Intégration - TD6

Exercice 1 : Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré. On dit que $N \in \mathcal{P}(X)$ est négligeable pour μ s'il existe $A \subset \mathcal{A}$ tel que $N \subset A$ et $\mu(A) = 0$. Soit $\mathcal{N}$ l'ensemble des parties négligeables pour μ. Soit $\bar{\mathcal{A}} = \{A \cup N | A \in \mathcal{A},\ N \in \mathcal{N}\}$.

a) Montrer que $C \in \bar{\mathcal{A}}$ si et seulement s'il existe $A, B \in \mathcal{A}$ tels que $A \subset C \subset B$ et $\mu(B \backslash A) = 0$.

b) Montrer que $\bar{\mathcal{A}}$ est une tribu.

c) Pour tout $C \in \bar{\mathcal{A}}$, on pose $\bar{\mu}(C) = \mu(A)$ dès que $A \subset C \subset B$, où $A, B \in \mathcal{A}$ sont tels que $\mu(B \backslash A) = 0$ Montrer que $\bar{\mu}$ est bien définie et que c'est une mesure sur $\bar{\mathcal{A}}$ qui prolonge μ.

d) Montrer que $\bar{\mu}$ est complète, c'est à dire que $\bar{\mathcal{A}}$ contient toutes les parties négligeables pour $\bar{\mu}$.

Exercice 2 : [Théorème d'Egoroff] Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré tel que $\mu(X) < +\infty$ et soit $f_n : (X, \mathcal{A}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ une suite de fonctions mesurables.

a) Montrer que l'ensemble de convergence C de la suite (f_n) est mesurable.

b) On suppose que $\mu({}^cC) = 0$, c'est à dire que la suite (f_n) converge μ-p.p. vers une fonction f. Montrer que f est une fonction mesurable sur la tribu complétée $\bar{\mathcal{A}}$. On suppose maintenant f mesurable sur $\mathcal{A}$.

c) Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, soit $E_n^k = \cup_{p=1}^n \cap_{i \geq p} \{|f_i - f| \leq \dfrac{1}{k}\}$. Montrer que $C \subset \bigcup_{n \geq 1} E_n^k$. En déduire que : $\forall \epsilon$, $\forall k \in \mathbb{N}^*$, il existe $n_{k,\epsilon} \in \mathbb{N}^*$ tel que $\mu({}^cE^k_{n_{k,\epsilon}}) < \frac{\epsilon}{2^k}$.

d) En déduire que $\forall \epsilon > 0$, il existe $E_\epsilon \in \mathcal{A}$ tel que f_n converge uniformément vers f sur E_ϵ et tel que $\mu({}^cE_\epsilon) < \epsilon$. (Théorème d'Egoroff)

e) Donner un contre-exemple lorsque $\mu(X) = +\infty$.

Exercice 3 : Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré et $f_n : (X, \mathcal{A}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ une suite de fonctions mesurables. Soit $f : (X, \mathcal{A}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ une fonction mesurable. On dit que la suite $(f_n)_{n \geq 0}$ *converge en mesure* vers f si :

$$\forall \epsilon,\ \lim_n \mu(\{|f_n - f| > \epsilon\}) = 0.$$

a) Montrer que si $\mu(X) < +\infty$ et la suite $(f_n)_{n \geq 1}$ converge μ-p.p. vers f, alors elle converge en mesure vers f.

b) Réciproquement, supposons que (f_n) converge en mesure vers f :

   i) Montrer qu'il existe une sous-suite $(f_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ telle que

$$\forall k \geq 1,\ \mu(\{|f_{n_k} - f| > \frac{1}{k}) < \frac{1}{k^2}.$$

   ii) Soit $A = \varliminf_k \{|f_{n_k} - f| \leq \frac{1}{k}\}$. Montrer que (f_{n_k}) converge uniformément vers f sur A et que $\mu({}^cA) = 0$ (en d'autres termes, f_n possède une sous-suite qui converge μ-p.p. vers f).

Exercice 4 : [Un ensemble non mesurable] On note $S^1 \subset \mathbb{C}^*$ l'ensemble des nombres complexes de module 1 et on note $e : \mathbb{R} \to S^1$ l'application $t \mapsto e^{2i\pi t}$. On met sur S^1 la tribu et la mesure image des tribu et mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$.

a) Montrer que l'action $x \mapsto x + q$ de $\mathbb{Q}$ sur $\mathbb{R}$ par addition donne une action de $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ sur S^1 à travers e. On note $p : S^1 \to S^1/(\mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ le quotient, i.e. les classes de la relation d'équivalence donnée par $e^{ix} \sim e^{iy} \leftrightarrow x - y \in \mathbb{Q}$.

b) Utiliser l'axiome du choix pour construire une section t de p.

c) On note A l'image de t et on suppose A mesurable. Montrer que $S^1 = \coprod_{q \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}} q + A$.

d) En déduire que $\sum_{\mathbb{Q}/\mathbb{Z}} \mu(A) = 1$.

e) Conclure que A n'est pas mesurable sur S^1 et que $e^{-1}(A)$ n'est pas un borélien de $\mathbb{R}$.

Exercice 5 : Soit (X, d) un espace métrique et μ une mesure finie sur $\mathcal{B}(X)$. On dit que $A \in \mathcal{B}(X)$ vérifie la propriété de régularité si

$$\mu(A) = \inf\{\mu(O) | A \subset O,\ O \in \mathcal{O}(X)\} = \sup\{\mu(F) | F \subset A,\ {}^cF \in \mathcal{O}(X)\}$$

a) Soit $F \subset X$ un ensemble fermé. Montrer qu'il existe une suite O_n d'ouverts tels que $F = \cap_{n \in \mathbb{N}} O_n$.

b) En déduire que tout fermé vérifie la propriété de régularité.

c) Montrer que l'ensemble des parties vérifiant la propriété de régularité forme une tribu.

d) En déduire que tout borélien de X vérifie la propriété de régularité.