Topologie et calcul différentiel - TD9

Inversion locale et fonctions implicites

Exercice 1 : Montrer que

$$\Gamma = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / \ x^3 + y^3 - 3xy = 1\}$$

est au voisinage de $(0,1)$ le graphe d'une fonction $x \to \phi(x)$ de classe C^2 telle que $\phi(0) = 1$. Donner un développement limité de ϕ à l'ordre 2 en 0.

Exercice 2 : Montrer que pour tout réel t tel que $|t| < 1/\sqrt{2}$, l'équation

$$\sin(tx) + \cos(tx) = x$$

admet une unique solution $x = \phi(t)$. Vérifier que ϕ est de classe C^2. Donner un développement limité de ϕ à l'ordre 2 en 0.

Exercice 3 : [*Coordonnées polaires*] Soit Φ l'application

$$\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^2, \quad (\theta, r) \to (r\cos\theta, r\sin\theta).$$

a) Montrer que la restriction de Φ à $]-\pi/2, \pi/2[\times\mathbb{R}^+$ est un difféomorphisme sur son image en construisant explicitement l'inverse.
b) Montrer par le théorème d'inversion locale que la restriction de Φ à $]t-\pi, t+\pi[\times\mathbb{R}^+$ est un difféomorphisme sur son image.
c) Soit f une application homogène de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$, dont la restriction au cercle unité est de classe C^1, i.e. que la fonction

$$g(t) = f(\cos t, \sin t)$$

est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$. Montrer que f est différentiable sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ et calculer sa différentielle en fonction de la dérivée g.

Exercice 4 : Soit la fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$

$$f(x,y) = (x^2 - y^2, 2xy).$$

Montrer que c'est un difféomorphisme local sur le plan privé de l'origine. Déterminer un ouvert maximal U tel que la restriction de f à U soit un difféomorphisme global sur son image. Même question avec la fonction

$$g(x,y) = (e^x \cos y, e^x \sin y).$$

On pourra exprimer f et g en coordonnée complexe.

Exercice 5 : Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une application de classe C^1 dont la différentielle en 0 ne s'annule pas. Montrer qu'il existe deux voisinages ouverts U et U' de 0 dans $\mathbb{R}^n$ et un difféomorphisme $\Phi : U \to U'$ tel que

$$\Phi(0) = 0, \quad f(\Phi(x)) = f(0) + x_1, \qquad \forall x \in U$$

On pourra se ramener à $\frac{\partial f}{\partial x_1}(0) \neq 0$ et considérer l'application qui associe à $x \in \mathbb{R}^n$ le point de coordonnées $(f(x) - f(0), x_2, ..., x_n)$.

Exercice 6 : On munit $\mathbb{R}^n$ de la norme euclidienne $\|.\|$. Soit $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une fonction de classe C^1 telle que

$$\|g'(x)\| \leqslant k$$

en tout x de $\mathbb{R}^n$ pour $k < 1$ et indépendant de x. Soit $f(x) = x + g(x)$.
a) Montrer que g est k-lipschtzienne. En déduire que f est injective.
b) Montrer que $\|f(x)\| \to \infty$ lorsque $\|x\| \to \infty$, autrement dit que l'image réciproque par f de tout ensemble borné est borné.
c) Montrer que f est surjective.
d) Montrer que f est un difféomorphisme.

Exercice 7 : On travaille dans $\mathbb{R}^n$ muni de la norme euclidienne. Soit f une fonction de classe C^1 telle qu'il existe $\alpha > 0$ pour lequel

$$\alpha\|x - y\| \leqslant \|f(x) - f(y)\|, \qquad \text{pour tout } x, y \in \mathbb{R}^n.$$

a) Montrer que f est injective.
b) Montrer que $f(\mathbb{R}^n)$ est fermé.
c) Montrer que $f'(x)$ est inversible en tout point x de $\mathbb{R}^n$. En déduire que f est surjective.
d) Montrer que f est un difféomorphisme de $\mathbb{R}^n$.
e) Montrer que l'hypothèse de l'énoncé est vérifié si

$$\langle f'(x).u, u\rangle \geqslant \alpha\|u\|^2$$

pour tout x et $u \in \mathbb{R}^n$.