

Intégration numérique :

Le jury s'étonne que nombre de candidats définissent l'ordre d'une méthode d'intégration numérique comme étant le degré des polynômes pour lesquels la formule d'approximation est exacte mais se révèlent totalement incapables de relier cette information à la qualité de l'approximation de la méthode correspondante.

Algèbre linéaire :

Le jury déplore un manque d'aisance généralisé concernant le calcul matriciel et trop de développements reposant sur des arguments élémentaires d'algèbre linéaire sont excessivement laborieux.

Optimisation :

Beaucoup de candidats ont les plus grandes difficultés à reconnaître au détour de certains textes l'application de résultats de base sur la minimisation de fonctionnelles convexes. L'optimisation sous contrainte semble faire l'objet d'une impasse à peu près totale et le théorème des extrema liés, partie intégrante du programme général du concours, est méconnu.

6.5 Option C : Algèbre et Calcul formel**Remarques générales.**

Exposé. Rappelons ce qui est attendu : le candidat doit utiliser le texte comme point de départ pour construire son propre discours sur un problème qui lui est soumis, et développer un traitement mathématique dudit problème en s'appuyant sur les éléments, généralement partiels, fournis par le texte. Savoir aller plus loin que le texte (en particulier en saisissant les perches fournies dans la rubrique Suggestions pour le développement) est un plus très net. Savoir, à l'issue du traitement mathématique, revenir sur le problème de départ et indiquer dans quel mesure (totale ou partielle, satisfaisante ou pas) il est résolu devrait être un réflexe pour les candidats, dans la mesure où il s'agit de la conclusion naturelle d'un tel exposé.

En matière d'exposition, il est utile de rappeler que le fait que l'épreuve ne porte pas le nom de leçon n'est pas une invitation à oublier les règles élémentaires d'exposition. Tout d'abord, le contexte du concours implique qu'il s'agit de se placer dans une situation pédagogique. Comme le candidat se le voit rappeler en début d'épreuve, il doit exposer son travail à un public qui n'est pas censé connaître le texte, et ce de façon à le lui faire comprendre. L'exposé doit donc être soigneusement préparé, à la manière d'un cours sur le sujet du texte.

Quelques travers à proscrire (liste non limitative) :

- les formulations du genre "l'auteur dit que", "le texte dit que", sauf de façon très exceptionnelle pour pointer une affirmation que l'on souhaite discuter ;
- la lecture du texte sans rien écrire au tableau, ou en n'écrivant que les formules ; comme un discours, un tableau se construit et bien des candidats devraient, dans leur préparation, se confronter en fin d'oral à leur propre tableau ;
- l'improvisation d'un plan à la demande du jury, qui en général se limite à suivre celui du texte et ne se retrouve pas dans la structure de l'exposé.
- faire semblant de connaître une notion ou d'avoir compris un point du texte ou une démonstration quand ce n'est pas le cas.
- le hors-sujet se rattachant à un ou deux mots-clés du texte, prétexte à présenter une partie de plan ou un développement préparé pour une leçon de mathématiques générales ou analyse-probabilités.

Enfin, rappelons encore une fois que la lecture (au sens premier du mot) du texte, ce dernier tenu en main, et en changeant un mot toutes les trois phrases, produit généralement les pires planches qui soient.

Les démonstrations fournies dans le texte sont souvent des esquisses qui doivent être développées. La présentation à l'identique de la démonstration du texte au jury va nécessairement révéler deux choses : d'une part, le fait que le candidat ne l'a probablement pas réellement comprise, d'autre part le fait qu'il n'est pas capable d'en repérer les manques. Un regard critique ("il faudrait prouver que... mais je n'ai pas réussi à le faire") permet déjà d'éviter le second écueil, qui est presque le plus grave.

