GEORGES MALTSINIOTIS

G.A.G.A. affine

Astérisque, tome 17 (1974), p. 141-160

<http://www.numdam.org/item?id=AST_1974__17__141_0>

G.A.G.A. AFFINE

(D'après Pierre DELIGNE)

par Georges MALTSINIOTIS

INTRODUCTION

Le but du présent exposé est de démontrer un résultat analogue au théorème de comparaison de la cohomologie algébrique d'un faisceau algébrique cohérent sur une variété algébrique propre sur C à la cohomologie analytique du faisceau analytique cohérent correspondant, dans le cas d'une variété algébrique sur C non nécessairement propre. D'une façon plus précise, on démontrera que la cohomologie algébrique d'un faisceau algébrique localement libre de rang fini sur une variété algébrique lisse est isomorphe à la cohomologie du complexe de Dolbeault de formes différentielles "modérées" à valeurs dans le faisceau analytique associé ; la notion de forme différentielle modérée étant définie au paragraphe 2. Ce résultat ainsi que sa démonstration sont basés sur un manuscrit de P. Deligne rédigé en Janvier 1970. Les définitions et les résultats du paragraphe 1 sont exposés plus en détail dans [1], chapitre II, paragraphe 2.

MODERATION

§ 1.

Toutes les variétés considérées dans ce paragraphe seront supposées séparées et dénombrables à l'infini.

Soit X^* une variété analytique complexe. On appelle compactification partielle de X^* une immersion ouverte d'image dense $i : X^* \hookrightarrow X$ où X est analytique et $X - X^*$ un fermé analytique de X. Soient $i_1 : X^* \hookrightarrow X_1$ et $i_2 : X^* \hookrightarrow X_2$ deux compactifications partielles de X^*. On dit qu'elles sont équivalentes s'il existe une compactification partielle $i_3 : X^* \hookrightarrow X_3$ et deux diagrammes commutatifs

$$\begin{tikzcd} X^* \arrow[r, hook, "i_3"] \arrow[dr, hook, "i_K"'] & X_3 \arrow[d, "f_K"] \\ & X_K \end{tikzcd} \qquad K = 1,2 \text{ et } f_K \text{ propre.}$$

Cette relation est une relation d'équivalence car, si on a des compactifications partielles $i_K : X^* \hookrightarrow X_K$, $K = 1,2,3$ et des diagrammes commutatifs

$$\begin{tikzcd} X^* \arrow[r, hook, "i_4"] \arrow[dr, hook, "i_K"'] & X_4 \arrow[d, "f_K"] \\ & X_K \end{tikzcd} \qquad K = 1,2 \,,\ f_K \text{ propre}$$

$$\begin{tikzcd} X^* \arrow[r, hook, "i_5"] \arrow[dr, hook, "i_K"'] & X_5 \arrow[d, "g_K"] \\ & X_K \end{tikzcd} \qquad K = 2,3 \,,\ g_K \text{ propre}$$

on obtient un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} X^* \arrow[r, hook, "i_6"] \arrow[dr, hook, "i_K"'] & X_6 \arrow[d, "h_K"] \\ & X_K \end{tikzcd} \qquad K = 1,3 \,,\ h_K \text{ propre}$$

en prenant pour X_6 une résolution de singularités de $X_4 \times_{X_2} X_5$.

Si $i_1 : X^* \hookrightarrow X_1$ et $i_2 : X^* \hookrightarrow X_2$ sont deux compactifications partielles de X^* équivalentes, les traces de compactes de X_1 et de X_2 sur X^* sont les mêmes. Si $i : X^* \hookrightarrow X$ est une compactification partielle de X^* telle que X est compacte, on dit que c'est une compactification de X.

Soient $i : X^* \hookrightarrow X$ une compactification partielle de X^*, $Y = X - X^*$. On dit qu'une fonction $f : X^* \longrightarrow \mathbb{R}$ continue a une croissance modérée le long de Y, si pour tout ouvert U de X tel que $Y \cap U$ soit défini dans U par une famille finie d'équations $f_i = 0$, et tout compact K de U il existe des constantes $A, \rho > 0$ telles que

$$(1) \qquad \forall x \in K \cap X^* \ , \quad |f(x)| \leqslant \frac{A}{(\Sigma f_i(x)\,\overline{f_i(x)})} \quad .$$

<u>Remarque</u> 1.- Par le Nullstellensatz $\mathbb{C}$-analytique, si l'inégalité (1) est vérifiée pour un système d'équations de $Y \cap U$ dans U elle est vérifiée (avec d'autres constantes) pour tout autre système d'équations de $Y \cap U$.

