Topologie et calcul différentiel - TD1

Espaces topologiques

Exemples de Topologie

Exercice 1 : Énumérer les topologies de $E = \{a, b\}$. Lesquelles sont séparées ?

Exercice 2 : [topologie usuelle de $\mathbb{R}$] On appelle ouvert de $\mathbb{R}$ une réunion d'intervalles ouverts. Par convention une réunion sur le vide est vide. Montrez que les ouverts de $\mathbb{R}$ forment une topologie. Existe-t-il une partie de $\mathbb{R}$ qui ne soit ni ouverte, ni fermée ?

Exercice 3 : [topologie usuelle de $\mathbb{R}^2$] On appelle ouvert de $\mathbb{R}^2$ une réunion de produits d'intervalles ouverts. Montrez que les ouverts de $\mathbb{R}^2$ forment une topologie.

Intérieur, adhérence et frontières

Étant donné une partie A d'un espace topologique E, on peut former son adhérence $\overline{A}$ et son intérieur $\mathring{A}$. Rappelons qu'un point x est adhérent à A ssi tout voisinage de x rencontre A. D'autre part $x \in \mathring{A}$ ssi il existe un voisinage de x inclus dans A.
Exercice 4 : On considère les sous-ensembles de $\mathbb{R}^2$ suivants :

$$A = \{(x, y)/\ 3x \geq 5y\}, \quad B = \{(x, y)/\ 0 < x < 1 \text{ et } 0 \leq y \leq 1\}$$
$$C = \{(x, y)/\ 0 < x^2 + y^2 \leq 1\}, \quad D = \{(x, y)/\ x^2 + y^2 \geq 4\} \cap \mathbb{Q}^2$$

Déterminer leurs adhérences et intérieurs pour la distance usuelle.

Exercice 5 : [Une autre définition de l'intérieur]
a) Montrer que l'intérieur d'une partie A de E est la réunion des ouverts de E contenus dans A. En déduire que l'intérieur de A est le plus grand ouvert de E contenu dans A.
b) Montrer que A est ouvert ssi $A = \mathring{A}$.
c) Montrer que $A \subset B$ implique $\mathring{A} \subset \mathring{B}$

Exercice 6 : Si X est une partie de E, X^c est le complémentaire $E \setminus X$ de X dans E. Montrer que pour toute partie A de E

$$\overline{A^c} = \left(\mathring{A}\right)^c \qquad \text{et} \qquad \left(\overline{A}\right)^c = \operatorname{int}(A^c)$$

Déduire alors de l'exercice précédent que l'adhérence de A est l'intersection des fermés contenant A et donc le plus petit fermé contenant A. Énoncer des propriétés de l'adhérence similaires aux *b)* et *c)* de l'exercice précédent.

Exercice 7 : [intersection, union, adhérence et intérieur]
Montrer que pour toutes parties A et B de E :
a) $\overline{A} \cup \overline{B} = \overline{A \cup B}$.
b) $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$. Montrer par un exemple que l'inclusion inverse peut être fausse.
c) $\mathring{A} \cap \mathring{B} = \operatorname{int}(A \cap B)$.
d) Que dire de $\mathring{A} \cup \mathring{B}$?

Si A est une partie d'un espace topologique E, la *frontière* de A est l'ensemble $\overline{A} \setminus \mathring{A}$. On la note $\operatorname{fr} A$.
Exercice 8 : Montrer que $\operatorname{fr} A = \overline{A} \cap \overline{A^c}$, $\operatorname{fr} A = \operatorname{fr}(A^c)$ et que $\operatorname{fr} A$ est fermée. Que peut-on dire de $V \cap A$ et de $V \cap A^c$ si V est un voisinage d'un point $a \in \operatorname{fr} A$?

Exercice 9 : Déterminer la frontière des sous-ensembles suivants de $\mathbb{R}^2$:
a) $A = \{(x, y)/\ 0 < x^2 + y^2 < 3\}$
b) $B = \mathbb{Q}^2$

Suites et voisinages

Exercice 10 : A quelle condition une suite converge-t-elle vers un point isolé d'un espace topologique ?

Exercice 11 : Soit E un espace topologique et $(a_n)_n$ une suite de E. On pose

$$A_n = \{a_m/\ m \geq n\}.$$

Montrer que l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite (a_n) est $\bigcap_{n\geq 0} \overline{A}_n$. En déduire que cet ensemble est fermé.

Continuité

Une application f d'un espace topologique E dans un espace topologique F est continue si l'image réciproque de tout ouvert de F est un ouvert de E. De manière équivalente, f est continue si pour tout point x de E, l'image réciproque de tout voisinage de $f(x)$ dans F est un voisinage de x dans E.
Exercice 12 : Soit $\chi_A : E \to \{0, 1\}$ la fonction caractéristique de $A \subset E$: $\chi_A(x) = 1$ si $x \in A$, $\chi_A(x) = 0$ sinon.
a) On munit $\{0, 1\}$ de la topologie discrète. Montrer que χ_A est continue en x si et seulement si $x \notin \operatorname{fr} A$.
b) Donner une condition pour que χ_A soit continue sur E et un exemple où χ_A n'est continue en aucun point de E.

Exercice 13 : Soient X et Y des espaces topologiques et $f : X \to Y$ une application. Démontrer que f est continue si et seulement si pour toute partie A de X, on a $f\big(\overline{A}\big) \subset \overline{f(A)}$.

Exercice 14 : Soient f et g deux fonctions continues sur un espace topologique X et à valeurs dans un espace topologique séparé Y. Vérifier que l'ensemble

$$\{x \in X/\ f(x) = g(x)\}$$

est un fermé de X.

Espace métrique

Rappelons que la distance usuelle du plan $\mathbb{R}^2$ est la distance euclidienne définie par

$$d(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$$

si x et y ont pour coordonnées (x_1, x_2) et (y_1, y_2) respectivement.

