Analyse vectorielle, intégrales multiples - TD2

Exercice 1 : Soient $a,\ b,\ c$ et d quatre vecteurs de $\mathbb{R}^3$. Montrer que :

1. $a \wedge (b \wedge c) = (a \cdot c)b - (a \cdot b)c$
   En déduire que le produit vectoriel n'est pas associatif.
2. $\det[a,b,c] = a \cdot (b \wedge c) = (a \wedge b) \cdot c$
3. $(a \wedge b) \wedge (c \wedge d) = \begin{cases} c(a \cdot (b \wedge d)) - d(a \cdot (b \wedge c)) \\ -a(b \cdot (c \wedge d)) + b(c \cdot (d \wedge a)) \end{cases}$

Exercice 2 :

a) Chercher un vecteur perpendiculaire au plan qui passe par les points $P(1,4,6)$, $Q(-2,5,-1)$ et $R(1,-1,1)$.

b) Calculer l'aire du triangle PQR.

c) Grâce au produit mixte, montrer que les vecteurs $\vec{a} = (1,4,-7)$, $\vec{b} = (2,-1,4)$ et $\vec{c} = (0,-9,18)$ sont coplanaires (c'est-à-dire qu'ils appartiennent à un même plan).

d) Calculer l'aire du parallélépipède construit sur les vecteurs $\vec{a} = (1,0,6)$, $\vec{b} = (2,3,-8)$ et $\vec{c} = (8,-5,6)$

e) Calculer l'aire du parallélépipède d'arrêtes adjacentes PQ, PR et PS avec : $P(1,1,1)$, $Q(2,0,3)$, $R(4,1,7)$ et $S(3,-1,-2)$.

Exercice 3 : Représenter graphiquement les champs de vecteurs définis par :

1. $\vec{V}(x,y,z) = (x,y,0)$
2. $\vec{V}(x,y,z) = (-x,-y,0)$
3. $\vec{V}(x,y,z) = (x,y,z)$
4. $\vec{V}(x,y,z) = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, 0\right)$
5. $\vec{V}(x,y,z) = \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}, 0\right)$
6. $\vec{V}(x,y,z) = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right)$

Exercice 4 : Calculer :

a) $div\ \vec{r}$ et $\overrightarrow{rot}\ \vec{r}$

b) $div\ \vec{u}$ et $\overrightarrow{rot}\ \vec{u}$ avec $\vec{u}(x,y,z) = (xy, yz, xz)$

c) $(div\ \vec{w})\,(1,-1,1)$ avec $\vec{w}(x,y,z) = (x^2y, -2y^3z^2, xy^2z)$

d) $\left(\overrightarrow{grad}\ f\right)(1,-2,-1)$ avec $f(x,y,z) = 3x^2y - y^3z^2$

Exercice 5 : Un champ vectoriel est dit irrationnel si (et seulement si) son rotationnel est nul.

a) Montrer que le champ $\vec{u}(x,y,z) = (ax+by+cz, dx+ey+fz, gx+hy+iz)$ est irrationnel si et seulement si la matice $\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ est symétrique.

b) Montrer que $\vec{u}$ est alors le gradient d'un champ scalaire.

Exercice 6 : Montrer que pour f et g deux champs scalaires et $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux champs vectoriels, on a les résultats suivants :

a) $\overrightarrow{grad}(fg) = \left(\overrightarrow{grad}\ f\right) g + f\left(\overrightarrow{grad}\ g\right)$

b) $div(f\vec{u}) = \left(\overrightarrow{grad}\ f\right) \cdot \vec{u} + f(div\ \vec{u})$

c) $div(\vec{u} \wedge \vec{v}) = \left(\overrightarrow{rot}\ \vec{u}\right) \cdot \vec{v} - \vec{u} \cdot \left(\overrightarrow{rot}\ \vec{v}\right)$

d) $\overrightarrow{rot}(f\vec{u}) = \left(\overrightarrow{grad}\ f\right) \wedge \vec{u} + f \cdot (\overrightarrow{rot}\ \vec{u})$