<u>Remarque</u> 2.- S'il existe un recouvrement ouvert U_i de X tel que, pour tout i, $Y \cap U_i$ soit défini par une famille finie d'équations $f_{ij} = 0$ et tel que pour tout compact K de U_i, il existe des constantes $A, \rho > 0$ telles que

$$\forall x \in K \cap X^* \ , \quad |f(x)| \leqslant \frac{A}{(\sum_j f_{ij}(x)\,\overline{f_{ij}(x)})^{\rho}}$$

alors f a une croissance modérée le long de Y. En effet, soient U un ouvert de X, tel que $Y \cap U$ soit défini par une famille finie d'équations $f = 0$, et K un compact de U. Soit V_i un recouvrement fini de K par des ouverts de U relativement compacts dans U, plus fin que U_i, tel que V_i soit relativement compact dans U_i. Suivant la remarque 1, pour tout i, il existe des constantes $A_i, \rho_i > 0$ tels que

$$\forall x \in (K \cap \overline{V}_i) \cap X^* \ , \quad |f(x)| \leqslant \frac{A_i}{(\Sigma f_i(x)\,\overline{f_i(x)})^{\rho_i}} \quad .$$

Vu que les V_i sont en nombre fini, si $A = \sup A_i$, $\rho = \inf \rho_i$

$$\forall x \in K \cap X^* \quad , \quad |f(x)| \leqslant \frac{A}{(\Sigma f_i(x)\,\overline{f_i(x)})^{\rho}} \quad .$$

PROPOSITION 1.- Soient $i : X^* \hookrightarrow X$ une compactification partielle de X^* , $Y = X - X^*$, $f : X^* \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Pour que f ait une croissance modérée le long de Y il faut et il suffit qu'il existe un recouvrement ouvert U_i de X et des fonctions $\mathbb{R}$-analytiques $g_i : U_i \longrightarrow \mathbb{R}$ ne s'annulant pas en dehors de $U_i \cap Y$ et pour tout compact K de U_i des constantes $A > 0$, $\rho > 0$ telles que

$$\forall x \in K \cap X^* \quad , \quad |f(x)| \leqslant \frac{A}{|g_i(x)|^{\rho}} \quad .$$

Démonstration. La condition est nécessaire par définition. Démontrons qu'elle est suffisante. Quitte à remplacer le recouvrement U_i par un recouvrement plus fin, on peut supposer que $U_i \cap Y$ est défini dans U_i par une famille finie d'équations $f_{ij} = 0$ et que les ouverts U_i s'identifient à des ouverts de $\mathbb{C}^{n_i}$. Soit V_{ik} un recouvrement de U_i par des polydisques ouverts relativement compacts dans U_i . Il suffit, suivant la remarque 2, de démontrer que, pour tout compact K de V_{ik} , il existe des constantes a , $N > 0$ telles que

$$\forall x \in K \cap X^* \quad , \quad \frac{1}{|g_i(x)|} \leqslant \frac{A}{(\sum_j f_{ij}(x)\,\overline{f_{ij}(x)})^{N}} \quad .$$

Or suivant une forme du Nullstellensatz $\mathbb{R}$-analytique ([3], n°18, th. 2, p. 85), il existe des constantes B, $N > 0$ tels que

$$\forall x \in K \quad , \quad |g_i(x)| \geqslant B\ d(x,Z)^N$$

où Z est l'ensemble des zéros de g_i dans V_{ik} et d est la distance hermitienne canonique (V_{ik} étant considéré comme un ouvert de $\mathbb{C}^{n_i}$). Or $Z \subset Y \cap V_{ik}$ par hypothèse. Donc

$$d(x,Z) \geqslant d(x\,,\, Y \cap V_{ik}) \quad .$$

Si on pose $f_i = \sum_j f_{ij}\,\overline{f}_{ij}$, il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\forall x\,,\, y \in V_{ik} \quad , \quad |f_i(x) - f_i(y)| \leqslant C \quad , \quad d(x,y) = C\,\|x - y\|$$

(formule des accroissements finis, compacité et connexité de $\overline{V}_{ik} \subset U_i$).

