Analyse complexe 1 - TD2

Exercice 1 : Soit $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs.

a) Montrer que $\overline{\lim}_{n\to+\infty} c_n^{\frac{1}{n}} \leq \overline{\lim}_{n\to+\infty} \dfrac{c_{n+1}}{c_n}$ dans $[0,+\infty]$.

b) En déduire que si $L = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{c_{n+1}}{c_n}$ existe dans $[0,+\infty]$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} (c_n)^{\frac{1}{n}} = L$.

Exercice 2 : Donner le rayon de convergence de la série entière $\sum\limits_{n\geq 1} a_n z^n$ dans les cas suivants :

a) $a_{2p} = a^{2p}$ et $a_{2p+1} = b^{2p+1}$, $0 < a < b$.

b) $a_n = \dfrac{n!}{n^n}$.

c) $a_{2p+1} = 0$ et $a_{2p} = \dfrac{(-1)^p p!}{(p+\sin p)^p}$.

Exercice 3 : (Composition locale des fonctions analytique) On se donne deux séries entière S et T telles que $T(0) = 0$ et qui convergent toutes les deux dans un disque non trivial (non réduit à $\{0\}$). On souhaite montrer que $U = S \circ T$ est aussi convergente sur un petit disque non trivial et que si on note $\tilde{U}$, $\tilde{S}$, $\tilde{T}$ les fonctions correspondantes, on a $\tilde{U} = \tilde{S} \circ \tilde{T}$.

a) On note $T = \sum\limits_{n\geq 1} b_n X^n$ et $S = \sum\limits_{n\geq 0} a_n X^n$. Montrer qu'il existe $r > 0$ tel que

$$\sum_{n\geq 1} |b_n| r^n < \rho(S).$$

b) On pose $U(X) = \sum\limits_{n\geq 0} c_n X^n$. On considère, pour r comme dans la question précédente, la série

$$\sum_{n\geq 0} \gamma_n r^n := \sum_{p\geq 0} |a_p| (\sum_{k\geq 1} |b_k| r^k)^p.$$

Montrer que $|c_n| \leq \gamma_n$ pour tout n.

c) En déduire que le rayon de convergence de U est supérieur ou égal à r.

d) Soit $S_n(X) = \sum\limits_{0\leq k\leq n} a_k X^k$ et soit $U_n = S_n \circ T$. Montrer que pour $|z| < r$,

$$S(T(z)) = \lim_n S_n(T(z)).$$

e) En déduire que $\tilde{U}(z) = \tilde{S} \circ \tilde{T}(z)$ pour $|z| < r$.

Exercice 4 : Que peut-on dire de la convergence uniforme des séries suivantes dans les régions indiquées ?

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{z^n}{n\sqrt{n+1}}$, $|z| \leq 1$.

b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2+z^2}$, $1 < |z| < 2$.

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nz)}{n^3}$, $|z| \leq 1$.

Exercice 5 : Montrer que si $a_n = \lambda_n b_n$ avec $\lambda_n = O(n^\alpha)$ ($\alpha \in \mathbb{R}$) alors le rayon de convergence de $\sum a_n z^n$ est supérieur à celui de $\sum b_n z^n$.

Exercice 6 : Montrer que si le rayon de convergence de $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} c_n z^n$ est $R > 0$ alors le rayon de convergence de $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{c_n}{n!} z^n$ est infini et que sa somme $f(z)$ vérifie $\forall\, 0 < \theta < 1$, $\exists M(\theta)$ telle que $|f(z)| \leq M(\theta) e^{\frac{|z|}{\theta R}}$.

