Analyse vectorielle, intégrales multiples - TD3

Exercice 1 : Calculer

$$\int_0^1 dy \int_0^y x^2 dx, \quad \int_0^1 dy \int_0^y y^2 dx$$

$$\int_0^1 dx \int_0^x -\sin(x^2) dy, \quad \int_0^1 dx \int_{1-x}^{1+x} (2x+3y^2) dy$$

$$\int_0^1 dz \int_0^z dy \int_0^y 2xyz dx, \quad \int_0^1 dx \int_x^{2x} dy \int_0^{x+y} 3xy dz$$

$$\int_0^\pi dy \int_0^2 dz \int_0^{\sqrt{4-z^2}} 2z \sin y dx, \quad \int_0^3 dx \int_0^{\sqrt{9-x^2}} dy \int_0^x -yz dz.$$

Exercice 2 : Calculer les intégrales suivantes en utilisant le théorème de Fubini

$$\iint_D 2xy dxdy, \quad D = \{(x,y),\ 0 \le x \le 1, x^2 \le y \le \sqrt{x}\}.$$

$$\iint_D (x+2y) dxdy, \quad D = \{(x,y),\ 1 \le x \le 3, 1+x \le y \le 2x\}.$$

$$\iint_D e^{x/y} dxdy, \quad D = \{(x,y),\ 1 \le y \le 2, y \le x \le 2y^3\}$$

$$\iint_D \frac{2}{x} dxdy, \quad D = \{(x,y),\ 1 \le y \le e, y^2 \le x \le y^4\}.$$

$$\iint_D x \cos y dxdy, \quad D \text{ borné par } y = 0, y = x^2, x = 2.$$

$$\iint_D 2xy dxdy, \quad D \text{ le premier quadrant du disque unité}$$

$$\iint_D ye^{2x} dxdy, \quad D \text{ le triangle de sommets } (0,0), (2,4), (6,0).$$

$$\iint_D xy dxdy, \quad D = \{(x,y),\ x \ge 0, y \ge 0, x+y \le 2\}.$$

$$\iint_D (x+2y) dxdy, \quad \text{où } D \text{ est le triangle de sommets } (0,0), (2,2), (4,0).$$

$$\iint xy dxdy, \quad D = \{(x,y),\ x \ge 0, y \ge 0, \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} \le 1\}$$

$$\iint \frac{dxdy}{(x+y)^2}, \quad D = \{(x,y),\ x \ge 1, y \ge 1, x+y \le 4\}.$$

$$\iint e^{2x+2y} dxdy, \quad \text{où } D \text{ est le triangle de sommets } (0,0), (1,1), (1,-1).$$

Exercice 3 : Caculer le volume compris entre
a) la surface d'équation $z = x^2 + y^2$ et le plan $z = 4$.

b) les surfaces d'équation $z = x^2 + y^2 - 1$ et $z = 1 - x^2 - y^2$.
c) la surface d'équation $z = x^2 + 4y^2$ et le plan $z = 4$.

Exercice 4 : Calculer le volume
a) Sous le paraboloide $z = x^2 + y^2$ et sur le domaine délimité par $y = x^2$ et $x = y^2$.
b) Sous la paraboloide $z = 3x^2 + y^2$ et sur le domaine borné par $y = x$ et $x = y^2 - y$.
c) Sous la surface $z = 2xy$ et sur le triangle de sommets $(1, 1)$, $(4, 1)$, $(1, 2)$.
d) Compris entre le paraboloide $z = x^2 + y^2 + 4$ et les plans $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $x + y + z = 1$.
e) Borné par le cylindre $y^2 + z^2 = 9$ et les plans $x = 2y$, $x = 0$, $z = 0$ dans le premier octant.
f) Borné par les cylindres $x^2 + y^2 = 4$ et $y^2 + z^2 = 4$.

Exercice 5 : Trouver le centre de gravité de la plaque homogène limitée par la parabole $y = 2x^2$ et la droite $y = 2$.

Exercice 6 : Calculer le jacobien de la transformation donnée et calculer l'intégrale donnée en utilisant cette transformation.
a) $x = \frac{1}{3}(u + v)$, $y = \frac{1}{3}(v - 2u)$, $\iint_D (3x + y)dxdy$ où D est le domaine borné par les droites $y = x - 2$, $y = x$, $y = -2x$ et $y = 3 - 2x$.
b) $x = 2u + 3v$, $y = 3u - 2v$, $\iint_D (2x + y)dxdy$ où D est le carré de sommets $(0, 0)$, $(2, 3)$, $(5, 1)$, $(3, -2)$.
c) $x = u/v$, $y = v$, $\iint_D -xydxdy$ où D est dans le premier quadrant et borné par les droites $y = x$, $y = 3x$ et les hyperboles $xy = 1$, $xy = 3$.