On en déduit que

$$\forall x \in K \cap X^* \quad , \quad \forall y \in Y \cap V_{ik} \quad , \quad d(x,y) \geqslant \frac{1}{C}\, f_i(x)$$

donc $d(x\,,\, Y \quad V_{ik}) \quad \frac{1}{C}\, f_i(x)$ et par suite

$$\forall x \in K \cap X^* \quad , \quad \frac{1}{|g_i(x)|} \leqslant \frac{C^N / B}{f_i(x)^N}$$

d'où le résultat.

PROPOSITION 2.- Soient $i_1 : X^* \hookrightarrow X_1$, $i_2 : X^* \hookrightarrow X^2$ deux compactifications partielles équivalentes de X^* , $Y_1 = X_1 - X^*$, $Y_2 = X_2 - X^*$, $f : X^* \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors f a une croissance modérée le long de Y_1 si et seulement si elle a une croissance modérée le long de Y_2 ([1], II, 2, 19).

Soient $i : X^* \hookrightarrow X$ une compactification partielle de X^* et g une structure hermitienne sur X^* . On dit que la structure hermitienne g est adaptée à la compactification partielle X s'il existe une structure hermitienne g' sur X telle que $g = i^*g'$.

THEOREME 1.- Si $i_1 : X^* \hookrightarrow X_1$ et $i_2 : X^* \hookrightarrow X_2$ sont deux compactifications partielles équivalentes, g_1 (resp. g_2) une structure hermitienne sur X^* adaptée à la compactification partielle X_1 (resp. X_2) alors il existe une fonction continue $\delta : X^* \longrightarrow \mathbb{R}_+$ ayant une croissance modérée le long de $Y_1 = X_1 - X^*$ (ou de $Y_2 = X_2 - X^*$ ce qui est équivalent suivant la proposition 2) telle que $dg_1 \leqslant \delta dg_2$ et $dg_2 \leqslant \delta dg_1$ où dg_1 (resp. dg_2) désigne l'élément de volume associé à la structure hermitienne g_1 (resp. g_2) .

Démonstration. Suivant la définition des compactifications partielles équivalentes, il suffit de démontrer le résultat dans le cas où il existe un morphisme propre $f : X_1 \longrightarrow X_2$ rendant le diagramme

$$\begin{tikzcd} X^* \arrow[r, hook, "i_1"] \arrow[dr, hook, "i_2"'] & X_1 \arrow[d, "f"] \\ & X_2 \end{tikzcd}$$

commutatif. Soit g'_1 (resp. g'_2) une structure hermitienne sur X_1 (resp. X_2) telle que $g_1 = i_1^* g'_1$ (resp. $g_2 = i_2^* g'_2$) . Posons $f^*(dg'_2) = \delta dg'_1$. La fonction $\delta : X_1 \longrightarrow \mathbb{R}_+$ est une fonction continue qui s'annule au plus dans Y_1 . Il suffit de démontrer que les fonctions continues sur X^* , $\delta|X^*$ et $\frac{1}{\delta|X^*}$ ont une croissance modérée le long de Y_1 . La fonction δ étant continue sur X_1 , elle est formée sur tout compact de X_1 , donc $\delta|X^*$ a une croissance modérée le long de Y_1 .

Démontrons que $\frac{1}{\delta|X^*}$ a une croissance modérée le long de Y_1 . Pour cela on peut supposer que X_2 est un ouvert de $\mathbb{C}^n$. D'autre part, il existe un recouvrement U_i de X_1 par des ouverts qui s'identifient à des ouverts de $\mathbb{C}^{n_i}$. Soit h (resp. h_i) la structure hermitienne sur X_2 (resp. U_i) induite par la structure hermitienne canonique de $\mathbb{C}^2$ (resp. $\mathbb{C}^{n_i}$) . On pose $f^*(dh)|U_i = \delta_i dh_i$. La fonction $\delta_i : U_i \longrightarrow \mathbb{R}_+$ est $\mathbb{R}$-analytique et s'annule au plus dans $U_i \cap Y_1$. Il suffit donc de démontrer que, pour tout compact K de U_i , il existe une constante $A > 0$ telle que

$$\forall x \in K \cap X^* \ , \ \frac{1}{\delta(x)} \leqslant \frac{A}{\delta_i(x)} \quad \text{(proposition 1).}$$

Or il existe une constante $B > 0$ telle que $dh \leqslant B dg'_2$ sur $f(K)$. (En effet, $dh = \lambda dh$ où λ est une fonction continue strictement positive, qui possède un maximum B fini sur le compact $f(K)$). Donc $Bf^*(dg'_2) \geqslant f^*(dh)$, c'est-à-dire $B\delta dg'_1 \geqslant \delta_i dh_i$ sur K . De même il existe une constante $C > 0$ telle que $dh_i \geqslant C dg'_1$ sur K . On déduit que $B\delta dg'_1 \geqslant \delta_i C dg'_1$ sur K d'où

$$\frac{1}{\delta(x)} \leqslant \frac{B/C}{\delta_i(x)} \quad , \quad \forall x \in K \cap X^* \quad .$$

On en conclut en posant $A = B/C$.

