Intégration - TD1

Exercice 1 : Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction monotone.

a) Montrer que f est intégrable au sens de Riemann.

b) Montrer que f possède en tout point de $[a, b[$ (resp. $]a, b]$) une limite à droite (resp. à gauche).

Exercice 2 : Soient $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ deux fonctions intégrables au sens de Riemann.

a) Montrer que $|f|$ est intégrable et que $|\int_a^b f| \le \int_a^b |f|$.

b) Montrer que $\forall\, p \in \mathbb{N}$, $|f|^p$ est intégrable au sens de Riemann.

c) Montrer que fg est intégrable au sens de Riemann.

Exercice 3 : Soit $f : [0, 1] \to [0, 1]$ la fonction définie par

$$f(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x \notin \mathbb{Q} \\ 1/q \text{ si } x = p/q, (p, q) \in \mathbb{N}^2, p \wedge q = 1 \end{cases}$$

a) Etudier la continuité de f.

b) Fabriquer une suite de fonctions en escalier qui converge uniformément vers f.

c) Montrer que f est une fonction réglée.

d) Calculer $\int_0^1 f(x)dx$.

Exercice 4 : Montrer qu'une fonction $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est réglée si et seulement si elle admet en tout point une limite à gauche et une limite à droite.

Exercice 5 : Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}_+^*$ une fonction intégrable au sens de Riemann. Montrer que $\int_a^b f > 0$ (Indication : on pourra raisonner par l'absurde et construire une suite de segments I_n emboîtés tels que $\forall x \in I_n$, $f(x) < 1/n$).

Exercice 6 : Soit $f \in \mathscr{I}([a, b], \mathbb{R})$.

a) Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction lipschitzienne sur un intervalle borné contenant l'image de f. Montrer que $g \circ f \in \mathscr{I}([a, b], \mathbb{R})$.

b) Plus généralement, montrer que $g \circ f \in \mathscr{I}([a, b], \mathbb{R})$ si g est simplement continue. (Indication : utiliser le théorème de Weierstrass)

Exercice 7 : Soient $f, g : [0, 1] \to \mathbb{R}$ continues telles que f soit décroissante et $0 \le g \le 1$. Montrer que

$$\int_0^1 f(x)g(x)dx \le \int_0^I f(x)dx, \text{ où } I := \int_0^1 g(x)dx.$$

(Indication : considérer $H - F \circ G$, où F, G, H sont les primitives respectives de f, g et de fg)

Exercice 8 : Soit $(f_n)_{n\ge 1}$ la suite de fonctions définies sur $[0, 1]$ par $f_n(x) := \sum_{k=1}^n \frac{x^k}{k}$. Montrer que la suite (f_n) est de Cauchy mais ne converge pas dans $(\mathscr{C}([0, 1], \mathbb{R}), N_1)$ où $N_1(f) := \int_0^1 |f|$.

Exercice 9 :

a) Soit $f \in \mathscr{I}([a,b],\mathbb{C})$. Montrer que $\lim_n \int_a^b f(x)e^{inx}dx = 0$.

b) Déterminer deux réels α et β tels que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\int_0^{\pi} (\alpha x + \beta x^2)\cos(nx)dx = \frac{1}{n^2}.$$

En déduire, à l'aide du a), la valeur de $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$.

Exercice 10 :

a) Pour $1 \leq k \leq n$, montrer que

$$\frac{1}{n}\ln\frac{k}{n} \leq \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} \ln x dx \leq \frac{1}{n}\ln\frac{k+1}{n}.$$

b) En déduire $\int_1^2 \ln x dx \leq \frac{1}{n}\sum_{k=n+1}^{2n} \ln\frac{k}{n} \leq \int_{1+\frac{1}{n}}^{2+\frac{1}{n}} \ln x dx$.

c) Calculer la limite de la suite (u_n) de terme général $u_n := \left(\frac{(2n)!}{n!n^n}\right)^{1/n}$.