Exercice 15 : Soient les fonctions du plan $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^+$ définies par

$$N_1(x) = |x_1| + |x_2|, \quad N_2(x) = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}, \quad N_\infty(x) = \max(|x_1|, |x_2|)$$

si x a pour coordonnées (x_1, x_2).
Vérifier que $d_i(x, y) = N_i(x - y)$ est une distance de $\mathbb{R}^2$ pour $i = 1, 2$ ou ∞. Dessiner la boule centrée en l'origine et de rayon 1 pour chacune de ces distances. Montrer que ces distances sont équivalentes (on pourra montrer que

$$N_\infty(x) \leqslant N_1(x) \leqslant 2N_\infty(x) \text{ et } N_\infty(x) \leqslant N_2(x) \leqslant \sqrt{2}N_\infty(x)$$

quel que soit $x \in \mathbb{R}^2$). Vérifiez que la topologie de $\mathbb{R}^2$ induite par ces distances est la topologie dite usuelle définie dans l'exercice 3

Exercice 16 : On note d la distance usuelle de $\mathbb{R}^2$. Si x et y sont deux vecteurs du plan, on définit $d'(x, y) := d(x, y)$ si x et y sont colinéaires et $d'(x, y) := d(x, 0) + d(y, 0)$ s'ils ne le sont pas.
Montrer que d' est une distance. On l'appelle *distance SNCF*, pourquoi ? Décrire géométriquement la boule $B'(x, r)$ pour $x \in \mathbb{R}^2$ et $r \in \mathbb{R}^+$. La distance d' est-elle équivalente à la distance usuelle de $\mathbb{R}^2$?
Lesquelles des transformations suivantes du plan sont continues pour la distance SNCF : rotation de centre $0_{\mathbb{R}^2}$, homothétie de centre $0_{\mathbb{R}^2}$ et translations ?
Déterminer l'adhérence du demi-plan $H = \{(x, y)/\ y > 0\}$ et l'intérieur de l'axe des ordonnées D pour la distance SNCF.

Exercice 17 : Soit E un ensemble, d_1 et d_2 deux distances sur E. Montrer que $d' = d_1 + d_2$ et $d'' = \max(d_1, d_2)$ sont des distances sur E et qu'elles y définissent la même topologie.

La convergence des suites est définie dans tout espace topologique. Dans le cas des espaces métrisable, cela nous donne une caractérisation de l'adhérence et de la continuité, qui bien souvent simplifie les preuves comme l'illustre cet exercice.
Exercice 18 : A l'aide des suites, donner des preuves plus simples du sens direct de l'exercice 13, de l'exercice 14, du *a)* de l'exercice 21 et de l'exercice 24. On supposera à chaque fois que les espaces topologiques sont métrisables.

Sous-espace et produit d'espaces topologique

Un sous-ensemble X d'un espace topologique Y est naturellement muni d'une topologie, dite topologie induite. Par définition, les ouverts (resp. fermés) de X sont les traces des ouverts (resp. fermés) de Y. On montre que les voisinages dans X d'un point $x \in X$ sont les traces des voisinages de x dans Y. Les parties de X ont des propriétés différentes selon qu'on les voit dans l'espace topologique X ou Y, comme le montre le premier exercice.
Exercice 19 : On munit le sous ensemble $X = [0, 1] \cup [2, 4[$ de $\mathbb{R}$ de la distance usuelle $d(x, y) = |x - y|$
a)$A = [2, 4[$ est-il ouvert dans l'espace topologique X ? Est-il fermé ?
b) Montrer que $B = [0, 1]$ est ouvert et fermé dans X.
c) La suite $u_n = 4 - 3^{-n}$ est -elle convergente dans X ?

Exercice 20 : Soient Y et Z deux espaces topologiques et X un sous-espace topologique de Y. Montrer que l'injection $i : X \to Y$ est continue. En déduire que la restriction d'une application continue $Y \to Z$ à X est continue. Montrer aussi qu'une application f de Z dans X est continue ssi $i \circ f$ est continue.

Exercice 21 : Soit E un espace topologique et F un sous-espace topologique de E.
a) Soit A une partie de F. Montrer que l'adhérence de A dans le sous-espace F est $\overline{A} \cap F$, où $\overline{A}$ désigne l'adhérence de A dans l'espace E.

b) Soit B un sous-ensemble de E. L'adhérence dans F de $B \cap F$ est-elle $\overline{B} \cap F$?

Le produit de deux espaces topologiques E et F est naturellement muni d'une topologie. Ses ouverts sont les réunions des ouverts élémentaires, les ouverts élémentaires étant les produits d'un ouvert de E et d'un ouvert de F.
Exercice 22 : Montrer que les projections π_E et π_F de $E \times F$ sur E et F respectivement sont continues. Montrer qu'une application $f : G \to E \times F$ est continue ssi ses composantes $\pi_E \circ f$ et $\pi_F \circ f$ le sont.
En application, soient f une fonction continue de E dans $\mathbb{R}$ et g une fonction continue de F dans $\mathbb{R}$. Montrer que $h(x, y) = \sin(f^2(x)g^3(y))$ est une fonction continue de $E \times F$ dans $\mathbb{R}$.

Exercice 23 : On considère le plan $\mathbb{R}^2$ muni de la topologie usuelle et le cercle unité $S^1 = \{(x, y)/\ x^2 + y^2 = 1\}$ muni de la topologie trace. Montrer que l'application

$$p : \mathbb{R} \to S^1, \qquad \alpha \to (\cos\alpha, \sin\alpha)$$

est continue. Soit E un espace topologique. Montrer qu'une application $f : S^1 \to E$ est continue ssi $f \circ p$ l'est aussi.

Exercice 24 : Soit $f : X \to Y$ une fonction définie sur un espace topologique X à valeurs dans un espace topologique séparé Y. On appelle graphe de la fonction f le sous-ensemble de $X \times Y$:

$$G_f = \{(x, f(x))/\ x \in E\}.$$

Montrer que si f est continue, son graphe est fermé dans $X \times Y$. La réciproque est-elle vraie ?

Ensembles partout denses

Exercice 25 : Montrer qu'une partie A d'un espace topologique E est dense ssi tout ouvert non vide de E rencontre A

Exercice 26 : Montrer que l'ensemble des matrices inversibles de taille $n \times n$ est un ouvert dense de l'ensemble des matrices de taille $n \times n$.

Exercice 27 : Soient E, F deux espaces topologiques, F étant séparé. f et g étant deux fonctions continues de E dans F, et A un sous-ensemble partout dense dans E, montrer l'équivalence :

$$(f(x) = g(x), \forall x \in E) \Longleftrightarrow (f(x) = g(x), \forall x \in A)$$

Topologie et calcul différentiel - TD2

Espaces connexes

Exercice 1 : Soient Y un espace topologique discret et X un espace topologique connexe. Montrer que toute application continue $f : X \to Y$ est constante.

Exercice 2 : Montrer qu'un espace topologique X est connexe si et seulement si toute fonction continue $f : X \to \{0, 1\}$ est constante.
Utiliser cette propriété pour démontrer qu'une réunion quelconque de connexes ayant un point commun est connexe.

