La fonction zêta de Riemann

1.*Propriétés élémentaires et équation fonctionnelle.*

Le but de cette feuille est de donner un énoncé précis du fameux problème de deux cents ans d'âge qu'on nomme l'hypothèse de Riemann. La fonction zêta de Riemann est définie pour $s \in \mathbb{R}$, $s > 1$, par

$$\zeta(s) = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^s}.$$

On se propose de démontrer en quelques exercices

a) que cette série converge pour $\mathrm{Re}\,(s) > 1$, uniformément pour $\mathrm{Re}\,(s) > 1 + \delta$ pour tout $\delta > 0$;

b) qu'elle se prolonge méromorphiquement (i.e. s'écrit comme quotient de deux fonctions holomorphes) dans le demi-plan $\mathrm{Re}\,(s) > 0$;

c) qu'elle peut s'écrire comme un produit infini

$$\zeta(s) = \prod_p \zeta_p(s)$$

indexé par les nombres premiers avec $\zeta_p(s) := \frac{1}{1-p^{-s}}$.

d) que la fonction $\Gamma(s) = \int_0^\infty e^{-y} y^s \frac{dy}{y}$ se prolonge holomorphiquement à $\mathbb{C} - \mathbb{N}_-$ et y vérifie l'équation fonctionnelle $\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$;

e) que la fonction zêta complétée

$$\hat{\zeta}(s) = \zeta_\infty(s)\zeta(s)$$

où

$$\zeta_\infty(s) := 2^{-1/2}\pi^{-s/2}\Gamma(s/2)$$

admet la représentation intégrale

$$\hat{\zeta}(s) = \frac{1}{2\sqrt{2}} \int_0^\infty (\theta(iy) - 1) y^{s/2} \frac{dy}{y},$$

où

$$\theta(z) := \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{\pi i n^2 z} = 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} e^{\pi i n^2 z}$$

est la série theta de Jacobi.

f) que la série theta de Jacobi $\theta(z)$ converge uniformément pour $\mathrm{Im}\,(z) \geq \delta$ pour tout $\delta > 0$ et satisfait la formule

$$\theta(-1/z) = \sqrt{z/i}\,\theta(z).$$

g) que la fonction zêta complétée se prolonge holomorphiquement à $\mathbb{C} - \{0, 1\}$ et vérifie dans ce domaine l'équation fonctionnelle

$$\hat{\zeta}(s) = \hat{\zeta}(1-s).$$

Nous serons ainsi en mesure de donner un sens précis à l'énoncé suivant.

Conjecture *("Hypothèse de Riemann")*

Tous les zéros de $\hat{\zeta}(s)$ *se trouvent sur la droite* $\mathrm{Re}\,(s) = 1/2$.

Exercice 1 : (convergence pour $\mathrm{Re}\,(s) > 1$)

a) Pour $i \geq 0$, on note $N_i = \sum_{j=0}^{i} 2^j$. Pour $s \in \mathbb{R}$, $s > 1$ et $i \geq 0$, montrer la majoration
$$\sum_{n=1}^{N_i} \frac{1}{n^s} \leq \sum_{j=0}^{i} \left(\frac{1}{2^{s-1}}\right)^j.$$

b) En déduire que la série $\zeta(s)$ converge uniformément sur le domaine $\mathrm{Re}\,(s) > 1+\delta$ pour tout $\delta > 0$.

c) Montrer que la série $\zeta(s)$ diverge pour $\mathrm{Re}\,(s) \leq 1$.

Exercice 2 : (prolongement à $\mathrm{Re}\,(s) > 0$)

a) On note $a_n(s) = \frac{1}{n^s} - \int_n^{n+1} t^{-s} dt$. Montrer l'estimation
$$|a_n(s)| \leq \int_n^{n+1} |s|(t-n)n^{-\mathrm{Re}\,(s)-1} dt.$$

b) En déduire pour $\mathrm{Re}\,(s) > 0$ la majoration
$$\sum_{n>0} |a_n(s)| \leq \frac{|s|}{2} \zeta(\mathrm{Re}\,(s)+1).$$

c) On note $f(s) = \sum_{n>0} a_n(s)$. Montrer que f est holomorphe sur $\mathrm{Re}\,(s) > 0$ et que pour $\mathrm{Re}\,(s) > 1$, on a
$$\zeta(s) = f(s) + \frac{1}{s-1}.$$

d) Conclure que $\zeta(s)$ se prolonge méromorphiquement au demi-plan $\mathrm{Re}\,(s) > 0$ avec un pôle d'ordre 1 en $s = 1$.

