Analyse vectorielle, intégrales multiples - TD1

Exercice 1 : Déterminer pour chacune des fonctions suivantes le domaine de définition et la limite au point x_0 indiqué.

1. $\dfrac{2(1-\cos x)}{x^2}$ en $x_0 = \dfrac{\pi}{3}$
2. $\dfrac{(1-\cos x)\sin x}{x\tan^2 x}$ en $x_0 = 0$
3. $\dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{2+\cos x}$ en $x_0 = +\infty$
4. $\dfrac{\sqrt[3]{x^2+x+8}+\sqrt{x^2+4x}-2}{x}$ en $x_0 = 0$

Exercice 2 : Montrer que la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}} & \text{si } x > 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \\ \dfrac{\text{sh}\sqrt{-x}}{\sqrt{-x}} & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

est continue.

Exercice 3 :

a) Soit $f(x) = \exp\left(\dfrac{x^2}{-2+\cos x}\right)$. Calculer la limite de f en $+\infty$.

b) Soit $g(x) = x\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}$, pour $x \neq 0$. La fonction g admet-elle une limite en 0 ?

Exercice 4 : Soient f et g deux fonctions de $\mathbb{R} - \{0\}$ dans $\mathbb{R}$, définies par :

$$f(x) = \sin\frac{1}{x}, \qquad g(x) = x\sin\frac{1}{x}$$

Peut-on prolonger f et g par continuité en 0 ?

Exercice 5 : Etudier la continuité en 0 des fonctions suivantes :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{e^{1/x}-2} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin(1/x)}{\cos(1/x)+e^{(1/x^2+x^2)}} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Exercice 6 :

a) Montrer que les fonctions $f(x) = |x|$ et $g(x) = \dfrac{x}{1+|x|}$ sont continues et dérivables sur $\mathbb{R}^*$.

b) Etudier leur continuité et leur dérivabilité au point 0.

Exercice 7 :

a) Donner la dérivée d'une fonction composée.

b) Donner la dérivée d'une fonction réciproque.

c) Calculer la dérivée des fonctions réciproques suivantes : arcsin, arccos et arctan.

d) Pour chacune des fonctions suivantes, donner le domaine de définition et calculer la dérivée :

(a) $f(x) = x \arcsin x + \sqrt{1-x^2}$ (b) $f(x) = \dfrac{x}{1+x^2} + \arctan x$

(c) $f(x) = \arctan \sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$ (d) $f(x) = \arcsin\left(\dfrac{x+1}{\sqrt{2}}\right)$

(f) $f(x) = \arctan(\ln x)$

Exercice 8 : Calculer les développements limités des fonctions suivantes :

1. $DL_4(0)$ de $f(x) = \ln^2(1+x)$
2. $DL_3(0)$ de $g(x) = e^{\sin x}$
3. $DL_3(0)$ de $h(x) = \dfrac{x}{e^x - 1}$
4. $DL_3(0)$ de $j(x) = \dfrac{\ln(\cos x)}{\cos x - 1}$
5. $DL_3(1)$ de $k(x) = \sqrt{x}$
6. $DL_7(0)$ de $l(x) = \dfrac{1}{1-x^2-x^3}$

Exercice 9 : Calculer les primitives des fonctions suivantes :

1. $\dfrac{x-3}{(x+1)(x^2+4)}$, $x\sqrt{x^2+1}$, $\tan(2x)$
2. $\dfrac{6x-7}{3x^2-7x+11}$, $\dfrac{\sin 2x}{(1+\cos 2x)^2}$, $\dfrac{1}{\sqrt{16-9x^2}}$
3. $\dfrac{x}{x^4+16}$, $\dfrac{\sin 2x}{\sqrt{1+\cos^2 x}}$, $\dfrac{\sqrt{1+\ln x}}{x}$
4. xe^x, $x\sin x$, $\ln x$, $x^n \ln x$, $x\cos^2 x$, $\ln(x^2+1)$
5. $\sin^3 x$, $\tan^3 x$, $\dfrac{\sqrt{4-x^2}}{x^2}$
6. $\cos^{10} x \sin x$, $(\sin^3 x)(\cos^3 x)$, $\cos^5 x$, $x^2\cos^3 x$, $e^x\cos^3 x$, $e^x \cos^3 x \sin x$.

