Analyse complexe 1 - TD1

Exercice 1 : Les fonctions suivantes sont-elles holomorphes sur $\mathbb{C}$?

$$z \mapsto \overline{z},\ z \mapsto \operatorname{Re} z,\ z \mapsto \operatorname{Im} z,\ z \mapsto |z|^2$$

Exercice 2 : Soit $f = P + iQ$ une fonction holomorphe dans un ouvert connexe non vide Ω de $\mathbb{C}$. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

a) f est constante,
b) P est constante,
c) Q est constante,
d) $\overline{f}$ est holomorphe dans Ω,
e) $|f|$ est constant.

Exercice 3 : Pour $z = x + iy,\ x,\ y \in \mathbb{R}$, on pose $f(z) = x + iy^2$. Montrer que f est $\mathbb{R}$-différentiable sur $\mathbb{C}$ et calculer sa différentielle. Existe-t-il un ouvert U de $\mathbb{C}$ telle que $f_{|U} \in \mathcal{O}(U)$?

Exercice 4 :

a) Soit f une fonction différentiable en $z_0 \in \mathbb{C}$. Calculer $\overline{\dfrac{\partial}{\partial z} f(z_0)}$ et $\dfrac{\partial}{\partial \overline{z}} \overline{f}(z_0)$.
b) Montrer que les opérateurs $\dfrac{\partial}{\partial z}$ et $\dfrac{\partial}{\partial \overline{z}}$ sont des dérivations sur l'espace des fonctions complexes différentiables en z_0. Calculer $\dfrac{\partial}{\partial z} z^k$.
c) Montrer qu'un polynôme $P(z, \overline{z}) = \displaystyle\sum_{1 \leq i,j \leq n} p_{i,j} z^i \overline{z}^j$ est holomorphe si et seulement si $p_{i,j} = 0$ pour tout $j > 0$.

Exercice 5 : Soit $U = \{z = x + iy \in \mathbb{C},\ -\pi < x < \pi,\ y \in \mathbb{R}\}$. Soit

$$P(x, y) = \frac{\sin x}{\cos x + \operatorname{ch} y},$$

pour $z \in U$. Le but de cet exercice est de montrer qu'il existe $f \in \mathcal{O}(U)$ unique telle que $f(0) = 0$ et $P = \operatorname{Re} f$ et d'expliciter f.

a) Exprimer $P(x, y)$ en fonction de $e^{\pm ix}$ et $e^{\pm y}$.
b) Pour $z = x + iy \in \mathbb{C}$, on notera $\alpha = e^{iz}$ et $\beta = e^{-iz}$. Montrer que $\bar{\alpha} = e^{-i\bar{z}}$ et $\bar{\beta} = e^{i\bar{z}}$.
c) Exprimer $e^{\pm 2ix}$ et $e^{\pm 2y}$ en fonction de α et β. et en déduire une expression de $P(2x, 2y)$ en fonction de α et β.
d) Trouver une fonction $Z(\alpha, \beta)$ telle que $P(2x, 2y) = \frac{Z + \bar{Z}}{2}$.
e) En déduire une solution holomorphe f de $\operatorname{Re}(f) = P$ et conclure.

Exercice 6 : Soient a, b, $c \in \mathbb{R}$. On pose $P(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2$, pour x, $y \in \mathbb{R}$. Donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ telle que $P = \operatorname{Re} f$. Sous cette condition, trouver alors toutes les applications $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ telles que $P = \operatorname{Re} f$.

Exercice 7 : Soient Ω un ouvert connexe de $\mathbb{C}$ et f une fonction holomorphe sur Ω. On désigne par P et Q respectivement ses parties réelle et imaginaire. On suppose qu'il existe des constantes réelles non toutes nulles a, b et c telles que la fonction $aP + bQ + c$ soit identiquement nulle sur Ω. Montrer que f est constante sur Ω.

Exercice 8 : Soient U un ouvert connexe de $\mathbb{C}$, $f \in \mathcal{O}(U)$, $F \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, telles que $\operatorname{Re} f(z) = F(\operatorname{Im} f(z))$, pour tout $z \in U$. Que peut-on dire de f ?

Exercice 9 :

a) Soient U un ouvert connexe de $\mathbb{C}$ et f, $g \in \mathcal{O}(U)$ telles que $f(z) + \overline{g(z)} \in \mathbb{R}$, pour tout $z \in U$. Prouver qu'il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $f(z) = c + g(z)$ pour tout $z \in U$.

b) On considère maintenant f, $g \in \mathcal{O}(U)$, où g ne s'annule pas dans U et telles que $f(z)\overline{g(z)} \in \mathbb{R}$, pour tout $z \in U$. Prouver qu'il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $f = cg$.

Exercice 10 : Soient U un ouvert de $\mathbb{C}$ invariant par rapport à la symétrie relativement à l'axe réel, et $f \in \mathcal{O}(U)$. Pour tout $z \in U$, on pose $g(z) = \overline{f(\overline{z})}$. Prouver que $g \in \mathcal{O}(U)$.

Exercice 11 : On dit que deux fonctions réelles $u(x, y)$ et $v(x, y)$ sont conjuguées harmoniques si elles vérifient les équations de Cauchy-Riemann. Une fonction $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ est harmonique si elle vérifie l'équation

$$\delta u := \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

a) Montrer que si u et v de classe $\mathcal{C}^2$ sont conjuguées harmoniques, alors u et v sont harmoniques.

b) Trouver les conjuguées harmoniques des fonctions suivantes dans les ouverts indiqués :

   i) $u(x, y) = x^2 - y^2 + x$ sur $\mathbb{C}$

   ii) $u(x, y) = \frac{x}{x^2+y^2}$ sur $\mathbb{C} \setminus \{0\}$

   iii) $u(x, y) = \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2)$ sur $\mathbb{C} \setminus \{x + iy,\ y = 0,\ x \leq 0\}$

   iv) $u(x, y) = \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2)$ sur $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Exercice 12 : Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$ et $f : U \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction $\mathbb{R}$-differentiable. On suppose qu'en un point $c \in U$, la limite

$$\lim_{h \to 0} \left| \frac{f(c+h) - f(c)}{h} \right| \tag{1}$$

existe. Montrer qu'alors, soit f, soit $\bar{f}$ est holomorphe en c.

