Intégration - Contrôle Continu 2

Exercice 1 : (Question de cours) Énoncer, sans la démontrer, l'inégalité de Hölder pour $f \in \mathcal{L}^p$ et $g \in \mathcal{L}^q$ (en précisant le cas d'égalité).

Exercice 2 : Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré, $f \in L^1(X, \mathcal{A}, \mu)$ et $(f_n)_{n \geq 1}$ une suite de $L^1(X, \mathcal{A}, \mu)$ telle que $\lim_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu = \int_X f d\mu$.

a) Montrer que si les fonctions f_n sont positives et si la suite (f_n) converge presque partout vers f, alors (f_n) converge vers f dans L^1. (On pourra considérer $g_n = \min(f, f_n)$ et utiliser l'égalité $|f - f_n| = f + f_n - 2g_n$)

b) Soit $f_n \in L^1(\mathbb{R}, \mathcal{B}, \lambda)$ définie par $f_n = n\mathbb{1}_{]0,1/n[} - n\mathbb{1}_{]-1/n,0[}$.
- Montrer que $(f_n)_{n\geq 1}$ converge vers 0.
- Montrer que $\lim_n \int f_n d\lambda = 0$.
- La suite $(f_n)_{n\geq 1}$ converge-t'elle vers 0 dans L^p $(p \geq 1)$?