# Intégration - TD9

**Exercice 1 :** Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et soit $f$ définie sur $\mathbb{R}_+^2$ par $f(x,y) = \frac{1}{(1+x+y)^\alpha}$. Déterminer les valeurs de $\alpha$ pour lesquelles $f$ est intégrable. Calculer alors son intégrale.

**Exercice 2 :**

a) Montrer que, pour tout $x > 0$, $\frac{1}{x} = \int_0^{+\infty} e^{-xt} dt$.

b) Soit $a > 0$. Montrer que $\int_0^a \frac{\sin x}{x} dx = \int_0^{+\infty} \left( \int_0^a e^{-xt} \sin x dx \right) dt$.

c) Calculer $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$.

d) Montrer que la fonction $\frac{\sin x}{x}$ n'est pas intégrable sur $[0, +\infty[$. (On pourra monter que $\frac{\sin^2 x}{x}$ n'est pas intégrable sur $[0, +\infty[$)

**Exercice 3 :** On considère les fonctions définies sur $\mathbb{R}^2$ par

$$f_1(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$$f_2(x,y) = \begin{cases} \frac{x-y}{(x^2+y^2)^{3/2}} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

a) Calculer pour $j = 1, 2$

$$\int_0^1 \left( \int_0^1 f_j(x,y) dy \right) dx \text{ et } \int_0^1 \left( \int_0^1 f_j(x,y) dx \right) dy.$$

b) Conclusions ?

**Exercice 4 :** Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ une fonction borélienne positive.

a) Montrer que $A_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | 0 \leq y \leq f(x)\}$ est un borélien de $\mathbb{R}^2$ et calculer $\lambda_2(A_f)$.

b) Soit $G_f = \{(x, f(x)) | x \in \mathbb{R}\}$ le graphe de $f$. Montrer que $G_f$ est un borélien de $\mathbb{R}$. En déduire que pour presque tout $y$, $\{x \in \mathbb{R} | f(x) = y\}$ est un ensemble de mesure nulle pour la mesure de Lebesgue $\lambda$.