Exercice 7 : En utilisant un changement de variables, calculer

$$\iint_D xdxdy, \quad \text{où } D \text{ est le disque de centre 0 et de rayon 5.}$$

$$\iint_D ydxdy, \quad \text{où } D \text{ est le domaine dans le premier quadrant borné par le cercle}$$

$$x^2 + y^2 = 9 \text{ et les droites } y = x, y = 0.$$

$$\iint_D xydxdy, \quad \text{où } D \text{ est le domaine dans le premier quadrant et compris}$$

$$\text{entre les cercles } x^2 + y^2 = 4 \text{ et } x^2 + y^2 = 25.$$

$$\iint_D \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}dxdy, \quad \text{où } D \text{ est l'anneau } 4 \leq x^2 + y^2 \leq 16.$$

$$\iint_D \frac{dxdy}{1 + x^2 + y^2}, \quad \text{où } D \text{ est le disque unité.}$$

$$\iint_D \frac{xydxdy}{x^2 + y^2}, \quad \text{où } D \text{ est le triangle de sommets } (0, 0, (2, 2), (2, 0).$$

$$\iint \frac{dxdy}{\sqrt{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1}}, \quad D \text{ étant la partie du plan comprise}$$

$$\text{entre les ellipses d'équations} \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{et} \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 4.$$

$$\iint_D (x + y)dxdy, \quad D \text{ étant le triangle limité par les axes et la droite } x + y = 3.$$

Exercice 8 : En utilisant les coordonnées polaires, calculer le volume
a) borné par le paraboloide $z = 10 - 3x^2 - 3y^2$ et le plan $z = 4$.
b) borné par les paraboloides $z = 3x^2 + 3y^2$ et $z = 4 - x^2 - y^2$.

c) à l'intérieure du cylindre $x^2 + y^2 = 4$ et l'ellipsoide $4x^2 + 4y^2 + z^2 = 64$.

Exercice 9 : Calculer avec deux méthodes différentes l'intégrale suivante

$$\iint_D (y^2 - x^2)dxdy, \quad \text{où } D \text{ est défini par } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1.$$

Exercice 10 : Soit $f(x, y)$ une fonction de classe C^1. Montrer que $df \wedge df = 0$. Calculer

$$(x^2dx - y^2dy) \wedge ((2x - 1)dx + dy)$$

$$(dx + e^x dy) \wedge (dy - e^y dx)$$

$$d(x^2 + 6xy + y^2) \wedge d(x^3 + y^3).$$

Exercice 11 : Utilisant la formule de Green-Riemann, calculer

$$\int_{bD} x^2ydx + xy^3dy, \quad D \text{ étant le carrée de sommets } (0,0), (2,0), (2,2), (0,2)$$

$$\int_C (x^2 + y^2)dx + 2xydy, \quad C \text{ se compose de l'arc de parabole } y = x^2 \text{ compris entre}$$

$$(0,0) \text{ et } (2,4) \text{ et des segments qui vont de } (2,4) \text{ à } (0,4), \text{ et de } (0,4) \text{ à } (0,0)$$

$$\int_{bD} 2xydx + y^5dy, \quad D \text{ étant le triangle de sommets } (0,0), (2,0), (2,1)$$

$$\int_{bD} x^2ydx - xy^5dy, \quad D \text{ le carrée de sommets } (\pm 1, \pm 1)$$

$$\int_{bD} 3(y + e^{\sqrt{x}})dx + (2x + \cos y^2)dy, \quad D \text{ limité par les paraboles } y = x^2, x = y^2$$

$$\int_{bD} (y^2 - \arctan x)dx - (3x + \sin y)dy, \quad D \text{ limité par les courbes } y = x^2, y = 4$$

$$\int_C x^2dx + 3y^2dy, \quad C \text{ définie par } x^6 + y^6 = 1$$

$$\int_C x^2ydx - 6y^2dy, \quad C \text{ le cercle unité}$$

$$\int_C \overrightarrow{V} \cdot \overrightarrow{r}, \quad \overrightarrow{V} = x^3y\,\overrightarrow{i} + 2x^4\,\overrightarrow{j}, \quad C \text{ la courbe } x^4 + y^4 = 1.$$

$$\iint_D xydxdy, \quad D = \{(x,y),\ x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 2\}$$

$$\iint_D \frac{dxdy}{(x+y)^2}, \quad D = \{(x,y),\ x \geq 1, y \geq 1, x + y \leq 4\}.$$

