Topologie et calcul différentiel - TD5

Compacité

Exemples simples

Exercice 1 : Soit K une partie compacte de $\mathbb{R}^2$ incluse dans le demi-plan $\{(x,y)/\ y>0\}$. Montrer qu'il existe $r>0$ tel que pour tout $(x,y)\in K$ on ait $y\geqslant r$
a) en utilisant la propriété de Bolzano-Weierstrass,
b) en considérant les parties $\{(x,y)\in K/\ y>t\}$,
La propriété est-elle encore vraie si l'on suppose seulement K fermé ?

Exercice 2 : Soit E un espace topologique séparé et $(a_n)_n$ une suite de E convergeant vers a. Montrer que $\{a_n/\ n\in\mathbb{N}\}\cup\{a\}$ est compact dans E.

Exercice 3 : Soit un espace topologique discret. Quelles sont ses parties compactes ? Quelles sont ses parties fermées et bornées ?

Séparation des parties d'un espace topologique

Exercice 4 : Soit (E,d) un espace métrique. La distance d'un point x de E à une partie A de E est la borne inférieure de

$$\{d(x,y)/\ y\in A\}.$$

On la note $d(x,A)$.
a) Montrer que $d(x,A)=0$ si et seulement si $x\in\overline{A}$.
b) Montrer que $d(x,A)=d(x,\overline{A})$.
c) Montrer que $x\to d(x,A)$ est continue de E dans $\mathbb{R}$.
d) Si F et F' sont des fermés disjoints de E, montrer qu'il existe deux ouverts O et O' disjoints de E tels que $F\subset O$ et $F'\subset O'$.

Exercice 5 : Soit E un espace topologique.
a) Soit C une partie compacte de E et x un point du complémentaire de C. Montrer qu'il existe deux ouverts O et O' disjoints de E tels que $C\subset O$ et $x\in O'$.
b) Soit C et C' deux parties compactes disjointes de E, montrer qu'il existe O et O' ouverts disjoints de E tels que $C\subset O$ et $C'\subset O'$.

Exercice 6 : Soit (E,d) un espace métrique, A et B deux parties de E. On définit

$$d(A,B)=\inf\{d(x,y)/\ x\in A \text{ et } y\in B\}.$$

Montrer que si A et B sont disjoints et compacts alors $d(A,B)\neq 0$. Montrer que cette propriété est encore vraie si l'on suppose seulement que A est compact et B fermé, et devient fausse si l'on suppose que A et B sont fermés.

Compactification

On appelle compactification d'un espace topologique X la donnée d'un espace topologique compact Y et d'une application continue $i : X \to Y$ tels que
- $i(X)$ est dense dans Y,
- i est un plongement, c'est à dire un homéomorphisme de X sur $i(X)$ où $i(X)$ est muni de la topologie de sous-espace.

Dans les exercices suivants, on propose trois compactifications du plan.

Exercice 7 : [*La sphère*] Soit la sphère unité de $\mathbb{R}^3$

$$\mathbb{S}^2 = \{(x, y, z)/\ x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

munie de sa topologie de sous-espace de $\mathbb{R}^3$. On appelle pôle nord le point de coordonnées $(0, 0, 1)$. Soit $i : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{S}^2$ l'application qui associe au point de coordonnées (x, y) le point P de la sphère tel que la droite reliant P au pôle nord passe par $(x, y, 0)$. Montrer que $(\mathbb{S}^2, i)$ est une compactification de $\mathbb{R}^2$. A quelle condition une suite $i(x_n, y_n)$ converge-t-elle vers le pôle nord ?

Exercice 8 : [*L'hémisphère*] Considèrons maintenant l'hémisphère

$$\mathbb{S}^2_+ = \{(x, y, z)/\ x^2 + y^2 + z^2 = 1 \text{ et } z \geqslant 0\}$$

et l'application $i : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{S}^2_+$ qui associe au point de coordonnées (x, y) le point de $\mathbb{S}^2_+$ sur la droite reliant $(1, x, y)$ à l'origine de $\mathbb{R}^3$. Vérifier qu'il s'agit d'une compactification de $\mathbb{R}^2$. A quelle condition une suite $i(x_n, y_n)$ converge-t-elle vers le point $(\cos\theta, \sin\theta, 0)$ de $\mathbb{S}^2_+$?

Exercice 9 : [*Le plan projectif*] Le plan projectif $\mathbb{P}^2$ est l'ensemble des droites vectorielles de $\mathbb{R}^3$. Identifier $\mathbb{P}^2$ avec le quotient de la sphère $\mathbb{S}^2$ par la relation d'antipodie. Munir alors $\mathbb{P}^2$ de la distance

$$d'(\overline{x}, \overline{y}) := \inf(d(x, y), d(-x, y))$$

où $\overline{x}$ et $\overline{y}$ sont les classes d'équivalence de $x, y \in \mathbb{S}^2$ respectivement. Montrer qu'il s'agit bien d'une distance, que la projection $\pi : \mathbb{S}^2 \to \mathbb{P}^2$ est continue et que $\mathbb{P}^2$ est compact.

Soit i l'application de $\mathbb{R}^2$ dans le plan projectif qui associe au point de coordonnées (x, y) la droite vectorielle engendrée par $(x, y, 1)$. Montrer que $(\mathbb{P}^2, i)$ compactifie le plan. A quelle condition une suite $i(x_n, y_n)$ converge-t-elle vers la droite vectorielle engendrée par $(\cos\theta, \sin\theta, 0)$?