Exercice 3 : Soit A une partie connexe d'un espace topologique X . Montrer que toute partie B de X telle que $A \subset B \subset \overline{A}$ est connexe.

Exercice 4 : Soient A et B deux parties connexes d'un espace topologique. Montrer que si $A \cap \overline{B}$ n'est pas vide, alors $A \cup B$ est connexe. La conclusion reste-t-elle vraie si l'on suppose seulement que $\overline{A} \cap \overline{B} \neq \emptyset$?

Exercice 5 : Soit A une partie d'un espace topologique X de frontière non vide. Montrer que toute partie connexe B de X qui rencontre à la fois A et son complémentaire rencontre la frontière de A.

Exercice 6 : On considère que $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{Q}^c$ sont munis de la topologie induite par leur inclusion dans $\mathbb{R}$. Quelles sont les parties connexes de $\mathbb{Q}$ et de son complémentaire $\mathbb{Q}^c$?
Existe-t-il une fonction continue $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $f(\mathbb{Q}) \subset \mathbb{Q}^c$ et $f(\mathbb{Q}^c) \subset \mathbb{Q}$?

Exercice 7 : Considérons les peignes de $\mathbb{R}^2$:

$$P_1 = \big(\mathbb{R} \times \{1\}\big) \cup \bigcup_{x \in \mathbb{Q}} \{x\} \times [0, 1] \quad \text{et}$$

$$P_2 = \big(\mathbb{R} \times \{-1\}\big) \cup \bigcup_{x \in \mathbb{Q}} \{x + \sqrt{2}\} \times [-1, 0].$$

Vérifier que P_1 et P_2 sont des parties connexes de $\mathbb{R}^2$. En déduire à l'aide de l'exercice 4 que $P_1 \cup P_2$ est connexe. Montrer par contre que $P_1 \cup P_2$ n'est pas connexe par arc.

Topologie et calcul différentiel - TD3

Espaces complets

Exercice 1 : Donner un exemple d'espaces métriques X et Y homéomorphes tels que X soit complet et Y ne le soit pas.

Exercice 2 : Soit X et Y deux espaces métriques et f une application $X \to Y$.
a) Montrer que si f est uniformément continue, alors elle conserve les suites de Cauchy. Qu'en est-il de la réciproque ?
b) Supposons f uniformément continue, bijective et de réciproque continue. Montrer que si Y est complet, X l'est aussi.

Exercice 3 : Soit E l'espace des fonctions continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$. Pour tout f et g dans E, on pose

$$d(f,g) = \int_0^1 |f(t) - g(t)|\, dt.$$

On note d' la distance de la convergence uniforme sur E.
a) Montrer que d est une distance.
b) Montrer que l'application identique de (E,d') dans (E,d) est continue et que par contre l'application identique de (E,d) dans (E,d') n'est pas continue.
c) Montrer que (E,d) n'est pas complet.

Exercice 4 :
Soit a un réel positif et (E,d) l'espace des fonctions continues sur l'intervalle $[0,a]$ à valeurs réelles, muni de la distance de la convergence uniforme. Soit T la fonction $E \to E$ définie sur $[0,a]$ par :

$$T(x)(t) = 1 + \int_0^t x(s)\, \mathrm{d}s.$$

a) Montrer que l'on a bien $Tx \in E$ si $x \in E$ et que l'application T est lipschitzienne.
b) On suppose désormais $a < 1$. Montrer qu'il existe une fonction x unique dans E telle que $Tx = x$.
c) En déduire que la fonction exponentielle est limite uniforme sur $[0,a]$ des polynômes $P_n(t) = \sum_{j=0}^n \frac{t^j}{j!}$ pour $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 5 : Soit une application f d'un espace métrique complet dans lui-même telle que f^p soit contractante pour un certain p. Montrer que f possède un unique point fixe.

Exercice 6 : On considère l'espace X des fonctions continues de $[0,1]$ à valeurs réelles muni de la distance de la convergence uniforme. Montrer que l'application $F : X \to X$ définie par

$$F(f)(x) = \int_0^x f(t)\, dt + \tfrac{1}{5}\cos(f(x))$$

est continue, lipschitzienne [1] mais non contractante. Vérifier que $F \circ F$ est contractante et en déduire l'existence et l'unicité de $f \in X$ telle que

$$f(x) = \int_0^x f(t)\, dt + \tfrac{1}{5}\cos(f(x)).$$

[1] On rappelle que $|\cos x - \cos y| \leqslant |x - y|$.

Topologie et calcul différentiel - TD4

Espaces vectoriels normés

Normes d'applications linéaires

Exercice 1 : Sur l'espace $\mathbb{R}^n$, on considère les trois normes suivantes :

$$\|x\|_1 = \sum_{k=1}^{n} |x_k|, \quad \|x\|_2 = \Big(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^2\Big)^{\frac{1}{2}}, \quad \|x\|_\infty = \max_{k=1,\dots,n} |x_k|$$

Vérifier qu'il s'agit bien de normes. Elles sont équivalentes car $\mathbb{R}^n$ est de dimension finie. Déterminer les constantes d'équivalence entre ces normes, c'est à dire

$$\sup_{x\neq 0} \frac{\|x\|}{\|x\|'} \qquad \text{et} \qquad \sup_{x\neq 0} \frac{\|x\|'}{\|x\|}.$$

Exercice 2 : On considère l'application linéaire T de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ dans lui-même définie par : $T(x,y,z) = (5x-2y+2z, 2x-y, x+y+z)$.
a) On munit $\mathbb{R}^3$ de la norme $\|.\|_\infty$. Quelle est alors la norme de T ?
b) On munit $\mathbb{R}^3$ de la norme $\|.\|_1$. Quelle est alors la norme de T ?
Plus généralement, calculer la norme d'une application linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$ muni de la norme $\|.\|_\infty$ (resp. $\|.\|_1$) en fonction des coefficients de sa matrice dans la base canonique.

Exercice 3 : On désigne par X l'espace de Banach des fonctions continues et complexes sur $[0,1]$, muni de la norme de la convergence uniforme. Soit φ un élément donné de X. Montrer que l'application

$$X \to \mathbb{R}, \quad f \mapsto \int_0^1 f(t)\varphi(t)\mathrm{d}t$$

est une forme linéaire continue sur X. Majorer sa norme.

