Analyse vectorielle, intégrales multiples - TD1

Exercice 1 : Déterminer pour chacune des fonctions suivantes le domaine de définition et la limite au point x_0 indiqué.

1. $\dfrac{2(1-\cos x)}{x^2}$ en $x_0 = \dfrac{\pi}{3}$
2. $\dfrac{(1-\cos x)\sin x}{x\tan^2 x}$ en $x_0 = 0$
3. $\dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{2+\cos x}$ en $x_0 = +\infty$
4. $\dfrac{\sqrt[3]{x^2+x+8}+\sqrt{x^2+4x}-2}{x}$ en $x_0 = 0$

Exercice 2 : Montrer que la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}} & \text{si } x > 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \\ \dfrac{\mathrm{sh}\sqrt{-x}}{\sqrt{-x}} & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

est continue.

Exercice 3 :

a) Soit $f(x) = \exp\left(\dfrac{x^2}{-2+\cos x}\right)$. Calculer la limite de f en $+\infty$.

b) Soit $g(x) = x\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}$, pour $x \neq 0$. La fonction g admet-elle une limite en 0 ?

Exercice 4 : Soient f et g deux fonctions de $\mathbb{R} - \{0\}$ dans $\mathbb{R}$, définies par :

$$f(x) = \sin\frac{1}{x}, \qquad g(x) = x\sin\frac{1}{x}$$

Peut-on prolonger f et g par continuité en 0 ?

Exercice 5 : Etudier la continuité en 0 des fonctions suivantes :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{e^{1/x}-2} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin(1/x)}{\cos(1/x) + e^{(1/x^2+x^2)}} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Exercice 6 :

a) Montrer que les fonctions $f(x) = |x|$ et $g(x) = \dfrac{x}{1+|x|}$ sont continues et dérivables sur $\mathbb{R}^*$.

b) Etudier leur continuité et leur dérivabilité au point 0.

Exercice 7 :

a) Donner la dérivée d'une fonction composée.

b) Donner la dérivée d'une fonction réciproque.

c) Calculer la dérivée des fonctions réciproques suivantes : arcsin, arccos et arctan.

d) Pour chacune des fonctions suivantes, donner le domaine de définition et calculer la dérivée :

(a) $f(x) = x \arcsin x + \sqrt{1-x^2}$ (b) $f(x) = \dfrac{x}{1+x^2} + \arctan x$

(c) $f(x) = \arctan \sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$ (d) $f(x) = \arcsin\left(\dfrac{x+1}{\sqrt{2}}\right)$

(f) $f(x) = \arctan(\ln x)$

Exercice 8 : Calculer les développements limités des fonctions suivantes :

1. $DL_4(0)$ de $f(x) = \ln^2(1+x)$ 2. $DL_3(0)$ de $g(x) = e^{\sin x}$

3. $DL_3(0)$ de $h(x) = \dfrac{x}{e^x - 1}$ 4. $DL_3(0)$ de $j(x) = \dfrac{\ln(\cos x)}{\cos x - 1}$

5. $DL_3(1)$ de $k(x) = \sqrt{x}$ 6. $DL_7(0)$ de $l(x) = \dfrac{1}{1 - x^2 - x^3}$

Exercice 9 : Calculer les primitives des fonctions suivantes :

1. $\dfrac{x-3}{(x+1)(x^2+4)}$, $x\sqrt{x^2+1}$, $\tan(2x)$

2. $\dfrac{6x-7}{3x^2-7x+11}$, $\dfrac{\sin 2x}{(1+\cos 2x)^2}$, $\dfrac{1}{\sqrt{16-9x^2}}$

3. $\dfrac{x}{x^4+16}$, $\dfrac{\sin 2x}{\sqrt{1+\cos^2 x}}$, $\dfrac{\sqrt{1+\ln x}}{x}$

4. xe^x, $x \sin x$, $\ln x$, $x^n \ln x$, $x \cos^2 x$, $\ln(x^2+1)$

5. $\sin^3 x$, $\tan^3 x$, $\dfrac{\sqrt{4-x^2}}{x^2}$

6. $\cos^{10} x \sin x$, $(\sin^3 x)(\cos^3 x)$, $\cos^5 x$, $x^2 \cos^3 x$, $e^x \cos^3 x$, $e^x \cos^3 x \sin x$.

Exercice 10 : Calculer les intégrales suivantes :

1.
$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}, \int_0^{\pi/2} \sin^2 x \; dx$$

2.
$$\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{3+2\cos x}$$ (On pourra procéder au changement de variables $t = tan(x/2)$)

Exercice 11 : Calculer l'aire des domaines suivants :

1. $\{ \ (x, y) \mid 0 \leq x, \ 0 \leq y \text{ et } 1 \leq x + y \leq 2\}$

2. $\{ \ (x, y) \mid 1 \leq x \leq 2 \text{ et } x \leq y \leq \text{sh}x\}$

3. $\{ \ (x, y) \mid 0 \leq x \leq \pi \text{ et } \sin^2 x \leq y \leq \sin x\}$

4. $\{ \ (r, \theta) \mid \dfrac{\pi}{2} \leq x \leq \dfrac{3\pi}{2} \text{ et } r \leq 1\}$

Fonctions de plusieurs variables

Exercice 12 : Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer son ensemble de définition D et donner une représentation graphique de D.

1. $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2 - 1)$ 2. $f(x, y) = \ln(y - x^2)$

3. $f(x, y) = \sqrt{1 - xy}$ 4. $f(x, y) = \sqrt{(x + y + 1)(x + y - 1)}$

5. $f(x, y) = \dfrac{\sin x + \cos y}{x^2 + xy + y^2}$

Exercice 13 : Représenter la ligne de niveau c de la fonction f dans les cas suivants :

1.$f(x, y) = 3x + 2y$ $c = 1, \ 2, \ 0$

2. $f(x, y) = y^2$ $c = -1, \ 0, \ 1, \ 4$

3. $f(x, y) = \ln(x + y)$ $c = 0, \ 1$

Exercice 14 : Pour $f(x, y)$, c et m_0 donnés ci-dessous, donner l'équation de la courbe I^c de niveau c de f et celle de la tangente T à I^c au point m_0 :

1. $f(x, y) = \ln(y - x^2)$ $c = 0$ $m_0 = (-1, 2)$

2. $f(x, y) = 2xy - 3x + y + 3$ $c = 6$ $m_0 = (1, 2)$

3. $f(x, y) = 2^{xy}$ $c = 4$ $m_0 = (1, 2)$

Exercice 15 : Soit f la fonction définie par :

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

a) Etudier la continuité de f sur $\mathbb{R}^2$.

b) Calculer les dérivées partielles de f sur $\mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$. Que valent-elles en $(0, 0)$?