Exercice 10 : Calculer les intégrales suivantes :

1.
$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}, \quad \int_0^{\pi/2} \sin^2 x \, dx$$

2.
$$\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{3+2\cos x} \text{ (On pourra procéder au changement de variables } t = tan(x/2))$$

Exercice 11 : Calculer l'aire des domaines suivants :

1. $\{ \ (x, y) \mid 0 \leq x, \ 0 \leq y \text{ et } 1 \leq x + y \leq 2\}$

2. $\{ \ (x, y) \mid 1 \leq x \leq 2 \text{ et } x \leq y \leq \text{sh}x\}$

3. $\{ \ (x, y) \mid 0 \leq x \leq \pi \text{ et } \sin^2 x \leq y \leq \sin x\}$

4. $\{ \ (r, \theta) \mid \dfrac{\pi}{2} \leq x \leq \dfrac{3\pi}{2} \text{ et } r \leq 1\}$

Fonctions de plusieurs variables

Exercice 12 : Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer son ensemble de définition D et donner une représentation graphique de D.

1. $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2 - 1)$ 2. $f(x, y) = \ln(y - x^2)$

3. $f(x, y) = \sqrt{1 - xy}$ 4. $f(x, y) = \sqrt{(x + y + 1)(x + y - 1)}$

5. $f(x, y) = \dfrac{\sin x + \cos y}{x^2 + xy + y^2}$

Exercice 13 : Représenter la ligne de niveau c de la fonction f dans les cas suivants :

1.$f(x, y) = 3x + 2y$ $c = 1, \ 2, \ 0$

2. $f(x, y) = y^2$ $c = -1, \ 0, \ 1, \ 4$

3. $f(x, y) = \ln(x + y)$ $c = 0, \ 1$

Exercice 14 : Pour $f(x, y)$, c et m_0 donnés ci-dessous, donner l'équation de la courbe I^c de niveau c de f et celle de la tangente T à I^c au point m_0 :

1. $f(x, y) = \ln(y - x^2)$ $c = 0$ $m_0 = (-1, 2)$

2. $f(x, y) = 2xy - 3x + y + 3$ $c = 6$ $m_0 = (1, 2)$

3. $f(x, y) = 2^{xy}$ $c = 4$ $m_0 = (1, 2)$

Exercice 15 : Soit f la fonction définie par :

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

a) Etudier la continuité de f sur $\mathbb{R}^2$.

b) Calculer les dérivées partielles de f sur $\mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$. Que valent-elles en $(0, 0)$?

Exercice 16 : Pour chacune des fonctions suivantes, donner l'ensemble de définition et étudier la limite en $(0,0)$.

1. $f(x,y) = \dfrac{1-\cos(xy)}{y^2}$ 2. $f(x,y) = \dfrac{x^2+y^2}{x}$ 3. $f(x,y) = \dfrac{x^2y}{x^2+y^2}$

4. $f(x,y) = (x+y^2)\sin\left(\dfrac{1}{xy}\right)$ 5. $f(x,y) = (1+xy)^{1/x}$

Exercice 17 : On considère la fonction f définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x+y} & \text{si } x+y \neq 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Montrer que f n'est pas continue en $(0,0)$ mais que sa restriction à $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$ l'est.

Exercice 18 : Soit f la fonction définie par :

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y}{x^4+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

a) Soit $\mathcal{D}$ une droite quelconque passant par l'origine. Montrer que la restriction de f à $\mathcal{D}$ est continue en $(0,0)$.
b) Peut-on en déduire que f est continue en $(0,0)$?

Exercice 19 : Soit f la fonction définie par :

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{(x^2-1)y^3}{(x-1)^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (1,0) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Etudier la continuité et la dérivabilité (différentiabilité) de f au point $(1,0)$.

Exercice 20 : Donner les dérivées partielles au premier ordre des fonctions suivantes :

(a) $f(x,y,z) = x^3y + xyz + xz^3$ (b) $f(x,y) = x^{y^2}$

(c) $f(x,y,z) = \exp\left(\frac{x}{y}\right) + \exp\left(\frac{z}{y}\right)$ (d) $f(x,y) = \arcsin(x^2+y^2)$

Exercice 21 : Calculer les différentielles totales des fonctions suivantes :

(a) $f(x,y) = \ln(xy)$ (b) $f(x,y,z) = x^2 + x^2y^2z^2 + \sin(yz)$

(c) $f(x,y,z) = \tan(3x-y) + 6^{y+z}$

Exercice 22 : Soit $f = exp(u-2v)$, où $u : (x,y) \longmapsto \sin x$ et $v : (x,y) \longmapsto x^3+y^2$. Calculer les dérivées partielles de f.

