# Topologie et calcul différentiel - TD4

## Espaces vectoriels normés

## Normes d'applications linéaires

**Exercice 1 :** Sur l'espace $\mathbb{R}^n$, on considère les trois normes suivantes :

$$\|x\|_1 = \sum_{k=1}^{n} |x_k|, \quad \|x\|_2 = \Big(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^2\Big)^{\frac{1}{2}}, \quad \|x\|_\infty = \max_{k=1,\dots,n} |x_k|$$

Vérifier qu'il s'agit bien de normes. Elles sont équivalentes car $\mathbb{R}^n$ est de dimension finie. Déterminer les constantes d'équivalence entre ces normes, c'est à dire

$$\sup_{x\neq 0} \frac{\|x\|}{\|x\|'} \quad \text{et} \quad \sup_{x\neq 0} \frac{\|x\|'}{\|x\|}.$$

**Exercice 2 :** On considère l'application linéaire $T$ de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ dans lui-même définie par : $T(x,y,z) = (5x-2y+2z, 2x-y, x+y+z)$.
*a)* On munit $\mathbb{R}^3$ de la norme $\|.\|_\infty$. Quelle est alors la norme de $T$ ?
*b)* On munit $\mathbb{R}^3$ de la norme $\|.\|_1$. Quelle est alors la norme de $T$ ?
Plus généralement, calculer la norme d'une application linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$ muni de la norme $\|.\|_\infty$ (resp. $\|.\|_1$) en fonction des coefficients de sa matrice dans la base canonique.

**Exercice 3 :** On désigne par $X$ l'espace de Banach des fonctions continues et complexes sur $[0,1]$, muni de la norme de la convergence uniforme. Soit $\varphi$ un élément donné de $X$. Montrer que l'application

$$X \to \mathbb{R}, \quad f \mapsto \int_0^1 f(t)\varphi(t)\mathrm{d}t$$

est une forme linéaire continue sur $X$. Majorer sa norme.

**Exercice 4 :** Soit $a$ un réel strictement positif et $X$ l'espace de Banach $\mathcal{C}([0,a],\mathbb{R})$. Pour tout $f \in X$, on définit

$$(Tf)(x) = \int_0^x f(t)dt.$$

*1)* Vérifier que $T$ est un opérateur linéaire continue de $X$. Montrer que pour tout $f \in X$, on a

$$T^n(f)(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f(t)dt$$

*2)* Calculer la norme de $T^n$. En déduire que la suite $S_n = \mathrm{Id} + T + \dots + T^n$ converge dans $\mathcal{L}(X)$.
*3)* Résoudre dans $X$ l'équation $Tf = f + g$, où $g$ est une fonction continue donnée.

## Linéarité et topologie

**Exercice 5 :** Soit $E$ un espace vectoriel normé. On rappelle que si $A$ et $B$ sont deux parties de $E$, on désigne par $A+B$ l'ensemble des vecteurs $a+b \in E$ où le couple $(a,b)$ décrit $A \times B$. Montrer que :
*a)* si $A$ est ouvert, $A+B$ est ouvert. Plus généralement, montrer que $\mathrm{int}(A)+B$ est contenu dans l'intérieur de $A+B$.
*b)* si $A$ est fermé et $B$ compact, $A+B$ est fermé.
*c)* $\overline{A}+\overline{B} \subset \overline{A+B}$
*d)* si $\overline{A}$ est compact, $\overline{A}+\overline{B} = \overline{A+B}$
*e)* si $A$ et $B$ sont compacts, $A+B$ est compact.

**Exercice 6 :** Soit $E$ un espace vectoriel normé et $V$ un sous espace vectoriel de $E$. Montrer que :
*a)* l'adhérence de $V$ est un sous espace vectoriel.
*b)* si $V$ est de dimension finie, il est fermé.
*c)* si $V \neq E$, il est d'intérieur vide.

Rappelons qu'un *hyperplan* est par définition le noyau d'une forme linéaire non nulle.
**Exercice 7 :** Soit $E$ un espace vectoriel et $H$ un sous espace vectoriel de $E$. Montrer que si $H$ est un hyperplan, alors pour tout vecteur $a \in E \setminus H$ on a

$$E = H \oplus \mathrm{Vect}(a).$$

Réciproquement, montrer que s'il existe un vecteur $a$ non nul tel que $E = H \oplus \mathrm{Vect}(a)$, alors $H$ est un hyperplan. Montrer que si $H = \ker \ell = \ker \ell'$, où $\ell$ et $\ell'$ sont deux formes linéaires, alors $\ell$ et $\ell'$ sont colinéaires.

**Exercice 8 :** Montrer qu'un hyperplan d'un espace vectoriel normé est dense ou fermé.

**Exercice 9 :** Soit $E$ un espace vectoriel normé, $\ell$ une forme linéaire continue sur $E$, non identiquement nulle. Soit $H$ l'ensemble des points de $x \in E$ tels que $\ell(x) = 1$. Quelle est la nature géométrique de $H$ ? Montrer que ce sous-ensemble est fermé. Montrer que $\|\ell\| = (d(0,H))^{-1}$.