Exercice 7 : Exprimer en fonction de $\dot{r}$ et $\vec{r}$ le gradient de :

$$r, \quad r^2, \quad \ln r, \quad \frac{1}{r}, \quad r^k \quad k \in \mathbb{R}.$$

Exercice 8 : Pour chacun des champs $\vec{u}$ ci-dessous :

– vérifier que le rotationnel de $\vec{u}$ est nul.
– déterminer un champ scalaire f admettant ce champ $\vec{u}$ pour gradient.

a) $\vec{u} = \dfrac{\vec{r}}{r^2}$

b) $\vec{u}(x, y, z) = (2xy, x^2 + 3y^2z^2, 2y^3z + 4z^3)$

c) $\vec{u}(x, y, z) = \left(\dfrac{1}{x} + y\cos(xy), \dfrac{1}{y} + x\cos(xy), \dfrac{1}{z}\right)$

Exercice 9 : Soit $\vec{w}(x, y, z) = (x^a y, -axz, ayz)$.

a) Calculer directement $\overrightarrow{rot}\left(\overrightarrow{rot}(\vec{w})\right)$.

b) Déterminer k et $a \in \mathbb{N}$ pour que : $\overrightarrow{rot}\left(\overrightarrow{rot}(\vec{w})\right) = (0, 2(x^k + 1), 0)$.

Exercice 10 : Existe-t-il une fonction vectorielle différentiable $\vec{V}$ telle que :
(i) $\overrightarrow{rot}\ \vec{V} = \vec{r}$ (ii) $\overrightarrow{rot}\ \vec{V} = (2, 1, 3)$
S'il existe, trouver $\vec{V}$.

Exercice 11 : Soit $\vec{V}(x, y, z) = (y^2 + z^2, -xy, -xz)$

a) Déterminer une fonction φ telle que $\varphi(1) = 1$ et $\varphi(z) \cdot \vec{V}(M)$ soit un rotationnel.

b) φ étant ainsi choisie, déterminer un potentiel vecteur $\vec{U}_0(M) = (P(x, y, z), Q(x, y, z), 0)$ du champ de rotationnels obtenu. En déduire la forme générale des potentiels vecteurs $\vec{U}(M)$ de ce champ (c'est-à-dire les vecteurs $\vec{U}(M)$ tels que : $\overrightarrow{rot}\ \vec{U}(M) = \varphi(z) \cdot \vec{V}(M)$).

Exercice 12 : Soit $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction deux fois dérivable.

a) On considère le champ scalaire $f = \varphi \circ r$. Calculer son gradient et son laplacien.

b) On considère le champ vectoriel $\vec{u} = (\varphi \circ r)\vec{r}$. Calculer sa divergence et son rotationnel.

Ces types de champs sont dits radiaux.

Exercice 13 : Soit $\vec{u} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ une fonction vectorielle d'une variable réelle de classe $\mathcal{C}^1$. Montrer que :
(a) $div(\vec{u} \circ r) = (\vec{u}' \circ r) \cdot \dfrac{\vec{r}}{r}$ (b) $\overrightarrow{rot}(\vec{u} \circ r) = (\vec{u}' \circ r) \wedge \dfrac{\vec{r}}{r}$

Exercice 14 : Soit $w = (yz + x^2y^3)dx + (xz + x^3y^2)dy + \phi(x, y)dz$

a) Déterminer ϕ pour que la forme w soit exacte sur $\mathbb{R}$.

b) Trouver alors les primitives de w.

Intégrales curvilignes

Exercice 15 : Soit $\mathcal{C}$ la courbe représentée paramétriquement par :

$$\begin{cases} x(t) = e^{2t}\cos t \\ y(t) = e^{2t}\sin t \\ z(t) = ke^{2t} \qquad \text{où } k \in \mathbb{R}_+^* \end{cases}$$

a) Montrer que $\mathcal{C}$ est tracée sur un cône de révolution d'axe Oz.

b) Montrer que les tangentes à $\mathcal{C}$ forment toutes le même angle avec le plan Oxy.

