Intégration - Contrôle Continu 2

(Noté sur 17=5+4+4+4)

Exercice 1 : (Question de cours) Énoncer précisément et avec toutes leurs hypothèses

a) le lemme de Fatou,
b) le théorème de convergence monotone,
c) le théorème de convergence dominée,
d) le théorème de changement de variable,
e) le théorème de Fubini.

Solution de l'exercice 1. Voir le cours.

Exercice 2 : Donner la mesure de Lebesgue λ_2 des sous-ensembles suivants de $\mathbb{R}^2$:

a) $D = \{(x,0) \,|\, x \in \mathbb{R}\}$.
b) $\mathbb{Q}^2$.
c) $\mathbb{R} \times \mathbb{Q}$.
d) $\mathbb{R} \times (\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q})$.

Solution de l'exercice 2.

a) $\lambda_2(D) = \lim_n \lambda_2([-n,n] \times \{0\}) = \lim_n 2n.0 = 0$ par Beppo-Levi.
b) $\lambda_2(\mathbb{Q}^2) = \sum_{q \in \mathbb{Q}^2} \lambda_2(\{q\}) = 0$.
c) $\lambda_2(\mathbb{R} \times \mathbb{Q}) = \sum_{q \in \mathbb{Q}} \lambda_2(D + (0,q)) = \sum_{q \in \mathbb{Q}} \lambda_2(D) = 0$ par la réponse au a).
d) $\lambda_2(\mathbb{R} \times (\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q})) = \lambda_1(\mathbb{R})\lambda_1(\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}) = +\infty$.

Exercice 3 : Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et f définie sur $\mathbb{R}_+^2$ par $f(x,y) = \frac{1}{(1+x+y)^\alpha}$. Déterminer les valeurs de α pour lesquelles f est intégrable. Calculer alors son intégrale.

Solution de l'exercice 3. La fonction f est mesurable positive et la mesure de Lebesgue est σ-finie donc on peut appliquer le théorème de Fubini-Lebesgue. L'intégrale de $f(x,y)$ par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}_+^2$ est donc donnée par intégrations successives. La fonction $x \mapsto f(x,y)$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ si et seulement si $\alpha > 1$ et son intégrale vaut alors

$$\int_{\mathbb{R}_+} f(x,y)dx = \left[\frac{(1+x+y)^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\right]_0^\infty = \frac{(1+y)^{-\alpha+1}}{\alpha-1}.$$

Il convient de justifier ce calcul en appliquant le théorème de convergence monotone à la suite croissante de fonctions mesurables positives $x \mapsto \mathbb{1}_{[0,n]}(x)f(x,y)$ qui converge vers $x \mapsto f(x,y)$. La fonction $y \mapsto \frac{(1+y)^{-\alpha+1}}{\alpha-1}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ si et seulement si $\alpha > 2$ et son intégrale vaut alors $\frac{1}{(\alpha-1)(\alpha-2)}$. Ceci est aussi justifié par l'application du thèorème de convergence monotone à la suite croissante de fonctions mesurables positives $y \mapsto \mathbb{1}_{[0,n]}(y)\frac{(1+y)^{-\alpha+1}}{\alpha-1}$. On conclut par le thèorème de Fubini-Lebesgue énoncé plus haut que

$$\int_{\mathbb{R}_+^2} f(x,y) = \frac{1}{(\alpha-1)(\alpha-2)}.$$

Exercice 4 : Pour tout entier naturel n et pour tout $x \in [0,+\infty[$, soit $f_n(x) = \frac{ne^{-x}}{n\sqrt{x}+1}$.

a) Montrer que, pour tout n, f_n est intégrable pour la mesure de Lebesgue.

b) Pour tout entier naturel n, soit $a_n = \int_{\mathbb{R}_+} f_n(x)dx$. Montrer que la suite $(a_n)_{n\geq 0}$ est convergente et calculer sa limite (On rappelle que $\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$).

Solution de l'exercice 4. On commence par supposer dans toute la suite $n > 0$.

a) Pour tout $x \in]0, +\infty[$, la suite de fonctions $f_n(x) = \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}+\frac{1}{n}}$ est croissante et

$$f(x) := \lim f_n(x) = \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}.$$

Pour tout n et tout $x > 0$, on dispose de la majoration

$$f_n(x) \leq \frac{1}{\sqrt{x}}\mathbb{1}_{]0,1[}(x) + e^{-x}\mathbb{1}_{[1,+\infty[}(x).$$

de $f_n(x)$ par deux fonctions intégrables.

b) Le théorème de Beppo Levi nous donne la convergence de a_n vers l'intégrale de f. Le changement de variable permet de conclure que la limite est $\sqrt{\pi}$.