Analyse complexe 1 - TD1

Exercice 1 : Les fonctions suivantes sont-elles holomorphes sur $\mathbb{C}$?

$$z \mapsto \overline{z},\ z \mapsto \operatorname{Re} z,\ z \mapsto \operatorname{Im} z,\ z \mapsto |z|^2$$

Exercice 2 : Soit $f = P + iQ$ une fonction holomorphe dans un ouvert connexe non vide Ω de $\mathbb{C}$. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

a) f est constante,

b) P est constante,

c) Q est constante,

d) $\overline{f}$ est holomorphe dans Ω,

e) $|f|$ est constant.

Exercice 3 : Pour $z = x + iy,\ x,\ y \in \mathbb{R}$, on pose $f(z) = x + iy^2$. Montrer que f est $\mathbb{R}$-différentiable sur $\mathbb{C}$ et calculer sa différentielle. Existe-t-il un ouvert U de $\mathbb{C}$ telle que $f_{|U} \in \mathcal{O}(U)$?

Exercice 4 :

a) Soit f une fonction différentiable en $z_0 \in \mathbb{C}$. Calculer $\overline{\dfrac{\partial}{\partial z} f(z_0)}$ et $\dfrac{\partial}{\partial \overline{z}} \overline{f}(z_0)$.

b) Montrer que les opérateurs $\dfrac{\partial}{\partial z}$ et $\dfrac{\partial}{\partial \overline{z}}$ sont des dérivations sur l'espace des fonctions complexes différentiables en z_0. Calculer $\dfrac{\partial}{\partial z} z^k$.

c) Montrer qu'un polynôme $P(z, \overline{z}) = \displaystyle\sum_{1 \le i,j \le n} p_{i,j} z^i \overline{z}^j$ est holomorphe si et seulement si $p_{i,j} = 0$ pour tout $j > 0$.

Exercice 5 : Soit $U = \{z = x + iy \in \mathbb{C},\ -\pi < x < \pi,\ y \in \mathbb{R}\}$. Soit

$$P(x, y) = \frac{\sin x}{\cos x + \operatorname{ch} y},$$

pour $z \in U$. Le but de cet exercice est de montrer qu'il existe $f \in \mathcal{O}(U)$ unique telle que $f(0) = 0$ et $P = \operatorname{Re} f$ et d'expliciter f.

a) Exprimer $P(x, y)$ en fonction de $e^{\pm ix}$ et $e^{\pm y}$.

b) Pour $z = x + iy \in \mathbb{C}$, on notera $\alpha = e^{iz}$ et $\beta = e^{-iz}$. Montrer que $\bar{\alpha} = e^{-i\bar{z}}$ et $\bar{\beta} = e^{i\bar{z}}$.

c) Exprimer $e^{\pm 2ix}$ et $e^{\pm 2y}$ en fonction de α et β. et en déduire une expression de $P(2x, 2y)$ en fonction de α et β.

d) Trouver une fonction $Z(\alpha, \beta)$ telle que $P(2x, 2y) = \frac{Z + \bar{Z}}{2}$.

e) En déduire une solution holomorphe f de $\operatorname{Re}(f) = P$ et conclure.

Exercice 6 : Soient a, b, $c \in \mathbb{R}$. On pose $P(x,y) = ax^2 + 2bxy + cy^2$, pour x, $y \in \mathbb{R}$. Donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ telle que $P = \operatorname{Re} f$. Sous cette condition, trouver alors toutes les applications $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ telles que $P = \operatorname{Re} f$.

Exercice 7 : Soient Ω un ouvert connexe de $\mathbb{C}$ et f une fonction holomorphe sur Ω. On désigne par P et Q respectivement ses parties réelle et imaginaire. On suppose qu'il existe des constantes réelles non toutes nulles a, b et c telles que la fonction $aP + bQ + c$ soit identiquement nulle sur Ω. Montrer que f est constante sur Ω.

Exercice 8 : Soient U un ouvert connexe de $\mathbb{C}$, $f \in \mathcal{O}(U)$, $F \in C^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$, telles que $\operatorname{Re} f(z) = F(\operatorname{Im} f(z))$, pour tout $z \in U$. Que peut-on dire de f ?

Exercice 9 :

a) Soient U un ouvert connexe de $\mathbb{C}$ et f, $g \in \mathcal{O}(U)$ telles que $f(z) + \overline{g(z)} \in \mathbb{R}$, pour tout $z \in U$. Prouver qu'il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $f(z) = c + g(z)$ pour tout $z \in U$.

b) On considère maintenant f, $g \in \mathcal{O}(U)$, où g ne s'annule pas dans U et telles que $f(z)\overline{g(z)} \in \mathbb{R}$, pour tout $z \in U$. Prouver qu'il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $f = cg$.

Exercice 10 : Soient U un ouvert de $\mathbb{C}$ invariant par rapport à la symétrie relativement à l'axe réel, et $f \in \mathcal{O}(U)$. Pour tout $z \in U$, on pose $g(z) = \overline{f(\overline{z})}$. Prouver que $g \in \mathcal{O}(U)$.

Exercice 11 : On dit que deux fonctions réelles $u(x,y)$ et $v(x,y)$ sont conjuguées harmoniques si elles vérifient les équations de Cauchy-Riemann. Une fonction $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ est harmonique si elle vérifie l'équation

$$\delta u := \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

a) Montrer que si u et v de classe $\mathcal{C}^2$ sont conjuguées harmoniques, alors u et v sont harmoniques.

b) Trouver les conjuguées harmoniques des fonctions suivantes dans les ouverts indiqués :

   i) $u(x,y) = x^2 - y^2 + x$ sur $\mathbb{C}$

   ii) $u(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2}$ sur $\mathbb{C} \setminus \{0\}$

   iii) $u(x,y) = \frac{1}{2}\ln\left(x^2+y^2\right)$ sur $\mathbb{C} \setminus \{x+iy,\ y=0,\ x \leq 0\}$

   iv) $u(x,y) = \frac{1}{2}\ln\left(x^2+y^2\right)$ sur $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Exercice 12 : Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$ et $f : U \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction $\mathbb{R}$-differentiable. On suppose qu'en un point $c \in U$, la limite

$$\lim_{h\to 0}\left|\frac{f(c+h)-f(c)}{h}\right| \tag{1}$$

existe. Montrer qu'alors, soit f, soit $\bar{f}$ est holomorphe en c.