Intégration - TD4

Exercice 1 : Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Montrer que f est mesurable si et seulement si pour tout a, b, la restriction de f à $[a, b]$ est mesurable.

Exercice 2 : Montrer que les fonctions suivantes de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ sont mesurables :

$$x \mapsto \sin(3 + x);\ x \mapsto E(x - 2);\ \mathbb{1}_{\mathbb{Q}} + \mathbb{1}_{[0,1]};$$

$$x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} 3^{-n} \mathbb{1}_{\mathbb{Q}}(\cos(3^n x) + e^x);\ x \mapsto \begin{cases} \cos x \text{ si } x \leq 0 \\ \mathbb{1}_{\mathbb{Q}}(x) \text{ si } x > 0 \end{cases}$$

Exercice 3 :

a) Donner un exemple de fonction étagée qui n'est pas en escalier.

b) Décrire une suite de fonctions en escalier qui converge simplement vers $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}$.

Exercice 4 : Soient $(Y_i, \mathcal{B}_i)_{i \in I}$ une famille d'espaces mesurables. Soit Y un ensemble et $f_i : Y \to Y_i$ des fonctions. On note $\mathcal{B}$ la tribu engendrée par la famille des fonctions $(f_i)_{i \in I}$, c'est à dire la plus petite tribu pour laquelle les f_i sont mesurables. Montrer que $f : (X, \mathcal{A}) \to (Y, \mathcal{B})$ est mesurable si et seulement si pour tout $i \in I$, $f_i \circ f : (X, \mathcal{A}) \to (Y_i, \mathcal{B}_i)$ est mesurable.

Exercice 5 : Soit $f : (X, \mathcal{A}) \to \mathbb{C}$ une fonction mesurable. Montrer qu'il existe une fonction mesurable $\alpha : (X, \mathcal{A}) \to \mathbb{C}$ telle que $|\alpha| = 1$ et $f = \alpha |f|$. (On pourra utiliser la fonction $g(x) = f(x) + \mathbb{1}_E(x)$ où $E = f^{-1}(0)$)

Exercice 6 : Soit $f : X \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ et $\mathcal{A}_f = f^{-1}(\mathcal{B}(\mathbb{R}))$ la tribu image réciproque de $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ par f.

a) Soit $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction borélienne. Montrer que $g = h \circ f$ est une fonctions mesurable de $(X, \mathcal{A}_f)$ dans $\mathbb{R}$.

b) Soit $s : (X, \mathcal{A}_f) \to \mathbb{R}$ une fonction étagée mesurable. Montrer qu'il existe une fonction borélienne t telle que $s = t \circ f$

c) Montrer que si $g : (X, \mathcal{A}) \to \mathbb{R}$ est mesurable, alors il existe h borélienne telle que $g = h \circ f$. (On pourra approcher g par une suite de fonctions étagées)

Exercice 7 :

a) Montrer que $\mathcal{A} = \{A \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) | A = -A\}$ est une tribu de $\mathbb{R}$.

b) Caractériser les fonctions mesurables de $(\mathbb{R}, \mathcal{A})$ dans $(\mathbb{R}, \mathcal{A})$ et les fonctions mesurables de $(\mathbb{R}, \mathcal{A})$ dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$.

Exercice 8 :

a) Montrer que toute fonction réglée de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est borélienne.

b) En déduire que toute fonction monotone de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est borélienne.

c) Retrouver le résultat du b) en utilisant le fait que l'ensemble des points de discontinuité d'une fonction monotone est dénombrable.