Exercice 12 : Calculer

$$\iiint_D zdxdydz, \quad D = \{(x,y,z),\ x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, x + y + z \leq 4\}.$$

$$\iiint_D -yzdxdydz, \quad D = \{(x,y,z),\ 0 \leq z \leq 1, 0 \leq y \leq 2\pi, 0 \leq x \leq z + 2\}.$$

$$\iiint_D e^x dxdydz, \quad D = \{(x,y,z),\ 0 \le y \le 1, 0 \le x \le y, 0 \le z \le x+y\}.$$

$$\iiint_D zdxdydz, \quad \iiint_D z^2 dxdydz \quad \text{et} \quad \iiint_D (x+y-z)^2 dxdydz,$$

$$\text{où } D = \{(x,y,z),\ x^2+y^2+z^2 \le 4\}.$$

Exercice 13 : a) Calculer

$$\iiint_D ydxdydz$$

où D se trouve sous le plan $z = x + 2y$ et au-dessus de la région du plan Oxy bornée par les courbes $y = x^2$, $y = 0$, $x = 2$.
b) Calculer

$$\iiint_D zdxdydz$$

où D est borné par les plans $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $y + z = 3$ et $x + z = 3$.
c) Calculer

$$\iiint_D xzdxdydz$$

où D est la tétraèdre de sommets $(0,0,0)$, $(0,2,0)$, $(2,2,0)$ et $(0,2,2)$.
d) Calculer

$$\iiint_D (2x+4y)dxdydz$$

où D est borné par le cylindre parabolique $y = x^2$ et les plans $x = z$, $x = y$ et $z = 0$.
e) Calculer

$$\iiint_D xdxdydz$$

où D est borné par le paraboloide $x = 4y^2 + 4z^2$ et le plan $x = 16$.
f) Calculer

$$\iiint_D zdxdydz$$

où D est borné par le cylindre $y^2 + z^2 = 16$ et les plans $x = 0$, $y = 4x$ et $z = 0$ dans le premier octant.

Exercice 14 : Déterminer le centre de gravité du volume homogène défini par $x \ge 0$, $y \ge 0$, $z \ge 0$ et $x^2 + y^2 + z^2 \le 9$.

Exercice 15 : En utilisant les intégrales triples, calculer le volume du domaine décrit.
a) Le tétraède formé par les plans de coordonnées et le plan $2x + 3y + 6z = 24$.
b) Le domaine borné par le cylindre elliptique $4x^2 + z^2 = 1$ le les plans $y = 0$ et $y = z + 1$.
c) Le domaine borné par le cylindre $x = y^2$ et les plans $z = 0$ et $x + z = 2$.
d) Le domaine enfermé dans les paraboloides $z = x^2 + y^2$ et $z = 8 - x^2 - y^2$.

Exercice 16 : Déterminer le jacobien de la transformation $x = u^2$, $y = v^2$, $z = w^2$. Calculer le volume du domaine limité par les plans de coordonnées et la surface $\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} = 2$.

Exercice 17 : En utilisant les coordonnées cylindriques
a) Calculer

$$\iiint_D (x^2+y^2)dxdydz$$

où D est borné par le cylindre $x^2 + y^2 = 4$ et les plans $z = -2$ et $z = 2$.
b) Calculer

$$\iiint_D \sqrt{x^2 + y^2} dxdydz$$

où D est borné par le paraboloide $z = 16 - x^2 - y^2$ et le plan Oxy.
c) Calculer

$$\iiint_D xzdxdydz$$

où D est borné par les plans $z = 0$, $z = y$ et le cylindre $x^2 + y^2 = 4$, dans le demi-espace $y \geq 0$.
d) Calculer

$$\iiint_D ydxdydz$$

où D est enserré entre les cylindres $x^2 + y^2 = 4$ et $x^2 + y^2 = 16$, au-dessus du plan Oxy et sous le plan $z = x + 4$.
e) Calculer

$$\iiint_D x^2 dxdydz$$

où D est borné par le cylindre $x^2 + y^2 = 1$, au-dessus du plan $z = 0$ et sous le cône $z^2 = 9x^2 + 9y^2$.