Exercice 3 : (Identité d'Euler) On note $E(s)$ le produit $\prod_p \zeta_p(s)$ indexé par les nombres premiers avec $\zeta_p(s) := \frac{1}{1-p^{-s}}$.

a) Montrer l'indentité formelle
$$\mathrm{Log}\,(E(s)) = \sum_p \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{np^{ns}}.$$

b) Soit $\delta > 0$. Pour $\mathrm{Re}\,(s) > 1+\delta$, montrer la majoration
$$\sum_p \sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{1}{np^{ns}}\right| \leq 2 \sum_p \frac{1}{p^{1+\delta}} \leq 2\,\zeta(1+\delta).$$

c) En déduire la convergence uniforme de $\mathrm{Log}\,(E(s))$ pour $\mathrm{Re}\,(s) \geq 1+\delta$ pour tout $\delta > 0$.

d) Utiliser le développement $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 \cdots$ pour démontrer
$$\prod_{p \leq N} \frac{1}{1-p^{-s}} = \sum_n{}' \frac{1}{n^s}$$
où $\sum'$ est la somme sur les entiers seulement divisibles par des premiers $p \leq N$.

e) En déduire la majoration
$$\left|\prod_{p \leq N} \frac{1}{1-p^{-s}} - \zeta(s)\right| \leq \sum_{n>N} \frac{1}{n^{1+\delta}}.$$

f) Conclure que $E(s)$ converge vers $\zeta(s)$ pour $\mathrm{Re}\,(s) > 1$, i.e. on a l'**identité d'Euler**

$$\zeta(s) = \prod_p \zeta_p(s).$$

Remarque : On pourra admettre le résultat de l'exercice suivant, lié à l'analyse de Fourier, et qui découle de la formule de sommation de Poisson. C'est le centre névralgique de la preuve de l'équation fonctionnelle de la fonction zêta.

Exercice 4 : (Equation fonctionnelle de la série theta) Montrer que la série theta de Jacobi

$$\theta(z) := \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{\pi i n^2 z} = 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} e^{\pi i n^2 z}$$

converge absolument et uniformément pour $\mathrm{Im}\,(z) \geq \delta$ pour tout $\delta > 0$ et satisfait la formule

$$\theta(-1/z) = \sqrt{\frac{z}{i}}\,\theta(z).$$

Exercice 5 : (Prolongement et équation fonctionnelle de la fonction Gamma)

a) Montrer que $\Gamma(s) = \int_0^\infty e^{-y} y^s \frac{dy}{y}$ est bien définie pour $\mathrm{Re}\,(s) > 0$.

b) Montrer que $s \mapsto \int_1^\infty e^{-y} y^s \frac{dy}{y}$ est holomorphe sur $\mathbb{C}$.

c) En développant $t \mapsto e^{-t}$ en série entière, montrer que pour $\mathrm{Re}\,(s) > 0$, on a l'égalité

$$\int_0^1 e^{-y} y^s \frac{dy}{y} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{1}{s+n}.$$

d) En déduire que la fonction

$$\tilde{\Gamma}(s) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{1}{s+n} + \int_1^\infty e^{-y} y^s \frac{dy}{y}$$

prolonge holomorphiquement $\Gamma(s)$ à $\mathbb{C}-\mathbb{N}_-$. Pour $s \in \mathbb{C}-\mathbb{N}_-$, on notera maintenant $\Gamma(s) = \tilde{\Gamma}(s)$.

e) Montrer que pour $s \in \mathbb{C} - \mathbb{N}_-$, on a l'équation fonctionnelle

$$\Gamma(s+1) = s\Gamma(s).$$

Exercice 6 : (Représentation intégrale)

a) Utiliser la substitution $y \mapsto \pi n^2 y$ pour obtenir l'équation

$$\pi^{-s}\Gamma(s)\frac{1}{n^{2s}} = \int_0^\infty e^{-\pi n^2 y} y^s \frac{dy}{y}.$$

b) en déduire l'égalité

$$\pi^{-s}\Gamma(s)\zeta(2s) = \int_0^\infty \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\pi n^2 y} y^s \frac{dy}{y}.$$

c) Conclure que la fonction zêta complétée

$$\hat{\zeta}(s) = \zeta_\infty(s)\zeta(s)$$

où

$$\zeta_\infty(s) := \pi^{-s/2}\Gamma(s/2)$$

admet la **représentation intégrale**

$$\hat{\zeta}(s) = \frac{1}{2}\int_0^\infty (\theta(iy) - 1)y^{s/2}\frac{dy}{y},$$

où

$$\theta(z) := \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{\pi i n^2 z} = 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} e^{\pi i n^2 z}$$

est la série theta de Jacobi.