Exercice 4 : Soit a un réel strictement positif et X l'espace de Banach $\mathcal{C}([0,a],\mathbb{R})$. Pour tout $f \in X$, on définit

$$(Tf)(x) = \int_0^x f(t)dt.$$

1) Vérifier que T est un opérateur linéaire continue de X. Montrer que pour tout $f \in X$, on a

$$T^n(f)(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f(t)dt$$

2) Calculer la norme de T^n. En déduire que la suite $S_n = \mathrm{Id} + T + \dots + T^n$ converge dans $\mathcal{L}(X)$.
3) Résoudre dans X l'équation $Tf = f + g$, où g est une fonction continue donnée.

Linéarité et topologie

Exercice 5 : Soit E un espace vectoriel normé. On rappelle que si A et B sont deux parties de E, on désigne par $A+B$ l'ensemble des vecteurs $a+b \in E$ où le couple (a,b) décrit $A \times B$. Montrer que :
a) si A est ouvert, $A+B$ est ouvert. Plus généralement, montrer que $\mathrm{int}(A)+B$ est contenu dans l'intérieur de $A+B$.
b) si A est fermé et B compact, $A+B$ est fermé.
c) $\overline{A}+\overline{B} \subset \overline{A+B}$
d) si $\overline{A}$ est compact, $\overline{A}+\overline{B} = \overline{A+B}$
e) si A et B sont compacts, $A+B$ est compact.

Exercice 6 : Soit E un espace vectoriel normé et V un sous espace vectoriel de E. Montrer que :
a) l'adhérence de V est un sous espace vectoriel.
b) si V est de dimension finie, il est fermé.
c) si $V \neq E$, il est d'intérieur vide.

Rappelons qu'un *hyperplan* est par définition le noyau d'une forme linéaire non nulle.
Exercice 7 : Soit E un espace vectoriel et H un sous espace vectoriel de E. Montrer que si H est un hyperplan, alors pour tout vecteur $a \in E \setminus H$ on a

$$E = H \oplus \mathrm{Vect}(a).$$

Réciproquement, montrer que s'il existe un vecteur a non nul tel que $E = H \oplus \mathrm{Vect}(a)$, alors H est un hyperplan. Montrer que si $H = \ker \ell = \ker \ell'$, où ℓ et ℓ' sont deux formes linéaires, alors ℓ et ℓ' sont colinéaires.

Exercice 8 : Montrer qu'un hyperplan d'un espace vectoriel normé est dense ou fermé.

Exercice 9 : Soit E un espace vectoriel normé, ℓ une forme linéaire continue sur E, non identiquement nulle. Soit H l'ensemble des points de $x \in E$ tels que $\ell(x) = 1$. Quelle est la nature géométrique de H ? Montrer que ce sous-ensemble est fermé. Montrer que $\|\ell\| = (d(0,H))^{-1}$.

Topologie et calcul différentiel - TD5

Compacité

Exemples simples

Exercice 1 : Soit K une partie compacte de $\mathbb{R}^2$ incluse dans le demi-plan $\{(x,y)/\ y > 0\}$. Montrer qu'il existe $r > 0$ tel que pour tout $(x,y) \in K$ on ait $y \geqslant r$
a) en utilisant la propriété de Bolzano-Weierstrass,
b) en considérant les parties $\{(x,y) \in K/\ y > t\}$,
La propriété est-elle encore vraie si l'on suppose seulement K fermé ?

Exercice 2 : Soit E un espace topologique séparé et $(a_n)_n$ une suite de E convergeant vers a. Montrer que $\{a_n/\ n \in \mathbb{N}\} \cup \{a\}$ est compact dans E.

Exercice 3 : Soit un espace topologique discret. Quelles sont ses parties compactes ? Quelles sont ses parties fermées et bornées ?

Séparation des parties d'un espace topologique

Exercice 4 : Soit (E,d) un espace métrique. La distance d'un point x de E à une partie A de E est la borne inférieure de

$$\{d(x,y)/\ y \in A\}.$$

On la note $d(x,A)$.
a) Montrer que $d(x,A) = 0$ si et seulement si $x \in \overline{A}$.
b) Montrer que $d(x,A) = d(x,\overline{A})$.
c) Montrer que $x \to d(x,A)$ est continue de E dans $\mathbb{R}$.
d) Si F et F' sont des fermés disjoints de E, montrer qu'il existe deux ouverts O et O' disjoints de E tels que $F \subset O$ et $F' \subset O'$.

Exercice 5 : Soit E un espace topologique.
a) Soit C une partie compacte de E et x un point du complémentaire de C. Montrer qu'il existe deux ouverts O et O' disjoints de E tels que $C \subset O$ et $x \in O'$.
b) Soit C et C' deux parties compactes disjointes de E, montrer qu'il existe O et O' ouverts disjoints de E tels que $C \subset O$ et $C' \subset O'$.

Exercice 6 : Soit (E,d) un espace métrique, A et B deux parties de E. On définit

$$d(A,B) = \inf\{d(x,y)/\ x \in A \text{ et } y \in B\}.$$

Montrer que si A et B sont disjoints et compacts alors $d(A,B) \neq 0$. Montrer que cette propriété est encore vraie si l'on suppose seulement que A est compact et B fermé, et devient fausse si l'on suppose que A et B sont fermés.

Compactification

On appelle compactification d'un espace topologique X la donnée d'un espace topologique compact Y et d'une application continue $i : X \to Y$ tels que
– $i(X)$ est dense dans Y,
– i est un plongement, c'est à dire un homéomorphisme de X sur $i(X)$ où $i(X)$ est muni de la topologie de sous-espace.

Dans les exercices suivants, on propose trois compactifications du plan.

Exercice 7 : [*La sphère*] Soit la sphère unité de $\mathbb{R}^3$

$$\mathbb{S}^2 = \{(x, y, z)/\ x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

munie de sa topologie de sous-espace de $\mathbb{R}^3$. On appelle pôle nord le point de coordonnées $(0, 0, 1)$. Soit $i : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{S}^2$ l'application qui associe au point de coordonnées (x, y) le point P de la sphère tel que la droite reliant P au pôle nord passe par $(x, y, 0)$. Montrer que $(\mathbb{S}^2, i)$ est une compactification de $\mathbb{R}^2$. A quelle condition une suite $i(x_n, y_n)$ converge-t-elle vers le pôle nord ?