Exercice 16 : Pour chacune des fonctions suivantes, donner l'ensemble de définition et étudier la limite en $(0,0)$.

1. $f(x,y) = \dfrac{1-\cos(xy)}{y^2}$ 2. $f(x,y) = \dfrac{x^2+y^2}{x}$ 3. $f(x,y) = \dfrac{x^2 y}{x^2+y^2}$

4. $f(x,y) = (x+y^2)\sin\left(\dfrac{1}{xy}\right)$ 5. $f(x,y) = (1+xy)^{1/x}$

Exercice 17 : On considère la fonction f définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x+y} & \text{si } x+y \neq 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Montrer que f n'est pas continue en $(0,0)$ mais que sa restriction à $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$ l'est.

Exercice 18 : Soit f la fonction définie par :

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^4+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

a) Soit $\mathcal{D}$ une droite quelconque passant par l'origine. Montrer que la restriction de f à $\mathcal{D}$ est continue en $(0,0)$.
b) Peut-on en déduire que f est continue en $(0,0)$?

Exercice 19 : Soit f la fonction définie par :

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{(x^2-1)y^3}{(x-1)^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (1,0) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Etudier la continuité et la dérivabilité (différentiabilité) de f au point $(1,0)$.

Exercice 20 : Donner les dérivées partielles au premier ordre des fonctions suivantes :

(a) $f(x,y,z) = x^3y + xyz + xz^3$ (b) $f(x,y) = x^{y^2}$

(c) $f(x,y,z) = \exp\left(\frac{x}{y}\right) + \exp\left(\frac{z}{y}\right)$ (d) $f(x,y) = \arcsin(x^2+y^2)$

Exercice 21 : Calculer les différentielles totales des fonctions suivantes :

(a) $f(x,y) = \ln(xy)$ (b) $f(x,y,z) = x^2 + x^2y^2z^2 + \sin(yz)$

(c) $f(x,y,z) = \tan(3x-y) + 6^{y+z}$

Exercice 22 : Soit $f = exp(u-2v)$, où $u : (x,y) \longmapsto \sin x$ et $v : (x,y) \longmapsto x^3+y^2$. Calculer les dérivées partielles de f.

Exercice 23 : Soit $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable et $f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & x\varphi(\frac{y}{x}) \end{cases}$ Montrer que : $x\dfrac{\partial f}{\partial x} + y\dfrac{\partial f}{\partial y} = f$.

Exercice 24 : Soit $m \in \mathbb{N}^*$ et soit $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction satifaisant à l'équation d'Euler : $x\dfrac{\partial f}{\partial x} + y\dfrac{\partial f}{\partial y} + z\dfrac{\partial f}{\partial z} = mf$.
Pour (x, y, z) fixés, on pose $\varphi : \alpha \longmapsto \frac{1}{\alpha^m} f(\alpha x, \alpha y, \alpha z)$.
Montrer que $\varphi' = 0$ et en déduire que f est homogène de degré m.

Exercice 25 :

a) Montrer que $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$ vérifie l'équation de Laplace : $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$.

b) On considère $u = 1/r$, où $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Montrer que u satisfait l'équation de Laplace : $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$.

Exercice 26 : Développer à l'ordre 1 les fonctions suivantes, au voisinage des points indiqués :

(a) $f(x, y) = x^2 + y^2$ $\quad (1, 1)$, $(0, 2)$, (a, b)

(b) $f(x, y, z) = x^2 + 3xyz - y^3 + z$ $\quad (1, 0, -1)$

(c) $f(x, y, z) = \sin x \cos y \tan z$ $\quad \left(0, \pi, \dfrac{\pi}{4}\right)$

Dérivation partielle d'ordre 2

Exercice 27 : Déterminer les dérivées partielles jusqu'à l'ordre 2 des fonctions suivantes :

a) $f(x, y) = x^2 + xy - y^3$. Le théorème de symétrie de Schwarz est-il vérifié ?

b) $f(x, y, z) = \cos(x + yz)$.

Exercice 28 : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ de la manière suivante :

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

a) Montrer que f admet des dérivées partielles d'ordre 2, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$, en $(0, 0)$ et les calculer.

b) Que peut-on déduire de ces résultats ?

Exercice 29 : [Laplacien en coordonnées polaires] Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction qui admet en tout point de $\mathbb{R}^2$ des dérivées partielles jusqu'à l'ordre 2. On considère la fonction $F : \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $F(r, \theta) = f(r\cos\theta, r\sin\theta)$.

a) Déterminer $\dfrac{\partial F}{\partial r}$, $\dfrac{\partial F}{\partial \theta}$, $\dfrac{\partial^2 F}{\partial r^2}$ et $\dfrac{\partial^2 F}{\partial \theta^2}$.

b) En déduire l'expression de Laplacien de f : $\Delta f = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ au point $(r\cos\theta, r\sin\theta)$.

Exercice 30 : Montrer que l'équation $x^5 + 3xy - y^6 = 1$ définit y comme une fonction implicite de x au voisinage du point $(1, 0)$. En notant $y = \varphi(x)$, calculer $\varphi'(1)$ et $\varphi''(1)$.

Exercice 31 : Montrer que l'équation $xy + yz + xz + 2x + 2y - z = 0$ définit implicitement une fonction $(x, y) \longmapsto z = f(x, y)$ au voisinage de $(0, 0, 0)$ et calculer le plan tangent en ce point à la surface considérée.

Exercice 32 : Soit $F(x,y) = x^2 + y^4 - 3xy + x - 1$. Montrer qu'on peut appliquer à F le théorème des fonctions implicites au point $(2,1)$.
Soit $\varphi(x)$ une fonction telle que dans un voisinage de $(2,1)$ on ait l'équivalence :

$$F(x,y) = 0 \Longleftrightarrow y = \varphi(x).$$

On a donc $\varphi(2) = 1$ et $F(x,\varphi(x)) = 0$ dans le voisinage de $x = 2$ considéré. En dérivant deux fois cette dernière relation, puis en évaluant en $x = 2$, calculer $\varphi'(2)$ et $\varphi''(2)$.
En déduire un développement limité de φ à l'ordre 2 au point 2.

