Topologie et calcul différentiel - TD8

Applications différentiables (suite)

Exercice 6 : [*Relation d'Euler*] Soit $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ une fonction homogène de degré n, i.e. pour tout $t > 0$ et $x \in \mathbb{R}^p$ l'on a $f(tx) = t^n f(x)$. On suppose que f est différentiable en dehors de l'origine. Montrer que pour tout $x \neq 0$,

$$f'(x).x = nf(x)$$

et que $f'(tx) = t^{n-1} f'(x)$ pour tout $t \in \mathbb{R}^+$.

Exercice 7 : [*Taylor-Young avec reste intégral*] Soit f une fonction de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ de classe C^1. Montrer que

$$f(x) = f(y) + \sum_{i=1}^{n} (x^i - y^i) g_i(x, y),$$

où $g_i(x, y) = \int_0^1 \partial_{x^i} f(y + s(x - y))\, ds$. En déduire l'inégalité des accroissements finis.

Exercice 8 : Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable. On définit la fonction $g : I^2 \to \mathbb{R}$ par

$$g(x, y) = \begin{cases} \frac{f(x)-f(y)}{x-y} & \text{si } x \neq y \\ f'(x) & \text{sinon.} \end{cases}$$

a) Calculer g lorsque f est un polynôme de degré 2.
b) On suppose désormais que f est de classe C^1. Montrer que

$$g(x, y) = \int_0^1 f'(x + t(y - x)) dt.$$

c) En déduire que g est continue sur I^2.
d) On suppose de plus que f est deux fois dérivable en $a \in I$. Montrer alors que g est différentiable en (a, a).

Exercice 9 : [*Un classique*] Soit f une fonction continue de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ dont la dérivée partielle par rapport à y existe en tout point et est continue sur $\mathbb{R}^2$. Montrer que la fonction

$$(x, y) \to \int_0^x f(t, y)\, dt$$

est de classe C^1. En déduire que la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par

$$g(y) = \int_0^y f(t, y)\, dt$$

est dérivable et calculer sa dérivée.

Exercice 10 : [*Longueur d'un arc*] Soit $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ un arc paramétré de classe C^1. On munit $\mathbb{R}^n$ d'une norme $\|\cdot\|$. A toute subdivision σ de $[a, b]$ par des points $t_0 = 1 < t_1 < \ldots < t_n = b$ on associe la longueur de la ligne brisée

$$L_\sigma = \sum_{j=0}^{n} \|\gamma(t_{j+1}) - \gamma(t_j)\|$$

et on appelle longueur de γ la borne supérieure des L_σ où σ parcours toutes les subdivisions de $[a,b]$. On se propose de montrer que la longueur L de γ est égale à

$$I = \int_a^b \|\gamma'(u)\| du.$$

a) Montrer que tout arc de classe C^1 est de longueur finie. Montrer qu'un segment de de droite est le plus court chemin d'un point à un autre.
b) Soit $\epsilon > 0$. Montrer qu'il existe $\alpha > 0$ tel que l'on ait pour tous $s, t \in [a,b]$ vérifiant $|s-t| \leqslant \alpha$

$$\|\gamma'(s) - \gamma'(t)\| \leqslant \epsilon \qquad \text{et}$$
$$\|\gamma(s) - \gamma(t) - (s-t)\gamma'(t)\| \leqslant \epsilon |s-t|.$$

c) Avec ϵ et α comme dans la question précédente, montrer que pour toute subdivision σ dont le pas est inférieur à α, l'on a

$$|L_\sigma - I| \leqslant 2\epsilon(b-a)$$

d) Conclure.

Exercice 11 : [*Dimension infinie, exemples simples*]
a) Etudier la dérivabilité de la norme d'un espace de Hilbert.
b) Montrer que l'application de $X = \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ muni de la norme de la convergence uniforme dans $\mathbb{R}$

$$f \to \int_0^1 f^2(t)\, dt$$

est différentiable. Calculer sa différentielle.

Exercice 12 : [*Opérateur de composition*] Soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue.
a) Montrer que l'application de $X = \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ muni de la norme de la convergence uniforme

$$C : X \to X, \quad f \to \varphi \circ f$$

est continue.
b) On suppose désormais φ de classe C^1. Montrer que $\varphi(x+h) = \varphi(x) + h\varphi'(x) + h\Psi(x,h)$ avec Ψ une fonction continue de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$.
c) En déduire que C est différentiable avec pour différentielle

$$C'(f).h = \varphi'(f).h$$

Exercice 13 : Soit c_0 l'espace des suites réelles convergeant vers 0 muni de la norme $\|u\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} |u_n|$.
a) Montrer que pour tout $u \in c_0$ la borne supérieure des $|u_n|$ quand n décrit $\mathbb{N}$ est atteinte.
b) Soit $u \in c_0$ tel que $\|u\|_\infty$ soit atteinte au rang N et pour tout $n \neq N$, $|u_n| \neq \|u\|_\infty$. Montrer alors que

$$M = \sup_{n\neq N} |u_n| < \|u\|_\infty$$

Montrer ensuite que pour tout $h \in c_0$,

$$\|h\| \leqslant \tfrac{1}{2}(\|u\|_\infty - M) \Rightarrow \|u+h\|_\infty = \|u\| + \mathrm{sgn}(u_N)h_N$$

