Intégration - TD8

Exercice 1 : Déterminer la limite des suites $I_n = \int_0^1 \frac{n}{1+x^2} \tanh(\frac{x}{n})dx$ et $J_n = \int_0^1 \frac{ne^{-x}}{nx+1}dx$.

Exercice 2 :

a) Soit $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite de fonctions mesurables positives. Montrer que $\int_X \sum_{n\geq 0} f_n d\mu = \sum_{n\geq 0} \int_X f_n d\mu$.

b) Soit $(a_{p,q})_{p,q\in\mathbb{N}}$ une famille de $\mathbb{R}_+$. Montrer que $\sum_{p\geq 0}\sum_{q\geq 0} a_{p,q} = \sum_{q\geq 0}\sum_{p\geq 0} a_{p,q}$.

Exercice 3 :

– Montrer que $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{e^x-1} = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2+1}$.

– Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction borélienne telle que pour tout $a \in \mathbb{R}$, la fonction $x \mapsto e^{ax}f(x)$ est intégrable. Montrer que pour tout $z \in \mathbb{C}$, $\int_\mathbb{R} e^{zx}f(x)dx = \sum_{n\geq 0} \frac{z^n}{n!}\int_\mathbb{R} x^n f(x)dx$.

Exercice 4 :

a) En appliquant le théorème de Lebesgue à $\sum_{n\geq 0}(-1)^n x^n$ sur $[0,1]$, calculer la valeur de $\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^n}{n}$.

b) Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $0 < \mathrm{Re}(z) < 1$. Montrer que

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^{z-1}}{1+x}dx = \frac{1}{z} + \sum_{n\geq 1}(-1)^n \frac{2z}{z^2-n^2}.$$

(On pourra considérer l'intégrale sur $[0,1]$ puis sur $]1,+\infty[$)

Exercice 5 : Soit $f \in \mathcal{L}^1_\mathbb{R}(]0,1[)$ positive et monotone. Calculer $\lim_n \int_0^1 f(x^n)dx$.

Exercice 6 :

a) Soit $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite de $\mathcal{L}^1_\mathbb{R}(\mu)$. Montrer que

$$\sum_{n\geq 0}\int_X |f_n|d\mu < \infty \Rightarrow \int_X \sum_{n\geq 0} f_n d\mu = \sum_{n\geq 0}\int_X f_n d\mu.$$

b) Soit (f_n) la suite de fonctions définies sur $\mathbb{R}_+$ par $f_n(x) = e^{-nx} - 2e^{-2nx}$. Calculer

$$\int_{\mathbb{R}_+}\sum_{n\geq 1} f_n(x)dx \text{ et } \sum_{n\geq 1}\int_{\mathbb{R}_+} f_n(x)dx.$$

Exercice 7 : Soit $f(x,t) = e^{-xt}\frac{\sin x}{x}\mathbb{1}_{]0,+\infty[}(x)$.

a) Montrer que pour tout $t > 0$, la fonction $x \mapsto f(x,t)$ est Lebesgue intégrable.

b) Montrer que la fonction $F(t) = \int_\mathbb{R} f(x,t)dx$ est dérivable sur $]0,+\infty[$.

c) Calculer $F'(t)$ puis $\lim_{t\to+\infty} F(t)$. En déduire que $F(t) = \frac{\pi}{2} - \arctan t$.

Exercice 8 : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f(t) = \int_0^{+\infty}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 e^{-tx}dx$.

a) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}_+$ et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

b) Calculer f'' et les limites en $+\infty$ de f et f'. En déduire une expression simple de f.

Exercice 9 : Soit Γ la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par

$$\Gamma(t) = \int_0^{+\infty} x^{t-1} e^{-x} dx.$$

a) Montrer que Γ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}_+^*$.

b) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\Gamma(n+1) = n!$.

c) Montrer que, pour tout $t > 0$,

$$\Gamma(t+1) = \sqrt{t} t^t e^{-t} \int_{-\sqrt{t}}^{+\infty} \left(1 + \frac{y}{\sqrt{t}}\right)^t e^{-\sqrt{t} y} dy.$$

d) Montrer que, pour tout $y \geq 0$, la fonction $t \mapsto t \ln\left(1 + \frac{y}{\sqrt{t}}\right) - y\sqrt{t}$ est décroissante sur $]0, +\infty[$ et que pour tout $y \in]-\sqrt{t}, 0[$, $t \ln\left(1 + \frac{y}{\sqrt{t}}\right) - y\sqrt{t} \leq -\frac{y^2}{2}$.

e) Montrer que

$$\lim_{t \to +\infty} \int_{-\sqrt{t}}^{0} \left(1 + \frac{y}{\sqrt{t}}\right)^t e^{-\sqrt{t} y} dy = \lim_{t \to +\infty} \int_0^{+\infty} \left(1 + \frac{y}{\sqrt{t}}\right)^t e^{-\sqrt{t} y} dy = \int_0^{+\infty} e^{-y^2/2} dy.$$

f) En déduire la formule de Stirling :

$$\Gamma(t+1) \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi t}\, t^t\, e^{-t}.$$

Exercice 10 :

a) Soit $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}([0,1])$. Calculer $\lim_n \int_0^1 x^n f(x) dx$.

b) On suppose que f possède une limite quand x tend vers 1. Calculer $\lim_n \int_0^1 n x^n f(x) dx$.

c) On suppose que la fonction $x \mapsto \frac{f(x)}{1-x}$ appartient à $\mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}([0,1])$. Montrer que la suite $u_n = \int_0^1 x^n |f(x)| dx$ est décroissante et vérifie $\sum_{n \geq 0} u_n < +\infty$. En déduire $\lim_n n u_n$, puis $\lim_n \int_0^1 n x^n f(x) dx$.

Exercice 11 : Soit $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R})$. La transformée de Fourier de f est définie sur $\mathbb{R}$ par $\hat{f}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-itx} dx$.

a) Soit $f(x) = e^{-x^2}$. Calculer $\frac{d}{dt}\hat{f}(t)$. En déduire $\hat{f}(t)$.

b) Soit $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

   i) Soit $g_n(t) = \int_{-n}^{n} \frac{e^{-itx}}{1+x^2} dx$. Montrer que pour tout $a > 0$, la suite g_n' converge uniformément sur l'intervalle $[a, +\infty[$ (On pourra utiliser une intégration par parties). En déduire que $\hat{f}$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et que, pour tout $t > 0$, $\hat{f}'(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{-iu}{u^2+t^2} e^{-iu} du$.

   ii) Montrer que $\hat{f}$ est deux fois dérivable sur $]0, +\infty[$ et que $\hat{f}'' = \hat{f}$ (on pourra utiliser une intégration par parties).

   iii) Calculer $\hat{f}(0)$ et $\lim_{t \to \infty} \hat{f}(t)$. En déduire que $\hat{f}(t) = \pi e^{-|t|}$.