Intégration - Contrôle Continu 1

Exercice 1 : (Question de cours) Donner la définition d'une tribu de parties d'un ensemble.

Exercice 2 : Soit $f : X \to Y$ une application et $\mathcal{A}$ une tribu sur X. Soit

$$\mathcal{B} = \{B \in \mathcal{P}(Y) | f^{-1}(B) \in \mathcal{A}\}.$$

Montrer que $\mathcal{B}$ est une tribu.

Exercice 3 : Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction Riemann intégrable et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction lipschitzienne sur un intervalle borné contenant l'image de f. Montrer que $g \circ f$ est Riemann intégrable.

Exercice 4 : Soit $(X, \mathcal{M})$ un espace mesurable et f une application mesurable de X dans lui-même. Une partie $A \in \mathcal{M}$ est *stable* par f si $f(A) \subset A$. On note $\mathcal{S} \subset \mathcal{M}$ l'ensemble des parties stables par f.

a) Soit $A \in \mathcal{M}$. Montrer que A est stable si et seulement si $A \subset f^{-1}(A)$.

b) $\mathcal{S}$ est-elle une tribu sur X ? Si f est bijective ?

Une partie $A \in \mathcal{M}$ est *invariante* par f si $A = f^{-1}(A)$. On note $\mathcal{I} \subset \mathcal{M}$ l'ensemble des parties invariantes par f.

c) Montrer que $\mathcal{I}$ est une tribu sur X.