Analyse vectorielle, intégrales multiples - TD2

Exercice 1 : Soient $a,\ b,\ c$ et d quatre vecteurs de $\mathbb{R}^3$. Montrer que :

1. $a \wedge (b \wedge c) = (a \cdot c)b - (a \cdot b)c$
   En déduire que le produit vectoriel n'est pas associatif.
2. $\det[a,b,c] = a \cdot (b \wedge c) = (a \wedge b) \cdot c$
3. $(a \wedge b) \wedge (c \wedge d) = \begin{cases} c(a \cdot (b \wedge d)) - d(a \cdot (b \wedge c)) \\ -a(b \cdot (c \wedge d)) + b(c \cdot (d \wedge a)) \end{cases}$

Exercice 2 :

a) Chercher un vecteur perpendiculaire au plan qui passe par les points $P(1,4,6)$, $Q(-2,5,-1)$ et $R(1,-1,1)$.

b) Calculer l'aire du triangle PQR.

c) Grâce au produit mixte, montrer que les vecteurs $\vec{a} = (1,4,-7)$, $\vec{b} = (2,-1,4)$ et $\vec{c} = (0,-9,18)$ sont coplanaires (c'est-à-dire qu'ils appartiennent à un même plan).

d) Calculer l'aire du parallélépipède construit sur les vecteurs $\vec{a} = (1,0,6)$, $\vec{b} = (2,3,-8)$ et $\vec{c} = (8,-5,6)$

e) Calculer l'aire du parallélépipède d'arrêtes adjacentes PQ, PR et PS avec : $P(1,1,1)$, $Q(2,0,3)$, $R(4,1,7)$ et $S(3,-1,-2)$.

Exercice 3 : Représenter graphiquement les champs de vecteurs définis par :

1. $\vec{V}(x,y,z) = (x,y,0)$
2. $\vec{V}(x,y,z) = (-x,-y,0)$
3. $\vec{V}(x,y,z) = (x,y,z)$
4. $\vec{V}(x,y,z) = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, 0\right)$
5. $\vec{V}(x,y,z) = \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}, 0\right)$
6. $\vec{V}(x,y,z) = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right)$

Exercice 4 : Calculer :

a) $div\ \vec{r}$ et $\overrightarrow{rot}\ \vec{r}$

b) $div\ \vec{u}$ et $\overrightarrow{rot}\ \vec{u}$ avec $\vec{u}(x,y,z) = (xy, yz, xz)$

c) $(div\ \vec{w})\,(1,-1,1)$ avec $\vec{w}(x,y,z) = (x^2y, -2y^3z^2, xy^2z)$

d) $\left(\overrightarrow{grad}\ f\right)(1,-2,-1)$ avec $f(x,y,z) = 3x^2y - y^3z^2$

Exercice 5 : Un champ vectoriel est dit irrationnel si (et seulement si) son rotationnel est nul.

a) Montrer que le champ $\vec{u}(x,y,z) = (ax+by+cz, dx+ey+fz, gx+hy+iz)$ est irrationnel si et seulement si la matice $\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ est symétrique.

b) Montrer que $\vec{u}$ est alors le gradient d'un champ scalaire.

Exercice 6 : Montrer que pour f et g deux champs scalaires et $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux champs vectoriels, on a les résultats suivants :

a) $\overrightarrow{grad}(fg) = \left(\overrightarrow{grad}\ f\right) g + f\left(\overrightarrow{grad}\ g\right)$

b) $div(f\vec{u}) = \left(\overrightarrow{grad}\ f\right)\cdot\vec{u} + f(div\ \vec{u})$

c) $div(\vec{u}\wedge\vec{v}) = \left(\overrightarrow{rot}\ \vec{u}\right)\cdot\vec{v} - \vec{u}\cdot\left(\overrightarrow{rot}\ \vec{v}\right)$

d) $\overrightarrow{rot}(f\vec{u}) = \left(\overrightarrow{grad}\ f\right)\wedge\vec{u} + f\cdot(\overrightarrow{rot}\ \vec{u})$

Exercice 7 : Exprimer en fonction de $\dot{r}$ et $\vec{r}$ le gradient de :

$$r, \quad r^2, \quad \ln r, \quad \frac{1}{r}, \quad r^k \quad k\in\mathbb{R}.$$

Exercice 8 : Pour chacun des champs $\vec{u}$ ci-dessous :

– vérifier que le rotationnel de $\vec{u}$ est nul.
– déterminer un champ scalaire f admettant ce champ $\vec{u}$ pour gradient.

a) $\vec{u} = \dfrac{\vec{r}}{r^2}$

b) $\vec{u}(x,y,z) = (2xy, x^2+3y^2z^2, 2y^3z+4z^3)$

c) $\vec{u}(x,y,z) = \left(\dfrac{1}{x} + y\cos(xy), \dfrac{1}{y} + x\cos(xy), \dfrac{1}{z}\right)$

Exercice 9 : Soit $\vec{w}(x,y,z) = (x^a y, -axz, ayz)$.

a) Calculer directement $\overrightarrow{rot}\left(\overrightarrow{rot}(\vec{w})\right)$.

b) Déterminer k et $a\in\mathbb{N}$ pour que : $\overrightarrow{rot}\left(\overrightarrow{rot}(\vec{w})\right) = (0, 2(x^k+1), 0)$.

Exercice 10 : Existe-t-il une fonction vectorielle différentiable $\vec{V}$ telle que :
(i) $\overrightarrow{rot}\ \vec{V} = \vec{r}$ (ii) $\overrightarrow{rot}\ \vec{V} = (2,1,3)$
S'il existe, trouver $\vec{V}$.

Exercice 11 : Soit $\vec{V}(x,y,z) = (y^2+z^2, -xy, -xz)$

a) Déterminer une fonction φ telle que $\varphi(1) = 1$ et $\varphi(z)\cdot\vec{V}(M)$ soit un rotationnel.

b) φ étant ainsi choisie, déterminer un potentiel vecteur $\vec{U_0}(M) = (P(x,y,z), Q(x,y,z), 0)$ du champ de rotationnels obtenu. En déduire la forme générale des potentiels vecteurs $\vec{U}(M)$ de ce champ (c'est-à-dire les vecteurs $\vec{U}(M)$ tels que : $\overrightarrow{rot}\ \vec{U}(M) = \varphi(z)\cdot\vec{V}(M)$).

