Intégration - TD10

Exercice 1 : Soit $(\mathbb{R}, \mathcal{A}, \mu)$ un espace probabilisé. Soit f et g deux fonctions de $\mathcal{L}^1_{\mathbb{R}_+}(\mu)$ vérifiant $fg \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}_+}(\mu)$ et monotones de même sens. Montrer que

$$\int_{\mathbb{R}} fg d\mu \geq \int_{\mathbb{R}} f d\mu \int_{\mathbb{R}} g d\mu.$$

(Indication : considérer la fonction $\varphi(x,y) = (f(x) - f(y))(g(x) - g(y)))$

Exercice 2 : Soient μ et ν deux mesures σ-finies définies sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$.

a) Montrer que l'ensemble $D = \{x \in \mathbb{R} | \mu(\{x\}) > 0\}$ est dénombrable.

b) Montrer que $(\mu \otimes \nu)(\Delta) = \sum_{x \in \mathbb{R}} \mu(\{x\})\nu(\{x\})$ où Δ est la diagonale de $\mathbb{R}^2$.

Exercice 3 :

a) Calculer de deux façons différentes $\int_{\mathbb{R}^2_+} \frac{dxdy}{(1+y)(1+x^2y)}$ et en déduire la valeur de $\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2-1} dx$.

b) En déduire l'égalité $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$.

Exercice 4 : Soit Δ et D deux ouverts de $\mathbb{R}^d$ et $\varphi : \Delta \to D$ un C^1-difféomorphisme de jacobien J_φ.

a) Montrer que J_φ est intégrable sur Δ si et seulement si $\lambda_d(D) < +\infty$.

b) Montrer que J_φ est borné sur Δ si et seulement si il existe $c > 0$ tel que, pour tout ouvert $\Omega \subset \Delta$, $\lambda_d(\varphi(\Omega)) \leq c\lambda_d(\Omega)$.

Exercice 5 : Soit $\Delta =]0,1[^2 \times]-\pi, \pi[$ et $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'application définie par $\varphi(u,v,w) = (u, uv\cos w, v \sin w)$.

a) Montrer que φ est un C^1 difféomorphisme de Δ sur son image.

b) Calculer $\lambda_3(\varphi(\Delta))$.

Exercice 6 :

a) Déterminer les ouverts connexes maximaux Δ et D de $(\mathbb{R}^*_+)^2$ tel que l'application φ définie sur $\mathbb{R}^2$ par $\varphi(u,v) = (u^2 + v^2, 2uv)$ définisse un C^1-difféomorphisme de Δ sur D.

b) En déduire la valeur de $\int_{\mathbb{R}^2_+} |u^4 - v^4| e^{-(u+v)^2} dudv$.