Exercice 7 : (Equation fonctionnelle de la fonction zêta) On considère la décomposition suivante de l'intégrale

$$\int_0^\infty (\theta(iy) - 1)y^s\frac{dy}{y} = \int_0^1 (\theta(iy) - 1)y^s\frac{dy}{y} + \int_1^\infty (\theta(iy) - 1)y^s\frac{dy}{y}.$$

a) Montrer que pour $y \geq 1$, il existe une constante $B > 0$ telle qu'on ait la majoration

$$|(\theta(iy) - 1)y^{s-1}| \leq Be^{-\pi y}y^{\mathrm{Re}\,(s)+1}y^{-2}.$$

b) Montrer que pour $y \geq 1$ et s dans un compact, le réel $e^{-\pi y}y^{\mathrm{Re}\,(s)+1}$ est borné par une constante indépendante de s.

c) En déduire la convergence absolue et uniforme sur tout compact de

$$\int_1^\infty (\theta(iy) - 1)y^s\frac{dy}{y}.$$

d) Utiliser le changement de variable $y \mapsto 1/y$ et l'équation fonctionnelle de la fonction theta pour démontrer que

$$\frac{1}{2}\int_0^1 (\theta(iy) - 1)y^s\frac{dy}{y} = -\frac{1}{2s} + \frac{1}{2s-1} + \frac{1}{2}\int_1^\infty (\theta(iy) - 1)y^{-s+1/2}\frac{dy}{y}.$$

e) Montrer que

$$\frac{1}{2}\int_0^\infty (\theta(iy) - 1)y^s\frac{dy}{y} = -\frac{1}{2s} + \frac{1}{2s-1} + F(s)$$

où

$$F(s) = \frac{1}{2}\int_1^\infty [(\theta(iy) - 1)y^s + (\theta(iy) - 1)y^{1/2-s}]\frac{dy}{y}.$$

f) Montrer que la fonction F est holomorphe sur $\mathbb{C}$.

g) Montrer que $F(s) = F(1/2 - s)$.

h) En déduire que la fonction zêta complétée se prolonge méromorphiquement à $\mathbb{C}$ avec uniquement des pôles simples en 0 et 1 et vérifie sur $\mathbb{C} - \{0, 1\}$ l'**équation fonctionnelle**

$$\hat{\zeta}(s) = \hat{\zeta}(1 - s).$$

La fonction zêta de Riemann

2.Les zéros et la formule explicite.

Nous allons maintenant étudier plus en détails les zéros de la fonction zêta complétée $\hat{\zeta}(s)$ en montrant

a) qu'elle n'a des zéros que dans la bande critique $0 \leq \mathrm{Re}\,(s) \leq 1$,

b) et que ses zéros et ses pôles vérifient une "formule explicite", qui montre que leur répartition dans le plan complexe est liée à celle des nombres premiers dans les réels.

Exercice 8 : (La "bande critique")

a) Utiliser le développement en produit eulérien de ζ pour montrer qu'elle ne s'annule jamais pour $\mathrm{Re}\,(s) > 1$.

b) En déduire que tous les zéros de $\hat{\zeta}(s)$ sont dans la "bande critique" $0 \leq \mathrm{Re}\,(s) \leq 1$.

Exercice 9 : (Le théorème d'inversion de Mellin) Soit $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{C}$ une fonction $\mathcal{C}^\infty$ telle que pour tout $\sigma \in]\alpha, \beta[$, $x \mapsto f(x)x^{\sigma-1}$ est intégrable.

a) Montrer que la fonction
$$M(f,s) := \int_{\mathbb{R}_+^*} f(x)x^{s-1}dx$$
existe et est analytique dans la bande $\mathrm{Re}\,(s) \in]\alpha, \beta[$.

b) En utilisant le changement de variable $x = e^{2\pi u}$ et en posant $s = \sigma + it$, montrer que
$$M(f, \sigma + it) = 2\pi \int_{\mathbb{R}} g(u)e^{2i\pi tu}du,$$
i.e., que pour σ fixe, $t \mapsto M(f, \sigma + it)$ est la transformée de Fourier de $g(u) = f(e^{2\pi u})e^{2\pi\sigma u}$.

c) Utiliser la formule d'inversion de Fourier pour démontrer que
$$f(x) = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{2i\pi} \int_{\sigma-it}^{\sigma+it} M(f,s)x^{-s}ds.$$

Exercice 10 : (La fonction digamma) On note $\Psi(s) := \frac{\Gamma'(s)}{\Gamma(s)}$.

a) On note $I_n(s) = \int_0^n (1 - \frac{t}{n})^n t^{x-1}dt$. Montrer que $I_n(s)$ tend vers $\Gamma(s)$ uniformément sur tout compact pour $\mathrm{Re}\,(s) > 0$.

b) Montrer que pour tout s avec $\mathrm{Re}\,(s) > 1$ et pour tout entier $n \geq 1$, on a
$$I_n(s) = n^s \frac{n!}{\prod_{0\leq j\leq n}(s+j)} = n^s \frac{n!}{s(s+1)\dots(s+n)}.$$

c) Calculer $\mathrm{dlog}\, I_n(s) := \frac{I_n'(s)}{I_n(s)}$.