Exercice 12 : Soit $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction deux fois dérivable.

a) On considère le champ scalaire $f = \varphi\circ r$. Calculer son gradient et son laplacien.

b) On considère le champ vectoriel $\vec{u} = (\varphi\circ r)\vec{r}$. Calculer sa divergence et son rotationnel.

Ces types de champs sont dits radiaux.

Exercice 13 : Soit $\vec{u} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ une fonction vectorielle d'une variable réelle de classe $\mathcal{C}^1$. Montrer que :
(a) $div(\vec{u}\circ r) = (\vec{u}'\circ r)\cdot\dfrac{\vec{r}}{r}$ (b) $\overrightarrow{rot}(\vec{u}\circ r) = (\vec{u}'\circ r)\wedge\dfrac{\vec{r}}{r}$

Exercice 14 : Soit $w = (yz + x^2y^3)dx + (xz + x^3y^2)dy + \phi(x,y)dz$

a) Déterminer ϕ pour que la forme w soit exacte sur $\mathbb{R}$.

b) Trouver alors les primitives de w.

Intégrales curvilignes

Exercice 15 : Soit $\mathcal{C}$ la courbe représentée paramétriquement par :

$$\begin{cases} x(t) = e^{2t}\cos t \\ y(t) = e^{2t}\sin t \\ z(t) = ke^{2t} \qquad \text{où } k \in \mathbb{R}_+^* \end{cases}$$

a) Montrer que $\mathcal{C}$ est tracée sur un cône de révolution d'axe Oz.

b) Montrer que les tangentes à $\mathcal{C}$ forment toutes le même angle avec le plan Oxy.

Exercice 16 : Calculer les équations des tangentes aux courbes suivantes :

$$\begin{cases} x(t) = e^{-t} \\ y(t) = 2\cos 3t \\ z(t) = 2\sin 3t \end{cases} \qquad \begin{cases} x(t) = t^2+1 \\ y(t) = 4t-3 \\ z(t) = 2t^2-6t \end{cases} \qquad \begin{cases} x(t) = t^2 \\ y(t) = \sin t \\ z(t) = e^{2t} \end{cases}$$

aux points respectifs : $t_0 = \pi$, $t_0 = 2$ et $t_0 = 0$.

Exercice 17 : Les coordonnées d'un point mobile M sont données par le système :

$$\begin{cases} x(t) = 3\cos t - 1 \\ y(t) = -2\cos t + 1 \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}$$

a) Déterminer la trajectoire de M et la représenter graphiquement.

b) Déterminer le vecteur tangent unitaire.

Exercice 18 : On considère la courbe représentée par le système paramétré :

$$\begin{cases} x(t) = \cos^2 t \\ y(t) = \sin t \end{cases}$$

Décrire géométriquement cette courbe et calculer le vecteur tangent unitaire en précisant les points où il est défini.

Exercice 19 : On considère un mouvement plan d'équation vectorielle :

$$\vec{u} = (2t + \sin 2t)\vec{i} + (1 - \cos 2t)\vec{j}.$$

Rechercher, au point correspondant à $t = \frac{\pi}{4}$ les vecteurs unitaires tangent et normal.

Exercice 20 : Soient les points $A(1,0)$, $B(0,1)$ et $C(1,1)$.

a) Calculer les trois intégrales curvilignes :

$$I_k = \int_{\Gamma_k} \left[(y^2 - y)dx - 2(x^2 - x)dy\right]$$

$k = 1, 2, 3$, où Γ_1 est la ligne brisée OAC, Γ_2 la ligne brisée OBC et Γ_3 le segment $[OC]$.

b) Le résultat est-il indépendant du chemin suivi ?

Exercice 21 : Soit Γ l'arc limité par les points $A(1,0,0)$ et $B(1,0,2\pi)$ de la trajectoire du mouvement dont le vecteur vitesse est $\vec{v}(t) = (-\sin t, \cos t, 1)$, $0 \leq t \leq 2\pi$.
Calculer :

$$I = \int_\Gamma 4xydx + 3y^2dy + 5zdz$$

Exercice 22 : Soient $A(1,-1)$, $B(1,1)$, $C(-1,-1)$ et $D(-1,1)$. Calculer :

$$I = \int_\Gamma \left[(x^2+y^2)dx + 2x^2ydy\right]$$

si Γ est la courbe fermée $ABCDA$ constituée :
(a) de l'arc (AB) du cercle $(x-1)^2+y^2=1$ $\quad x \geq 1$ (b) du segment $[BC]$
(c) de l'arc (CD) du cercle $(x+1)^2+y^2=1$ $\quad x \leq -1$ (d) du segment $[DA]$

Exercice 23 : Soit :

$$I = \int_\Gamma \left[(x^2+y^2)dx + (x^2+y^2)dy\right]$$

où Γ est la frontière, parcourue dans le sens trigonométrique, de la plus petite des deux portions délimitées par le cercle de rayon 2 centré à l'origine et par la parabole d'équation $y^2 = 3x$.

a) Calculer I.
b) Calculer l'aire intérieure à Γ.

Exercice 24 : On considère la forme différentielle $\phi(x,y) = \dfrac{xdy - ydx}{x^2+y^2}$.

a) Montrer que ϕ est une forme différentielle fermée.
b) Calculer $I = \int_\mathcal{C} \phi(x,y)$ si $\mathcal{C}$ est :
   – le cercle de rayon $R > 0$, centré à l'origine, parcouru dans le sens direct,
   – la courbe représentée par $\begin{cases} x(t) = (2+\cos\frac{t}{2})\cos t \\ y(t) = (2+\cos\frac{3t}{2})\sin t \end{cases}$ $\quad 0 \leq t \leq 4\pi$.
c) Calculer les aires intérieures à ces deux courbes.

Exercice 25 : Un point matériel est soumis au champ de forces : $\vec{F}(x,y,z) = (2x - y + 3z, z + 4y, 2xz + y + x^2)$ le long de l'ellipse $\mathcal{E}$ d'équation paramétrique :

$$\begin{cases} x(t) = a\cos t \\ y(t) = b\sin t \quad 0 \leq t \leq 2\pi \\ z = 0 \end{cases}$$

parcourue dans le sens trigonométrique. Déterminer les coefficients a et $b \in \mathbb{N}$ avec $3 < a < b$, sachant que le travail de $\vec{F}$, $W = \int_\mathcal{E} \vec{F} \cdot d\vec{M}$, le long de l'ellipse vaut 32π.