Soit X^* un schéma séparé, lisse de type fini sur $\mathbb{C}$. Suivant [2], il existe une immersion ouverte d'image dense $i : X^* \hookrightarrow X$ avec X schéma propre et lisse. Si $i_1 : X^* \hookrightarrow X_1$ et $i_2 : X^* \hookrightarrow X_2$ sont deux telles "compactifications", il existe une troisième $i_3 : X^* \hookrightarrow X_3$ et deux diagrammes commutatifs

$$\begin{tikzcd} X^* \arrow[r, hook, "i_3"] \arrow[dr, hook, "i_K"'] & X_3 \arrow[d, "f_K"] \\ & X_K \end{tikzcd} \qquad K = 1,2 \quad .$$

En particulier, si on considère les structures analytiques associées, ces deux compactifications sont équivalentes. Suivant la proposition 2, si $f : X^{*an} \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue où X^{*an} désigne la variété analytique associée à X^* , elle a une croissance modérée le long de $Y_1^{an} = X_1^{an} - X^{*an}$ si et seulement si elle en a une telle le long de $Y_2^{an} = X_2^{an} - X^{*an}$. On dira que la fonction f a une croissance modérée à l'infini de X^* , et cette notion dépend uniquement de la structure algébrique de X^* . De même suivant le théorème 1, si g_1 (resp. g_2) est une structure hermitienne sur X^{*an} , adaptée à la compactification X_1^{an} (resp. X_2^{an}) , il existe une fonction continue $\delta : X^{*an} \longrightarrow \mathbb{R}_+$ qui a une croissance modérée à l'infini de X^* telle que

$$dg_1 \leqslant \delta dg_2 \quad \text{et} \quad dg_2 \leqslant \delta dg_1 \quad .$$

On appelle structure <u>hermitienne modérée</u>, une structure hermitienne qui se prolonge sur une compactification algébrique.

Soient X^* un schéma séparé lisse de type fini sur $\mathbb{C}$, F^* un faisceau algébrique localement libre de rang fini sur X^* , V^* le fibré vectoriel associé $V^* = \mathrm{Vect}(F^*)$, X^{*an} , F^{*an} , V^{*an} les objets analytiques correspondants. On se propose de définir une classe d'équivalence de "normes" sur

V^{*an}. Les "normes" considérées seront des familles continues de normes sur les V^{*an}_x, $x \in X^{*an}$, c'est-à-dire telles que pour toute section continue v de V^{*an}, $||v||$ soit une fonction continue. Deux "normes" $||\cdot||_1$, $||\cdot||_2$ sur V^{*an} seront dites équivalentes s'il existe une fonction continue $\delta : X^{*an} \longrightarrow \mathbb{R}_+$ ayant une croissance modérée à l'infini de X^* telle que

$$||\cdot||_1 \leq \delta||\cdot||_2 \quad \text{et} \quad ||\cdot||_2 \leq \delta||\cdot||_1 .$$

Il existe une classe d'équivalence et une seule de "normes" pour cette relation d'équivalence telle que, pour toute "norme" $||\cdot||$ appartenant à cette classe, toute immersion ouverte d'image dense $i : X^* \hookrightarrow X$ dans un schéma X propre et lisse, tout faisceau algébrique cohérent F sur X tel que $i^*F = F^*$, tout ouvert U de X^{an}, toute surjection $\eta : O_U^n \xrightarrow{\eta} F^{an}|U$ et tout compact K de U, il existe une fonction continue $\delta : X^{*an} \longrightarrow \mathbb{R}_+$ ayant une croissance modérée à l'infini de X^* telle que au-dessus de $K \cap X^{*an}$

$$||\cdot|| \leq \delta||\cdot||_\eta \quad \text{et} \quad ||\cdot||_\eta \leq \delta||\cdot||$$

où $\qquad ||v||_\eta = \inf_{\eta(w) = v} |w| \quad$ avec $\quad |w| = \sum_{i=1}^{n} |w_i|$

([1], II, 2.14, 2.15, 2.16, 2.19). Une norme appartenant à cette classe d'équivalence sera dite modérée.