Analyse complexe 1 - TD2

Exercice 1 : Soit $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs.

a) Montrer que $\overline{\lim}_{n\to+\infty} c_n^{\frac{1}{n}} \leq \overline{\lim}_{n\to+\infty} \dfrac{c_{n+1}}{c_n}$ dans $[0,+\infty]$.

b) En déduire que si $L = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{c_{n+1}}{c_n}$ existe dans $[0,+\infty]$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} (c_n)^{\frac{1}{n}} = L$.

Exercice 2 : Donner le rayon de convergence de la série entière $\sum\limits_{n\geq 1} a_n z^n$ dans les cas suivants :

a) $a_{2p} = a^{2p}$ et $a_{2p+1} = b^{2p+1}$, $0 < a < b$.

b) $a_n = \dfrac{n!}{n^n}$.

c) $a_{2p+1} = 0$ et $a_{2p} = \dfrac{(-1)^p p!}{(p+\sin p)^p}$.

Exercice 3 : (Composition locale des fonctions analytique) On se donne deux séries entière S et T telles que $T(0) = 0$ et qui convergent toutes les deux dans un disque non trivial (non réduit à $\{0\}$). On souhaite montrer que $U = S \circ T$ est aussi convergente sur un petit disque non trivial et que si on note $\tilde{U}$, $\tilde{S}$, $\tilde{T}$ les fonctions correspondantes, on a $\tilde{U} = \tilde{S} \circ \tilde{T}$.

a) On note $T = \sum\limits_{n\geq 1} b_n X^n$ et $S = \sum\limits_{n\geq 0} a_n X^n$. Montrer qu'il existe $r > 0$ tel que

$$\sum_{n\geq 1} |b_n| r^n < \rho(S).$$

b) On pose $U(X) = \sum\limits_{n\geq 0} c_n X^n$. On considère, pour r comme dans la question précédente, la série

$$\sum_{n\geq 0} \gamma_n r^n := \sum_{p\geq 0} |a_p| (\sum_{k\geq 1} |b_k| r^k)^p.$$

Montrer que $|c_n| \leq \gamma_n$ pour tout n.

c) En déduire que le rayon de convergence de U est supérieur ou égal à r.

d) Soit $S_n(X) = \sum\limits_{0\leq k\leq n} a_k X^k$ et soit $U_n = S_n \circ T$. Montrer que pour $|z| < r$,

$$S(T(z)) = \lim_n S_n(T(z)).$$

e) En déduire que $\tilde{U}(z) = \tilde{S} \circ \tilde{T}(z)$ pour $|z| < r$.

Exercice 4 : Que peut-on dire de la convergence uniforme des séries suivantes dans les régions indiquées ?

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{z^n}{n\sqrt{n+1}}$, $|z| \leq 1$.

b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2 + z^2}$, $1 < |z| < 2$.

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nz)}{n^3}$, $|z| \leq 1$.

Exercice 5 : Montrer que si $a_n = \lambda_n b_n$ avec $\lambda_n = O(n^\alpha)$ ($\alpha \in \mathbb{R}$) alors le rayon de convergence de $\sum a_n z^n$ est supérieur à celui de $\sum b_n z^n$.

Exercice 6 : Montrer que si le rayon de convergence de $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} c_n z^n$ est $R > 0$ alors le rayon de convergence de $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{c_n}{n!} z^n$ est infini et que sa somme $f(z)$ vérifie $\forall\, 0 < \theta < 1$, $\exists M(\theta)$ telle que $|f(z)| \leq M(\theta) e^{\frac{|z|}{\theta R}}$.

Exercice 7 : On suppose que la série entière $\displaystyle\sum_{n\geq 1} a_n z^n$ converge en 1. On lui associe la série de fonctions de terme général $u_n(z) = a_n \dfrac{z^n}{1-z^n}$, $n \geq 1$.

a) Montrer que $\displaystyle\sum_{n\geq 1} u_n(z)$ converge normalement sur tout compact de $D(0,1)$ et que $\displaystyle\sum_{n\geq 1} u_n(z) = \sum_{p\geq 1}\sum_{n\geq 1} a_n z^{np}$ pour $z \in D(0,1)$. Quelle identité peut-on en déduire lorsque $a_n = \dfrac{1}{n!}$, $a_n = \alpha^n$ avec $|\alpha| < 1$? ($a_n = (-1)^n$, $a_n = n$... ?)

b) Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} u_n(z)$ est uniformément convergente sur tout compact de $\mathbb{C} \setminus \overline{D(0,1)}$ (On pourra étudier $(z \mapsto u_n(\frac{1}{z}))_{n\in\mathbb{N}}$). A-t-on convergence normale sur ces compacts ?

Exercice 8 : Si $|z| < 1$ et $\tau(n)$ est le nombre de diviseur de n, montrer que

$$\sum_{n\geq 1} \frac{z^n}{1-z^n} = \sum_{n\geq 1} \tau(n) z^n$$

avec convergence uniforme sur les compacts de $D(0,1)$.

Exercice 9 :

a) (Transformation d'Abel) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de nombres complexes. Pour $n \geq m \in \mathbb{N}$, on pose $V_m^n = \displaystyle\sum_{m}^{n} v_i$. Montrer que si $n > m$ alors $\displaystyle\sum_{m}^{n} u_i v_i = \sum_{m}^{n-1} (u_i - u_{i+1}) V_m^i + u_n V_m^n$.

b) En déduire le comportement sur $U = \{z \in \mathbb{C}, |z| = 1\}$ des séries $\sum \dfrac{z^n}{n^\alpha}$, pour $\alpha \in \mathbb{R}$.

c) (Un théorème de Picard) Soit $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante de réels positifs qui converge vers 0. Montrer que la série $\sum c_n z^n$ converge sur $U \setminus \{1\}$. (Indication : On pourra utiliser la transformation d'Abel pour montrer que la série vérifie le critére de Cauchy).