Exercice 8 : [*L'hémisphère*] Considèrons maintenant l'hémisphère

$$\mathbb{S}^2_+ = \{(x, y, z)/\ x^2 + y^2 + z^2 = 1 \text{ et } z \geqslant 0\}$$

et l'application $i : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{S}^2_+$ qui associe au point de coordonnées (x, y) le point de $\mathbb{S}^2_+$ sur la droite reliant $(1, x, y)$ à l'origine de $\mathbb{R}^3$. Vérifier qu'il s'agit d'une compactification de $\mathbb{R}^2$. A quelle condition une suite $i(x_n, y_n)$ converge-t-elle vers le point $(\cos\theta, \sin\theta, 0)$ de $\mathbb{S}^2_+$?

Exercice 9 : [*Le plan projectif*] Le plan projectif $\mathbb{P}^2$ est l'ensemble des droites vectorielles de $\mathbb{R}^3$. Identifier $\mathbb{P}^2$ avec le quotient de la sphère $\mathbb{S}^2$ par la relation d'antipodie. Munir alors $\mathbb{P}^2$ de la distance

$$d'(\overline{x}, \overline{y}) := \inf(d(x, y), d(-x, y))$$

où $\overline{x}$ et $\overline{y}$ sont les classes d'équivalence de $x, y \in \mathbb{S}^2$ respectivement. Montrer qu'il s'agit bien d'une distance, que la projection $\pi : \mathbb{S}^2 \to \mathbb{P}^2$ est continue et que $\mathbb{P}^2$ est compact.
Soit i l'application de $\mathbb{R}^2$ dans le plan projectif qui associe au point de coordonnées (x, y) la droite vectorielle engendrée par $(x, y, 1)$. Montrer que $(\mathbb{P}^2, i)$ compactifie le plan. A quelle condition une suite $i(x_n, y_n)$ converge-t-elle vers la droite vectorielle engendrée par $(\cos\theta, \sin\theta, 0)$?

Topologie et calcul différentiel - TD6

Espaces de Hilbert

Espaces orthogonaux

Exercice 1 : Soit H un espace de Hilbert et V un sous espace fermé de H. Rappelons que $H = V \oplus V^{\perp}$. Montrer que si $z = x + y$ avec $x \in V$ et $y \in V^{\perp}$, alors

$$\|z - x\| = \inf_{w \in V} \|z - w\|$$

Exercice 2 : Soit H un espace de Hilbert et V un sous espace vectoriel de H. Montrer que
a) l'orthogonal de V est fermé,
b) l'adhérence de V est $V^{\perp\perp}$,
c) les sous espaces othogonaux de V et de son adhérence sont égaux,
d) V est dense dans H ssi son orthogonal est réduit à $\{0\}$.

Exercice 3 : Soit V un hyperplan fermé d'un espace de Hilbert. Montrer que $V^{\perp}$ est de dimension 1. Soit une fomre linéaire ℓ de noyau V. Montrer qu'il existe un vecteur u non nul tel que $u \in V^{\perp}$ et $\|u\|^2 = \ell(u)$, montrer que

$$\ell(x) = \langle x, u \rangle, \qquad \text{pour tout } x \in H$$

Théorème de projection

Exercice 4 : Soit E l'espace vectoriel $\mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$ muni de la norme de la convergence uniforme. Soit D la droite vectorielle engendrée par la fonction $x \to 1 - x$. Montrer que la distance de la fonction constante égale à 1 à D est atteinte en plusieurs points.

Exercice 5 : Soit E l'espace vectoriel $\mathcal{C}([-1,1], \mathbb{R})$ muni de la norme de la convergence uniforme. Soit F le sous espace formé des fonctions impaires dont l'intégrale sur $[0,1]$ est nulle.
a) Montrer que F est fermé.
b) Montrer que la distance de la fonction $\varphi : t \to t$ à F est supérieure ou égale à $1/2$. On pourra majorer l'intégrale $\int_0^1 t - f(t)\, dt$.
c) Peut-on avoir $d(f, \varphi) = \frac{1}{2}$ pour une fonction $f \in F$?
d) Pour tout entier $n \geqslant 3$, soit f_n la fonction impaire définie sur $[0,1]$ par

$$f_n(t) = \begin{cases} -(n-2)^2 t/(8n) & \text{si } 0 \leqslant t \leqslant 4/(n+2) \\ t - 1/2 - 1/n & \text{si } 4/(n+2) \leqslant t \leqslant 1. \end{cases}$$

Vérifier que $f_n \in F$ et que $\|f_n - \varphi\| = \frac{1}{2} + \frac{1}{n}$. En déduire que la distance de φ à F vaut $\frac{1}{2}$.

Dans les deux exercices suivants, H est un espace de Hilbert réel et C une partie convexe fermée de H.

Exercice 6 : Soit P l'application qui à $x \in H$ associe la projection orthogonale de x sur C. Montrer que P est 1-lipschitzienne.

Exercice 7 : Soit Q une partie de H convexe, compacte et qui ne rencontre pas C. Montrons qu'il existe un hyperplan affine fermé qui sépare strictement C et Q.
a) Montrer que l'application $x \to \|x-Px\|$ atteint sont minimum sur Q (P est la projection orthogonale sur C). On note x un point qui réalise ce minimum
b) Montrer que $\|x - Px\|$ réalise la distance de C à Q. En déduire que la projection orthonale de Px sur Q est x.
c) Soit ℓ la forme linéaire $y \to \langle y, Px - x\rangle$ et m le point $(x + Px)/2$. Montrer que

$$\ell(y) < \ell(m) < \ell(z)$$

si $y \in Q$ et $z \in C$.
d) Conclure.

Exercice 8 : On appelle demi-espace affine d'un espace vectoriel réel H une partie de H de la forme

$$H_{\ell,c} = \{x \in E/\ell(x) \leqslant c\}$$

où ℓ est un forme linéaire de E et c un réel. Supposons H muni d'une norme. Montrer que $F_{\ell,c}$ est fermé ssi ℓ est continue.
Lorsque H est un espace de Hilbert, montrer qu'une partie convexe fermée est l'intersection des demi-espaces fermés affines qui la contiennent.

