Analyse complexe 1 - TD4

Exercice 1 : Calculer $\displaystyle\int_{(0,3)}^{(2,4)} (2y + x^2)dx + (3x - y)dy$ le long de

a) la parabole $x = 2t$, $y = t^2 + 3$;

b) la ligne brisée formée par les segments de droite $(0,3)$ à $(2,3)$ et $(2,3)$ à $(2,4)$;

c) le segment de droite d'extrémités $(0,3)$ et $(2,4)$.

Exercice 2 : (La surface de Riemann du logarithme)

a) Montrer que la forme différentielle $\dfrac{dz}{z}$ est fermée dans $\mathbb{C}^*$.

b) Calculer $\displaystyle\int_{S^1} \frac{dz}{z}$ où $S^1 = \{e^{it}, t \in [0, 2\pi[\}$.

c) En déduire que $\dfrac{dz}{z}$ n'admet pas de primitive globalement définie dans $\mathbb{C}^*$.

d) On considère le sous-ensemble $\tilde{L} = \{(z,\theta) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{R} \mid \dfrac{z}{|z|} = e^{i\theta}\}$ de $\mathbb{C} \times \mathbb{R} \cong \mathbb{R}^3$ appelé surface de Riemann du logarithme. Dessiner $\tilde{L} \subset \mathbb{R}^3$.

e) On considère la projection $p : \tilde{L} \to \mathbb{C}^*$ donnée par $p(z,\theta) = z$. Dessiner p.

f) Montrer que l'application

$$\widetilde{\log} : \tilde{L} \to \mathbb{C}$$

donnée par

$$\widetilde{\log}(z,\theta) = \log|z| + i\theta$$

est bijective.

g) On considère l'application exponentielle $e : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^*$. Montrer que

$$(e \circ \widetilde{\log})(z,\theta) = z,$$

i.e. que $\widetilde{\log}$ est presque un inverse à droite de l'exponentielle.

Exercice 3 : Soit $G = \mathbb{C} \setminus \{x \in \mathbb{R} \ : |x| \geq 1\}$.

a) Trouver une fonction f holomorphe sur G telle que $f(0) = i$ et $f^2(z) = z^2 - 1$ pour tout $z \in G$.
Indication : Définir $f_1(z) = \exp\left(\dfrac{1}{2}\log(z+1)\right)$, où est log est la détermination principale du logarithme, pour $z \in \mathbb{C} \setminus \{x \in \mathbb{R} \ : \ x \leq -1\}$, et $f_2(z) = \exp\left(\dfrac{1}{2}\ell(z-1)\right)$, où ℓ est une détermination convenable du logarithme sur $\mathbb{C} \setminus \{x \in \mathbb{R} \ : x \geq 0\}$. Puis considérer $f_1(z)f_2(z)$ pour $z \in G$.

b) Démontrer que $q : z \mapsto \dfrac{1}{2}(z + z^{-1})$ est holomorphe sur $\mathbb{C}^*$ et réalise une bijection de $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} \ : \ \mathrm{Im} z > 0\}$ sur G.

c) Montrer que la bijection réciproque $u : G \to \mathbb{H}$ est continue, qu'elle statisfait à la relation

$$\forall z \in G, \quad (u(z) - z)^2 = z^2 - 1 = f(z)^2.$$

d) À partir de la question précédente, donner l'expression de u en fonction de f et en déduire que u est holomorphe.

e) Montrer que $z \mapsto \cos(z)$ est une bijection biholomorphe de la bande $S = \{z \in \mathbb{C} \ : \ 0 < \mathrm{Re}(z) < \pi\}$ sur G, dont la bijection réciproque est donnée par

$$\arccos(w) = -i \log(w + \sqrt{w^2 - 1}),$$

où $\sqrt{z^2 - 1}$ représente $f(z)$.