Exercice 16 : Calculer les équations des tangentes aux courbes suivantes :

$$\begin{cases} x(t) = e^{-t} \\ y(t) = 2\cos 3t \\ z(t) = 2\sin 3t \end{cases} \qquad \begin{cases} x(t) = t^2+1 \\ y(t) = 4t-3 \\ z(t) = 2t^2-6t \end{cases} \qquad \begin{cases} x(t) = t^2 \\ y(t) = \sin t \\ z(t) = e^{2t} \end{cases}$$

aux points respectifs : $t_0 = \pi$, $t_0 = 2$ et $t_0 = 0$.

Exercice 17 : Les coordonnées d'un point mobile M sont données par le système :

$$\begin{cases} x(t) = 3\cos t - 1 \\ y(t) = -2\cos t + 1 \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}$$

a) Déterminer la trajectoire de M et la représenter graphiquement.

b) Déterminer le vecteur tangent unitaire.

Exercice 18 : On considère la courbe représentée par le système paramétré :

$$\begin{cases} x(t) = \cos^2 t \\ y(t) = \sin t \end{cases}$$

Décrire géométriquement cette courbe et calculer le vecteur tangent unitaire en précisant les points où il est défini.

Exercice 19 : On considère un mouvement plan d'équation vectorielle :

$$\vec{u} = (2t + \sin 2t)\vec{\imath} + (1 - \cos 2t)\vec{\jmath}.$$

Rechercher, au point correspondant à $t = \frac{\pi}{4}$ les vecteurs unitaires tangent et normal.

Exercice 20 : Soient les points $A(1,0)$, $B(0,1)$ et $C(1,1)$.

a) Calculer les trois intégrales curvilignes :

$$I_k = \int_{\Gamma_k} \left[(y^2 - y)dx - 2(x^2 - x)dy\right]$$

$k = 1, 2, 3$, où Γ_1 est la ligne brisée OAC, Γ_2 la ligne brisée OBC et Γ_3 le segment $[OC]$.

b) Le résultat est-il indépendant du chemin suivi ?

Exercice 21 : Soit Γ l'arc limité par les points $A(1,0,0)$ et $B(1,0,2\pi)$ de la trajectoire du mouvement dont le vecteur vitesse est $\vec{v}(t) = (-\sin t, \cos t, 1)$, $0 \leq t \leq 2\pi$.
Calculer :

$$I = \int_\Gamma 4xydx + 3y^2dy + 5zdz$$

Exercice 22 : Soient $A(1,-1)$, $B(1,1)$, $C(-1,-1)$ et $D(-1,1)$. Calculer :

$$I = \int_\Gamma \left[(x^2+y^2)dx + 2x^2ydy\right]$$

si Γ est la courbe fermée $ABCDA$ constituée :
(a) de l'arc (AB) du cercle $(x-1)^2+y^2=1 \quad x \geq 1$ (b) du segment $[BC]$
(c) de l'arc (CD) du cercle $(x+1)^2+y^2=1 \quad x \leq -1$ (d) du segment $[DA]$

Exercice 23 : Soit :

$$I = \int_\Gamma \left[(x^2+y^2)dx + (x^2+y^2)dy\right]$$

où Γ est la frontière, parcourue dans le sens trigonométrique, de la plus petite des deux portions délimitées par le cercle de rayon 2 centré à l'origine et par la parabole d'équation $y^2 = 3x$.

a) Calculer I.
b) Calculer l'aire intérieure à Γ.

