# Topologie et calcul différentiel - TD1

# Espaces topologiques

## Exemples de Topologie

**Exercice 1 :** Énumérer les topologies de $E = \{a, b\}$. Lesquelles sont séparées ?

**Exercice 2 :** [topologie usuelle de $\mathbb{R}$] On appelle ouvert de $\mathbb{R}$ une réunion d'intervalles ouverts. Par convention une réunion sur le vide est vide. Montrez que les ouverts de $\mathbb{R}$ forment une topologie. Existe-t-il une partie de $\mathbb{R}$ qui ne soit ni ouverte, ni fermée ?

**Exercice 3 :** [topologie usuelle de $\mathbb{R}^2$] On appelle ouvert de $\mathbb{R}^2$ une réunion de produits d'intervalles ouverts. Montrez que les ouverts de $\mathbb{R}^2$ forment une topologie.

## Intérieur, adhérence et frontières

Étant donné une partie $A$ d'un espace topologique $E$, on peut former son adhérence $\overline{A}$ et son intérieur $\mathring{A}$. Rappelons qu'un point $x$ est adhérent à $A$ ssi tout voisinage de $x$ rencontre $A$. D'autre part $x \in \mathring{A}$ ssi il existe un voisinage de $x$ inclus dans $A$.

**Exercice 4 :** On considère les sous-ensembles de $\mathbb{R}^2$ suivants :

$$A = \{(x, y) / \ 3x \geq 5y\}, \quad B = \{(x, y) / \ 0 < x < 1 \text{ et } 0 \leq y \leq 1\}$$
$$C = \{(x, y) / \ 0 < x^2 + y^2 \leq 1\}, \quad D = \{(x, y) / \ x^2 + y^2 \geq 4\} \cap \mathbb{Q}^2$$

Déterminer leurs adhérences et intérieurs pour la distance usuelle.

**Exercice 5 :** [Une autre définition de l'intérieur]
*a)* Montrer que l'intérieur d'une partie $A$ de $E$ est la réunion des ouverts de $E$ contenus dans $A$. En déduire que l'intérieur de $A$ est le plus grand ouvert de $E$ contenu dans $A$.
*b)* Montrer que $A$ est ouvert ssi $A = \mathring{A}$.
*c)* Montrer que $A \subset B$ implique $\mathring{A} \subset \mathring{B}$

**Exercice 6 :** Si $X$ est une partie de $E$, $X^c$ est le complémentaire $E \setminus X$ de $X$ dans $E$. Montrer que pour toute partie $A$ de $E$

$$\overline{A^c} = \left(\mathring{A}\right)^c \qquad \text{et} \qquad \left(\overline{A}\right)^c = \operatorname{int}(A^c)$$

Déduire alors de l'exercice précédent que l'adhérence de $A$ est l'intersection des fermés contenant $A$ et donc le plus petit fermé contenant $A$. Énoncer des propriétés de l'adhérence similaires aux *b)* et *c)* de l'exercice précédent.

**Exercice 7 :** [intersection, union, adhérence et intérieur]
Montrer que pour toutes parties $A$ et $B$ de $E$ :
*a)* $\overline{A} \cup \overline{B} = \overline{A \cup B}$.
*b)* $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$. Montrer par un exemple que l'inclusion inverse peut être fausse.
*c)* $\mathring{A} \cap \mathring{B} = \operatorname{int}(A \cap B)$.
*d)* Que dire de $\mathring{A} \cup \mathring{B}$ ?

Si $A$ est une partie d'un espace topologique $E$, la *frontière* de $A$ est l'ensemble $\overline{A} \setminus \mathring{A}$. On la note $\mathrm{fr}\, A$.
**Exercice 8 :** Montrer que $\mathrm{fr}\, A = \overline{A} \cap \overline{A^c}$, $\mathrm{fr}\, A = \mathrm{fr}(A^c)$ et que $\mathrm{fr}\, A$ est fermée. Que peut-on dire de $V \cap A$ et de $V \cap A^c$ si $V$ est un voisinage d'un point $a \in \mathrm{fr}\, A$ ?

**Exercice 9 :** Déterminer la frontière des sous-ensembles suivants de $\mathbb{R}^2$ :
*a)* $A = \{(x, y)/\ 0 < x^2 + y^2 < 3\}$
*b)* $B = \mathbb{Q}^2$

## Suites et voisinages

**Exercice 10 :** A quelle condition une suite converge-t-elle vers un point isolé d'un espace topologique ?

**Exercice 11 :** Soit $E$ un espace topologique et $(a_n)_n$ une suite de $E$. On pose

$$A_n = \{a_m/\ m \geq n\}.$$

Montrer que l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite $(a_n)$ est $\bigcap_{n \geq 0} \overline{A}_n$. En déduire que cet ensemble est fermé.

