Intégration - TD2

Exercice 1 :

a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $\mathbb{N}^n$ est dénombrable.

b) En déduire que le produit cartésien d'un nombre fini d'ensembles dénombrables est dénombrable.

c) Soit E un ensemble dénombrable infini et, pour tout $e \in E$, soit X_e un ensemble dénombrable de cardinal au moins égal à 2. Montrer que $\prod_{e \in E} X_e$ n'est pas dénombrable.

Exercice 2 : Soit X un ensemble infini dénombrable.

a) Montrer que l'ensemble des parties finies de X est dénombrable.

b) En déduire que l'ensemble des parties infinies de X n'est pas dénombrable.

Exercice 3 :

a) Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction monotone. Montrer que l'ensemble des points de discontinuité de f est dénombrable.
(On pourra considérer les ensembles $J(n) = \{x \in]a,b] / |f(x_+) - f(x_-)| > 1/n\}$)

b) Même question pour $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Exercice 4 : On rappelle qu'un nombre réel est dit algébrique s'il est racine d'un polynôme à coefficients entiers. Montrer que l'ensemble des nombres algébriques est dénombrable.

Exercice 5 :

a) Montrer que :

$$\mathbf{1}_{\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right)} = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \sum_{\substack{I \subset \{1,\dots n\} \\ \mathrm{card}\,(I) = k}} \mathbf{1}_{\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right)}$$

b) Si X est fini, en déduire la "Formule de Poincaré" :

$$\mathrm{card}\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \sum_{\substack{I \subset \{1,\dots n\} \\ \mathrm{card}\,(I) = k}} \mathrm{card}\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right)$$