Exercice 24 : On considère la forme différentielle $\phi(x,y) = \dfrac{xdy - ydx}{x^2+y^2}$.

a) Montrer que ϕ est une forme différentielle fermée.
b) Calculer $I = \int_\mathcal{C} \phi(x,y)$ si $\mathcal{C}$ est :
   - le cercle de rayon $R > 0$, centré à l'origine, parcouru dans le sens direct,
   - la courbe représentée par $\begin{cases} x(t) = (2+\cos\frac{t}{2})\cos t \\ y(t) = (2+\cos\frac{3t}{2})\sin t \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 4\pi.$
c) Calculer les aires intérieures à ces deux courbes.

Exercice 25 : Un point matériel est soumis au champ de forces : $\vec{F}(x,y,z) = (2x-y+3z, z+4y, 2xz+y+x^2)$ le long de l'ellipse $\mathcal{E}$ d'équation paramétrique :

$$\begin{cases} x(t) = a\cos t \\ y(t) = b\sin t \quad 0 \leq t \leq 2\pi \\ z = 0 \end{cases}$$

parcourue dans le sens trigonométrique. Déterminer les coefficients a et $b \in \mathbb{N}$ avec $3 < a < b$, sachant que le travail de $\vec{F}$, $W = \int_\mathcal{E} \vec{F} \cdot d\vec{M}$, le long de l'ellipse vaut 32π.

Exercice 26 : Calculer l'intégrale curviligne $\int_\mathcal{C} \vec{F} \cdot d\vec{M}$, si $\mathcal{C}$ est la courbe décrite par la fonction vectorielle $\overrightarrow{OM}(t)$:

1. $\vec{F}(x,y,z) = (\sin x, \cos y, xz) \quad \overrightarrow{OM}(t) = (t^3, -t^2, t) \quad 0 \leq t \leq 1$
2. $\vec{F}(x,y,z) = (x^2, xy, z^2) \quad \overrightarrow{OM}(t) = (\sin t, \cos t, t^2) \quad 0 \leq t \leq \pi/2$

Exercice 27 :

a) Calculer à l'aide d'une intégrale curviligne l'aire intérieure à l'astroïde représentée par :
   $x(t) = a\cos^3 t$
   $y(t) = a\sin^3 t \quad 0 \leq t \leq 2\pi$

b) Même question pour la cardioïde définie par l'équation polaire : $r = a(1 + \cos\theta)$.

Exercice 28 : Soit l'intégrale curviligne

$$I = \int_{\Gamma} \frac{(1+y)dx + xdy}{x^2y^2 + 2x^2y + x^2 + 1}$$

a) Montrer que I ne dépend pas du chemin Γ suivi entre deux points fixes.

b) Calculer I si l'arc Γ est limité par les points $A(0,1)$ et $B(1/2,1)$, sans faire le choix d'un chemin particuier.

Exercice 29 : Soit (OP) l'arc de la courbe $x^4 - 6xy^3 = 4y^2$ limité par l'origine et par le point P, situé dans le premier cadrant, dont les coordonnées sont de la forme $(t, 2t)$. Calculer :

$$\int_{(OP)} \big((10x^4 - 2xy^3)dx - 3x^2y^2dy\big)$$

Exercice 30 : Montrer que l'expression $w = \dfrac{x}{x^2+y^2}dx + y\dfrac{1-x^2-y^2}{x^2+y^2}dy$ est la différentielle totale d'une fonction f que l'on déterminera.

Exercice 31 : Calculer l'intégrale curviligne :

$$I = \int_{(AB)} \sqrt{x}dy - [\sqrt{x}\ln(x+1)]dx$$

A et B étant les points d'abscisses 0 et 1 sur la courbe d'équation $y = (x-1)\ln(x+1)$.

Exercice 32 : Calculer l'intégrale curviligne I le long de la boucle fermée $\mathcal{C}$ constituée par les deux arcs de paraboles $y = x^2$ et $x = y^2$, décrite dans le sens direct, avec :

$$I = \int_{\mathcal{C}} (2xy - x^2)dx + (x + y^2)dy$$