Intégration - TD12

Exercice 1 : Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$ et soit $\chi = \mathbb{1}_{[a,b]}$. Pour tout entier $n \geq 1$, on note $\chi_n = \chi * \chi * \dots \chi$ (n fois)

a) Tracer les graphes de χ_2 et de χ_3. Montrer que, pour tout $n \geq 2$, $\chi_n \in C_K^{n-2}(\mathbb{R})$.

b) Calculer $\|\chi_n\|_1$ pour $n \geq 2$ et déterminer le support de χ_n. Calculer $\|\chi_1\|_{sup}$ et montrer que, pour tout $n \geq 3$, $\|\chi_n\|_{sup} < \|\chi_{n-1}\|_1$.

c) Soit $\varphi = \sum_{n\geq 2} \chi_n$. Montrer que $\varphi \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\lambda)$ si et seulement si $b - a < 1$. Montrer qu'alors φ est continue et vérifie l'équation $\varphi = \chi * \varphi + \chi_2$. Montrer que φ n'est pas dérivable sur $\mathbb{R}$.

Exercice 2 : En considérant la convolution par la fonction $\mathbb{1}_{[0,1]}$, montrer que $L^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R})$ n'a pas d'élément neutre pour l'opération de convolution.

Exercice 3 : [Inégalité de Young]

a) Soient $p_1, \dots, p_n$ des nombres réels positifs et pour $i \in \{1, \dots, n\}$, soit $g_i \in \mathcal{L}^{p_i}_{\mathbb{R}}(\lambda_d)$. Soit $Q_n = (1/p_1 + \dots + 1/p_n)^{-1}$. Montrer que $\prod_{i=1}^n g_i \in \mathcal{L}^{Q_n}_{\mathbb{R}}(\lambda_d)$ et que $\| \prod_{i=1}^n g_i\|_{Q_n} \leq \prod_{i=1}^n \|g_i\|_{p_i}$.

b) Soient $p, q, r \in [1, +\infty]$ tels que $1 - 1/p + 1 - 1/q = 1 - 1/r$. Soit $f \in \mathcal{L}^p_{\mathbb{R}}(\lambda_d)$ et $g \in \mathcal{L}^q_{\mathbb{R}}(\lambda_d)$. Montrer que $f * g$ est définie presque partout, que $f * g \in \mathcal{L}^r_{\mathbb{R}}(\lambda_d)$ et que

$$\|f * g\|_r \leq \|f\|_p \|g\|_q. \text{ (inégalité de Young)}$$

(Indication : écrire $|f(x-y)g(y)| = |f(x-y)^p g(y)^q|^{1/r} |f(x-y)^p|^{1/p-1/r} |g(y)^q|^{1/q-1/r}$ et appliquer la première partie de l'exercice)

Exercice 4 : Soit $f \in L^1_K(\lambda_d)$ et $g \in L^p_K(\lambda_d)$ ($1 \leq p \leq +\infty$). Soit $a \in K$ tel que $|a| < \frac{1}{\|f\|_1}$. Montrer que $h \mapsto af * h + g$ définit une application contractante de $L^p_K(\lambda_d)$ dans lui-même. En déduire que l'équation $h - af * h = g$ possède une unique solution dans $L^p_K(\lambda_d)$.

Exercice 5 : Soit $f \in \mathcal{L}^1_K(\lambda_d)$ et $g \in \mathcal{L}^\infty_K(\lambda_d)$ telle que $\lim_{|x|\to+\infty} g(x) = 0$. Montrer que $f * g \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R}^d)$. Montrer, à l'aide d'un contre-exemple, que ce résultat est faux sans l'hypothèse sur g à l'infini.

Exercice 6 : Soit $(B_n)_{n\geq 0}$ une suite de boules ouvertes de $\mathbb{R}^d$ centrées à l'origine et de rayon $r_n > 0$ telle que $\lim_n r_n = 0$. Soit $f \in \mathcal{L}^1_K(\lambda_d)$ et, pour tout entier $n \geq 0$, soit $\bar{f}_n$ la fonction définie par

$$\bar{f}_n(x) = \frac{1}{\lambda_d(B_n)} \int_{x+B_n} f(y)\lambda_d(dy).$$

Montrer qu'il existe une approximation α_n de l'unité telle que $\bar{f}_n = \alpha_n * f$. En déduire qu'il existe une sous-suite $(\bar{f}_{\phi(n)})_{n\geq 0}$ qui converge presque partout vers f.