Illustration informatique. La maîtrise technique de l'exercice de l'illustration informatique est en progrès. En revanche, il semble que le nombre de candidats refusant de jouer le jeu et arrivant sans illustration est en légère recrudescence. Le jury rappelle son fort attachement à cet aspect de l'épreuve, qui n'est pas un exercice de programmation, mais un exercice de réflexion sur comment utiliser l'outil informatique pour illustrer, de façon pertinente, le contenu du texte. Cela peut se faire de façon très variée.

Il appartient au candidat d'expliquer au jury en quoi ce qu'il présente illustre bien le contenu du texte, et est pertinent dans ce contexte. Un tel discours est rare, mais pourtant bien plus intéressant que le discours souvent entendu (commentaire linéaire du code façon 'ici j'ai fait une boucle for' ou équivalent).

Le jury ne saurait trop insister sur le fait qu'il n'est pas réaliste de découvrir le système de calcul de son choix le jour de l'épreuve. Même pour les candidats n'étant pas inscrits à une préparation, dans chacune des options, des logiciels gratuits sont proposés qui permettent de pratiquer pendant l'année, et de se poser, au minimum, la question de la manipulation des objets de base rencontrés dans l'option. Devoir le faire le jour de l'épreuve, en situation de stress, en temps limité avec un texte à découvrir en même temps est tout bonnement irréaliste, et l'argument "je n'ai jamais fait d'informatique" ne peut en aucun cas être considéré comme une excuse valable.

Questions. La séance de questions est l'occasion pour le jury d'affiner sa perception du candidat. Elle va lui permettre d'une part de vérifier si certaines erreurs commises en cours d'exposé sont de simples lapsus ou relèvent d'une compréhension erronée ; elle va aussi permettre de tester davantage le candidat sur les points sur lesquels le jury n'a pas pu se faire une opinion sur le seul fondement de l'exposé. Les questions ne contiennent pas de piège, ce qui ne veut pas dire qu'elles doivent être considérés comme faciles, vues les circonstances de l'épreuve (4h de préparation, 40 minutes d'exposé, plus le stress impliqué par les circonstances) : une question d'apparence élémentaire est, à de très rares exceptions près, élémentaire et il est inutile de chercher des choses fort compliquées en réponse.

Il y a peu de règles à rappeler sur ce point, hormis deux points de bon sens :

- réfléchir, là encore, à l'utilisation du tableau ; bien des candidats cherchent à répondre uniquement de tête, sans rien écrire au tableau, même quand un calcul est clairement requis ;
- ne pas chercher à répondre du tac au tac. Le jury ne l'attend pas particulièrement ; et observer, éventuellement, quelques secondes de réflexion et de prise de recul pour gérer fatigue et stress est un bien meilleur réflexe que de répondre la première chose qui passe par la tête.

Remarques spécifiques sur l'option C.

Contenu mathématique. Le jury regrette que l'algèbre linéaire, qui constitue le coeur du programme de l'agrégation, ne soit pas davantage maîtrisée, à la fois dans ses aspects théoriques et dans ses aspects calculatoires. Peu de candidats savent que la méthode du pivot de Gauss permet de résoudre l'essentiel des problèmes calculatoires de l'algèbre linéaire (rang, résolution de systèmes linéaires, inversion, déterminant). A l'inverse, beaucoup pensent que réduire (diagonaliser ou trigonaliser une matrice) permet de calculer le déterminant ; d'un point de vue théorique, c'est le cas, mais d'un point de vue calculatoire c'est en général très maladroit. En outre, sur le plan conceptuel, il s'agit de deux problèmes de nature fondamentalement différente. Le jury a pu noter dans l'esprit de nombreux candidats une confusion entre trigonaliser une matrice (la réduire sous la forme $P^{-1}TP$) et l'écrire sous forme d'un produit LU de matrices triangulaires. Là encore, la différence conceptuelle est nette, et cette confusion ne devrait pas être faite. Les suites récurrentes linéaires sont toujours aussi mal connues, et plusieurs fois confondues avec les équations différentielles linéaires, avec pour résultat que les candidats écrivent des formules dépourvues de sens.

