Intégration - TD7

Exercice 1 : Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré.

a) Soit $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mu)$ telle que, pour tout $A \in \mathcal{A}$, $\int_A f d\mu = 0$. Montrer que $f = 0$ μ-presque partout.

b) Soit $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mu)$ et F un fermé de $\mathbb{R}$ tel que, pour tout $A \in \mathcal{A}$ avec $\mu(A) > 0$, on ait $\frac{1}{\mu(A)} \int_A f d\mu \in F$. Soit $I \subset F^c$ un intervalle ouvert. Montrer que $\mu(f^{-1}(I)) = 0$. En déduire que $f(x) \in F$ pour presque tout x.

Exercice 2 :

a) Calculer $\lim_{n\to\infty} \int_0^n (1 - \frac{t}{n})^n dt$.

b) Soit $x > 0$. Montrer que la suite $I_n(x) = \int_0^n t^{x-1}(1 - \frac{t}{n})^n dt$ est bien définie pour $n \geq 1$ et converge quand $n \to \infty$. Donner une expression intégrale pour $\Gamma(x) = \lim I_n(x)$.

c) Montrer que pour tout $x > 0$ et pour tout entier $n \geq 1$, on a

$$I_n(x) = n^x \frac{n!}{\prod_{0 \leq j \leq n}(x + j)} = n^x \frac{n!}{x(x+1)\dots(x+n)}.$$

(Indication : faire le changement de variable $t = ns$ dans $I_n(x)$, raisonner par récurrence et faire une intégration par parties)

d) On défini le dilogarithme $\Psi(s) := \operatorname{dlog} \Gamma(s)$. Calculer $\operatorname{dlog} I_n(s)$.

e) En déduire que

$$\Psi(s) = \lim_{n\to\infty} \log(n) + \sum_{j=0}^{n} \int_1^{\infty} x^{s+j-1} dx.$$

(Indication : on pourra montrer la convergence uniforme de $\operatorname{dlog} I_n$)

Exercice 3 : Soit $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ une fonction borélienne bornée. On suppose que $f \in \mathcal{L}^1_{]a,b[}(\lambda)$ et que $\lim_{x\to a^+} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$.

a) Montrer que, pour tout $t \in]a, b[$, $x \mapsto \frac{f(x)}{\sqrt{(x-a)(t-x)}}$ est intégrable sur $]a, t[$.

b) Calculer $\lim_{t\to a^+} \int_{]a,t[} \frac{f(x)}{\sqrt{(x-a)(t-x)}} d\lambda(x)$. (On pourra utiliser le changement de variables $u = \frac{x-a}{t-a}$)

Exercice 4 : Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré de masse totale finie et $f : (X, \mathcal{A}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ une fonction mesurable.

a) Montrer que $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mu)$ si et seulement si $\sum_{n\geq 1} n\mu(\{n \leq |f| < n + 1\}) < +\infty$

b) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{k=1}^{n} k\mu(\{k \leq |f| < k + 1\}) = \sum_{k=1}^{n} \mu(\{|f| \geq k\}) - n\mu(\{|f| \geq n + 1\}).$$

c) Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ une suite qui converge vers 0 en décroissant et telle que la suite de terme général $v_n = \sum_{k=1}^{n} u_k - nu_{n+1}$ est bornée. Montrer que, pour tout $p \geq n$, $\sum_{k=1}^{n} u_k - nu_{p+1} \leq v_p$. En déduire que $\sum_{n\geq 1} u_n < +\infty$.

d) Montrer que $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mu)$ si et seulement si $\sum_{n\geq 1} \mu(\{|f| \geq n\}) < +\infty$.

e) Donner une contre-exemple lorsque $\mu(X) = +\infty$.

Exercice 5 :

a) Soit $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mu)$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, soit $A_n = \{2^{-n} \leq |f| \leq 2^n\}$. Montrer que f est bornée sur A_n et que $\forall \varepsilon > 0$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $\int_{X \setminus A_n} |f| d\mu < \varepsilon$.

b) En déduire que : $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$, $\forall A \in \mathcal{A}$,

$$\mu(A) \leq \delta \Rightarrow \int_A |f| d\mu \leq \epsilon$$

(continuité de l'intégrale par rapport à la mesure)

c) Soit $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R})$. Soit F la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$F(x) = \int_0^x f(t)dt = \begin{cases} \int_{[0,x]} f d\lambda \text{ si } x \geq 0 \\ -\int_{[x,0]} f d\lambda \text{ si } x < 0 \end{cases}$$

Montrer que F est uniformément continue sur $\mathbb{R}$.