Exercice 23 : Soit $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable et $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & x\varphi(\frac{y}{x}) \end{array} \right.$ Montrer que : $x\dfrac{\partial f}{\partial x} + y\dfrac{\partial f}{\partial y} = f$.

Exercice 24 : Soit $m \in \mathbb{N}^*$ et soit $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction satifaisant à l'équation d'Euler : $x\dfrac{\partial f}{\partial x} + y\dfrac{\partial f}{\partial y} + z\dfrac{\partial f}{\partial z} = mf$.
Pour (x, y, z) fixés, on pose $\varphi : \alpha \longmapsto \frac{1}{\alpha^m} f(\alpha x, \alpha y, \alpha z)$.
Montrer que $\varphi' = 0$ et en déduire que f est homogène de degré m.

Exercice 25 :

a) Montrer que $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$ vérifie l'équation de Laplace : $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$.

b) On considère $u = 1/r$, où $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Montrer que u satisfait l'équation de Laplace : $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$.

Exercice 26 : Développer à l'ordre 1 les fonctions suivantes, au voisinage des points indiqués :

(a) $f(x, y) = x^2 + y^2$	$(1, 1)$, $(0, 2)$, (a, b)
(b) $f(x, y, z) = x^2 + 3xyz - y^3 + z$	$(1, 0, -1)$
(c) $f(x, y, z) = \sin x \cos y \tan z$	$\left(0, \pi, \dfrac{\pi}{4}\right)$

Dérivation partielle d'ordre 2

Exercice 27 : Déterminer les dérivées partielles jusqu'à l'ordre 2 des fonctions suivantes :

a) $f(x, y) = x^2 + xy - y^3$. Le théorème de symétrie de Schwarz est-il vérifié ?

b) $f(x, y, z) = \cos(x + yz)$.

Exercice 28 : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ de la manière suivante :

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

a) Montrer que f admet des dérivées partielles d'ordre 2, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$, en $(0, 0)$ et les calculer.

b) Que peut-on déduire de ces résultats ?

Exercice 29 : [Laplacien en coordonnées polaires] Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction qui admet en tout point de $\mathbb{R}^2$ des dérivées partielles jusqu'à l'ordre 2. On considère la fonction $F : \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $F(r, \theta) = f(r \cos \theta, r \sin \theta)$.

a) Déterminer $\dfrac{\partial F}{\partial r}$, $\dfrac{\partial F}{\partial \theta}$, $\dfrac{\partial^2 F}{\partial r^2}$ et $\dfrac{\partial^2 F}{\partial \theta^2}$.

b) En déduire l'expression de Laplacien de f : $\Delta f = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ au point $(r \cos \theta, r \sin \theta)$.

Exercice 30 : Montrer que l'équation $x^5 + 3xy - y^6 = 1$ définit y comme une fonction implicite de x au voisinage du point $(1, 0)$. En notant $y = \varphi(x)$, calculer $\varphi'(1)$ et $\varphi''(1)$.

Exercice 31 : Montrer que l'équation $xy + yz + xz + 2x + 2y - z = 0$ définit implicitement une fonction $(x, y) \longmapsto z = f(x, y)$ au voisinage de $(0, 0, 0)$ et calculer le plan tangent en ce point à la surface considérée.

Exercice 32 : Soit $F(x, y) = x^2 + y^4 - 3xy + x - 1$. Montrer qu'on peut appliquer à F le théorème des fonctions implicites au point $(2, 1)$.
Soit $\varphi(x)$ une fonction telle que dans un voisinage de $(2, 1)$ on ait l'équivalence :

$$F(x, y) = 0 \Longleftrightarrow y = \varphi(x).$$

On a donc $\varphi(2) = 1$ et $F(x, \varphi(x)) = 0$ dans le voisinage de $x = 2$ considéré. En dérivant deux fois cette dernière relation, puis en évaluant en $x = 2$, calculer $\varphi'(2)$ et $\varphi''(2)$.
En déduire un développement limité de φ à l'ordre 2 au point 2.