Exercice 26 : Calculer l'intégrale curviligne $\int_\mathcal{C} \vec{F} \cdot d\vec{M}$, si $\mathcal{C}$ est la courbe décrite par la fonction vectorielle $\overrightarrow{OM}(t)$:

1. $\vec{F}(x,y,z) = (\sin x, \cos y, xz)$ $\quad \overrightarrow{OM}(t) = (t^3, -t^2, t)$ $\quad 0 \leq t \leq 1$
2. $\vec{F}(x,y,z) = (x^2, xy, z^2)$ $\quad \overrightarrow{OM}(t) = (\sin t, \cos t, t^2)$ $\quad 0 \leq t \leq \pi/2$

Exercice 27 :

a) Calculer à l'aide d'une intégrale curviligne l'aire intérieure à l'astroïde représentée par :
   $x(t) = a\cos^3 t$
   $y(t) = a\sin^3 t \quad 0 \leq t \leq 2\pi$

b) Même question pour la cardioïde définie par l'équation polaire : $r = a(1 + \cos\theta)$.

Exercice 28 : Soit l'intégrale curviligne

$$I = \int_\Gamma \frac{(1+y)dx + xdy}{x^2y^2 + 2x^2y + x^2 + 1}$$

a) Montrer que I ne dépend pas du chemin Γ suivi entre deux points fixes.

b) Calculer I si l'arc Γ est limité par les points $A(0, 1)$ et $B(1/2, 1)$, sans faire le choix d'un chemin particuier.

Exercice 29 : Soit (OP) l'arc de la courbe $x^4 - 6xy^3 = 4y^2$ limité par l'origine et par le point P, situé dans le premier cadrant, dont les coordonnées sont de la forme $(t, 2t)$. Calculer :

$$\int_{(OP)} \big((10x^4 - 2xy^3)dx - 3x^2y^2dy\big)$$

Exercice 30 : Montrer que l'expression $w = \dfrac{x}{x^2+y^2}dx + y\dfrac{1-x^2-y^2}{x^2+y^2}dy$ est la différentielle totale d'une fonction f que l'on déterminera.

Exercice 31 : Calculer l'intégrale curviligne :

$$I = \int_{(AB)} \sqrt{x}dy - [\sqrt{x}\ln(x+1)]dx$$

A et B étant les points d'abscisses 0 et 1 sur la courbe d'équation $y = (x-1)\ln(x+1)$.

Exercice 32 : Calculer l'intégrale curviligne I le long de la boucle fermée $\mathcal{C}$ constituée par les deux arcs de paraboles $y = x^2$ et $x = y^2$, décrite dans le sens direct, avec :

$$I = \int_{\mathcal{C}} (2xy - x^2)dx + (x + y^2)dy$$

Analyse vectorielle, intégrales multiples - TD3

Exercice 1 : Calculer

$$\int_0^1 dy \int_0^y x^2 dx, \quad \int_0^1 dy \int_0^y y^2 dx$$

$$\int_0^1 dx \int_0^x -\sin(x^2) dy, \quad \int_0^1 dx \int_{1-x}^{1+x} (2x+3y^2) dy$$

$$\int_0^1 dz \int_0^z dy \int_0^y 2xyz dx, \quad \int_0^1 dx \int_x^{2x} dy \int_0^{x+y} 3xy dz$$

$$\int_0^\pi dy \int_0^2 dz \int_0^{\sqrt{4-z^2}} 2z \sin y dx, \quad \int_0^3 dx \int_0^{\sqrt{9-x^2}} dy \int_0^x -yz dz.$$

Exercice 2 : Calculer les intégrales suivantes en utilisant le théorème de Fubini

$$\iint_D 2xy dx dy, \quad D = \{(x,y),\ 0 \le x \le 1, x^2 \le y \le \sqrt{x}\}.$$

$$\iint_D (x+2y) dx dy, \quad D = \{(x,y),\ 1 \le x \le 3, 1+x \le y \le 2x\}.$$

$$\iint_D e^{x/y} dx dy, \quad D = \{(x,y),\ 1 \le y \le 2, y \le x \le 2y^3\}$$

$$\iint_D \frac{2}{x} dx dy, \quad D = \{(x,y),\ 1 \le y \le e, y^2 \le x \le y^4\}.$$

$$\iint_D x \cos y dx dy, \quad D \text{ borné par } y = 0, y = x^2, x = 2.$$

$$\iint_D 2xy dx dy, \quad D \text{ le premier quadrant du disque unité}$$

$$\iint_D y e^{2x} dx dy, \quad D \text{ le triangle de sommets } (0,0), (2,4), (6,0).$$

$$\iint_D xy dx dy, \quad D = \{(x,y),\ x \ge 0, y \ge 0, x+y \le 2\}.$$

$$\iint_D (x+2y) dx dy, \quad \text{où } D \text{ est le triangle de sommets } (0,0), (2,2), (4,0).$$

$$\iint xy dx dy, \quad D = \{(x,y),\ x \ge 0, y \ge 0, \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} \le 1\}$$

$$\iint \frac{dx dy}{(x+y)^2}, \quad D = \{(x,y),\ x \ge 1, y \ge 1, x+y \le 4\}.$$

$$\iint e^{2x+2y} dx dy, \quad \text{où } D \text{ est le triangle de sommets } (0,0), (1,1), (1,-1).$$

Exercice 3 : Caculer le volume compris entre
a) la surface d'équation $z = x^2 + y^2$ et le plan $z = 4$.

b) les surfaces d'équation $z = x^2 + y^2 - 1$ et $z = 1 - x^2 - y^2$.
c) la surface d'équation $z = x^2 + 4y^2$ et le plan $z = 4$.

Exercice 4 : Calculer le volume
a) Sous le paraboloide $z = x^2 + y^2$ et sur le domaine délimité par $y = x^2$ et $x = y^2$.
b) Sous la paraboloide $z = 3x^2 + y^2$ et sur le domaine borné par $y = x$ et $x = y^2 - y$.
c) Sous la surface $z = 2xy$ et sur le triangle de sommets $(1, 1)$, $(4, 1)$, $(1, 2)$.
d) Compris entre le paraboloide $z = x^2 + y^2 + 4$ et les plans $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $x + y + z = 1$.
e) Borné par le cylindre $y^2 + z^2 = 9$ et les plans $x = 2y$, $x = 0$, $z = 0$ dans le premier octant.
f) Borné par les cylindres $x^2 + y^2 = 4$ et $y^2 + z^2 = 4$.

