Topologie et calcul différentiel - TD6

Espaces de Hilbert

Espaces orthogonaux

Exercice 1 : Soit H un espace de Hilbert et V un sous espace fermé de H. Rappelons que $H = V \oplus V^{\perp}$. Montrer que si $z = x + y$ avec $x \in V$ et $y \in V^{\perp}$, alors

$$\|z - x\| = \inf_{w \in V} \|z - w\|$$

Exercice 2 : Soit H un espace de Hilbert et V un sous espace vectoriel de H. Montrer que
a) l'orthogonal de V est fermé,
b) l'adhérence de V est $V^{\perp\perp}$,
c) les sous espaces othogonaux de V et de son adhérence sont égaux,
d) V est dense dans H ssi son orthogonal est réduit à $\{0\}$.

Exercice 3 : Soit V un hyperplan fermé d'un espace de Hilbert. Montrer que $V^{\perp}$ est de dimension 1. Soit une fomre linéaire ℓ de noyau V. Montrer qu'il existe un vecteur u non nul tel que $u \in V^{\perp}$ et $\|u\|^2 = \ell(u)$, montrer que

$$\ell(x) = \langle x, u \rangle, \qquad \text{pour tout } x \in H$$

Théorème de projection

Exercice 4 : Soit E l'espace vectoriel $\mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$ muni de la norme de la convergence uniforme. Soit D la droite vectorielle engendrée par la fonction $x \to 1 - x$. Montrer que la distance de la fonction constante égale à 1 à D est atteinte en plusieurs points.

Exercice 5 : Soit E l'espace vectoriel $\mathcal{C}([-1,1], \mathbb{R})$ muni de la norme de la convergence uniforme. Soit F le sous espace formé des fonctions impaires dont l'intégrale sur $[0,1]$ est nulle.
a) Montrer que F est fermé.
b) Montrer que la distance de la fonction $\varphi : t \to t$ à F est supérieure ou égale à $1/2$. On pourra majorer l'intégrale $\int_0^1 t - f(t)\, dt$.
c) Peut-on avoir $d(f, \varphi) = \frac{1}{2}$ pour une fonction $f \in F$?
d) Pour tout entier $n \geqslant 3$, soit f_n la fonction impaire définie sur $[0,1]$ par

$$f_n(t) = \begin{cases} -(n-2)^2 t/(8n) & \text{si } 0 \leqslant t \leqslant 4/(n+2) \\ t - 1/2 - 1/n & \text{si } 4/(n+2) \leqslant t \leqslant 1. \end{cases}$$

Vérifier que $f_n \in F$ et que $\|f_n - \varphi\| = \frac{1}{2} + \frac{1}{n}$. En déduire que la distance de φ à F vaut $\frac{1}{2}$.

Dans les deux exercices suivants, H est un espace de Hilbert réel et C une partie convexe fermée de H.

Exercice 6 : Soit P l'application qui à $x \in H$ associe la projection orthogonale de x sur C. Montrer que P est 1-lipschitzienne.

Exercice 7 : Soit Q une partie de H convexe, compacte et qui ne rencontre pas C. Montrons qu'il existe un hyperplan affine fermé qui sépare strictement C et Q.
a) Montrer que l'application $x \to \|x - Px\|$ atteint sont minimum sur Q (P est la projection orthogonale sur C). On note x un point qui réalise ce minimum
b) Montrer que $\|x - Px\|$ réalise la distance de C à Q. En déduire que la projection orthonale de Px sur Q est x.
c) Soit ℓ la forme linéaire $y \to \langle y, Px - x\rangle$ et m le point $(x + Px)/2$. Montrer que

$$\ell(y) < \ell(m) < \ell(z)$$

si $y \in Q$ et $z \in C$.
d) Conclure.

Exercice 8 : On appelle demi-espace affine d'un espace vectoriel réel H une partie de H de la forme

$$H_{\ell,c} = \{x \in E/\ell(x) \leqslant c\}$$

où ℓ est un forme linéaire de E et c un réel. Supposons H muni d'une norme. Montrer que $F_{\ell,c}$ est fermé ssi ℓ est continue.
Lorsque H est un espace de Hilbert, montrer qu'une partie convexe fermée est l'intersection des demi-espaces fermés affines qui la contiennent.