Exercice 10 : (Un théorème d'Abel) Soit $k \geq 1$. Notons $E = \{z \in D(0,1), \dfrac{|1-z|}{1-|z|} \leq k\}$. Soit $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres complexes telle que la série entière $\displaystyle\sum_{0}^{+\infty} c_n z^n$ converge en $z = 1$. Alors $\displaystyle\lim_{\substack{z\to 1\\ z\in E}} \sum_{n\in\mathbb{N}} c_n z^n \to \sum_{0}^{+\infty} c_n = s$.

a) Vérifiez que l'on peut se ramener à $s = 0$.

b) Notons f la somme de la série sur $D(0,1)$. Pour $z \in D(0,1)$, développez $\dfrac{f(z)}{1-z}$ en série entière.

c) Conclure (Utilisez le fait $s = 0$).

d) Appliquer le résultat précédent au calcul de $\displaystyle\sum_{1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$.

Exercice 11 : Donner le développement en série entières des fonctions suivantes, et donner le rayon de convergence de la série obtenue :
$f(z) = \dfrac{z}{z^2 - 2z - 3}$ en 0 ; $g(z) = \dfrac{1}{3-2z}$ en 3 ; $h(z) = e^z$ en 1.

Exercice 12 : Soit $f(z) = \displaystyle\sum_{n\geq 0} a_n z^n$, $a_n \in \mathbb{C}$ une série de rayon de convergence R.

a) Pour $r \in [0, R[$, montrer que $M(r,f) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^2 d\theta = \sum_{n\geq 0} |a_n|^2 r^{2n}$. En déduire les inégalités de cauchy $|a_n| r^n \leq max_{|z|=r} |f(z)|$. Et montrer que s'il y a égalité pour un entier n alors $f(z) = a_n z^n$.

b) En déduire que $r \mapsto M(r,f)$ est une fonction croissante sur $[0, R[$ et que $\displaystyle\lim_{r\to R^-} M(r,f) = \sum_{n\geq 0} |a_n|^2 R^{2n} \in [0, +\infty]$.

c) En déduire que si f est bornée sur le disque unité (et $R = 1$) alors $a_n = 0(1)$.

La fonction zêta de Riemann

1.*Propriétés élémentaires et équation fonctionnelle.*

Le but de cette feuille est de donner un énoncé précis du fameux problème de deux cents ans d'âge qu'on nomme l'hypothèse de Riemann. La fonction zêta de Riemann est définie pour $s \in \mathbb{R}$, $s > 1$, par

$$\zeta(s) = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^s}.$$

On se propose de démontrer en quelques exercices

a) que cette série converge pour $\mathrm{Re}\,(s) > 1$, uniformément pour $\mathrm{Re}\,(s) > 1 + \delta$ pour tout $\delta > 0$;
b) qu'elle se prolonge méromorphiquement (i.e. s'écrit comme quotient de deux fonctions holomorphes) dans le demi-plan $\mathrm{Re}\,(s) > 0$;
c) qu'elle peut s'écrire comme un produit infini

$$\zeta(s) = \prod_p \zeta_p(s)$$

indexé par les nombres premiers avec $\zeta_p(s) := \frac{1}{1-p^{-s}}$.
d) que la fonction $\Gamma(s) = \int_0^\infty e^{-y} y^s \frac{dy}{y}$ se prolonge holomorphiquement à $\mathbb{C} - \mathbb{N}_-$ et y vérifie l'équation fonctionnelle $\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$;
e) que la fonction zêta complétée

$$\hat{\zeta}(s) = \zeta_\infty(s)\zeta(s)$$

où

$$\zeta_\infty(s) := 2^{-1/2}\pi^{-s/2}\Gamma(s/2)$$

admet la représentation intégrale

$$\hat{\zeta}(s) = \frac{1}{2\sqrt{2}} \int_0^\infty (\theta(iy) - 1) y^{s/2} \frac{dy}{y},$$

où

$$\theta(z) := \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{\pi i n^2 z} = 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} e^{\pi i n^2 z}$$

est la série theta de Jacobi.
f) que la série theta de Jacobi $\theta(z)$ converge uniformément pour $\mathrm{Im}\,(z) \geq \delta$ pour tout $\delta > 0$ et satisfait la formule

$$\theta(-1/z) = \sqrt{z/i}\,\theta(z).$$

g) que la fonction zêta complétée se prolonge holomorphiquement à $\mathbb{C} - \{0, 1\}$ et vérifie dans ce domaine l'équation fonctionnelle

$$\hat{\zeta}(s) = \hat{\zeta}(1-s).$$

Nous serons ainsi en mesure de donner un sens précis à l'énoncé suivant.

Conjecture *("Hypothèse de Riemann")*

Tous les zéros de $\hat{\zeta}(s)$ *se trouvent sur la droite* $\mathrm{Re}\,(s) = 1/2$.

Exercice 1 : (convergence pour $\mathrm{Re}\,(s) > 1$)

a) Pour $i \geq 0$, on note $N_i = \sum_{j=0}^{i} 2^j$. Pour $s \in \mathbb{R}$, $s > 1$ et $i \geq 0$, montrer la majoration

$$\sum_{n=1}^{N_i} \frac{1}{n^s} \leq \sum_{j=0}^{i} \left(\frac{1}{2^{s-1}}\right)^j.$$

b) En déduire que la série $\zeta(s)$ converge uniformément sur le domaine $\mathrm{Re}\,(s) > 1+\delta$ pour tout $\delta > 0$.

c) Montrer que la série $\zeta(s)$ diverge pour $\mathrm{Re}\,(s) \leq 1$.