Exercice 7 : On suppose que la série entière $\displaystyle\sum_{n\geq 1} a_n z^n$ converge en 1. On lui associe la série de fonctions de terme général $u_n(z) = a_n \dfrac{z^n}{1-z^n}$, $n \geq 1$.

a) Montrer que $\displaystyle\sum_{n\geq 1} u_n(z)$ converge normalement sur tout compact de $D(0,1)$ et que $\displaystyle\sum_{n\geq 1} u_n(z) = \sum_{p\geq 1}\sum_{n\geq 1} a_n z^{np}$ pour $z \in D(0,1)$. Quelle identité peut-on en déduire lorsque $a_n = \dfrac{1}{n!}$, $a_n = \alpha^n$ avec $|\alpha| < 1$? ($a_n = (-1)^n$, $a_n = n$... ?)

b) Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} u_n(z)$ est uniformément convergente sur tout compact de $\mathbb{C} \setminus \overline{D(0,1)}$ (On pourra étudier $(z \mapsto u_n(\frac{1}{z}))_{n\in\mathbb{N}}$). A-t-on convergence normale sur ces compacts ?

Exercice 8 : Si $|z| < 1$ et $\tau(n)$ est le nombre de diviseur de n, montrer que

$$\sum_{n\geq 1} \frac{z^n}{1-z^n} = \sum_{n\geq 1} \tau(n) z^n$$

avec convergence uniforme sur les compacts de $D(0,1)$.

Exercice 9 :

a) (Transformation d'Abel) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de nombres complexes. Pour $n \geq m \in \mathbb{N}$, on pose $V_m^n = \displaystyle\sum_m^n v_i$. Montrer que si $n > m$ alors $\displaystyle\sum_m^n u_i v_i = \sum_m^{n-1} (u_i - u_{i+1}) V_m^i + u_n V_m^n$.

b) En déduire le comportement sur $U = \{z \in \mathbb{C}, |z| = 1\}$ des séries $\sum \dfrac{z^n}{n^\alpha}$, pour $\alpha \in \mathbb{R}$.

c) (Un théorème de Picard) Soit $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante de réels positifs qui converge vers 0. Montrer que la série $\sum c_n z^n$ converge sur $U \setminus \{1\}$. (Indication : On pourra utiliser la transformation d'Abel pour montrer que la série vérifie le critére de Cauchy).

Exercice 10 : (Un théorème d'Abel) Soit $k \geq 1$. Notons $E = \{z \in D(0,1), \dfrac{|1-z|}{1-|z|} \leq k\}$. Soit $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres complexes telle que la série entière $\displaystyle\sum_0^{+\infty} c_n z^n$ converge en $z = 1$. Alors $\displaystyle\lim_{\substack{z\to 1\\ z\in E}} \sum_{n\in\mathbb{N}} c_n z^n \to \sum_0^{+\infty} c_n = s$.

a) Vérifiez que l'on peut se ramener à $s = 0$.

b) Notons f la somme de la série sur $D(0,1)$. Pour $z \in D(0,1)$, développez $\dfrac{f(z)}{1-z}$ en série entière.

c) Conclure (Utilisez le fait $s = 0$).

d) Appliquer le résultat précédent au calcul de $\displaystyle\sum_{1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$.

Exercice 11 : Donner le développement en série entières des fonctions suivantes, et donner le rayon de convergence de la série obtenue :
$f(z) = \dfrac{z}{z^2 - 2z - 3}$ en 0 ; $g(z) = \dfrac{1}{3 - 2z}$ en 3 ; $h(z) = e^z$ en 1.

Exercice 12 : Soit $f(z) = \displaystyle\sum_{n \geq 0} a_n z^n$, $a_n \in \mathbb{C}$ une série de rayon de convergence R.

a) Pour $r \in [0, R[$, montrer que $M(r,f) = \displaystyle\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^2 d\theta = \sum_{n \geq 0} |a_n|^2 r^{2n}$. En déduire les inégalités de cauchy $|a_n| r^n \leq max_{|z|=r} |f(z)|$. Et montrer que s'il y a égalité pour un entier n alors $f(z) = a_n z^n$.

b) En déduire que $r \mapsto M(r,f)$ est une fonction croissante sur $[0, R[$ et que $\displaystyle\lim_{r \to R^-} M(r,f) = \sum_{n \geq 0} |a_n|^2 R^{2n} \in [0, +\infty]$.

c) En déduire que si f est bornée sur le disque unité (et $R = 1$) alors $a_n = 0(1)$.