Intégration - TD5

Exercice 1 : Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré, $(Y, \mathcal{B})$ un espace mesurable et $f : (X, \mathcal{A}) \to (Y, \mathcal{B})$ une fonction mesurable. Montrer que $\mu_f : \mathcal{B} \to \bar{\mathbb{R}}_+$ définie par $\mu_f(B) = \mu(f^{-1}(B))$ est une mesure sur $(Y, \mathcal{B})$.

Exercice 2 : On considère sur $\mathbb{R}$ la tribu $\mathcal{A} = \{A \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) | A \text{ est dénombrable ou } A^c \text{ est dénombrable}\}$. Soit $\mu : \mathcal{A} \to \bar{\mathbb{R}}_+$ définie par $\mu(A) = \begin{cases} 0 \text{ si } A \text{ est dénombrable} \\ 1 \text{ sinon} \end{cases}$. Montrer que μ est une mesure.

Exercice 3 :

a) Soit $(X, \mathcal{A})$ un espace mesurable et (μ_j) une suite de mesures positives sur $\mathcal{A}$. On suppose que $\forall A \in \mathcal{A}$ et $\forall j \in \mathbb{N}$, $\mu_j(A) \leq \mu_{j+1}(A)$. Pour tout $A \in \mathcal{A}$, on pose $\mu(A) = \sup_{j \in \mathbb{N}} \mu_j(A)$. Montrer que μ est une mesure.

b) Sur l'espace mesurable $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$, on définit pour tout $j \in \mathbb{N}$, $\nu_j(A) = \text{card}(A \cap [j, +\infty])$. Montrer que ν_j est une mesure sur $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ et que $\nu_j(A) \geq \nu_{j+1}(A)$.

c) Soit $\nu : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to \bar{\mathbb{R}}_+$ définie par $\nu(A) = \inf_{j \in \mathbb{N}} \nu_j(A)$. Calculer $\nu(\mathbb{N})$ et $\nu(\{k\})$ $(k \in \mathbb{N})$. En déduire que ν n'est pas une mesure.

Exercice 4 : Soit λ la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$ et soit $\epsilon > 0$. Construire un ouvert Ω dense dans $\mathbb{R}$ et tel que $\lambda(\Omega) < \epsilon$.

Exercice 5 : Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré et $f : (X, \mathcal{A}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ une fonction mesurable.

a) $\forall n \in \mathbb{N}$, soit $A_n = \{|f| \leq n\}$. Montrer que, si $\mu(X) \neq 0$, il existe n tel que $\mu(A_n) \neq 0$.

b) Montrer que si $\mu(\{f \neq 0\}) \neq 0$, alors il existe $A \in \mathcal{A}$ et $\epsilon > 0$ tels que $\mu(A) \neq 0$ et $\forall x \in A$, $|f(x)| \geq \epsilon$.

Exercice 6 : Soit μ une mesure finie sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ et $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ la fonction définie par $F(x) = \mu([x, +\infty[)$.

a) Soit $\mathcal{E} = \mathbb{R} \cup \{[x, y[| (x, y) \in \mathbb{R}, x \leq y\}$. Montrer que $\mathcal{E}$ est un Π-système. En déduire que la mesure μ est uniquement déterminée par la fonction F.

b) Montrer que F est décroissante et continue à gauche sur $\mathbb{R}$ et calculer les limites en $\{\pm\infty\}$ de F.

c) Calculer $\mu(\{x\})$ pour $x \in \mathbb{R}$ puis montrer que F est continue en x si et seulement si $\mu(\{x\}) = 0$. En déduire que $\{x \in \mathbb{R} | \mu(\{x\}) \neq 0\}$ est dénombrable.