Intégration - TD3

Exercice 1 : Montrer que les ensembles suivants appartiennent à la tribu des boréliens de $\mathbb{R}$:

$$[0,1];\ [0,1[;\ [2,3[\cup\{4,5\};\ \mathbb{Q};\ \mathbb{Q}\cap[0,1]$$

$$\mathbb{Z}[\sqrt{2}] = \{m+n\sqrt{2}|(m,n)\in\mathbb{Z}^2\};\ \{x\in\mathbb{R}|\exists p,q\in\mathbb{N}, |x-\frac{p}{q}|\leq 2^{-q}\}$$

Exercice 2 : Décrire la tribu engendrée par l'ensemble des parties finies de X.

Exercice 3 : Donner un exemple de suite décroissante d'ensembles $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que pour tout n, A_n est infini et $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n = \emptyset$.

Exercice 4 :

a) Soit X un ensemble et $A_1,\ldots,A_n$ une partition finie de X. Décrire la tribu engendrée. Combien a-t'elle d'éléments ?

b) Soit X un ensemble et $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une partition de X. Décrire la tribu engendrée et montrer qu'elle est équipotente à $\mathbb{R}$.

Exercice 5 :

a) Montrer, à l'aide d'un contre-exemple, que la réunion de deux tribus n'est pas en général une tribu.

b) Soient $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ deux tribus sur X. Montrer que

$$\sigma(\mathcal{A}\cup\mathcal{B}) = \sigma(\{A\cup B|A\in\mathcal{A}, B\in\mathcal{B}\}) = \sigma(\{A\cap B|A\in\mathcal{A}, B\in\mathcal{B}\}).$$

Exercice 6 : Soit $f : X\to Y$ une application. Montrer que l'ensemble

$$\mathcal{T} = \{A\in\mathcal{P}(X)|A = f^{-1}(f(A))\}$$

est une tribu sur X.

Exercice 7 : Soit X un ensemble et $\mathcal{A}$ une tribu dénombrable sur X. Pour tout $x\in X$, soit $A(x) = \bigcap_{x\in A, A\in\mathcal{A}} A$.

a) Montrer que $A(x)\in\mathcal{A}$.

b) Soit x et x' deux éléments de X. Montrer que $A(x) = A(x')$ ou bien $A(x)\cap A(x') = \emptyset$.

c) Soit $\mathcal{E} = \{B\subset X|\exists x\in X, B = A(x)\}$. Montrer que $\mathcal{A} = \sigma(\mathcal{E})$ En déduire que toute tribu dénombrable est finie.

Exercice 8 : Soit $f : \mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ l'application définie par $f(x,y) = x$.

a) Décrire l'image par f de la tribu borélienne de $\mathbb{R}^2$.

b) Décrire $f^{-1}(\mathcal{B})$, où $\mathcal{B}$ est la tribu borélienne de $\mathbb{R}$.

Exercice 9 : Soit $(X, \mathcal{A})$ un espace mesurable et $f_n : X \to \mathbb{C}$ une suite de fonctions mesurables. Montrer que l'ensemble

$$A = \{x \in X | \text{la suite } (f_n(x))_{n\in\mathbb{N}} \text{ est convergente}\}$$

est un élément de $\mathcal{A}$.

Exercice 10 : Soit X un borélien de $\mathbb{R}$ et $f : X \to \mathbb{R}$ une fonction monotone. Montrer que f est mesurable.

Exercice 11 : Soit $(X, \mathcal{A})$ un espace mesurable et soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions mesurables de X dans $\mathbb{R}$. Montrer que les ensembles suivants sont mesurables :

$$A = \{x \in X | \lim_{n\to\infty} f_n(x) = +\infty\}$$

$$B = \{x \in X | \text{la suite } (f_n(x))_{n\in\mathbb{N}} \text{ est bornée}\}$$

Exercice 12 : Soient X et Y deux espaces métriques et $f : X \to Y$ une application dont l'ensemble des points de discontinuité est dénombrable. Montrer que f est mesurable (X et Y sont munis de leur tribu borélienne).