En déduire que $\|\cdot\|_\infty$ est différentiable en u.

c) Soit $u \in c_0$ non-nul et tel que $\|u\|_\infty = |u_N| = |u_P|$. Soit la suite h dont tous les termes sont nuls excepté le N-ième qui vaut 1. Montrer alors que pour $|t| < \|u\|$,

$$\|u + th\|_\infty = \begin{cases} \|u\|_\infty + t & \text{si } tu_N \geqslant 0 \\ \|u\|_\infty & \text{sinon} \end{cases}$$

En déduire que $\|\cdot\|_\infty$ n'est pas différentiable en u.

Exercice 14 : [*Inversion dans* $\mathrm{Gl}(n)$] On note $\mathrm{M}(n)$ l'espace vectoriel formé des matrices de taille $n \times n$ et $\mathrm{Gl}(n) \subset \mathrm{M}(n)$ le groupe linéaire.
a) Montrer que $\mathrm{Gl}(n)$ est ouvert dans $\mathrm{M}(n)$.
b) Montrer que l'application Ψ de $\mathrm{Gl}(n)$ dans lui même qui associe à une matrice son inverse est de classe C^1.
c) Calculer la différentielle de Ψ en dérivant $t \to \Psi(M + tH).(M + tH)$ en $t = 0$.
d) Calculer la différentielle de Ψ en l'identité en calculant explicitement l'inverse de $\mathrm{Id} + tC_{ij}$, où C_{ij} est la matrice dont tous les coefficients sont nuls excepté celui sur la i-ième ligne et j-ième colonne qui vaut 1.
e) Déduire $\Psi'(M)$ de $\Psi'(\mathrm{Id})$.

Exercice 15 : [*Fonction déterminant*] On note φ l'application déterminant de $\mathrm{M}(n)$ dans $\mathbb{R}$.
a) Pourquoi φ est-elle de classe C^1 ?
b) En calculant $\varphi(\mathrm{Id} + tC_{ij})$, montrer que $\varphi'(\mathrm{Id}).H = \mathrm{tr}(H)$
c) En déduire que pour tout $M \in \mathrm{Gl}(n)$, $\varphi'(M)H = \det(M)\,\mathrm{tr}(M^{-1}H)$.
d) Montrer que $\mathrm{Gl}(n)$ est dense dans $\mathrm{M}(n)$ (pour tout $M \in \mathrm{M}(n)$, montrer qu'il existe H telle que $M + tH$ soit inversible lorsque $t \neq 0$).
e) En prolongeant par continuité, montrer que pour tout $M \in \mathrm{M}(n)$, $\varphi'(M)H = \mathrm{tr}(C^t H)$ où C est la matrice des cofacteurs de A.

Exercice 16 : [*Formule de Taylor-Young au second ordre*] Montrer que si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est de classe C^2, alors

$$f(x) = f(0) + \sum_{i=1}^{n} x^i \frac{\partial f}{\partial x^i}(0) + \sum_{i,j=1}^{n} x^i x^j g_{ij}(x),$$

où $g_{ij}(x)$ est l'intégrale

$$g_{ij}(x) = \int_0^1 (s-1) \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(sx)\, ds.$$

Exercice 17 : [*Isométries*] Soit f une application de classe C^2 de $\mathbb{R}^n$ dans lui-même. On note $\|\cdot\|$ la norme euclidienne de $\mathbb{R}^n$. Montrons que les assertions suivantes sont équivalentes.

a) f est une *isométrie*, *i.e.* pour tous $x, h \in \mathbb{R}^n$, $\|f(x+h) - f(x)\| = \|h\|$.
b) f est une *isométrie infinitésimale*, *i.e.* pour tous $x, h \in \mathbb{R}^n$, l'on a $\|f'(x).h\| = \|h\|$.
c) f est une isométrie affine.

On établira que 1. ⇒ 2. ⇒ 3. ⇒ 1. Pour l'implication 2. ⇒ 3., on déduira de 2. que les fonctions

$$a_{ijk} = \sum_{m=1}^{n} \frac{\partial f_m}{\partial x_i} \frac{\partial^2 f_m}{\partial x_j \partial x_k}, \qquad i, j, k \in \{1, \ldots, n\}$$

vérifient $a_{ijk} = a_{ikj}$ et $a_{ijk} = -a_{kji}$ et que par conséquent elles s'annulent.
Soit $\Delta = \sum_{i=1}^{n} \partial^2/\partial x_i^2$ le laplacien de $\mathbb{R}^n$. Montrer que

$$\Delta(u \circ f) = (\Delta u) \circ f \tag{1}$$

pour toute fonction $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de classe C^2 si et seulement si f est une isométrie. On pourra montrer dans un premier temps que (1) équivaut à

$$\sum_i \frac{\partial f_j}{\partial y_i} \frac{\partial f_k}{\partial y_i} = \delta_{jk} \quad \text{et} \quad \Delta f_j = 0$$

pour tous $j, k \in \{1, \ldots, n\}$.