Intégration - TD11

Exercice 1 : Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré.

a) Soient f et g deux fonctions mesurables positives de X dans $\bar{R}_+$ telles que $fg \geq 1$. Montrer que $\int_X f d\mu \int_X g d\mu \geq \mu(X)^2$.

b) On suppose qu'il existe une fonction intégrable $f : X \to \mathbb{R}_+^*$ telle que $1/f$ soit intégrable. Que peut-on dire de la mesure μ ?

Exercice 2 : Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré, $f \in L^1(X, \mathcal{A}, \mu)$ et $(f_n)_{n\geq 1}$ une suite de $L^1(X, \mathcal{A}, \mu)$ telle que $\lim_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu = \int_X f d\mu$.

a) Montrer que si les fonctions f_n sont positives et si la suite (f_n) converge presque partout vers f, alors (f_n) converge vers f dans L^1. (On pourra considérer $g_n = \min(f, f_n)$)

b) Soit $f_n \in L^1(\mathbb{R}, \mathcal{B}, \lambda)$ définie par $f_n = n\mathbb{1}_{]0,1/n[} - n\mathbb{1}_{]-1/n,0[}$. Montrer que $(f_n)_{n\geq 1}$ converge vers 0 et que $\lim_n \int f_n d\lambda = 0$. La suite $(f_n)_{n\geq 1}$ converge-t'elle vers 0 dans L^p $(p \geq 1)$?

Exercice 3 : Soient $p, q \in [1, +\infty]$ tels que $p \leq q$. Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré de masse finie. Montrer que l'injection canonique $i : L^q_{\mathbb{R}}(\mu) \to L^p_{\mathbb{R}}(\mu)$ est une application linéaire continue et calculer sa norme. Pour quelles fonctions la norme est-elle atteinte ?

Exercice 4 :

a) Montrer que pour tout $r > 1$ et pour tous x, y réels positifs, $|x^r - y^r| \leq r|x - y|(x + y)^{r-1}$.

b) Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré, $p > 1$ et $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite de fonctions positives qui converge vers f dans $L^p_{\mathbb{R}_+}(\mu)$. Montrer que $\forall r \in [1, p]$, la suite $(f_n^r)_{n\geq 1}$ converge vers f^r dans $L^{p/r}_{\mathbb{R}_+}(\mu)$.

Exercice 5 : Soit $p \geq 1$ est $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite de fonctions de $\mathcal{L}^1_K(\mu)$ qui converge presque partout vers $f \in \mathcal{L}^1_K(\mu)$.

a) Soit $g_n = 2^p(|f_n|^p + |f|^p) - |f_n - f|^p$. Montrer que pour tout $n \geq 0$, $g_n \geq 0$.

b) Montrer que f_n converge vers f dans $\mathcal{L}^p_K(\mu)$ si et seulement si $\lim_n \|f_n\|_p = \|f\|_p$ (Appliquer le lemme de Fatou à la fonction g_n).

Exercice 6 : Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré tel que $\mu(X) < +\infty$. Soit $p \in]1, +\infty]$ et $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite bornée de $\mathcal{L}^p_K(\mu)$ qui converge presque partout vers f.

a) Montrer que $f \in \mathcal{L}^1_K(\mu)$.

b) Montrer que $\forall r \in [1, p[$, f_n converge vers f dans $\mathcal{L}^r_K(\mu)$ (Utiliser le théorème d'Egoroff et l'inégalité de Hölder).

c) Le résultat de b) subsiste-t'il si $\mu(X) = +\infty$?

Exercice 7 : Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré, $p \in]1, +\infty[$, $q = \frac{p}{p-1}$. On dit que la suite $(f_n)_{n\geq 0}$ de $L^p(\mu)$ converge faiblement vers $f \in L^p(\mu)$ si, pour tout $g \in L^q(\mu)$, $\lim_n \int_X f_n q d\mu = \int_X f g d\mu$.

a) Montrer que la convergence dans $L^p(\mu)$ entraine la convergence faible.

b) Soit $f_n(x) = \mathbb{1}_{[0,1]}(x)e^{inx}$ et $g \in L^q(\mu)$. Soit $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ telle que $\mathrm{Supp}(\phi) \subset [0, 1]$. Montrer que $\overline{\lim}_n \left|\int_0^1 g(x)e^{inx}dx\right| \leq \int_0^1 |g(x) - \phi(x)|dx$. En déduire que e^{inx} converge faiblement vers 0.

Exercice 8 : Soit $p \in]1, +\infty[$. A toute fonction $f \in L^p_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}_+)$, on associe la fonction F définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $F(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt$.

a) Montrer que F est bien définie.

b) On suppose que $f \in \mathcal{C}_K(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R}_+)$. Montrer que $\int_0^{+\infty} F(x)^p dx = -p\int_0^{+\infty} xF(x)^{p-1}F'(x)dx$, puis que $\int_0^{+\infty} F(x)^p dx = \frac{p}{p-1}\int_0^+ \infty f(x)F(x)^{p-1}dx$.

c) En déduire l'*inégalité de Hardy* :
$$\|F\|_p \leq \frac{p}{p-1}\|f\|_p.$$

d) Démontrer l'inégalité de Hardy pour les fonctions de $\mathcal{L}^p_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}_+)$.

e) Montrer que l'inégalité de Hardy est une égalité si et seulement $f = 0$ λ-presque partout.

f) Montrer que $\frac{p}{p-1}$ ne peut être remplacé par une constante plus petite (On pourra considérer $f(x) = \mathbb{1}_{[1,A]}(x)x^{-1/p}$.