Exercice 18 : En utilisant les coordonnées sphériques.
a) Calculer

$$\iiint_D (x^2 + y^2 + z^2) dxdydz$$

où D est la boule de centre 0 et de rayon 2.
b) Calculer

$$\iiint_D (x^2 + y^2) dxdydz$$

où D est la demi-sphère unité supérieure.
c) Calculer

$$\iiint_D y^2 dxdydz$$

où D est la partie dans le premier octant de la boule de centre 0 et de rayon 2.
d) Calculer

$$\iiint_D 2xe^{(x^2+y^2+z^2)^2} dxdydz$$

où D est enfermé entre les sphères $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ et $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, dans le premier octant.
e) Calculer

$$\iiint_D \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} dxdydz$$

où D est borné inférieurement par le cône $\phi = \pi/6$ et supérieurement par la sphère $x^2 + y^2 + z^2 = 9$.
f) Calculer

$$\iiint_D x^2 dxdydz$$

où D est entres les sphères de centre 0 et de rayons 1 et 4, et au-dessus du cône $\phi = \pi/4$.
g) Calculer le volume du domaine qui se trouve au-dessus du cône $\phi = \pi/3$ et sous la surface $r = 4 \cos \phi$.

Exercice 19 : En utilisant un changement de variables, calculer

$$\iiint_D z^2 dxdydz, \quad D = \{(x, y, z),\ x^2 + y^2 \leq R^2, 0 \leq z \leq h\}$$

$$\iiint_D \frac{dxdydz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \quad D = \{4 \le x^2+y^2+z^2 \le 9\}$$

$$\iiint_D e^{\sqrt{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}}} dxdydz, \quad D = \{(x,y,z), \ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2} \le 1\}.$$

Exercice 20 : Calculer

$$\iiint_D xyzdxdydz, \quad D = \left\{(x,y,z), \ x,y,z \ge 0, \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2} \le 1\right\}.$$

Exercice 21 : Calculer le volume intérieur à la sphère et au cylindre d'équations

$$x^2+y^2+z^2 = 4, \qquad x^2+y^2-2x = 0.$$

Exercice 22 : Calculer

$$(x^2dx + z^2dy + dz) \wedge (dx - 2dy - x^2dz)$$

$$(e^z dx - e^y dz) \wedge (xdy + ydz)$$

$$(-y^2dx + dy + 2ydz) \wedge (zdx \wedge dy + xdz \wedge dx)$$

$$(xdy + ydz) \wedge (zdy + xdz) \wedge (xdz - zdx)$$

$$d(x^3 + e^z) \wedge (2dx \wedge dy - xdy \wedge dz).$$

Montrer que si $f(x,y,z)$ est une fonction de classe C^1 alors $df \wedge df = 0$.

Exercice 23 : Soit S la partie de la surface d'équation $z = \frac{x^2+y^2}{4}$ déterminée par $0 \le z \le 2$ et orientée suivant la normale extérieure. Calculer l'intégrale de la surface $\iint_S \frac{dy \wedge dz}{x}$.

Exercice 24 : Calculer l'aire de la surface d'équation $z = xy$ qui se projette horizontalement sur le disque $x^2+y^2 \le 4$ dans le plan Oxy.

Exercice 25 : Calculer l'aire découpée sur le cône d'équation $z^2 = x^2+y^2$ par le cylindre d'équation $x^2+y^2 = 4x$ et telle que $z \ge 0$.

Exercice 26 : a) Soit S une partie de la sphère de centre 0 et de rayon R orientée suivant la normale extérieure. Montrer que

$$\text{aire}(S) = \frac{1}{R} \iint_S xdy \wedge dz + ydz \wedge dx + zdx \wedge dy.$$

b) Calculer l'aire découpée sur la demi-sphère supérieure par le cylindre $x^2+y^2-Rx = 0$.

Exercice 27 : Calculer l'intégrale de surface

$$\iint_S yzd\sigma, \quad S \text{ la portion du plan } 3x+2y+z=6 \text{ dans le premier octant}$$

$$\iint_S xzd\sigma, \quad S \text{ le triangle de sommets } (2,0,0), (0,2,0), (0,0,2)$$

$$\iint_S -xd\sigma, \quad S \text{ la surface } y = x^2+4z, 0 \le x \le 2, 0 \le z \le 2$$

$$\iint_S yz d\sigma, \quad S \text{ la partie du plan } z = y + 6 \text{ limitée par le cylindre } x^2 + y^2 = 4$$

$$\iint_S xy d\sigma, \quad S \text{ limitée par les surfaces } x^2 + y^2 = 4, y = 0, x + y = 4$$

$$\iint_S (x^2 z + y^2 z) d\sigma, \quad S \text{ la demi-sphère unité supérieure}$$

$$\iint_S xyz d\sigma, \quad S \text{ la partie de la sphère unité au-dessus du cône } z = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\iint_S (x^2 y - z^2) d\sigma, \quad S \text{ la partie du cylindre } x^2 + y^2 = 1 \text{ limitée par } z = 0 \text{ et } z = 3.$$