Exercice 2 : (prolongement à $\mathrm{Re}\,(s) > 0$)

a) On note $a_n(s) = \frac{1}{n^s} - \int_n^{n+1} t^{-s}dt$. Montrer l'estimation

$$|a_n(s)| \leq \int_n^{n+1} |s|(t-n)n^{-\mathrm{Re}\,(s)-1}dt.$$

b) En déduire pour $\mathrm{Re}\,(s) > 0$ la majoration

$$\sum_{n>0} |a_n(s)| \leq \frac{|s|}{2}\zeta(\mathrm{Re}\,(s)+1).$$

c) On note $f(s) = \sum_{n>0} a_n(s)$. Montrer que f est holomorphe sur $\mathrm{Re}\,(s) > 0$ et que pour $\mathrm{Re}\,(s) > 1$, on a

$$\zeta(s) = f(s) + \frac{1}{s-1}.$$

d) Conclure que $\zeta(s)$ se prolonge méromorphiquement au demi-plan $\mathrm{Re}\,(s) > 0$ avec un pôle d'ordre 1 en $s = 1$.

Exercice 3 : (Identité d'Euler) On note $E(s)$ le produit $\prod_p \zeta_p(s)$ indexé par les nombres premiers avec $\zeta_p(s) := \frac{1}{1-p^{-s}}$.

a) Montrer l'indentité formelle

$$\mathrm{Log}\,(E(s)) = \sum_p \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{np^{ns}}.$$

b) Soit $\delta > 0$. Pour $\mathrm{Re}\,(s) > 1+\delta$, montrer la majoration

$$\sum_p \sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{1}{np^{ns}}\right| \leq 2\sum_p \frac{1}{p^{1+\delta}} \leq 2\,\zeta(1+\delta).$$

c) En déduire la convergence uniforme de $\mathrm{Log}\,(E(s))$ pour $\mathrm{Re}\,(s) \geq 1+\delta$ pour tout $\delta > 0$.

d) Utiliser le développement $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 \cdots$ pour démontrer

$$\prod_{p \leq N} \frac{1}{1-p^{-s}} = \sum_n{}' \frac{1}{n^s}$$

où $\sum'$ est la somme sur les entiers seulement divisibles par des premiers $p \leq N$.

e) En déduire la majoration

$$\left|\prod_{p\leq N} \frac{1}{1-p^{-s}} - \zeta(s)\right| \leq \sum_{n>N} \frac{1}{n^{1+\delta}}.$$

f) Conclure que $E(s)$ converge vers $\zeta(s)$ pour $\mathrm{Re}\,(s) > 1$, i.e. on a l'**identité d'Euler**

$$\zeta(s) = \prod_p \zeta_p(s).$$

Remarque : On pourra admettre le résultat de l'exercice suivant, lié à l'analyse de Fourier, et qui découle de la formule de sommation de Poisson. C'est le centre névralgique de la preuve de l'équation fonctionnelle de la fonction zêta.

Exercice 4 : (Equation fonctionnelle de la série theta) Montrer que la série theta de Jacobi

$$\theta(z) := \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{\pi i n^2 z} = 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} e^{\pi i n^2 z}$$

converge absolument et uniformément pour $\mathrm{Im}\,(z) \geq \delta$ pour tout $\delta > 0$ et satisfait la formule

$$\theta(-1/z) = \sqrt{\frac{z}{i}}\,\theta(z).$$

Exercice 5 : (Prolongement et équation fonctionnelle de la fonction Gamma)

a) Montrer que $\Gamma(s) = \int_0^\infty e^{-y} y^s \frac{dy}{y}$ est bien définie pour $\mathrm{Re}\,(s) > 0$.

b) Montrer que $s \mapsto \int_1^\infty e^{-y} y^s \frac{dy}{y}$ est holomorphe sur $\mathbb{C}$.

c) En développant $t \mapsto e^{-t}$ en série entière, montrer que pour $\mathrm{Re}\,(s) > 0$, on a l'égalité

$$\int_0^1 e^{-y} y^s \frac{dy}{y} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{1}{s+n}.$$

d) En déduire que la fonction

$$\tilde{\Gamma}(s) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{1}{s+n} + \int_1^\infty e^{-y} y^s \frac{dy}{y}$$

prolonge holomorphiquement $\Gamma(s)$ à $\mathbb{C} - \mathbb{N}_-$. Pour $s \in \mathbb{C} - \mathbb{N}_-$, on notera maintenant $\Gamma(s) = \tilde{\Gamma}(s)$.

e) Montrer que pour $s \in \mathbb{C} - \mathbb{N}_-$, on a l'équation fonctionnelle

$$\Gamma(s+1) = s\Gamma(s).$$

Exercice 6 : (Représentation intégrale)

a) Utiliser la substitution $y \mapsto \pi n^2 y$ pour obtenir l'équation

$$\pi^{-s}\Gamma(s)\frac{1}{n^{2s}} = \int_0^\infty e^{-\pi n^2 y} y^s \frac{dy}{y}.$$

b) en déduire l'égalité

$$\pi^{-s}\Gamma(s)\zeta(2s) = \int_0^\infty \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\pi n^2 y} y^s \frac{dy}{y}.$$

c) Conclure que la fonction zêta complétée

$$\hat{\zeta}(s) = \zeta_\infty(s)\zeta(s)$$

où

$$\zeta_\infty(s) := \pi^{-s/2}\Gamma(s/2)$$

admet la **représentation intégrale**

$$\hat{\zeta}(s) = \frac{1}{2}\int_0^\infty (\theta(iy) - 1)y^{s/2}\frac{dy}{y},$$

où

$$\theta(z) := \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{\pi i n^2 z} = 1 + 2\sum_{n=1}^\infty e^{\pi i n^2 z}$$

est la série theta de Jacobi.