## Continuité

Une application $f$ d'un espace topologique $E$ dans un espace topologique $F$ est continue si l'image réciproque de tout ouvert de $F$ est un ouvert de $E$. De manière équivalente, $f$ est continue si pour tout point $x$ de $E$, l'image réciproque de tout voisinage de $f(x)$ dans $F$ est un voisinage de $x$ dans $E$.
**Exercice 12 :** Soit $\chi_A : E \to \{0, 1\}$ la fonction caractéristique de $A \subset E$ : $\chi_A(x) = 1$ si $x \in A$, $\chi_A(x) = 0$ sinon.
*a)* On munit $\{0, 1\}$ de la topologie discrète. Montrer que $\chi_A$ est continue en $x$ si et seulement si $x \notin \mathrm{fr}\, A$.
*b)* Donner une condition pour que $\chi_A$ soit continue sur $E$ et un exemple où $\chi_A$ n'est continue en aucun point de $E$.

**Exercice 13 :** Soient $X$ et $Y$ des espaces topologiques et $f : X \to Y$ une application. Démontrer que $f$ est continue si et seulement si pour toute partie $A$ de $X$, on a $f\left(\overline{A}\right) \subset \overline{f(A)}$.

**Exercice 14 :** Soient $f$ et $g$ deux fonctions continues sur un espace topologique $X$ et à valeurs dans un espace topologique séparé $Y$. Vérifier que l'ensemble

$$\{x \in X/\ f(x) = g(x)\}$$

est un fermé de $X$.

## Espace métrique

Rappelons que la distance usuelle du plan $\mathbb{R}^2$ est la distance euclidienne définie par

$$d(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$$

si $x$ et $y$ ont pour coordonnées $(x_1, x_2)$ et $(y_1, y_2)$ respectivement.

**Exercice 15 :** Soient les fonctions du plan $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^+$ définies par

$$N_1(x) = |x_1| + |x_2|, \quad N_2(x) = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}, \quad N_\infty(x) = \max(|x_1|, |x_2|)$$

si $x$ a pour coordonnées $(x_1, x_2)$.
Vérifier que $d_i(x, y) = N_i(x - y)$ est une distance de $\mathbb{R}^2$ pour $i = 1, 2$ ou $\infty$. Dessiner la boule centrée en l'origine et de rayon 1 pour chacune de ces distances. Montrer que ces distances sont équivalentes (on pourra montrer que

$$N_\infty(x) \leqslant N_1(x) \leqslant 2N_\infty(x) \text{ et } N_\infty(x) \leqslant N_2(x) \leqslant \sqrt{2}N_\infty(x)$$

quel que soit $x \in \mathbb{R}^2$). Vérifiez que la topologie de $\mathbb{R}^2$ induite par ces distances est la topologie dite usuelle définie dans l'exercice 3

**Exercice 16 :** On note $d$ la distance usuelle de $\mathbb{R}^2$. Si $x$ et $y$ sont deux vecteurs du plan, on définit $d'(x, y) := d(x, y)$ si $x$ et $y$ sont colinéaires et $d'(x, y) := d(x, 0) + d(y, 0)$ s'ils ne le sont pas.
Montrer que $d'$ est une distance. On l'appelle *distance SNCF*, pourquoi ? Décrire géométriquement la boule $B'(x, r)$ pour $x \in \mathbb{R}^2$ et $r \in \mathbb{R}^+$. La distance $d'$ est-elle équivalente à la distance usuelle de $\mathbb{R}^2$ ?
Lesquelles des transformations suivantes du plan sont continues pour la distance SNCF : rotation de centre $0_{\mathbb{R}^2}$, homothétie de centre $0_{\mathbb{R}^2}$ et translations ?
Déterminer l'adhérence du demi-plan $H = \{(x, y)/\ y > 0\}$ et l'intérieur de l'axe des ordonnées $D$ pour la distance SNCF.

**Exercice 17 :** Soit $E$ un ensemble, $d_1$ et $d_2$ deux distances sur $E$. Montrer que $d' = d_1 + d_2$ et $d'' = \max(d_1, d_2)$ sont des distances sur $E$ et qu'elles y définissent la même topologie.

La convergence des suites est définie dans tout espace topologique. Dans le cas des espaces métrisable, cela nous donne une caractérisation de l'adhérence et de la continuité, qui bien souvent simplifie les preuves comme l'illustre cet exercice.
**Exercice 18 :** A l'aide des suites, donner des preuves plus simples du sens direct de l'exercice 13, de l'exercice 14, du *a)* de l'exercice 21 et de l'exercice 24. On supposera à chaque fois que les espaces topologiques sont métrisables.