§ 2.

Soient X un schéma séparé lisse et de type fini sur $\mathbb{C}$, F un faisceau algébrique localement libre de rang fini sur X , X^{an} , F^{an} les objets analytiques associés, $\Omega^{p,q}(F^{an})$ le faisceau de formes différentielles sur X à coefficients mesurables de type p,q , à valeurs dans F^{an} .

DEFINITION 1.- <u>Une forme</u> $\alpha \in H^o(X^{an},\Omega^{o,q}(F^{an}))$ <u>est dite modérée si</u>

(1) <u>Pour toute "norme" modérée</u> $\|\cdot\|$ <u>sur</u> F^{an} <u>et toute structure hermitienne</u> g <u>sur</u> X^{an} <u>modérée, il existe une fonction continue</u> $\delta : X^{an} \longrightarrow \mathbb{R}_+$ <u>qui a une croissance modérée à l'infini de</u> X <u>et telle que</u>

$$\int_{X^{an}} \delta^{-1} \|\alpha\|^2 dg < \infty .$$

(2) <u>La forme</u> $d''\alpha \in H^o(X^{an}, \Omega^{o,q+1}(F^{an}))$, <u>calculée au sens des distributions, est mesurable et vérifie encore</u> (1).

<u>Remarque</u> 1.- Si g est une structure modérée sur X^{an} , $\|\cdot\|$ une norme modérée sur F^{an} , $\alpha \in H^o(X^{an}, \Omega^{o,q}(F^{an}))$, alors $\|\alpha\|$ est défini par $\|\alpha\|_x = \inf \sum_i (\|\alpha_i\|_x \ \|\sigma_i\|_x)$ la borne inférieure portant sur l'ensemble des écritures

$$\alpha = \sum_i \alpha_i \otimes \sigma_i$$

de α au voisinage de x et $\|\alpha_i\|$ désignant la norme sur $\Omega^{o,q}$ déduite de la structure hermitienne g (norme "π") . Si $dz_1,\dots,dz_n$ désigne une base de $\Omega^{1,o}$ orthonormale en x et si $\alpha = \sum d\bar{z}_A \wedge \sigma_A$ (où $A = \{i_1,\dots,i_q\} \subset [1,n]$, $i_1 < \dots < i_q$ et $d\bar{z}_A = d\bar{z}_{i_1} \wedge \dots \wedge d\bar{z}_{i_q}$) $\|\alpha\|_x = \sum_A \|\sigma_A\|_x$.
En effet, si $\alpha_i = \sum_A f_{iA} d\bar{z}_A$

$$\alpha = \sum_i \sum_A f_{iA} d\bar{z}_A \otimes \sigma_i = \sum_A d\bar{z}_A \otimes \sum_i f_{iA} \sigma_i ,$$

donc

$$\sigma_A = \sum_i f_{iA}\sigma_i \quad \text{et} \quad \sum_A \|\sigma_A\|_x \leqslant \sum_A \sum_i |f_{iA}|_x \ \|\sigma_i\|_x =$$

$$= \sum_i \Big(\sum_A |f_{iA}|_x \Big) \|\sigma_i\|_x = \sum_i \|\alpha_i\|_x \|\sigma_i\|_x \quad .$$

Si $\omega \in \Gamma(X^{an}, \Omega^{o,p})$, $\|\omega \wedge \alpha\|_x \leq \|\omega\|_x \|\alpha\|_x$.

En effet. si $\omega = \sum_B f_B d\bar{z}_B$, $(B \subset [1, \;] , \text{ card } B = p)$ au voisinage du point x , $\omega \wedge \alpha = \sum_{\substack{A,B \\ A \cap B = \emptyset}} d\bar{z}_B \wedge d\bar{z}_A \otimes f_B \sigma_A$ et

$$\|\omega \wedge \alpha\|_x = \sum_{\substack{A,B \\ A \cap B = \emptyset}} \|f_B \sigma_A\| \leq \sum_{AB} |f_B|_x \|\sigma_A\|_x = \|\omega\|_x \|\alpha\|_x \quad .$$

<u>Remarque</u> 2.- Pour qu'une forme $\alpha \in H^o(X^{an}, \Omega^{o,q}(F^{an}))$ soit modérée, il suffit que

(1) il existe une "norme" modérée $\|\cdot\|_1$ sur F^{an} et une structure hermitienne g_1 sur X^{an} modérée et une fonction continue $\delta : X^{an} \longrightarrow \mathbb{R}^*_+$ qui a une croissance modérée à l'infini de X et telle que

$$\int_{X^{an}} \delta^{-1} \|\alpha\|_1^2 \, dg_1 < \infty \;;$$

(2) la forme $d''\alpha \in H^o(X^{an}, \Omega^{o,q+1}(F^{an}))$ vérifie encore (1).