Topologie et calcul différentiel - TD7

Applications différentiables

Exercice 1 : [*Quelques révisions*]
a) Rappeler la définition des dérivées partielles. Calculer les dérivées partielles des applications

$$(x, y, z) \to x^4 + y^4 + z^4, \qquad (x, y, z) \to 4x^2yz$$

b) Rappeler la définition de la jacobienne. Calculer la jacobienne de l'application $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ donnée par

$$f(x, y, z) = (x^4 + y^4 + z^4, 4x^2yz).$$

Même exercice avec l'application $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie par

$$g(x, y, z) = (x^3 + z^3, y^3 - 3xyz, x - 2y + z).$$

c) Soit I un ouvert de $\mathbb{R}$ et U un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Considérons $g : I \to U$ et $f : U \to \mathbb{R}$. Rappeler comment on calcule les dérivées partielles de $f \circ g$ en fonctions des dérivées partielles de f et de la dérivée de g.
d) Soient des applications x, y f et g de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$. Calculer les dérivéees partielles de

$$(t, s) \to f(x(t, s), y(t, s)) \quad \text{et} \quad (t, s) \to g(s^2 + t^3, x^2(t, s))$$

en fonction de celles de f, g, x et y.
e) Avec les mêmes notations qu'au *d)*, comparer les jacobiennes des applications

$$(t, s) \to (x(t, s), y(t, s)), \qquad (x, y) \to (f(x, y), g(x, y))$$

et

$$(t, s) \to (f(x(t, s), y(t, s)), g(x(t, s), y(t, s)))$$

Exercice 2 : [*Dérivée directionnelle*] Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et une application $f : U \to \mathbb{R}$. Soit $x \in U$ et $\overrightarrow{u} \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. On dit que f est *dérivable suivant* $\overrightarrow{u}$ *en* x si

$$h(t) = f(x + t\overrightarrow{u})$$

est dérivable en $t = 0$. Dans ce cas, on appelle $h'(0)$ la *dérivée directionnelle* de f en x par rapport à $\overrightarrow{u}$.
a) Quelle relation existe-t-il entre dérivées partielle et dérivée directionnelle ?
b) Vérifier que si f est différentiable en x, elle admet des dérivées directionnelles en x dans toutes les directions. Les calculer en fonction de $Df(x)$.
c) Déduire de ce qui précéde la relation entre matrice jacobienne et différentielle.
d) Vérifier que $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x, y) = \frac{xy^2}{x^2 + y^2} \quad \text{si } (x, y) \neq (0, 0), \qquad f(0, 0) = 0$$

admet des dérivées en l'origine dans toutes les directions et qu'elle n'est pas différentiable.

e) Montrer que l'application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f(x,y) = y^3/x \quad \text{si } x \neq 0, \qquad f(0,y) = 0$$

admet des dérivées en l'origine dans toutes les directions et qu'elle n'est pas bornée au voisinage de l'origine.

Exercice 3 : [*Tangente d'une courbe définie implicitement*] Soit un ouvert U de $\mathbb{R}^2$, une fonction $f : U \to \mathbb{R}$ différentiable et C la courbe d'équation $f(x,y) = 0$. Soit $A = (a,b) \in \mathbb{R}^2$ un point de C en lequel la différentielle de f ne s'annule pas. Soit $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$ un *vecteur de direction limite* en A, c'est à dire tel que pour une suite de point (M_k) de C qui converge vers A et une suite de réels (λ_k), l'on a

$$\lim_{k\to\infty} \lambda_k \overrightarrow{AM_k} = \mathbf{v}.$$

Montrer alors que $Df(A)(\mathbf{v}) = \mathbf{0}$.
On appelle *tangente* en A la droite des points P tels que

$$Df(A)(\overrightarrow{AP}) = 0.$$

Donner son équation en fonction des dérivées partielles de f.

Exercice 4 : [*Tangente d'une courbe paramétrée*] Soit une application $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ définie sur un intervalle ouvert et de classe C^1. Soit $\mathbf{v}$ un *vecteur de direction limite* en $A = \gamma(t)$, c'est à dire que pour une suite (h_k) de réels tendant vers 0 et une suite de réels (λ_k), l'on a

$$\lim_{k\to\infty} \lambda_k \overrightarrow{AM_k} = \mathbf{v}$$

avec $M_k = \gamma(t + h_k)$. Supposons que $\gamma'(t) \neq 0$. Montrer alors que $\mathbf{v}$ est colinéaire à $\gamma'(t)$.
On appelle tangente en A la droite de direction $\gamma'(t)$ passant par A. Relier cette définition à celle de l'exercice précédent (considérer la fonction $t \to f(\gamma(t))$).
Soit une droite D de $\mathbb{R}^n$ passant par A de vecteur directeur v unitaire. Montrer que la distance $d(h)$ de $\gamma(t+h)$ à D vérifie

$$d^2(h) = h^2(\|\gamma'(t)\|^2 - (\gamma'(t), \overrightarrow{v})^2) + o(h^2).$$

En déduire que $d(h) = o(h)$ ssi $\gamma'(t)$ et v sont colinéaires.

Exercice 5 : [*Différentiabilité des normes*] Soit $\|\cdot\|$ une norme de $\mathbb{R}^n$. Montrer que l'application

$$\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \qquad x \to \|x\|$$

n'est pas différentiable en 0 et que l'ensemble de ses points de différentiabilité est une réunion de demi-droites de $\mathbb{R}^n$.
En quels points sont différentiables les normes $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$ de $\mathbb{R}^2$?

Topologie et calcul différentiel - TD8

Applications différentiables (suite)

Exercice 6 : [*Relation d'Euler*] Soit $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ une fonction homogène de degré n, i.e. pour tout $t > 0$ et $x \in \mathbb{R}^p$ l'on a $f(tx) = t^n f(x)$. On suppose que f est différentiable en dehors de l'origine. Montrer que pour tout $x \neq 0$,

$$f'(x).x = nf(x)$$

et que $f'(tx) = t^{n-1}f'(x)$ pour tout $t \in \mathbb{R}^+$.

Exercice 7 : [*Taylor-Young avec reste intégral*] Soit f une fonction de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ de classe C^1. Montrer que

$$f(x) = f(y) + \sum_{i=1}^{n} (x^i - y^i) g_i(x, y),$$

où $g_i(x, y) = \int_0^1 \partial_{x^i} f(y + s(x - y))\, ds$. En déduire l'inégalité des accroissements finis.

Exercice 8 : Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable. On définit la fonction $g : I^2 \to \mathbb{R}$ par

$$g(x, y) = \begin{cases} \frac{f(x)-f(y)}{x-y} & \text{si } x \neq y \\ f'(x) & \text{sinon.} \end{cases}$$

a) Calculer g lorsque f est un polynôme de degré 2.
b) On suppose désormais que f est de classe C^1. Montrer que

$$g(x, y) = \int_0^1 f'(x + t(y - x))dt.$$

c) En déduire que g est continue sur I^2.
d) On suppose de plus que f est deux fois dérivable en $a \in I$. Montrer alors que g est différentiable en (a, a).