Exercice 7 : (Equation fonctionnelle de la fonction zêta) On considère la décomposition suivante de l'intégrale

$$\int_0^\infty (\theta(iy) - 1)y^s\frac{dy}{y} = \int_0^1 (\theta(iy) - 1)y^s\frac{dy}{y} + \int_1^\infty (\theta(iy) - 1)y^s\frac{dy}{y}.$$

a) Montrer que pour $y \geq 1$, il existe une constante $B > 0$ telle qu'on ait la majoration

$$|(\theta(iy) - 1)y^{s-1}| \leq Be^{-\pi y}y^{\mathrm{Re}\,(s)+1}y^{-2}.$$

b) Montrer que pour $y \geq 1$ et s dans un compact, le réel $e^{-\pi y}y^{\mathrm{Re}\,(s)+1}$ est borné par une constante indépendante de s.

c) En déduire la convergence absolue et uniforme sur tout compact de

$$\int_1^\infty (\theta(iy) - 1)y^s\frac{dy}{y}.$$

d) Utiliser le changement de variable $y \mapsto 1/y$ et l'équation fonctionnelle de la fonction theta pour démontrer que

$$\frac{1}{2}\int_0^1 (\theta(iy) - 1)y^s\frac{dy}{y} = -\frac{1}{2s} + \frac{1}{2s-1} + \frac{1}{2}\int_1^\infty (\theta(iy) - 1)y^{-s+1/2}\frac{dy}{y}.$$

e) Montrer que

$$\frac{1}{2}\int_0^\infty (\theta(iy) - 1)y^s\frac{dy}{y} = -\frac{1}{2s} + \frac{1}{2s-1} + F(s)$$

où

$$F(s) = \frac{1}{2}\int_1^\infty [(\theta(iy) - 1)y^s + (\theta(iy) - 1)y^{1/2-s}]\frac{dy}{y}.$$

f) Montrer que la fonction F est holomorphe sur $\mathbb{C}$.

g) Montrer que $F(s) = F(1/2 - s)$.

h) En déduire que la fonction zêta complétée se prolonge méromorphiquement à $\mathbb{C}$ avec uniquement des pôles simples en 0 et 1 et vérifie sur $\mathbb{C} - \{0, 1\}$ l'**équation fonctionnelle**

$$\hat{\zeta}(s) = \hat{\zeta}(1 - s).$$

La fonction zêta de Riemann

2. Les zéros et la formule explicite.

Nous allons maintenant étudier plus en détails les zéros de la fonction zêta complétée $\hat{\zeta}(s)$ en montrant

a) qu'elle n'a des zéros que dans la bande critique $0 \leq \mathrm{Re}\,(s) \leq 1$,

b) et que ses zéros et ses pôles vérifient une "formule explicite", qui montre que leur répartition dans le plan complexe est liée à celle des nombres premiers dans les réels.

Exercice 8 : (La "bande critique")

a) Utiliser le développement en produit eulérien de ζ pour montrer qu'elle ne s'annule jamais pour $\mathrm{Re}\,(s) > 1$.

b) En déduire que tous les zéros de $\hat{\zeta}(s)$ sont dans la "bande critique" $0 \leq \mathrm{Re}\,(s) \leq 1$.

Exercice 9 : (Le théorème d'inversion de Mellin) Soit $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{C}$ une fonction $\mathcal{C}^\infty$ telle que pour tout $\sigma \in]\alpha, \beta[$, $x \mapsto f(x)x^{\sigma-1}$ est intégrable.

a) Montrer que la fonction

$$M(f,s) := \int_{\mathbb{R}_+^*} f(x)x^{s-1}dx$$

existe et est analytique dans la bande $\mathrm{Re}\,(s) \in]\alpha, \beta[$.

b) En utilisant le changement de variable $x = e^{2\pi u}$ et en posant $s = \sigma + it$, montrer que

$$M(f, \sigma + it) = 2\pi \int_{\mathbb{R}} g(u)e^{2i\pi t u}du,$$

i.e., que pour σ fixe, $t \mapsto M(f, \sigma + it)$ est la transformée de Fourier de $g(u) = f(e^{2\pi u})e^{2\pi\sigma u}$.

c) Utiliser la formule d'inversion de Fourier pour démontrer que

$$f(x) = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{2i\pi} \int_{\sigma - it}^{\sigma+it} M(f,s)x^{-s}ds.$$

Exercice 10 : (La fonction digamma) On note $\Psi(s) := \frac{\Gamma'(s)}{\Gamma(s)}$.

a) On note $I_n(s) = \int_0^n (1 - \frac{t}{n})^n t^{x-1} dt$. Montrer que $I_n(s)$ tend vers $\Gamma(s)$ uniformément sur tout compact pour $\mathrm{Re}\,(s) > 0$.

b) Montrer que pour tout s avec $\mathrm{Re}\,(s) > 1$ et pour tout entier $n \geq 1$, on a

$$I_n(s) = n^s \frac{n!}{\prod_{0\leq j\leq n}(s+j)} = n^s \frac{n!}{s(s+1)\dots(s+n)}.$$

c) Calculer $\mathrm{dlog}\, I_n(s) := \frac{I_n'(s)}{I_n(s)}$.

d) En déduire que

$$\Psi(s) = \lim_{n\to\infty} \log(n) + \sum_{j=0}^{n} \int_1^\infty x^{s+j-1}dx.$$

e) En déduire une estimation de

$$\Psi_{\mathbb{R}}(s) := \operatorname{dlog} \zeta_\infty(s) = \frac{\zeta'_\infty(s)}{\zeta_\infty(s)}.$$

Remarque : L'exercice suivant fait un usage essentiel du théorème des résidus, qu'on applique à la fonction dlog $\hat{\zeta}(s)$ sur une bande bien choisie contenant la bande critique. La dérivée logarithmique permet de voir les zéros et les pôles d'une fonction comme des pôles de sa dérivée logarithmique, et la formule des résidus pour la dérivée logarithmique donne une somme alternée sur les zéros et les pôles de la fonction de départ.