En effet, si $\|\cdot\|$ est une "norme" modérée sur F^{an} et g une structure hermitienne sur X^{an} modérée, il existe des fonctions continues $\delta', \delta'' : X^{an} \longrightarrow \mathbb{R}^*_+$ ayant une croissance modérée à l'infini telles que $\|\cdot\| \leq \delta' \|\cdot\|_1$ $dg \leq \delta'' dg_1$ et

$$\int_{X^{an}} (\delta \delta'^2 \delta'')^{-1} \|\alpha\|^2 \, dg \leq \int_{X^{an}} \delta^{-1} \|\alpha\|_1^2 \, dg_1 < \infty \quad .$$

On utilise le même argument pour $d''\alpha$.

<u>Remarque</u> 3.- La notion de forme différentielle modérée sur X^{an} ne dépend que de la structure algébrique de X .

<u>Remarque</u> 4.- Par définition, les groupes de formes différentielles modérées munis de l'opérateur d'' forment un complexe qu'on notera $C^*_m(X,F)$.

DEFINITION 2.- <u>On appelle cohomologie modérée de</u> F <u>et on note</u> $H^*_m(X,F)$ <u>la cohomologie du complexe</u> $C^*_m(X,F)$

$$H^*_m(X,F) = H^*(C^*_m(X,F)) \quad .$$

LEMME 1.- Soient $\alpha \in C^q_m(X,F)$ et $\rho : X^{an} \longrightarrow \mathbb{R}_+$ une fonction C^∞ telle que ρ et $\|d''\rho\|$ aient une croissance modérée (la norme sur $\Omega^{o,1}$ étant celle définie par une structure hermitienne g modérée sur X). Alors $\rho\alpha \in C^q_m(X,F)$.

Démonstration.- Pour toute "norme" sur F^{an} modérée, il existe une fonction continue $\delta : X^{an} \longrightarrow \mathbb{R}^*_+$ ayant une croissance modérée à l'infini de X telle que

$$\int_{X^{an}} \delta^{-1} \|\alpha\|^2 \, dg < \infty \quad \text{et} \quad \int_{X^{an}} \delta^{-1} \|d''\alpha\|^2 \, dg < \infty \ .$$

Alors $\delta\rho^2 + 1$ est une fonction continue qui a une croissance modérée à l'infini de X et

$$\int_{X^{an}} (\delta\rho^2 + 1)^{-1} \|\rho\alpha\|^2 \, dg \leq \int_{X^{an}} \delta^{-1} \|\alpha\|^2 \, dg < \infty \ .$$

De même $\delta(\rho + \|d''\rho\| + 1)^2$ est une fonction continue qui a une croissance modérée à l'infini de X et

$$\int_{X^{an}} (\delta(\rho + \|d''\rho\| + 1)^2)^{-1} \|d''(\rho\alpha)\|^2 \, dg = \int_{X^{an}} (\delta(\rho + \|d''\rho\| + 1)^2)^{-1} \|d''\rho \wedge \alpha + \rho d''\alpha\|^2 dg \leq$$

$$\leq \int_{X^{an}} \delta^{-1} (\rho + \|d''\rho\| + 1)^{-2} (\|d''\rho\|^2 \|\alpha\|^2 + 2\rho \|d''\rho\| \, \|\alpha\| \, \|d''\alpha\| + \rho^2 \|d''\alpha\|) dg \leq$$

$$\leq \int_{X^{an}} \delta^{-1} \|\alpha\|^2 \, dg + \int_X \delta^{-1} \|\alpha\| \cdot \|d''\alpha\| \, dg + \int_X \delta^{-1} \|d''\alpha\|^2 \, dg < +\infty \ .$$

On en déduit que $\rho\alpha \in C^q_m(X,F)$.