Exercice 9 : [*Un classique*] Soit f une fonction continue de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ dont la dérivée partielle par rapport à y existe en tout point et est continue sur $\mathbb{R}^2$. Montrer que la fonction

$$(x, y) \to \int_0^x f(t, y)\, dt$$

est de classe C^1. En déduire que la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par

$$g(y) = \int_0^y f(t, y)\, dt$$

est dérivable et calculer sa dérivée.

Exercice 10 : [*Longueur d'un arc*] Soit $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ un arc paramétré de classe C^1. On munit $\mathbb{R}^n$ d'une norme $\|\cdot\|$. A toute subdivision σ de $[a, b]$ par des points $t_0 = 1 < t_1 < \ldots < t_n = b$ on associe la longueur de la ligne brisée

$$L_\sigma = \sum_{j=0}^{n} \|\gamma(t_{j+1}) - \gamma(t_j)\|$$

et on appelle longueur de γ la borne supérieure des L_σ où σ parcours toutes les subdivisions de $[a, b]$. On se propose de montrer que la longueur L de γ est égale à

$$I = \int_a^b \|\gamma'(u)\| du.$$

a) Montrer que tout arc de classe C^1 est de longueur finie. Montrer qu'un segment de de droite est le plus court chemin d'un point à un autre.
b) Soit $\epsilon > 0$. Montrer qu'il existe $\alpha > 0$ tel que l'on ait pour tous $s, t \in [a, b]$ vérifiant $|s - t| \leqslant \alpha$

$$\|\gamma'(s) - \gamma'(t)\| \leqslant \epsilon \qquad \text{et}$$
$$\|\gamma(s) - \gamma(t) - (s-t)\gamma'(t)\| \leqslant \epsilon |s - t|.$$

c) Avec ϵ et α comme dans la question précédente, montrer que pour toute subdivision σ dont le pas est inférieur à α, l'on a

$$|L_\sigma - I| \leqslant 2\epsilon(b - a)$$

d) Conclure.

Exercice 11 : [*Dimension infinie, exemples simples*]
a) Etudier la dérivabilité de la norme d'un espace de Hilbert.
b) Montrer que l'application de $X = \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ muni de la norme de la convergence uniforme dans $\mathbb{R}$

$$f \to \int_0^1 f^2(t)\, dt$$

est différentiable. Calculer sa différentielle.

Exercice 12 : [*Opérateur de composition*] Soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue.
a) Montrer que l'application de $X = \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ muni de la norme de la convergence uniforme

$$C : X \to X, \quad f \to \varphi \circ f$$

est continue.
b) On suppose désormais φ de classe C^1. Montrer que $\varphi(x + h) = \varphi(x) + h\varphi'(x) + h\Psi(x, h)$ avec Ψ une fonction continue de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$.
c) En déduire que C est différentiable avec pour différentielle

$$C'(f).h = \varphi'(f).h$$

Exercice 13 : Soit c_0 l'espace des suites réelles convergeant vers 0 muni de la norme $\|u\|_\infty = \sup_{n \in \mathbb{N}} |u_n|$.
a) Montrer que pour tout $u \in c_0$ la borne supérieure des $|u_n|$ quand n décrit $\mathbb{N}$ est atteinte.
b) Soit $u \in c_0$ tel que $\|u\|_\infty$ soit atteinte au rang N et pour tout $n \neq N$, $|u_n| \neq \|u\|_\infty$. Montrer alors que

$$M = \sup_{n \neq N} |u_n| < \|u\|_\infty$$

Montrer ensuite que pour tout $h \in c_0$,

$$\|h\| \leqslant \tfrac{1}{2}(\|u\|_\infty - M) \Rightarrow \|u + h\|_\infty = \|u\| + \operatorname{sgn}(u_N) h_N$$

En déduire que $\| \cdot \|_\infty$ est différentiable en u.

c) Soit $u \in c_0$ non-nul et tel que $\|u\|_\infty = |u_N| = |u_P|$. Soit la suite h dont tous les termes sont nuls excepté le N-ième qui vaut 1. Montrer alors que pour $|t| < \|u\|$,

$$\|u + th\|_\infty = \begin{cases} \|u\|_\infty + t & \text{si } tu_N \geqslant 0 \\ \|u\|_\infty & \text{sinon} \end{cases}$$

En déduire que $\|\cdot\|_\infty$ n'est pas différentiable en u.

Exercice 14 : [*Inversion dans* $\mathrm{Gl}(n)$] On note $\mathrm{M}(n)$ l'espace vectoriel formé des matrices de taille $n \times n$ et $\mathrm{Gl}(n) \subset \mathrm{M}(n)$ le groupe linéaire.
a) Montrer que $\mathrm{Gl}(n)$ est ouvert dans $\mathrm{M}(n)$.
b) Montrer que l'application Ψ de $\mathrm{Gl}(n)$ dans lui même qui associe à une matrice son inverse est de classe C^1.
c) Calculer la différentielle de Ψ en dérivant $t \to \Psi(M + tH).(M + tH)$ en $t = 0$.
d) Calculer la différentielle de Ψ en l'identité en calculant explicitement l'inverse de $\mathrm{Id} + tC_{ij}$, où C_{ij} est la matrice dont tous les coefficients sont nuls excepté celui sur la i-ième ligne et j-ième colonne qui vaut 1.
e) Déduire $\Psi'(M)$ de $\Psi'(\mathrm{Id})$.

Exercice 15 : [*Fonction déterminant*] On note φ l'application déterminant de $\mathrm{M}(n)$ dans $\mathbb{R}$.
a) Pourquoi φ est-elle de classe C^1 ?
b) En calculant $\varphi(\mathrm{Id} + tC_{ij})$, montrer que $\varphi'(\mathrm{Id}).H = \mathrm{tr}(H)$
c) En déduire que pour tout $M \in \mathrm{Gl}(n)$, $\varphi'(M)H = \det(M)\,\mathrm{tr}(M^{-1}H)$.
d) Montrer que $\mathrm{Gl}(n)$ est dense dans $\mathrm{M}(n)$ (pour tout $M \in \mathrm{M}(n)$, montrer qu'il existe H telle que $M + tH$ soit inversible lorsque $t \neq 0$).
e) En prolongeant par continuité, montrer que pour tout $M \in \mathrm{M}(n)$, $\varphi'(M)H = \mathrm{tr}(C^t H)$ où C est la matrice des cofacteurs de A.

