Intégration - TD0

Si A est une partie d'un ensemble X, la fonction indicatrice $\mathbb{1}_A : X \to \mathbb{R}$ est la fonction $x \mapsto 1$ si $x \in A$ et $x \mapsto 0$ si $x \notin A$.

Exercice 1 : Soit $f : X \to \mathbb{R}$ une fonction. A quelle condition f est-elle une fonction indicatrice ?

Exercice 2 : Soient A, B, C des parties de X. Les fonctions suivantes sont elles des indicatrices et si oui, de quelle partie ?

a) $\mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B$;

b) $\mathbb{1}_A - \mathbb{1}_B$;

c) $\mathbb{1}_A.\mathbb{1}_B$;

d) $|\mathbb{1}_A - \mathbb{1}_B|$;

e) $\mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - \mathbb{1}_A.\mathbb{1}_B$;

f) $||\mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B| - \mathbb{1}_C|$;

g) $|\mathbb{1}_A - |\mathbb{1}_B - \mathbb{1}_C||$;

h) $\sup(\mathbb{1}_A, \mathbb{1}_B)$;

i) $\inf(\mathbb{1}_A, \mathbb{1}_B)$.

Exercice 3 : Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de parties de X. Montrer que la fonction $\sup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{1}_{A_n}$ est une indicatrice. De quelle partie ? A quelle condition $\sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{1}_{A_n}$ est elle une indicatrice et de quelle partie ?

Exercice 4 : Une application $f : X \to Y$ entre deux ensembles est appelée un épimorphisme (resp. monomorphisme) d'ensembles si pour tout couple d'applications $g_1, g_2 : Y \to Z$ (resp. $h_1, h_2 : Z \to X$), on a l'implication

$$g_1 \circ f = g_2 \circ f \Rightarrow g_1 = g_2$$
$$(\text{resp. } f \circ h_1 = f \circ h_2 \Rightarrow h_1 = h_2).$$

L'application $f : X \to Y$ est appelée un isomorphisme d'ensembles si il existe $g : Y \to X$ telle que

$$f \circ g = \mathrm{id}_Y \text{ et } g \circ f = \mathrm{id}_X.$$

a) Montrer que f est un épimorphisme si et seulement si f est surjective.

b) Montrer que f est un monomorphisme si et seulement si f est injective.

c) Montrer que f est un isomorphisme si et seulement si f est bijective.

Exercice 5 : Montrer qu'il n'existe pas d'ensemble de tous les ensembles.