Exercice 11 : (La "formule explicite") Soit $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty([1, +\infty[)$, qu'on prolonge par 0 en une fonction de $\mathcal{C}_0^\infty([1, +\infty[)$ et on note

$$\Phi(s) = \int_1^\infty \varphi(y) y^{s-1} dy.$$

Cet exercice a pour but de démontrer la "**formule explicite**"

$$\Phi(0) - \sum_{\hat{\zeta}(\rho)=0} \Phi(\rho) + \Phi(1) = W_\infty(\varphi) + \sum_p W_p(\varphi)$$

où

$$W_p(\varphi) = \log(p) \sum_{k \geq 1} \varphi(p^k) \qquad \text{et} \qquad W_\infty(\varphi) = \int_1^\infty \frac{\varphi(y)}{y - y^{-1}} dy.$$

a) Pour $t > 0$, on note Γ_t le rectangle dont les bords verticaux sont les droites $\operatorname{Re}(s) = -1$ et $\operatorname{Re}(s) = 2$ et les bords horizontaux sont les droites $\operatorname{Im}(s) = t$ et $\operatorname{Im}(s) = -t$. On oriente Γ_t dans le sens direct. Calculer l'intégrale curviligne

$$I(t, \varphi) = \oint_{\Gamma_t} \Phi(s) \frac{\hat{\zeta}'(s)}{\hat{\zeta}(s)} ds$$

en appliquant la formule des résidus.

b) En déduire que

$$\lim_{t \to \infty} I(t, \varphi) = \Phi(0) - \sum_{\hat{\zeta}(\rho)=0} \Phi(\rho) + \Phi(1).$$

c) On note $D_t := \{\operatorname{Re}(s) = 2, -t \leq \operatorname{Im}(s) \leq t\}$ le bord droit du rectangle Γ_t, et H_t la réunion des deux bords horizontaux orientés comme avant. Utiliser l'équation fonctionnelle de $\hat{\zeta}(s)$ pour montrer que $I(t, \varphi) = W(t, \varphi) + R(t, \varphi)$ où

$$W(t, \varphi) := \oint_{D_t} [\Phi(s) + \Phi(1-s)] \frac{\hat{\zeta}'(s)}{\hat{\zeta}(s)} ds \qquad \text{et} \qquad R(t, \varphi) := \oint_{H_t} \Phi(s) \frac{\hat{\zeta}'(s)}{\hat{\zeta}(s)} ds.$$

d) Montrer que $R(t, \varphi)$ tend vers 0 quand t tend vers l'infini.

e) Utiliser le développement en produit eulérien de $\hat{\zeta}$ pour montrer que

$$\frac{\hat{\zeta}'(s)}{\hat{\zeta}(s)} = \frac{\zeta'_\infty}{\zeta_\infty}(s) - \sum_p \log p \sum_{k \geq 1} p^{-ks}.$$

f) Utiliser le théorème d'inversion de Mellin (exercice 9) pour montrer que

$$\oint_{\operatorname{Re}(s)=2} \Phi(s) p^{-ks} = \varphi(p^k)$$

et en déduire que

$$\oint_{\operatorname{Re}(s)=2} \Phi(s) \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} ds = \sum_p \log(p) \sum_{k \geq 1} \varphi(p^k).$$

g) Utiliser l'approximation de la fonction digamma donnée dans l'exercice 10 pour montrer que

$$\oint_{\mathrm{Re}\,(s)=2} \Phi(s) \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} ds = \int_1^\infty \frac{\varphi(y)}{y - y^{-1}} dy.$$

h) Combiner les deux résultat précédents pour montrer que $W(t, \phi)$ tend vers $W_\infty(\varphi) + \sum_p W_p(\varphi)$ quand t tend vers l'infini et conclure.

Analyse complexe 1 - TD4

Exercice 1 : Calculer $\displaystyle\int_{(0,3)}^{(2,4)} (2y + x^2)dx + (3x - y)dy$ le long de

a) la parabole $x = 2t$, $y = t^2 + 3$;

b) la ligne brisée formée par les segments de droite $(0, 3)$ à $(2, 3)$ et $(2, 3)$ à $(2, 4)$;

c) le segment de droite d'extrémités $(0, 3)$ et $(2, 4)$.

Exercice 2 : (La surface de Riemann du logarithme)

a) Montrer que la forme différentielle $\dfrac{dz}{z}$ est fermée dans $\mathbb{C}^*$.

b) Calculer $\displaystyle\int_{S^1} \frac{dz}{z}$ où $S^1 = \{e^{it}, t \in [0, 2\pi[\}$.

c) En déduire que $\dfrac{dz}{z}$ n'admet pas de primitive globalement définie dans $\mathbb{C}^*$.

d) On considère le sous-ensemble $\tilde{L} = \{(z, \theta) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{R} \mid \dfrac{z}{|z|} = e^{i\theta}\}$ de $\mathbb{C} \times \mathbb{R} \cong \mathbb{R}^3$ appelé surface de Riemann du logarithme. Dessiner $\tilde{L} \subset \mathbb{R}^3$.

e) On considère la projection $p : \tilde{L} \to \mathbb{C}^*$ donnée par $p(z, \theta) = z$. Dessiner p.

f) Montrer que l'application

$$\widetilde{\log} : \tilde{L} \to \mathbb{C}$$

donnée par

$$\widetilde{\log}(z, \theta) = \log |z| + i\theta$$

est bijective.

g) On considère l'application exponentielle $e : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^*$. Montrer que

$$(e \circ \widetilde{\log})(z, \theta) = z,$$

i.e. que $\widetilde{\log}$ est presque un inverse à droite de l'exponentielle.