LEMME 2.- Supposons X connexe et soient U et V deux ouverts de Zariski de X , $i : X \hookrightarrow \bar{X}$ une immersion ouverte d'image dense où $\bar{X}$ est un schéma propre et lisse, W un ouvert affine de $\bar{X}$, $\varphi : \bar{X}^{an} \longrightarrow \mathbb{R}_+$ une fonction C^∞ dont le support est inclu dans W , $a_\alpha = 0$ un système d'équations de $W - V \cap W$ dans W , $a = \sum_\alpha a_\alpha \bar{a}_\alpha$. Alors

i) Si $\delta : U^{an} \cap V^{an} \longrightarrow \mathbb{R}_+$ est une fonction continue ayant une croissance modérée à l'infini de $U \cap V$, pour m assez grand la fonction $\delta' : U^{an} \longrightarrow \mathbb{R}_+$, définie par $\delta' | U^{an} \cap V^{an} = \delta\varphi a^m$ et $\delta' | U^{an} - U^{an} \cap V^{an} = 0$ est une fonction continue ayant une croissance modérée à l'infini de U .

ii) Si $\alpha \in C^q_m(U \cap V, F)$, pour m assez grand $\varphi a^m \alpha \in C^q_m(U,F)$.

Démonstration.

i) Soient b_β un système d'équations de $W - U \cap W$ dans W, $b = \sum_\beta b_\beta \bar{b}_\beta$. Alors δ ayant une croissance modérée à l'infini de $U \cap V$, il existe des constantes $A, m_1 > 0$ telles que $\delta \leq \frac{A}{(ab)^{m_1}}$ sur $K \cap U^{an} \cap V^{an}$ où $K = \mathrm{supp}(\varphi)$. Soit $m \geq m_1 + 1$ et démontrons que m convient. On a

$$\delta' \leq \varphi \frac{Aa^{m-m_1}}{b^{m_1}} \quad \text{sur } U^{an} .$$

La fonction $\delta'' = \varphi \frac{Aa^{m-m_1}}{b^{m_1}}$ étant continue sur U^{an} et nulle sur $U^{an} - U^{an} \cap V^{an}$ on en déduit que δ' est continue, et δ'' ayant une croissance modérée à l'infini de U on en déduit qu'il en est de même pour δ'.

ii) Soient g une structure hermitienne modérée sur X^{an} et $\|\cdot\|$ une "norme" modérée sur F^{an}. Alors il existe une fonction continue $\delta : U^{an} \cap V^{an} \to \mathbb{R}_+^*$ ayant une croissance modérée à l'infini de $U \cap V$ telle que

$$\int_{U^{an} \cap V^{an}} \delta^{-1} \|\alpha\|^2 dg < \infty \quad \text{et} \quad \int_{U^{an} \cap V^{an}} \delta^{-1} \|d''\alpha\|^2 dg < \infty .$$

Soit $\psi : \bar{X}^{an} \longrightarrow \mathbb{R}_+$ une fonction C^∞ telle que $\psi|\mathrm{supp}(\varphi) = 1$ et $\mathrm{supp}(\psi) \subset W^{an}$. Suivant (i), il existe M tel que, pour tout $m \geq M$, $\delta\psi a^m$ ait une croissance modérée à l'infini de U. Alors soient $m \geq M$ et $m \geq 2$; nous allons démontrer que pour un tel m, $\varphi a^m \alpha \in C^q_m(U,F)$.

En effet

a) $\delta\psi a^{2m} + 1$ a une croissance modérée à l'infini de U et

$$\int_{U^{an}} (\delta\psi a^{2m} + 1) \|\varphi a^m \alpha\|^2 dg \leq \int_{U^{an}} \delta^{-1} \frac{\varphi^2}{\psi} \|\alpha\|^2 dg \leq (\sup \varphi^2) \int_{U^{an} \cap V^{an}} \delta^{-1} \|\alpha\|^2 dg < \infty .$$

b) $\delta\psi a^{2m-2} + 1$ a une croissance modérée à l'infini de U et

$$\int_{U^{an}} (\delta\psi a^{2m-2} + 1)^{-1} \|d''(\varphi a^m \alpha)\|^2 dg =$$

$$= \int_{U^{an}} (\delta\psi a^{2m-2} + 1)^{-1} \|\varphi a^m d''\alpha + \varphi m a^{m-1} d'' a \wedge \alpha + a^m d''\varphi \wedge \alpha\|^2 dg \leq$$

