Intégration - TD13

Exercice 1 : Si $f \in L^1_{\mathbb{R}}(\lambda)$, on note $\hat{f}(x) = \int_{\mathbb{R}} f(\xi)e^{-ix\xi}d\xi$ sa transformée de Fourier.

a) Montrer que $\hat{f}$ est continue.

b) Montrer que $\|\hat{f}\|_\infty \leq \|f\|_1$.

c) Montrer que $2\hat{f}(x) = \int_{\mathbb{R}}[f(\xi) - f(\xi - \pi/x)e^{-ix\xi}d\xi$. En déduire que $\hat{f} \in C_0(\mathbb{R})$.

Exercice 2 : Soient f et g deux éléments de $L^1_{\mathbb{R}}(\lambda)$. Montrer que $\widehat{f * g} = \hat{f}.\hat{g}$.

Exercice 3 :

a) Soit $f \in L^1_{\mathbb{R}}(\lambda)$ telle que $xf(x) \in L^1_{\mathbb{R}}(\lambda)$. Montrer que $\hat{f}$ est dérivable et que $(\hat{f})'(t) = -i\int_{\mathbb{R}} xf(x)e^{-itx}dx$.

b) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 telle que $f' \in L^1_{\mathbb{R}}(\lambda)$. Montrer que $\widehat{(f')}(t) = -it\hat{f}(t)$. (On montrera d'abord que $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)$ existent, puis on calculera l'intégrale $\hat{f}$ par parties).

c) Soit $f \in \mathcal{C}^\infty_c(\mathbb{R})$ une fonction $\mathcal{C}^\infty$ à support compact. Montrer que $\widehat{(\frac{\partial^n f}{\partial x^n})}(t) = (-i)^n t^n \hat{f}(t)$.

d) Soit $f \in \mathcal{C}^\infty_c(\mathbb{R})$, $P \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme et $D = -i\frac{\partial}{\partial x}$. On note $P(D)$ le polynôme différentiel obtenu en remplaçant X par D. Montrer que $(\widehat{P(D)f})(t) = P(t) \cdot \hat{f}(t)$.

Exercice 4 : Soit $\varphi \in C^\infty_c(\mathbb{R})$ et $u : \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}, (t,x) \mapsto u_t(x)$ une fonction, qui va décrire la température en un point x au temps t. On note $\hat{u}_t(k)$ la transformée de Fourier de la fonction $x \mapsto u_t(x)$. On suppose que $u_0 = \varphi$ et $\int_{\mathbb{R}} x^2|u_t(x)|dx < +\infty$. L'*équation de la chaleur* est l'équation différentielle

$$\frac{\partial}{\partial t}u_t(x) = \frac{\partial^2}{\partial x^2}u_t(x). \tag{1}$$

a) Montrer que l'hypothèse sur u implique que $\hat{u}_t(k)$ est deux fois dérivable en k.

b) Montrer que la transformée de Fourier de $\frac{\partial^2}{\partial x^2}u_t(x)$ est égale à $-\frac{k^2}{2}\hat{u}_t(k)$.

c) En déduire qu'après transformation de Fourier, l'équation de le chaleur s'écrit

$$\frac{\partial}{\partial t}\hat{u}_t(k) = -\frac{k^2}{2}\hat{u}_t(k) \tag{2}$$

et montrer que la solution de cette équation est $\hat{u}_t(k) = \hat{\varphi}(k)e^{-\frac{k^2}{2}t}$.

d) On démontrera ou on admettra (Feuille 8, exercice 11) que $e^{-\frac{k^2}{2}t}$ a pour transformée de Fourier la fonction $\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}e^{-\frac{|x|^2}{2t}}$.

e) Montrer, en utilisant que la transformée de Fourier envoie le produit de convolution sur le produit (exercice 2), que la solution de l'équation de la chaleur s'écrit

$$u_t(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\int_{\mathbb{R}} \varphi(y)e^{-\frac{|x-y|^2}{2t}}dy.$$

Exercice 5 : Soit H la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $H(t) = e^{-|t|}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, soit $h_n(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} H(t/n)e^{itx}dt$.

a) Montrer que h_n est une approximation de l'unité.

b) Montrer que, si $f \in L^1_{\mathbb{R}}(\lambda)$, $f * h_n(x) = \int_{\mathbb{R}} H(t/n)\hat{f}(t)e^{itx}dt$.

c) Soit $f \in L^1_{\mathbb{R}}(\lambda)$ telle que $\hat{f} \in L^1_{\mathbb{R}}(\lambda)$. Soit g définie par $g(x) = \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(t)e^{itx}dt$. Montrer que $g \in C_0$ et que $f(x) = g(x)$ λ-presque-partout.