# Intégration - Contrôle Continu 2

**Exercice 1 :** (Question de cours) Énoncer le théorème de convergence dominée et en donner une démonstration.

**Exercice 2 :** Soit $f : ]a,b[ \to \mathbb{R}$ une fonction borélienne bornée. On suppose que $f \in \mathcal{L}^1_{]a,b[}(\lambda)$ et que $\lim_{x \to a^+} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$.

a) Montrer que, pour tout $t \in ]a,b[$, $x \mapsto \frac{f(x)}{\sqrt{(x-a)(t-x)}}$ est intégrable sur $]a,t[$.

b) Calculer $\lim_{t \to a^+} \int_{]a,t[} \frac{f(x)}{\sqrt{(x-a)(t-x)}} d\lambda(x)$.
(On pourra utiliser le changement[1] de variables $u = \frac{x-a}{t-a}$)

**Exercice 3 :** Pour tout entier naturel $n$ et pour tout $x \in [0, +\infty[$, soit $f_n(x) = \frac{ne^{-x}}{n\sqrt{x}+1}$.

a) Montrer que, pour tout $n$, $f_n$ est intégrable pour la mesure de Lebesgue.

b) Pour tout entier naturel $n$, soit $a_n = \int_{\mathbb{R}_+} f_n(x)dx$. Montrer que la suite $(a_n)_{n \geq 0}$ est convergente et calculer sa limite (On rappelle que $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$).

**Exercice 4 :** Calculer la limite de la suite $u_n = n \int_0^1 \frac{e^{-nt}}{\sqrt{1+t}} dt$.

[1] On admet, sans le démontrer, que les hypothèses du théorème de changement de variables sont vérifiées.