Topologie et calcul différentiel - TD2

Espaces connexes

Exercice 1 : Soient Y un espace topologique discret et X un espace topologique connexe. Montrer que toute application continue $f : X \to Y$ est constante.

Exercice 2 : Montrer qu'un espace topologique X est connexe si et seulement si toute fonction continue $f : X \to \{0,1\}$ est constante.
Utiliser cette propriété pour démontrer qu'une réunion quelconque de connexes ayant un point commun est connexe.

Exercice 3 : Soit A une partie connexe d'un espace topologique X . Montrer que toute partie B de X telle que $A \subset B \subset \overline{A}$ est connexe.

Exercice 4 : Soient A et B deux parties connexes d'un espace topologique. Montrer que si $A \cap \overline{B}$ n'est pas vide, alors $A \cup B$ est connexe. La conclusion reste-t-elle vraie si l'on suppose seulement que $\overline{A} \cap \overline{B} \neq \emptyset$?

Exercice 5 : Soit A une partie d'un espace topologique X de frontière non vide. Montrer que toute partie connexe B de X qui rencontre à la fois A et son complémentaire rencontre la frontière de A.

Exercice 6 : On considère que $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{Q}^c$ sont munis de la topologie induite par leur inclusion dans $\mathbb{R}$. Quelles sont les parties connexes de $\mathbb{Q}$ et de son complémentaire $\mathbb{Q}^c$?
Existe-t-il une fonction continue $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $f(\mathbb{Q}) \subset \mathbb{Q}^c$ et $f(\mathbb{Q}^c) \subset \mathbb{Q}$?

Exercice 7 : Considérons les peignes de $\mathbb{R}^2$:

$$P_1 = \big(\mathbb{R} \times \{1\}\big) \cup \bigcup_{x \in \mathbb{Q}} \{x\} \times [0,1] \quad \text{et}$$

$$P_2 = \big(\mathbb{R} \times \{-1\}\big) \cup \bigcup_{x \in \mathbb{Q}} \{x + \sqrt{2}\} \times [-1,0].$$

Vérifier que P_1 et P_2 sont des parties connexes de $\mathbb{R}^2$. En déduire à l'aide de l'exercice 4 que $P_1 \cup P_2$ est connexe. Montrer par contre que $P_1 \cup P_2$ n'est pas connexe par arc.