## Sous-espace et produit d'espaces topologique

Un sous-ensemble $X$ d'un espace topologique $Y$ est naturellement muni d'une topologie, dite topologie induite. Par définition, les ouverts (resp. fermés) de $X$ sont les traces des ouverts (resp. fermés) de $Y$. On montre que les voisinages dans $X$ d'un point $x \in X$ sont les traces des voisinages de $x$ dans $Y$. Les parties de $X$ ont des propriétés différentes selon qu'on les voit dans l'espace topologique $X$ ou $Y$, comme le montre le premier exercice.
**Exercice 19 :** On munit le sous ensemble $X = [0, 1] \cup [2, 4[$ de $\mathbb{R}$ de la distance usuelle $d(x, y) = |x - y|$
a)$A = [2, 4[$ est-il ouvert dans l'espace topologique $X$ ? Est-il fermé ?
*b)* Montrer que $B = [0, 1]$ est ouvert et fermé dans $X$.
*c)* La suite $u_n = 4 - 3^{-n}$ est -elle convergente dans $X$ ?

**Exercice 20 :** Soient $Y$ et $Z$ deux espaces topologiques et $X$ un sous-espace topologique de $Y$. Montrer que l'injection $i : X \to Y$ est continue. En déduire que la restriction d'une application continue $Y \to Z$ à $X$ est continue. Montrer aussi qu'une application $f$ de $Z$ dans $X$ est continue ssi $i \circ f$ est continue.

**Exercice 21 :** Soit $E$ un espace topologique et $F$ un sous-espace topologique de $E$.
*a)* Soit $A$ une partie de $F$. Montrer que l'adhérence de $A$ dans le sous-espace $F$ est $\overline{A} \cap F$, où $\overline{A}$ désigne l'adhérence de $A$ dans l'espace $E$.

*b)* Soit $B$ un sous-ensemble de $E$. L'adhérence dans $F$ de $B \cap F$ est-elle $\overline{B} \cap F$ ?

Le produit de deux espaces topologiques $E$ et $F$ est naturellement muni d'une topologie. Ses ouverts sont les réunions des ouverts élémentaires, les ouverts élémentaires étant les produits d'un ouvert de $E$ et d'un ouvert de $F$.

**Exercice 22 :** Montrer que les projections $\pi_E$ et $\pi_F$ de $E \times F$ sur $E$ et $F$ respectivement sont continues. Montrer qu'une application $f : G \to E \times F$ est continue ssi ses composantes $\pi_E \circ f$ et $\pi_F \circ f$ le sont.
En application, soient $f$ une fonction continue de $E$ dans $\mathbb{R}$ et $g$ une fonction continue de $F$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que $h(x, y) = \sin(f^2(x)g^3(y))$ est une fonction continue de $E \times F$ dans $\mathbb{R}$.

**Exercice 23 :** On considère le plan $\mathbb{R}^2$ muni de la topologie usuelle et le cercle unité $S^1 = \{(x, y)/\ x^2 + y^2 = 1\}$ muni de la topologie trace. Montrer que l'application

$$p : \mathbb{R} \to S^1, \qquad \alpha \to (\cos\alpha, \sin\alpha)$$

est continue. Soit $E$ un espace topologique. Montrer qu'une application $f : S^1 \to E$ est continue ssi $f \circ p$ l'est aussi.

**Exercice 24 :** Soit $f : X \to Y$ une fonction définie sur un espace topologique $X$ à valeurs dans un espace topologique séparé $Y$. On appelle graphe de la fonction $f$ le sous-ensemble de $X \times Y$ :

$$G_f = \{(x, f(x))/\ x \in E\}.$$

Montrer que si $f$ est continue, son graphe est fermé dans $X \times Y$. La réciproque est-elle vraie ?

## Ensembles partout denses

**Exercice 25 :** Montrer qu'une partie $A$ d'un espace topologique $E$ est dense ssi tout ouvert non vide de $E$ rencontre $A$

**Exercice 26 :** Montrer que l'ensemble des matrices inversibles de taille $n \times n$ est un ouvert dense de l'ensemble des matrices de taille $n \times n$.

**Exercice 27 :** Soient $E, F$ deux espaces topologiques, $F$ étant séparé. $f$ et $g$ étant deux fonctions continues de $E$ dans $F$, et $A$ un sous-ensemble partout dense dans $E$, montrer l'équivalence :

$$(f(x) = g(x), \forall x \in E) \iff (f(x) = g(x), \forall x \in A)$$