Topologie et calcul différentiel - TD3

Espaces complets

Exercice 1 : Donner un exemple d'espaces métriques X et Y homéomorphes tels que X soit complet et Y ne le soit pas.

Exercice 2 : Soit X et Y deux espaces métriques et f une application $X \to Y$.
a) Montrer que si f est uniformément continue, alors elle conserve les suites de Cauchy. Qu'en est-il de la réciproque ?
b) Supposons f uniformément continue, bijective et de réciproque continue. Montrer que si Y est complet, X l'est aussi.

Exercice 3 : Soit E l'espace des fonctions continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$. Pour tout f et g dans E, on pose

$$d(f,g) = \int_0^1 |f(t) - g(t)| \, dt.$$

On note d' la distance de la convergence uniforme sur E.
a) Montrer que d est une distance.
b) Montrer que l'application identique de (E,d') dans (E,d) est continue et que par contre l'application identique de (E,d) dans (E,d') n'est pas continue.
c) Montrer que (E,d) n'est pas complet.

Exercice 4 :
Soit a un réel positif et (E,d) l'espace des fonctions continues sur l'intervalle $[0,a]$ à valeurs réelles, muni de la distance de la convergence uniforme. Soit T la fonction $E \to E$ définie sur $[0,a]$ par :

$$T(x)(t) = 1 + \int_0^t x(s) \, \mathrm{d}s.$$

a) Montrer que l'on a bien $Tx \in E$ si $x \in E$ et que l'application T est lipschitzienne.
b) On suppose désormais $a < 1$. Montrer qu'il existe une fonction x unique dans E telle que $Tx = x$.
c) En déduire que la fonction exponentielle est limite uniforme sur $[0,a]$ des polynômes $P_n(t) = \sum_{j=0}^{n} \frac{t^j}{j!}$ pour $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 5 : Soit une application f d'un espace métrique complet dans lui-même telle que f^p soit contractante pour un certain p. Montrer que f possède un unique point fixe.

Exercice 6 : On considère l'espace X des fonctions continues de $[0,1]$ à valeurs réelles muni de la distance de la convergence uniforme. Montrer que l'application $F : X \to X$ définie par

$$F(f)(x) = \int_0^x f(t) \, dt + \tfrac{1}{5}\cos(f(x))$$

est continue, lipschitzienne [1] mais non contractante. Vérifier que $F \circ F$ est contractante et en déduire l'existence et l'unicité de $f \in X$ telle que

$$f(x) = \int_0^x f(t) \, dt + \tfrac{1}{5}\cos(f(x)).$$

[1] On rappelle que $|\cos x - \cos y| \leqslant |x - y|$.