Exercice 28 : Calculer le flux de $\overrightarrow{V}$ à travers la surface S où
a) $\overrightarrow{V} = -e^y \overrightarrow{i} - ye^x \overrightarrow{j} - x^2 y \overrightarrow{k}$, S la partie du paraboloide $z = x^2 + y^2$ au-dessus le carrée $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$ orientée vers le haut.
b) $\overrightarrow{V} = -x^2 y \overrightarrow{i} + 3xy^2 \overrightarrow{j} - 4y^3 \overrightarrow{k}$, S la partie du paraboloide $z = x^2 + y^2 - 9$ au-dessous le rectangle $0 \leq x \leq 2$, $0 \leq y \leq 1$ orientée vers le bas.
c) $\overrightarrow{V} = y \overrightarrow{i} - x \overrightarrow{j} - 3z \overrightarrow{k}$, S la demi-sphère $z = \sqrt{16 - x^2 - y^2}$ orientée vers le bas.

Exercice 29 : Considérons le champ de vecteurs $\overrightarrow{V}$ de composantes yz, zx, xy.
a) Calculer $\overrightarrow{\text{rot}\overrightarrow{V}}$.
b) Calculer la circulation de ce champ le long de la courbe intersection de la sphère et du cylindre de l'exercice 26.
c) Calculer la circulation de $\overrightarrow{V}$ le long d'un arc joignant 2 points (a, b, c) et (a', b', c').
d) Calculer la divergence de $\overrightarrow{V}$.
e) Calculer le flux à travers la sphère de centre 0 et de rayon R orientée suivant la normale extérieure.

Exercice 30 : Calculer le travail de $\overrightarrow{V}$ le long de la courbe C, orientée dans le sens contraire des aiguilles d'une montre, vue d'en haut. Utiliser la formule de Stokes.
a) $\overrightarrow{V} = xz \overrightarrow{i} + 2xy \overrightarrow{j} + 3xy \overrightarrow{k}$, C la frontière de la partie du plan $3x + y + z = 6$ dans le premier octant.
b) $\overrightarrow{V} = 2z \overrightarrow{i} + 4x \overrightarrow{j} + 5y \overrightarrow{k}$, C la courbe d'intersection du plan $z = x + 8$ et le cylindre $x^2 + y^2 = 16$.
c) $\overrightarrow{V} = x \overrightarrow{i} + y \overrightarrow{j} + (x^2 + y^2) \overrightarrow{k}$, C la frontière de la partie du paraboloide $z = 1 - x^2 - y^2$ dans le premier actant.

Exercice 31 : Considérons le champ $\overrightarrow{v} = \frac{\overrightarrow{r}}{r^3}$.
a) Calculer $\overrightarrow{\text{rot}}\overrightarrow{V}$ et $\text{div}\overrightarrow{V}$.
b) Calculer directement le flux de $\overrightarrow{V}$ à travers la sphère unité orientée suivant la normale extérieure.
c) Expliquer pourquoi le formule d'Ostrogradsky ne s'applique pas.

Exercice 32 : Soit S la sphère unité orientée suivant la normale extérieure. Calculer

$$\iint_S x^3 dy \wedge dz + y^3 dz \wedge dx + z^3 dx \wedge dz.$$

Exercice 33 : Calculer le flux de $\overrightarrow{V}$ à travers la surface S en utilisant la formule d'Ostrogradski.
a) $\overrightarrow{V} = 3x^2 z^3 \overrightarrow{i} + 9x^2 yz^2 \overrightarrow{j} - 4xy^2 \overrightarrow{k}$, S le bord du cube de sommets $(\pm 1, \pm 1)$.
b) $\overrightarrow{V} = x^2 y \overrightarrow{i} - x^2 z \overrightarrow{j} + z^2 y \overrightarrow{k}$, S le bord du parallélipipède rectangle formé par les plans $x = 0$, $x = 3$, $y = 0$, $y = 1$, $z = 0$, $z = 1$

c) $\overrightarrow{V} = xz\,\overrightarrow{i} + yz\,\overrightarrow{j} - z^2\,\overrightarrow{k}$, S l'ellipsoide $x^2 + y^2 + 4z^2 = 1$.
d) $\overrightarrow{V} = 2x^3\,\overrightarrow{i} + 2y^3\,\overrightarrow{j} + 2z^3\,\overrightarrow{k}$, S la sphère unité.
e) $\overrightarrow{V} = (x^3 + y\sin z)\,\overrightarrow{i} + (y^3 + z\sin x)\,\overrightarrow{j} + 3z\,\overrightarrow{k}$, S le bord du domaine limité par les demi-sphères supérieures de centre 0 et de rayon 1, 2, et par le plan $z = 0$.