Topologie et calcul différentiel - TD7

Applications différentiables

Exercice 1 : [*Quelques révisions*]
a) Rappeler la définition des dérivées partielles. Calculer les dérivées partielles des applications

$$(x,y,z) \to x^4+y^4+z^4, \qquad (x,y,z) \to 4x^2yz$$

b) Rappeler la définition de la jacobienne. Calculer la jacobienne de l'application $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ donnée par

$$f(x,y,z) = (x^4+y^4+z^4, 4x^2yz).$$

Même exercice avec l'application $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie par

$$g(x,y,z) = (x^3+z^3, y^3-3xyz, x-2y+z).$$

c) Soit I un ouvert de $\mathbb{R}$ et U un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Considérons $g : I \to U$ et $f : U \to \mathbb{R}$. Rappeler comment on calcule les dérivées partielles de $f \circ g$ en fonctions des dérivées partielles de f et de la dérivée de g.
d) Soient des applications x, y f et g de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$. Calculer les dérivéees partielles de

$$(t,s) \to f(x(t,s), y(t,s)) \quad \text{et} \quad (t,s) \to g(s^2+t^3, x^2(t,s))$$

en fonction de celles de f, g, x et y.
e) Avec les mêmes notations qu'au *d)*, comparer les jacobiennes des applications

$$(t,s) \to (x(t,s), y(t,s)), \qquad (x,y) \to (f(x,y), g(x,y))$$

et

$$(t,s) \to (f(x(t,s), y(t,s)), g(x(t,s), y(t,s)))$$

Exercice 2 : [*Dérivée directionnelle*] Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et une application $f : U \to \mathbb{R}$. Soit $x \in U$ et $\overrightarrow{u} \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. On dit que f est *dérivable suivant* $\overrightarrow{u}$ *en* x si

$$h(t) = f(x + t\overrightarrow{u})$$

est dérivable en $t = 0$. Dans ce cas, on appelle $h'(0)$ la *dérivée directionnelle* de f en x par rapport à $\overrightarrow{u}$.
a) Quelle relation existe-t-il entre dérivées partielle et dérivée directionnelle ?
b) Vérifier que si f est différentiable en x, elle admet des dérivées directionnelles en x dans toutes les directions. Les calculer en fonction de $Df(x)$.
c) Déduire de ce qui précéde la relation entre matrice jacobienne et différentielle.
d) Vérifier que $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \frac{xy^2}{x^2+y^2} \quad \text{si } (x,y) \neq (0,0), \qquad f(0,0) = 0$$

admet des dérivées en l'origine dans toutes les directions et qu'elle n'est pas différentiable.

e) Montrer que l'application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f(x,y) = y^3/x \quad \text{si } x \neq 0, \qquad f(0,y) = 0$$

admet des dérivées en l'origine dans toutes les directions et qu'elle n'est pas bornée au voisinage de l'origine.

Exercice 3 : [*Tangente d'une courbe définie implicitement*] Soit un ouvert U de $\mathbb{R}^2$, une fonction $f : U \to \mathbb{R}$ différentiable et C la courbe d'équation $f(x,y) = 0$. Soit $A = (a,b) \in \mathbb{R}^2$ un point de C en lequel la différentielle de f ne s'annule pas. Soit $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$ un *vecteur de direction limite* en A, c'est à dire tel que pour une suite de point (M_k) de C qui converge vers A et une suite de réels (λ_k), l'on a

$$\lim_{k\to\infty} \lambda_k \overrightarrow{AM_k} = \mathbf{v}.$$

Montrer alors que $Df(A)(\mathbf{v}) = \mathbf{0}$.
On appelle *tangente* en A la droite des points P tels que

$$Df(A)(\overrightarrow{AP}) = 0.$$

Donner son équation en fonction des dérivées partielles de f.

Exercice 4 : [*Tangente d'une courbe paramétrée*] Soit une application $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ définie sur un intervalle ouvert et de classe C^1. Soit $\mathbf{v}$ un *vecteur de direction limite* en $A = \gamma(t)$, c'est à dire que pour une suite (h_k) de réels tendant vers 0 et une suite de réels (λ_k), l'on a

$$\lim_{k\to\infty} \lambda_k \overrightarrow{AM_k} = \mathbf{v}$$

avec $M_k = \gamma(t+h_k)$. Supposons que $\gamma'(t) \neq 0$. Montrer alors que $\mathbf{v}$ est colinéaire à $\gamma'(t)$.
On appelle tangente en A la droite de direction $\gamma'(t)$ passant par A. Relier cette définition à celle de l'exercice précédent (considérer la fonction $t \to f(\gamma(t))$).
Soit une droite D de $\mathbb{R}^n$ passant par A de vecteur directeur v unitaire. Montrer que la distance $d(h)$ de $\gamma(t+h)$ à D vérifie

$$d^2(h) = h^2(\|\gamma'(t)\|^2 - (\gamma'(t), \overrightarrow{v})^2) + o(h^2).$$

En déduire que $d(h) = o(h)$ ssi $\gamma'(t)$ et v sont colinéaires.

Exercice 5 : [*Différentiabilité des normes*] Soit $\|\cdot\|$ une norme de $\mathbb{R}^n$. Montrer que l'application

$$\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \qquad x \to \|x\|$$

n'est pas différentiable en 0 et que l'ensemble de ses points de différentiabilité est une réunion de demi-droites de $\mathbb{R}^n$.
En quels points sont différentiables les normes $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$ de $\mathbb{R}^2$?