Analyse complexe 1 - TD5

Exercice 1 : On considère une fonction f analytique dans une couronne ouverte $\mathcal{R}$ limitée par deux cercles concentriques C_1 et C_2, et sur sa frontière. Montrer que pour z_0 dans $\mathcal{R}$, on a

$$f(z_0) = \frac{1}{2i\pi}\oint_{C_1}\frac{f(z)}{z-z_0} - \frac{1}{2i\pi}\oint_{C_2}\frac{f(z)}{z-z_0}.$$

Exercice 2 : Soit f une fonction analytique dans une couronne ouverte $\mathcal{R}$ limitée par deux cercles concentriques C_1 et C_2 de centre 0, et sur sa frontière. Montrer que pour tout z dans $\mathcal{R}$, on a

$$f(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n z^n$$

où

$$a_n = \frac{1}{2i\pi}\oint_{C_1}\frac{f(w)}{w^{n+1}}dw \text{ pour } n \geq 0 \text{ et } a_n = \frac{1}{2i\pi}\oint_{C_2}\frac{f(w)}{w^{n+1}}dw \text{ pour } n < 0.$$

Exercice 3 : Calculer le développement en série de Laurent de la fonction

$$f(z) = \frac{1}{z^2+1}$$

dans la couronne $1 < |z| < 3/2$.

Exercice 4 : Calculer le développement en série de Laurent de la fonction

$$f(z) = \frac{z^2-1}{(z+2)(z+3)} = 1 + \frac{3}{z+2} - \frac{8}{z+3}$$

dans les couronnes

a) $|z| < 2$,

b) $2 < |z| < 3$,

c) $|z| > 3$.

Exercice 5 : Soit f une fonction méromorphe au voisinage d'un point $z_0 \in \mathbb{C}$. Calculer le résidu en z_0 de $\mathrm{dlog}(f) := \frac{f'}{f}$. En déduire que si γ est une courbe fermée simple (sans points doubles) du plan, alors

$$\oint_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\mathrm{d}z = Z(f,\gamma) - P(f,\gamma)$$

où $Z(f,\gamma)$ (resp. $P(f,\gamma)$) est le nombre de zéros (resp. de pôles) à l'intérieur de γ, comptés avec multiplicité.

Exercice 6 : Calculer les pôles et résidus des fonctions suivantes :

a) $f_1(z) = \dfrac{z^2+1}{z^2-4}$.

b) $f_2(z) = \dfrac{z^3+1}{z(z-i)^3}$.

Exercice 7 : En calculant l'intégrale de $\dfrac{e^{iz}}{z}$ sur un contour bien choisi, montrer que

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}.$$

Exercice 8 : Calculer par la méthode des résidus les intégrales généralisées suivantes :

a) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x^2+1)}{(x^4+1)} \mathrm{d}x.$

b) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+1)(x^2+4)}.$

c) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{x^2}{(x^2+1)^2} \mathrm{d}x.$

d) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{x^{p-1}}{1+x} \mathrm{d}x$, pour $0 < p < 1$.

e) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{ce^{itx}}{\pi(x^2+c^2)}$ pour $c \in \mathbb{R}_+^*$ et $t \in \mathbb{R}$.

Exercice 9 : On pose $a = \sqrt{i\pi} = (1+i)\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}$. Soit g la fonction méromorphe sur $\mathbb{C}$ définie par

$$g(z) = \frac{e^{-z^2}}{1+e^{-2az}}.$$

a) Montrer que g est holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus a\left(\dfrac{1}{2} + \mathbb{Z}\right)$ et qu'elle possède un pôle simple en chaque point de $a\left(\dfrac{1}{2} + \mathbb{Z}\right)$.

b) Montrer que g satisfait à l'équation fonctionnelle

$$\forall\ z \in \mathbb{C} \setminus a\left(\frac{1}{2} + \mathbb{Z}\right), \quad g(z+a) - g(z) = e^{-z^2}.$$

c) Soit R_1 et R_2 deux nombres réels strictement positifs. Appliquer la formule des résidus à g sur le contour obtenu en concaténant les segments $[-R_1, R_2]$, $[R_2, R_2 + a]$, $[R_2 + a, -R_1 + a]$ et $[-R_1 + a, R_1 + a]$.

d) Montrer que

$$\lim_{x \to \pm\infty} \int_{[x, x+a]} g(z)\mathrm{d}z = 0.$$

e) Déduire des 3 questions précédentes la formule de l'intégrale gaussienne

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-z^2} \mathrm{d}z = \sqrt{\pi}.$$

Exercice 10 : Calculer par la méthode des résidus les intégrales suivantes :

a) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^6+1},$

b) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{(x^2+1)^2(x^2+2x+2)} dx.$

Exercice 11 : Montrer par la méthode des résidus les égalités suivantes :

a) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{3 - 2\cos\theta + \sin\theta} = \pi.$

b) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a + b\sin\theta} = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2 - b^2}}$, si a et b sont des réels tels que $a > |b|$.

c) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\cos 3\theta}{5 - 4\cos\theta} d\theta = \frac{\pi}{12}.$

d) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\cos mx}{x^2 + 1} dx = \frac{\pi}{2} e^{-m}$, $m > 0$.

Exercice 12 : Calculer l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{irz}}{\mathrm{ch} z} dz$$

en utilisant la méthode des résidus sur le contour en rectangle $[-R, R] \times [0, R]$ dans le plan supérieur avec $R = n\pi$.