatique et ainsi gagner en temps et en clarté.

Aspects mathématiques

Les remarques de l'année 2014 s'appliquent intégralement à la session 2015, et on renvoie le lecteur à ce rapport, en ajoutant ici quelques remarques complémentaires.

- pour beaucoup de candidats le réflexe “pivot de Gauss” ne vient qu'en réponse à des questions concernant les systèmes linéaires, mais son utilisation pour le calcul de déterminants ou de rang est parfois une découverte pour les candidats – cela devrait être une connaissance de base, ou, à défaut, une acquisition indispensable d'un travail de préparation à l'épreuve de modélisation C. Notons également que le coût de cet algorithme reste inconnu de l'écrasante majorité des candidats.
- tout comme l'an passé, le jury déplore chez beaucoup de candidats une méconnaissance des notions théoriques et effectives les plus élémentaires sur les corps finis.
- Si la connaissance du résultant a progressé ces dernières années, son utilisation pour l'élimination reste confuse. Beaucoup de candidats le voient comme un critère d'existence d'un facteur commun et ne pensent plus (surtout dans le cas des polynômes à une variable) au PGCD qui est un objet bien plus simple à appréhender.
- Les codes correcteurs sont une partie limitée du programme, et très peu de connaissances sont exigibles (et exigées). Néanmoins, il est bon de s'y être un peu frotté pour se familiariser avec les problématiques sous-jacentes, typiquement qu'un bon code correcteur se décrit de façon compacte (et est donc en général linéaire), a une grande dimension et grande distance minimale (par rapport à sa longueur) et, aussi et surtout un algorithme de décodage efficace – rappelons que ce second point n'est pas vrai d'un code linéaire “quelconque”. Il faut s'être confronté à ces faits pour comprendre les questions que se pose presque tout texte sur les codes... et signalons que la méconnaissance des corps finis est généralement rédhibitoire pour ce sujet.
- Les attentes du jury en termes de complexité sont limitées mais il est attendu d'un candidat qu'il sache estimer le coût de certaines procédures élémentaires : évaluation, produits de polynômes, pivot de Gauss etc...

Enfin, même s'il s'agit d'une épreuve plus appliquée ou moins académique que les deux autres épreuves orales, cela ne dispense en aucun cas les candidats de faire preuve de la rigueur mathématique requise – quand on utilise un théorème, la capacité à en restituer un jeu d'hypothèses correct est une qualité indispensable. Par jeu d'hypothèses correct, on entend que :

- le théorème soit vrai
- et qu'il s'applique effectivement au contexte considéré.

Rappelons que la minimisation des hypothèses n'est que très rarement une préoccupation dans l'épreuve.

Les candidats qui ont choisi l'option C ne doivent pas hésiter à s'appuyer sur leurs connaissances spécifiques pour proposer des développements originaux dans les leçons d'analyse et de mathématiques générales, en centrant leur propos sur des problématiques motivées par les préoccupations d'algèbre effective.