Exercice 5 : Trouver le centre de gravité de la plaque homogène limitée par la parabole $y = 2x^2$ et la droite $y = 2$.

Exercice 6 : Calculer le jacobien de la transformation donnée et calculer l'intégrale donnée en utilisant cette transformation.
a) $x = \frac{1}{3}(u + v)$, $y = \frac{1}{3}(v - 2u)$, $\iint_D (3x + y)dxdy$ où D est le domaine borné par les droites $y = x - 2$, $y = x$, $y = -2x$ et $y = 3 - 2x$.
b) $x = 2u + 3v$, $y = 3u - 2v$, $\iint_D (2x + y)dxdy$ où D est le carré de sommets $(0, 0)$, $(2, 3)$, $(5, 1)$, $(3, -2)$.
c) $x = u/v$, $y = v$, $\iint_D -xydxdy$ où D est dans le premier quadrant et borné par les droites $y = x$, $y = 3x$ et les hyperboles $xy = 1$, $xy = 3$.

Exercice 7 : En utilisant un changement de variables, calculer

$$\iint_D xdxdy, \quad \text{où } D \text{ est le disque de centre 0 et de rayon 5.}$$

$$\iint_D ydxdy, \quad \text{où } D \text{ est le domaine dans le premier quadrant borné par le cercle}$$

$$x^2 + y^2 = 9 \text{ et les droites } y = x, y = 0.$$

$$\iint_D xydxdy, \quad \text{où } D \text{ est le domaine dans le premier quadrant et compris}$$

$$\text{entre les cercles } x^2 + y^2 = 4 \text{ et } x^2 + y^2 = 25.$$

$$\iint_D \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}dxdy, \quad \text{où } D \text{ est l'anneau } 4 \leq x^2 + y^2 \leq 16.$$

$$\iint_D \frac{dxdy}{1 + x^2 + y^2}, \quad \text{où } D \text{ est le disque unité.}$$

$$\iint_D \frac{xydxdy}{x^2 + y^2}, \quad \text{où } D \text{ est le triangle de sommets } (0, 0, (2, 2), (2, 0).$$

$$\iint \frac{dxdy}{\sqrt{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1}}, \quad D \text{ étant la partie du plan comprise}$$

$$\text{entre les ellipses d'équations} \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{et} \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 4.$$

$$\iint_D (x + y)dxdy, \quad D \text{ étant le triangle limité par les axes et la droite } x + y = 3.$$

Exercice 8 : En utilisant les coordonnées polaires, calculer le volume
a) borné par le paraboloide $z = 10 - 3x^2 - 3y^2$ et le plan $z = 4$.
b) borné par les paraboloides $z = 3x^2 + 3y^2$ et $z = 4 - x^2 - y^2$.

c) à l'intérieure du cylindre $x^2 + y^2 = 4$ et l'ellipsoide $4x^2 + 4y^2 + z^2 = 64$.

Exercice 9 : Calculer avec deux méthodes différentes l'intégrale suivante

$$\iint_D (y^2 - x^2)dxdy, \quad \text{où } D \text{ est défini par } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1.$$

Exercice 10 : Soit $f(x, y)$ une fonction de classe C^1. Montrer que $df \wedge df = 0$. Calculer

$$(x^2dx - y^2dy) \wedge ((2x - 1)dx + dy)$$

$$(dx + e^x dy) \wedge (dy - e^y dx)$$

$$d(x^2 + 6xy + y^2) \wedge d(x^3 + y^3).$$

Exercice 11 : Utilisant la formule de Green-Riemann, calculer

$$\int_{bD} x^2ydx + xy^3dy, \quad D \text{ étant le carrée de sommets } (0, 0), (2, 0), (2, 2), (0, 2)$$

$$\int_C (x^2 + y^2)dx + 2xydy, \quad C \text{ se compose de l'arc de parabole } y = x^2 \text{ compris entre}$$

$$(0, 0) \text{ et } (2, 4) \text{ et des segments qui vont de } (2, 4) \text{ à } (0, 4), \text{ et de } (0, 4) \text{ à } (0, 0)$$

$$\int_{bD} 2xydx + y^5dy, \quad D \text{ étant le triangle de sommets } (0, 0), (2, 0), (2, 1)$$

$$\int_{bD} x^2ydx - xy^5dy, \quad D \text{ le carrée de sommets } (\pm 1, \pm 1)$$

$$\int_{bD} 3(y + e^{\sqrt{x}})dx + (2x + \cos y^2)dy, \quad D \text{ limité par les paraboles } y = x^2, x = y^2$$

$$\int_{bD} (y^2 - \arctan x)dx - (3x + \sin y)dy, \quad D \text{ limité par les courbes } y = x^2, y = 4$$

$$\int_C x^2dx + 3y^2dy, \quad C \text{ définie par } x^6 + y^6 = 1$$

$$\int_C x^2ydx - 6y^2dy, \quad C \text{ le cercle unité}$$

$$\int_C \overrightarrow{V} \cdot \overrightarrow{r}, \quad \overrightarrow{V} = x^3y\,\overrightarrow{i} + 2x^4\,\overrightarrow{j}, \quad C \text{ la courbe } x^4 + y^4 = 1.$$

$$\iint_D xydxdy, \quad D = \{(x, y),\ x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 2\}$$

$$\iint_D \frac{dxdy}{(x + y)^2}, \quad D = \{(x, y),\ x \geq 1, y \geq 1, x + y \leq 4\}.$$