Exercice 16 : [*Formule de Taylor-Young au second ordre*] Montrer que si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est de classe C^2, alors

$$f(x) = f(0) + \sum_{i=1}^{n} x^i \frac{\partial f}{\partial x^i}(0) + \sum_{i,j=1}^{n} x^i x^j g_{ij}(x),$$

où $g_{ij}(x)$ est l'intégrale

$$g_{ij}(x) = \int_0^1 (s-1) \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(sx)\, ds.$$

Exercice 17 : [*Isométries*] Soit f une application de classe C^2 de $\mathbb{R}^n$ dans lui-même. On note $\|\cdot\|$ la norme euclidienne de $\mathbb{R}^n$. Montrons que les assertions suivantes sont équivalentes.

a) f est une *isométrie*, *i.e.* pour tous $x, h \in \mathbb{R}^n$, $\|f(x+h) - f(x)\| = \|h\|$.

b) f est une *isométrie infinitésimale*, *i.e.* pour tous $x, h \in \mathbb{R}^n$, l'on a $\|f'(x).h\| = \|h\|$.

c) f est une isométrie affine.

On établira que 1. ⇒ 2. ⇒ 3. ⇒ 1. Pour l'implication 2. ⇒ 3., on déduira de 2. que les fonctions

$$a_{ijk} = \sum_{m=1}^{n} \frac{\partial f_m}{\partial x_i} \frac{\partial^2 f_m}{\partial x_j \partial x_k}, \qquad i, j, k \in \{1, \ldots, n\}$$

vérifient $a_{ijk} = a_{ikj}$ et $a_{ijk} = -a_{kji}$ et que par conséquent elles s'annulent.
Soit $\Delta = \sum_{i=1}^{n} \partial^2 / \partial x_i^2$ le laplacien de $\mathbb{R}^n$. Montrer que

$$\Delta(u \circ f) = (\Delta u) \circ f \tag{1}$$

pour toute fonction $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de classe C^2 si et seulement si f est une isométrie. On pourra montrer dans un premier temps que (1) équivaut à

$$\sum_i \frac{\partial f_j}{\partial y_i} \frac{\partial f_k}{\partial y_i} = \delta_{jk} \quad \text{et} \quad \Delta f_j = 0$$

pour tous $j, k \in \{1, \ldots, n\}$.

Topologie et calcul différentiel - TD9

Inversion locale et fonctions implicites

Exercice 1 : Montrer que

$$\Gamma = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / \ x^3 + y^3 - 3xy = 1\}$$

est au voisinage de $(0,1)$ le graphe d'une fonction $x \to \phi(x)$ de classe C^2 telle que $\phi(0) = 1$. Donner un développement limité de ϕ à l'ordre 2 en 0.

Exercice 2 : Montrer que pour tout réel t tel que $|t| < 1/\sqrt{2}$, l'équation

$$\sin(tx) + \cos(tx) = x$$

admet une unique solution $x = \phi(t)$. Vérifier que ϕ est de classe C^2. Donner un développement limité de ϕ à l'ordre 2 en 0.

Exercice 3 : [*Coordonnées polaires*] Soit Φ l'application

$$\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^2, \quad (\theta, r) \to (r\cos\theta, r\sin\theta).$$

a) Montrer que la restriction de Φ à $]-\pi/2, \pi/2[\times\mathbb{R}^+$ est un difféomorphisme sur son image en construisant explicitement l'inverse.
b) Montrer par le théorème d'inversion locale que la restriction de Φ à $]t-\pi, t+\pi[\times\mathbb{R}^+$ est un difféomorphisme sur son image.
c) Soit f une application homogène de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$, dont la restriction au cercle unité est de classe C^1, i.e. que la fonction

$$g(t) = f(\cos t, \sin t)$$

est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$. Montrer que f est différentiable sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ et calculer sa différentielle en fonction de la dérivée g.

Exercice 4 : Soit la fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$

$$f(x,y) = (x^2 - y^2, 2xy).$$

Montrer que c'est un difféomorphisme local sur le plan privé de l'origine. Déterminer un ouvert maximal U tel que la restriction de f à U soit un difféomorphisme global sur son image. Même question avec la fonction

$$g(x,y) = (e^x \cos y, e^x \sin y).$$

On pourra exprimer f et g en coordonnée complexe.

Exercice 5 : Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une application de classe C^1 dont la différentielle en 0 ne s'annule pas. Montrer qu'il existe deux voisinages ouverts U et U' de 0 dans $\mathbb{R}^n$ et un difféomorphisme $\Phi : U \to U'$ tel que

$$\Phi(0) = 0, \quad f(\Phi(x)) = f(0) + x_1, \qquad \forall x \in U$$

On pourra se ramener à $\frac{\partial f}{\partial x_1}(0) \neq 0$ et considérer l'application qui associe à $x \in \mathbb{R}^n$ le point de coordonnées $(f(x) - f(0), x_2, ..., x_n)$.

Exercice 6 : On munit $\mathbb{R}^n$ de la norme euclidienne $\|.\|$. Soit $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une fonction de classe C^1 telle que

$$\|g'(x)\| \leqslant k$$

en tout x de $\mathbb{R}^n$ pour $k < 1$ et indépendant de x. Soit $f(x) = x + g(x)$.
a) Montrer que g est k-lipschtzienne. En déduire que f est injective.
b) Montrer que $\|f(x)\| \to \infty$ lorsque $\|x\| \to \infty$, autrement dit que l'image réciproque par f de tout ensemble borné est borné.
c) Montrer que f est surjective.
d) Montrer que f est un difféomorphisme.

Exercice 7 : On travaille dans $\mathbb{R}^n$ muni de la norme euclidienne. Soit f une fonction de classe C^1 telle qu'il existe $\alpha > 0$ pour lequel

$$\alpha\|x - y\| \leqslant \|f(x) - f(y)\|, \quad \text{pour tout } x, y \in \mathbb{R}^n.$$

a) Montrer que f est injective.
b) Montrer que $f(\mathbb{R}^n)$ est fermé.
c) Montrer que $f'(x)$ est inversible en tout point x de $\mathbb{R}^n$. En déduire que f est surjective.
d) Montrer que f est un difféomorphisme de $\mathbb{R}^n$.
e) Montrer que l'hypothèse de l'énoncé est vérifié si

$$\langle f'(x).u, u\rangle \geqslant \alpha\|u\|^2$$

pour tout x et $u \in \mathbb{R}^n$.