Exercice 3 : Soit $G = \mathbb{C} \setminus \{x \in \mathbb{R} \ : |x| \geq 1\}$.

a) Trouver une fonction f holomorphe sur G telle que $f(0) = i$ et $f^2(z) = z^2 - 1$ pour tout $z \in G$. *Indication :* Définir $f_1(z) = \exp\left(\dfrac{1}{2}\log(z + 1)\right)$, où est log est la détermination principale du logarithme, pour $z \in \mathbb{C} \setminus \{x \in \mathbb{R} \ : \ x \leq -1\}$, et $f_2(z) = \exp\left(\dfrac{1}{2}\ell(z - 1)\right)$, où ℓ est une détermination convenable du logarithme sur $\mathbb{C} \setminus \{x \in \mathbb{R} \ : x \geq 0\}$. Puis considérer $f_1(z)f_2(z)$ pour $z \in G$.

b) Démontrer que $q : z \mapsto \dfrac{1}{2}(z + z^{-1})$ est holomorphe sur $\mathbb{C}^*$ et réalise une bijection de $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} \ : \ \mathrm{Im} z > 0\}$ sur G.

c) Montrer que la bijection réciproque $u : G \to \mathbb{H}$ est continue, qu'elle statisfait à la relation

$$\forall z \in G, \quad (u(z) - z)^2 = z^2 - 1 = f(z)^2.$$

d) À partir de la question précédente, donner l'expression de u en fonction de f et en déduire que u est holomorphe.

e) Montrer que $z \mapsto \cos(z)$ est une bijection biholomorphe de la bande $S = \{z \in \mathbb{C} \ : \ 0 < \mathrm{Re}(z) < \pi\}$ sur G, dont la bijection réciproque est donnée par

$$\arccos(w) = -i \log(w + \sqrt{w^2 - 1}),$$

où $\sqrt{z^2 - 1}$ représente $f(z)$.

Exercice 4 : Soit $a \in \mathbb{C}$ et $\mathcal{C}$ un cercle de $\mathbb{C}$ qui ne porte pas a et c un point de $\mathcal{C}$.

a) Si a est à l'extérieur de $\mathcal{C}$, montrer qu'il existe une application continue $H : S^1 \times [0,1] \to \mathbb{C}$ telle que $H(S^1, 0) = \mathcal{C}$, $H(S^1, 1) = \{c\}$ et $H(S^1, x)$ ne contienne pas a pour tout $x \in [0,1]$. Ceci signifie qu'on peut déformer continuement $\mathcal{C}$ à un point sans passer par a.
(Indication : on pourra paramétriser $u : S^1 \to \mathcal{C}$ de $\mathcal{C}$ et utiliser $H(z,x) = (1-x)u(z) + xc$)

b) En déduire $\displaystyle\int_{\mathcal{C}} \frac{dz}{z-a}$ si a est à l'extérieur de $\mathcal{C}$.

c) Si a est à l'intérieur de $\mathcal{C}$, montrer qu'il existe une application continue $H : S^1 \times [0,1] \to \mathbb{C}$ telle que $H(S^1, 0) = \mathcal{C}$, $H(S^1, 1) = \mathcal{C}(a, 1)$ et $H(S^1, x)$ ne contienne pas a pour tout $x \in [0,1]$. Ceci signifie qu'on peut déformer continuement $\mathcal{C}$ à un cercle de rayon 1 sans passer par a.

d) En déduire $\displaystyle\int_{\mathcal{C}} \frac{dz}{z-a}$ si a est à l'intérieur de $\mathcal{C}$.

Exercice 5 : Si $\mathcal{C}$ est l'arc de courbe d'équation $y = x^3 - 3x^2 + 4x - 1$ joignant les points $(1,1)$ et $(2,3)$, trouver la valeur de

$$\int_{\mathcal{C}} (12z^2 - 4iz) dz.$$

Exercice 6 :
Soient f une fonction analytique sur un ouvert simplement connexe $D \subset \mathbb{C}$, et $a \in D$.

a) Montrer que si la boule de rayon r et de centre a est incluse dans D, on a

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad f^{(n)}(a) = n! \int_{|z-a|=r} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} \frac{\mathrm{d}z}{2i\pi} = n! \int_0^{2\pi} \frac{f(a + re^{i\theta}) e^{-in\theta}}{r^n} \frac{\mathrm{d}\theta}{2\pi}.$$

b) En déduire les inégalités de Cauchy : si $M = \sup\limits_{|z-a|=r} |f(z)|$,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |f^{(n)}(a)| \leq \frac{M \cdot n!}{r^n}.$$

c) En déduire que si une fonction *entière* f (c'est-à-dire analytique sur $\mathbb{C}$) vérifie

$$\forall z \in \mathbb{C}, |f(z)| \leq C(1 + |z|)^p,$$

alors f est un polynôme de degré au plus p. En particulier, les seules fonctions entières bornées sont les constantes. Ce résultat s'appelle le *théorème de Liouville.*

Exercice 7 : Le but de cet exercice est de montrer le théorème fondamental de l'algèbre, connu aussi sous le nom de *théoreme de d'Alembert).*

a) Soit P un polynôme non constant à coefficients complexes. Montrer que P a au moins une racine dans $\mathbb{C}$.
Indication : on pourra raisonner par l'absurde en considérant la fonction entière $z \mapsto \dfrac{1}{P(z)}$.

b) En déduire qu'un polynôme de degré n à coefficients complexes possède exactement n racines dans $\mathbb{C}$ (non nécessairement distinctes).

Exercice 8 : Soit f une fonction différentiable sur un ouvert U simplement connexe de $\mathbb{C}$, telle que pour toute courbe fermée simple $\mathcal{C}$ dans U, l'intégrale curviligne

$$\oint_{\mathcal{C}} f(z)\mathrm{d}z = 0$$

Montrer que f est holomorphe sur U. Ce résultat est la réciproque du théorème de Cauchy, qui dit que l'intégrale sur un coutour fermé d'une fonction holomorphe dans un ouvert simplement connexe est nulle. Il est connu sous le nom de *théorème de Morera*.
Indication : Montrer que la fonction $F : z \mapsto \displaystyle\int_a^z f(w)\mathrm{d}w$ est bien définie et holomorphe sur U.