Exercice 12 : Calculer

$$\iiint_D zdxdydz, \quad D = \{(x, y, z),\ x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, x + y + z \leq 4\}.$$

$$\iiint_D -yzdxdydz, \quad D = \{(x, y, z),\ 0 \leq z \leq 1, 0 \leq y \leq 2\pi, 0 \leq x \leq z + 2\}.$$

$$\iiint_D e^x dxdydz, \quad D = \{(x,y,z),\ 0 \le y \le 1, 0 \le x \le y, 0 \le z \le x+y\}.$$

$$\iiint_D z dxdydz, \quad \iiint_D z^2 dxdydz \quad \text{et} \quad \iiint_D (x+y-z)^2 dxdydz,$$

$$\text{où } D = \{(x,y,z),\ x^2+y^2+z^2 \le 4\}.$$

Exercice 13 : a) Calculer

$$\iiint_D y dxdydz$$

où D se trouve sous le plan $z = x + 2y$ et au-dessus de la région du plan Oxy bornée par les courbes $y = x^2$, $y = 0$, $x = 2$.
b) Calculer

$$\iiint_D z dxdydz$$

où D est borné par les plans $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $y + z = 3$ et $x + z = 3$.
c) Calculer

$$\iiint_D xz dxdydz$$

où D est la tétraèdre de sommets $(0,0,0)$, $(0,2,0)$, $(2,2,0)$ et $(0,2,2)$.
d) Calculer

$$\iiint_D (2x+4y) dxdydz$$

où D est borné par le cylindre parabolique $y = x^2$ et les plans $x = z$, $x = y$ et $z = 0$.
e) Calculer

$$\iiint_D x dxdydz$$

où D est borné par le paraboloide $x = 4y^2 + 4z^2$ et le plan $x = 16$.
f) Calculer

$$\iiint_D z dxdydz$$

où D est borné par le cylindre $y^2 + z^2 = 16$ et les plans $x = 0$, $y = 4x$ et $z = 0$ dans le premier octant.

Exercice 14 : Déterminer le centre de gravité du volume homogène défini par $x \ge 0$, $y \ge 0$, $z \ge 0$ et $x^2 + y^2 + z^2 \le 9$.

Exercice 15 : En utilisant les intégrales triples, calculer le volume du domaine décrit.
a) Le tétraède formé par les plans de coordonnées et le plan $2x + 3y + 6z = 24$.
b) Le domaine borné par le cylindre elliptique $4x^2 + z^2 = 1$ le les plans $y = 0$ et $y = z + 1$.
c) Le domaine borné par le cylindre $x = y^2$ et les plans $z = 0$ et $x + z = 2$.
d) Le domaine enfermé dans les paraboloides $z = x^2 + y^2$ et $z = 8 - x^2 - y^2$.

Exercice 16 : Déterminer le jacobien de la transformation $x = u^2$, $y = v^2$, $z = w^2$. Calculer le volume du domaine limité par les plans de coordonnées et la surface $\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} = 2$.

Exercice 17 : En utilisant les coordonnées cylindriques
a) Calculer

$$\iiint_D (x^2+y^2) dxdydz$$

où D est borné par le cylindre $x^2 + y^2 = 4$ et les plans $z = -2$ et $z = 2$.
b) Calculer
$$\iiint_D \sqrt{x^2 + y^2} dxdydz$$
où D est borné par le paraboloide $z = 16 - x^2 - y^2$ et le plan Oxy.
c) Calculer
$$\iiint_D xzdxdydz$$
où D est borné par les plans $z = 0$, $z = y$ et le cylindre $x^2 + y^2 = 4$, dans le demi-espace $y \geq 0$.
d) Calculer
$$\iiint_D ydxdydz$$
où D est enserré entre les cylindres $x^2 + y^2 = 4$ et $x^2 + y^2 = 16$, au-dessus du plan Oxy et sous le plan $z = x + 4$.
e) Calculer
$$\iiint_D x^2 dxdydz$$
où D est borné par le cylindre $x^2 + y^2 = 1$, au-dessus du plan $z = 0$ et sous le cône $z^2 = 9x^2 + 9y^2$.

Exercice 18 : En utilisant les coordonnées sphériques.
a) Calculer
$$\iiint_D (x^2 + y^2 + z^2) dxdydz$$
où D est la boule de centre 0 et de rayon 2.
b) Calculer
$$\iiint_D (x^2 + y^2) dxdydz$$
où D est la demi-sphère unité supérieure.
c) Calculer
$$\iiint_D y^2 dxdydz$$
où D est la partie dans le premier octant de la boule de centre 0 et de rayon 2.
d) Calculer
$$\iiint_D 2xe^{(x^2+y^2+z^2)^2} dxdydz$$
où D est enfermé entre les sphères $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ et $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, dans le premier octant.
e) Calculer
$$\iiint_D \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} dxdydz$$
où D est borné inférieurement par le cône $\phi = \pi/6$ et supérieurement par la sphère $x^2 + y^2 + z^2 = 9$.
f) Calculer
$$\iiint_D x^2 dxdydz$$
où D est entres les sphères de centre 0 et de rayons 1 et 4, et au-dessus du cône $\phi = \pi/4$.
g) Calculer le volume du domaine qui se trouve au-dessus du cône $\phi = \pi/3$ et sous la surface $r = 4\cos\phi$.

Exercice 19 : En utilisant un changement de variables, calculer
$$\iiint_D z^2 dxdydz, \quad D = \{(x, y, z),\ x^2 + y^2 \leq R^2, 0 \leq z \leq h\}$$

$$\iiint_D \frac{dxdydz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \quad D=\{4\leq x^2+y^2+z^2\leq 9\}$$

$$\iiint_D e^{\sqrt{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}}}dxdydz, \quad D=\{(x,y,z),\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\leq 1\}.$$

Exercice 20 : Calculer

$$\iiint_D xyzdxdydz, \quad D=\left\{(x,y,z),\ x,y,z\geq 0, \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\leq 1\right\}.$$

Exercice 21 : Calculer le volume intérieur à la sphère et au cylindre d'équations

$$x^2+y^2+z^2=4, \qquad x^2+y^2-2x=0.$$

Exercice 22 : Calculer

$$(x^2dx+z^2dy+dz)\wedge(dx-2dy-x^2dz)$$

$$(e^zdx-e^ydz)\wedge(xdy+ydz)$$

$$(-y^2dx+dy+2ydz)\wedge(zdx\wedge dy+xdz\wedge dx)$$

$$(xdy+ydz)\wedge(zdy+xdz)\wedge(xdz-zdx)$$

$$d(x^3+e^z)\wedge(2dx\wedge dy-xdy\wedge dz).$$

Montrer que si $f(x,y,z)$ est une fonction de classe C^1 alors $df\wedge df=0$.

Exercice 23 : Soit S la partie de la surface d'équation $z=\frac{x^2+y^2}{4}$ déterminée par $0\leq z\leq 2$ et orientée suivant la normale extérieure. Calculer l'intégrale de la surface $\iint_S \frac{dy\wedge dz}{x}$.

Exercice 24 : Calculer l'aire de la surface d'équation $z=xy$ qui se projette horizontalement sur le disque $x^2+y^2\leq 4$ dans le plan Oxy.