Exercice 4 : Soit $a \in \mathbb{C}$ et $\mathcal{C}$ un cercle de $\mathbb{C}$ qui ne porte pas a et c un point de $\mathcal{C}$.

a) Si a est à l'extérieur de $\mathcal{C}$, montrer qu'il existe une application continue $H : S^1 \times [0,1] \to \mathbb{C}$ telle que $H(S^1, 0) = \mathcal{C}$, $H(S^1, 1) = \{c\}$ et $H(S^1, x)$ ne contienne pas a pour tout $x \in [0,1]$. Ceci signifie qu'on peut déformer continuement $\mathcal{C}$ à un point sans passer par a.
(Indication : on pourra paramétriser $u : S^1 \to \mathcal{C}$ de $\mathcal{C}$ et utiliser $H(z,x) = (1-x)u(z) + xc$)

b) En déduire $\displaystyle\int_{\mathcal{C}} \frac{dz}{z-a}$ si a est à l'extérieur de $\mathcal{C}$.

c) Si a est à l'intérieur de $\mathcal{C}$, montrer qu'il existe une application continue $H : S^1 \times [0,1] \to \mathbb{C}$ telle que $H(S^1, 0) = \mathcal{C}$, $H(S^1, 1) = \mathcal{C}(a, 1)$ et $H(S^1, x)$ ne contienne pas a pour tout $x \in [0,1]$. Ceci signifie qu'on peut déformer continuement $\mathcal{C}$ à un cercle de rayon 1 sans passer par a.

d) En déduire $\displaystyle\int_{\mathcal{C}} \frac{dz}{z-a}$ si a est à l'intérieur de $\mathcal{C}$.

Exercice 5 : Si $\mathcal{C}$ est l'arc de courbe d'équation $y = x^3 - 3x^2 + 4x - 1$ joignant les points $(1,1)$ et $(2,3)$, trouver la valeur de

$$\int_{\mathcal{C}} (12z^2 - 4iz)dz.$$

Exercice 6 :
Soient f une fonction analytique sur un ouvert simplement connexe $D \subset \mathbb{C}$, et $a \in D$.

a) Montrer que si la boule de rayon r et de centre a est incluse dans D, on a

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad f^{(n)}(a) = n! \int_{|z-a|=r} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} \frac{\mathrm{d}z}{2i\pi} = n! \int_0^{2\pi} \frac{f(a + re^{i\theta})e^{-in\theta}}{r^n} \frac{\mathrm{d}\theta}{2\pi}.$$

b) En déduire les inégalités de Cauchy : si $M = \sup\limits_{|z-a|=r} |f(z)|$,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |f^{(n)}(a)| \leq \frac{M \cdot n!}{r^n}.$$

c) En déduire que si une fonction *entière* f (c'est-à-dire analytique sur $\mathbb{C}$) vérifie

$$\forall z \in \mathbb{C}, |f(z)| \leq C(1 + |z|)^p,$$

alors f est un polynôme de degré au plus p. En particulier, les seules fonctions entières bornées sont les constantes. Ce résultat s'appelle le *théorème de Liouville.*

Exercice 7 : Le but de cet exercice est de montrer le théorème fondamental de l'algèbre, connu aussi sous le nom de *théoreme de d'Alembert).*

a) Soit P un polynôme non constant à coefficients complexes. Montrer que P a au moins une racine dans $\mathbb{C}$.
Indication : on pourra raisonner par l'absurde en considérant la fonction entière $z \mapsto \dfrac{1}{P(z)}$.

b) En déduire qu'un polynôme de degré n à coefficients complexes possède exactement n racines dans $\mathbb{C}$ (non nécessairement distinctes).

Exercice 8 : Soit f une fonction différentiable sur un ouvert U simplement connexe de $\mathbb{C}$, telle que pour toute courbe fermée simple $\mathcal{C}$ dans U, l'intégrale curviligne

$$\oint_{\mathcal{C}} f(z)\mathrm{d}z = 0$$

Montrer que f est holomorphe sur U. Ce résultat est la réciproque du théorème de Cauchy, qui dit que l'intégrale sur un coutour fermé d'une fonction holomorphe dans un ouvert simplement connexe est nulle. Il est connu sous le nom de *théorème de Morera*.
Indication : Montrer que la fonction $F : z \mapsto \displaystyle\int_a^z f(w)\mathrm{d}w$ est bien définie et holomorphe sur U.

Exercice 9 : Soit p un polynôme, $c \in \mathbb{C}$ et r un réel strictement positif. Montrer que

$$\int_{\partial B(c,r)} \overline{p(z)}\mathrm{d}z = 2i\pi r^2\overline{p'(c)}.$$