Exercice 9 : Soit p un polynôme, $c \in \mathbb{C}$ et r un réel strictement positif. Montrer que

$$\int_{\partial B(c,r)} \overline{p(z)}\mathrm{d}z = 2i\pi r^2 \overline{p'(c)}.$$

Analyse complexe 1 - TD5

Exercice 1 : On considère une fonction f analytique dans une couronne ouverte $\mathcal{R}$ limitée par deux cercles concentriques C_1 et C_2, et sur sa frontière. Montrer que pour z_0 dans $\mathcal{R}$, on a

$$f(z_0) = \frac{1}{2i\pi} \oint_{C_1} \frac{f(z)}{z - z_0} - \frac{1}{2i\pi} \oint_{C_2} \frac{f(z)}{z - z_0}.$$

Exercice 2 : Soit f une fonction analytique dans une couronne ouverte $\mathcal{R}$ limitée par deux cercles concentriques C_1 et C_2 de centre 0, et sur sa frontière. Montrer que pour tout z dans $\mathcal{R}$, on a

$$f(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n z^n$$

où

$$a_n = \frac{1}{2i\pi} \oint_{C_1} \frac{f(w)}{w^{n+1}} dw \text{ pour } n \geq 0 \text{ et } a_n = \frac{1}{2i\pi} \oint_{C_2} \frac{f(w)}{w^{n+1}} dw \text{ pour } n < 0.$$

Exercice 3 : Calculer le développement en série de Laurent de la fonction

$$f(z) = \frac{1}{z^2 + 1}$$

dans la couronne $1 < |z| < 3/2$.

Exercice 4 : Calculer le développement en série de Laurent de la fonction

$$f(z) = \frac{z^2 - 1}{(z + 2)(z + 3)} = 1 + \frac{3}{z + 2} - \frac{8}{z + 3}$$

dans les couronnes

a) $|z| < 2$,
b) $2 < |z| < 3$,
c) $|z| > 3$.

Exercice 5 : Soit f une fonction méromorphe au voisinage d'un point $z_0 \in \mathbb{C}$. Calculer le résidu en z_0 de $\mathrm{dlog}(f) := \frac{f'}{f}$. En déduire que si γ est une courbe fermée simple (sans points doubles) du plan, alors

$$\oint_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)} \mathrm{d}z = Z(f, \gamma) - P(f, \gamma)$$

où $Z(f, \gamma)$ (resp. $P(f, \gamma)$) est le nombre de zéros (resp. de pôles) à l'intérieur de γ, comptés avec multiplicité.

Exercice 6 : Calculer les pôles et résidus des fonctions suivantes :

a) $f_1(z) = \frac{z^2 + 1}{z^2 - 4}$.
b) $f_2(z) = \frac{z^3 + 1}{z(z - i)^3}$.

Exercice 7 : En calculant l'intégrale de $\dfrac{e^{iz}}{z}$ sur un contour bien choisi, montrer que

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}.$$

Exercice 8 : Calculer par la méthode des résidus les intégrales généralisées suivantes :

a) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x^2+1)}{(x^4+1)} \mathrm{d}x.$

b) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+1)(x^2+4)}.$

c) $\displaystyle\int_{0}^{\infty} \frac{x^2}{(x^2+1)^2} \mathrm{d}x.$

d) $\displaystyle\int_{0}^{\infty} \frac{x^{p-1}}{1+x} \mathrm{d}x$, pour $0 < p < 1$.

e) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{ce^{itx}}{\pi(x^2+c^2)}$ pour $c \in \mathbb{R}_+^*$ et $t \in \mathbb{R}$.

Exercice 9 : On pose $a = \sqrt{i\pi} = (1+i)\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}$. Soit g la fonction méromorphe sur $\mathbb{C}$ définie par

$$g(z) = \frac{e^{-z^2}}{1+e^{-2az}}.$$

a) Montrer que g est holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus a\left(\dfrac{1}{2}+\mathbb{Z}\right)$ et qu'elle possède un pôle simple en chaque point de $a\left(\dfrac{1}{2}+\mathbb{Z}\right)$.

b) Montrer que g satisfait à l'équation fonctionnelle

$$\forall\ z \in \mathbb{C} \setminus a\left(\frac{1}{2}+\mathbb{Z}\right), \quad g(z+a) - g(z) = e^{-z^2}.$$

c) Soit R_1 et R_2 deux nombres réels strictement positifs. Appliquer la formule des résidus à g sur le contour obtenu en concaténant les segments $[-R_1, R_2]$, $[R_2, R_2+a]$, $[R_2+a, -R_1+a]$ et $[-R_1+a, R_1+a]$.

d) Montrer que

$$\lim_{x \to \pm\infty} \int_{[x,x+a]} g(z)\mathrm{d}z = 0.$$

e) Déduire des 3 questions précédentes la formule de l'intégrale gaussienne

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-z^2} \mathrm{d}z = \sqrt{\pi}.$$

Exercice 10 : Calculer par la méthode des résidus les intégrales suivantes :

a) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^6+1}$,

b) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{(x^2+1)^2(x^2+2x+2)} dx.$

Exercice 11 : Montrer par la méthode des résidus les égalités suivantes :

a) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{3 - 2\cos\theta + \sin\theta} = \pi.$

b) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a + b\sin\theta} = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2 - b^2}}$, si a et b sont des réels tels que $a > |b|$.

c) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\cos 3\theta}{5 - 4\cos\theta} d\theta = \frac{\pi}{12}.$

d) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\cos mx}{x^2 + 1} dx = \frac{\pi}{2} e^{-m}$, $m > 0$.

Exercice 12 : Calculer l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{irz}}{\mathrm{ch} z} dz$$

en utilisant la méthode des résidus sur le contour en rectangle $[-R, R] \times [0, R]$ dans le plan supérieur avec $R = n\pi$.