d) En déduire que
$$\Psi(s) = \lim_{n\to\infty} \log(n) + \sum_{j=0}^{n} \int_1^\infty x^{s+j-1}dx.$$

e) En déduire une estimation de

$$\Psi_{\mathbb{R}}(s) := \operatorname{dlog} \zeta_\infty(s) = \frac{\zeta_\infty'(s)}{\zeta_\infty(s)}.$$

Remarque : L'exercice suivant fait un usage essentiel du théorème des résidus, qu'on applique à la fonction $\operatorname{dlog} \hat{\zeta}(s)$ sur une bande bien choisie contenant la bande critique. La dérivée logarithmique permet de voir les zéros et les pôles d'une fonction comme des pôles de sa dérivée logarithmique, et la formule des résidus pour la dérivée logarithmique donne une somme alternée sur les zéros et les pôles de la fonction de départ.

Exercice 11 : (La "formule explicite") Soit $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty([1, +\infty[)$, qu'on prolonge par 0 en une fonction de $\mathcal{C}_0^\infty([1, +\infty[)$ et on note

$$\Phi(s) = \int_1^\infty \varphi(y) y^{s-1} dy.$$

Cet exercice a pour but de démontrer la "**formule explicite**"

$$\Phi(0) - \sum_{\hat{\zeta}(\rho)=0} \Phi(\rho) + \Phi(1) = W_\infty(\varphi) + \sum_p W_p(\varphi)$$

où

$$W_p(\varphi) = \log(p) \sum_{k \geq 1} \varphi(p^k) \qquad \text{et} \qquad W_\infty(\varphi) = \int_1^\infty \frac{\varphi(y)}{y - y^{-1}} dy.$$

a) Pour $t > 0$, on note Γ_t le rectangle dont les bords verticaux sont les droites $\mathrm{Re}\,(s) = -1$ et $\mathrm{Re}\,(s) = 2$ et les bords horizontaux sont les droites $\mathrm{Im}\,(s) = t$ et $\mathrm{Im}\,(s) = -t$. On oriente Γ_t dans le sens direct. Calculer l'intégrale curviligne

$$I(t, \varphi) = \oint_{\Gamma_t} \Phi(s) \frac{\hat{\zeta}'(s)}{\hat{\zeta}(s)} ds$$

en appliquant la formule des résidus.

b) En déduire que

$$\lim_{t \to \infty} I(t, \varphi) = \Phi(0) - \sum_{\hat{\zeta}(\rho)=0} \Phi(\rho) + \Phi(1).$$

c) On note $D_t := \{\mathrm{Re}\,(s) = 2, -t \leq \mathrm{Im}\,(s) \leq t\}$ le bord droit du rectangle Γ_t, et H_t la réunion des deux bords horizontaux orientés comme avant. Utiliser l'équation fonctionnelle de $\hat{\zeta}(s)$ pour montrer que $I(t, \varphi) = W(t, \varphi) + R(t, \varphi)$ où

$$W(t, \varphi) := \oint_{D_t} [\Phi(s) + \Phi(1-s)] \frac{\hat{\zeta}'(s)}{\hat{\zeta}(s)} ds \qquad \text{et} \qquad R(t, \varphi) := \oint_{H_t} \Phi(s) \frac{\hat{\zeta}'(s)}{\hat{\zeta}(s)} ds.$$

d) Montrer que $R(t, \varphi)$ tend vers 0 quand t tend vers l'infini.

e) Utiliser le développement en produit eulérien de $\hat{\zeta}$ pour montrer que

$$\frac{\hat{\zeta}'(s)}{\hat{\zeta}(s)} = \frac{\zeta_\infty'}{\zeta_\infty}(s) - \sum_p \log p \sum_{k \geq 1} p^{-ks}.$$

f) Utiliser le théorème d'inversion de Mellin (exercice 9) pour montrer que

$$\oint_{\mathrm{Re}\,(s)=2} \Phi(s) p^{-ks} = \varphi(p^k)$$

et en déduire que

$$\oint_{\mathrm{Re}\,(s)=2} \Phi(s) \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} ds = \sum_p \log(p) \sum_{k \geq 1} \varphi(p^k).$$

g) Utiliser l'approximation de la fonction digamma donnée dans l'exercice 10 pour montrer que

$$\oint_{\mathrm{Re}\,(s)=2} \Phi(s)\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}ds = \int_1^\infty \frac{\varphi(y)}{y - y^{-1}}dy.$$

h) Combiner les deux résultat précédents pour montrer que $W(t, \phi)$ tend vers $W_\infty(\varphi) + \sum_p W_p(\varphi)$ quand t tend vers l'infini et conclure.