Le résultant est le parent pauvre de l'option, et sa simple existence est parfois totalement ignorée, souvent méconnue, et le lien avec l'élimination apparaît bien limité dans l'esprit des candidats. La classique présentation univariée de l'objet résultant n'est sans doute pas totalement étrangère à cet état de fait. Idéalement, les candidats devraient connaître les deux difficultés classiques (points ou composantes "à l'infini", correspondant à l'annulation conjointe des termes de tête, et points ou composantes définies sur la clôture algébrique). L'interprétation géométrique du résultant dans un problème d'élimination comme permettant de calculer la projection d'une intersection est un support précieux à l'intuition, et permet d'illustrer les deux pathologies ci-dessus. Elle gagnerait à être mieux connue des candidats. Faute de mieux, le jury est déjà heureux de voir des candidats avoir une relative maîtrise opérationnelle du résultant comme outil permettant de calculer des (sur-ensembles d') intersections de courbes ou de surfaces, et de mener ce processus à bien. Les candidats montrant leur maîtrise du sujet ont pu obtenir de très bonnes notes.

Plus largement, les anneaux de polynômes en plusieurs variables et leurs propriétés arithmétiques posent de gros problèmes aux candidats, sur des questions élémentaires comme : peut-on factoriser un polynôme en n variables ? Le pgcd existe-t-il ? Peut-on faire une division euclidienne dans cet anneau ? Par ce polynôme, etc.

Les connaissances en arithmétique sont dans l'ensemble satisfaisantes, avec un point noir : la vision "naïve" de l'algorithme d'Euclide étendu comme "remonter les identités déduites de l'algorithme d'Euclide" trouve très vite ses limites. Comme écrit l'an passé, la vision matricielle consistant à écrire une étape de l'algorithme d'Euclide

$$\begin{pmatrix} r_i \\ r_{i+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -q_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_{i-1} \\ r_i \end{pmatrix}$$

fournit immédiatement, pour tout i , r_i comme combinaison linéaire des entiers de départ. L'exponentiation rapide, longtemps bien maîtrisée, semble disparaître quelque peu de la culture des candidats, au grand regret du jury. Enfin, beaucoup de candidats ne sont pas à l'aise avec la manipulation des congruences, et se réfugient dans des égalités qui, fréquemment, alourdissent considérablement les calculs et les arguments.

La complexité des opérations élémentaires ne fait pas non plus partie du tout de la culture des candidats. Il s'agit pourtant d'un sujet où il est important d'avoir des repères pour comprendre la pertinence de certains choix faits dans les textes. Il devrait être à la portée des candidats de retenir que l'addition est linéaire en la taille de l'entrée, le reste de l'arithmétique (multiplication, division, pgcd, Euclide étendu) quadratique dans le cas des nombres et des polynômes, et que les algorithmes standard (multiplication, pivot de Gauss, inversion, résolution de système linéaire) sur les matrices ont un coût cubique (cette fois en la dimension de la matrice).

Informatique. Outre les remarques générales, le jury incite vivement les candidats à se poser, avant l'oral, la question spécifique de la représentation et de la manipulation, souvent un peu délicate, des éléments des corps finis non premiers dans le logiciel de leur choix. Sur ce point également, le jury attire l'attention des candidats sur le fait que les logiciels orientés vers le calcul réel, en précision fixée, peuvent s'avérer peu adaptés pour la manipulation de grands entiers, d'entiers modulo n , ou de réels en grande précision, fréquente dans le cadre de l'option C.

6.6 Option D : modélisation et analyse de systèmes informatiques

Le jury a apprécié le travail accompli pour la préparation de cette épreuve par les meilleurs candidats. Il a interrogé les candidats dans le même esprit que dans les autres options et les critères d'évaluation étaient largement identiques sauf en ce qui concerne l'exercice de programmation. Le lecteur est invité à se reporter à la section du rapport consacrée à l'épreuve de modélisation pour les remarques générales sur la structure de cette épreuve. Nous ne détaillons ici que les aspects spécifiques à cette épreuve dans l'option Informatique.