Exercice 25 : Calculer l'aire découpée sur le cône d'équation $z^2=x^2+y^2$ par le cylindre d'équation $x^2+y^2=4x$ et telle que $z\geq 0$.

Exercice 26 : a) Soit S une partie de la sphère de centre 0 et de rayon R orientée suivant la normale extérieure. Montrer que

$$\text{aire}(S)=\frac{1}{R}\iint_S xdy\wedge dz+ydz\wedge dx+zdx\wedge dy.$$

b) Calculer l'aire découpée sur la demi-sphère supérieure par le cylindre $x^2+y^2-Rx=0$.

Exercice 27 : Calculer l'intégrale de surface

$$\iint_S yzd\sigma, \quad S \text{ la portion du plan } 3x+2y+z=6 \text{ dans le premier octant}$$

$$\iint_S xzd\sigma, \quad S \text{ le triangle de sommets } (2,0,0),(0,2,0),(0,0,2)$$

$$\iint_S -xd\sigma, \quad S \text{ la surface } y=x^2+4z, 0\leq x\leq 2, 0\leq z\leq 2$$

$$\iint_S yz d\sigma, \quad S \text{ la partie du plan } z = y+6 \text{ limitée par le cylindre } x^2+y^2 = 4$$

$$\iint_S xy d\sigma, \quad S \text{ limitée par les surfaces } x^2+y^2 = 4, y = 0, x+y = 4$$

$$\iint_S (x^2z+y^2z) d\sigma, \quad S \text{ la demi-sphère unité supérieure}$$

$$\iint_S xyz d\sigma, \quad S \text{ la partie de la sphère unité au-dessus du cône } z = \sqrt{x^2+y^2}$$

$$\iint_S (x^2y - z^2) d\sigma, \quad S \text{ la partie du cylindre } x^2+y^2 = 1 \text{ limitée par } z = 0 \text{ et } z = 3.$$

Exercice 28 : Calculer le flux de $\overrightarrow{V}$ à travers la surface S où
a) $\overrightarrow{V} = -e^y \overrightarrow{i} - ye^x \overrightarrow{j} - x^2y \overrightarrow{k}$, S la partie du paraboloide $z = x^2+y^2$ au-dessus le carrée $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$ orientée vers le haut.
b) $\overrightarrow{V} = -x^2y \overrightarrow{i} + 3xy^2 \overrightarrow{j} - 4y^3 \overrightarrow{k}$, S la partie du paraboloide $z = x^2+y^2-9$ au-dessous le rectangle $0 \leq x \leq 2$, $0 \leq y \leq 1$ orientée vers le bas.
c) $\overrightarrow{V} = y \overrightarrow{i} - x \overrightarrow{j} - 3z \overrightarrow{k}$, S la demi-sphère $z = \sqrt{16-x^2-y^2}$ orientée vers le bas.

Exercice 29 : Considérons le champ de vecteurs $\overrightarrow{V}$ de composantes yz, zx, xy.
a) Calculer $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\overrightarrow{V}$.
b) Calculer la circulation de ce champ le long de la courbe intersection de la sphère et du cylindre de l'exercice 26.
c) Calculer la circulation de $\overrightarrow{V}$ le long d'un arc joignant 2 points (a, b, c) et (a', b', c').
d) Calculer la divergence de $\overrightarrow{V}$.
e) Calculer le flux à travers la sphère de centre 0 et de rayon R orientée suivant la normale extérieure.

Exercice 30 : Calculer le travail de $\overrightarrow{V}$ le long de la courbe C, orientée dans le sens contraire des aiguilles d'une montre, vue d'en haut. Utiliser la formule de Stokes.
a) $\overrightarrow{V} = xz \overrightarrow{i} + 2xy \overrightarrow{j} + 3xy \overrightarrow{k}$, C la frontière de la partie du plan $3x+y+z = 6$ dans le premier octant.
b) $\overrightarrow{V} = 2z \overrightarrow{i} + 4x \overrightarrow{j} + 5y \overrightarrow{k}$, C la courbe d'intersection du plan $z = x+8$ et le cylindre $x^2+y^2 = 16$.
c) $\overrightarrow{V} = x \overrightarrow{i} + y \overrightarrow{j} + (x^2+y^2) \overrightarrow{k}$, C la frontière de la partie du paraboloide $z = 1-x^2-y^2$ dans le premier actant.

Exercice 31 : Considérons le champ $\overrightarrow{v} = \frac{\overrightarrow{r}}{r^3}$.
a) Calculer $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\overrightarrow{V}$ et $\mathrm{div}\overrightarrow{V}$.
b) Calculer directement le flux de $\overrightarrow{V}$ à travers la sphère unité orientée suivant la normale extérieure.
c) Expliquer pourquoi le formule d'Ostrogradsky ne s'applique pas.

Exercice 32 : Soit S la sphère unité orientée suivant la normale extérieure. Calculer

$$\iint_S x^3 dy \wedge dz + y^3 dz \wedge dx + z^3 dx \wedge dz.$$

Exercice 33 : Calculer le flux de $\overrightarrow{V}$ à travers la surface S en utilisant la formule d'Ostrogradski.
a) $\overrightarrow{V} = 3x^2z^3 \overrightarrow{i} + 9x^2yz^2 \overrightarrow{j} - 4xy^2 \overrightarrow{k}$, S le bord du cube de sommets $(\pm 1, \pm 1)$.
b) $\overrightarrow{V} = x^2y \overrightarrow{i} - x^2z \overrightarrow{j} + z^2y \overrightarrow{k}$, S le bord du parallélipipède rectangle formé par les plans $x = 0$, $x = 3$, $y = 0$, $y = 1$, $z = 0$, $z = 1$

c) $\overrightarrow{V} = xz\,\overrightarrow{i} + yz\,\overrightarrow{j} - z^2\,\overrightarrow{k}$, S l'ellipsoide $x^2 + y^2 + 4z^2 = 1$.
d) $\overrightarrow{V} = 2x^3\,\overrightarrow{i} + 2y^3\,\overrightarrow{j} + 2z^3\,\overrightarrow{k}$, S la sphère unité.
e) $\overrightarrow{V} = (x^3 + y\sin z)\,\overrightarrow{i} + (y^3 + z\sin x)\,\overrightarrow{j} + 3z\,\overrightarrow{k}$, S le bord du domaine limité par les demi-sphères supérieures de centre 0 et de rayon 1, 2, et par le plan $z = 0$.