$$\leq \int_{U^{an}} (\delta\psi a^{2m-2} + 1)^{-1} [\varphi a^m \|d''\alpha\| + \varphi m a^{m-1} \|d'' a\| \cdot \|\alpha\| + a^m \|d''\varphi\| \cdot \|\alpha\|]^2 dg =$$

$$= \int_{U^{an}} (\delta\psi a^{2m-2} + 1)^{-1} \varphi^2 a^{2m} \|d''\alpha\|^2 dg +$$

$$+ \int_{U^{an}} (\delta\psi a^{2m-2}+1)^{-1}\ 2\varphi a^m(\varphi m a^{m-1}\|d''a\| + a^m\|d''\varphi\|)\ \|d''\alpha\| \cdot \|\alpha\|\ dg\ +$$

$$+ \int_{U^{an}} (\delta\psi a^{2m-2}+1)^{-1}\ (\varphi m a^{m-1}\|d''a\| + a^m\|d''\varphi\|)^2\ \|\alpha\|^2\, dg \quad .$$

Or $\dfrac{\varphi^2 a^{2m}}{\psi a^{2m-2}} = \dfrac{\varphi^2}{\psi}\, a^2 = \varphi^2 a^2 \leq \sup_K(\varphi^2 a^2) = A_1$ sur U $(K = \operatorname{supp} \varphi)$.

De même $\dfrac{2\varphi a^m(\varphi m a^{m-1}\|d''a\| + a^m\|d''\varphi\|)}{\psi a^{2m-2}} = \dfrac{2\varphi}{\psi}\, a(\varphi m\,\|d''a\| + a\,\|d''\varphi\|\,) =$

$= 2\varphi a(\varphi m\|d''a\| + a\|d''\varphi\|) \leq \sup_K(2\varphi a(\varphi m\|d''a\| + a\|d''\varphi\|)) = A_2$ sur U .

Enfin $\dfrac{(\varphi m a^{m-1}\|d''a\| + a^m\|d''\varphi\|)^2}{\psi a^{2m-2}} = \dfrac{\varphi^2 m^2 a^{2m-2}\|d''a\|^2 + 2\varphi m a^{2m-1}\|d''a\|\cdot\|d''\varphi\| + a^{2m}\|d''\varphi\|^2}{\psi a^{2m-2}} =$

$= \dfrac{\varphi^2}{\psi} m^2\|d''a\|^2 + 2\dfrac{\varphi}{\psi} ma\|d''a\|\cdot\|d''\varphi\| + a^2\dfrac{\|d''\varphi\|^2}{\psi} = \varphi^2 m^2\|d''a\|^2 + 2\varphi ma\|d''a\|\cdot\|d''\varphi\| + a^2\|d''\varphi\|^2 \leq$

$\leq \sup_K(\varphi^2 m^2\|d''a\|^2 + 2\varphi ma\,\|d''a\|\cdot\|d''\varphi\| + a^2\,\|d''\varphi\|^2) = A_3$ sur U .

On déduit que

$$\int_{U^{an}} (\delta\psi a^{2m-2}+1)^{-1}\,\|d''(\varphi a^m\alpha)\|^2\, dg \leq$$

$$\leq A_1 \int_{U^{an}\cap V^{an}} \delta^{-1}\|d''\alpha\|^2 dg + A_2 \int_{U^{an}\cap V^{an}} \delta^{-1}\|d''\alpha\|\cdot\|\alpha\|\, dg + A_3 \int_{U^{an}\cap V^{an}} \delta^{-1}\|\alpha\|^2\, dg < \infty \quad .$$

On en conclut que $\varphi a^m \alpha \in C^q_m(U,F)$.

PROPOSITION 1.- i) <u>Soit</u> $(U_i)_{1\leq i\leq N}$ <u>un recouvrement ouvert fini de Zariski de</u> X <u>et soit</u> X_k <u>la somme disjointe des intersections</u> $k+1$ <u>à</u> $k+1$ <u>des</u> U_i . <u>Alors les</u> $C^q_m(X_k,F)_{0\leq k}$ <u>forment une résolution de</u> $C^q_m(X,F)$ <u>pour la différentielle de Čech</u> $\check{d}$.

ii) <u>Si</u> $0 \hookrightarrow F' \longrightarrow F \longrightarrow F'' \longrightarrow 0$ <u>est une suite exacte de faisceaux localement libres de rang fini sur</u> X <u>alors les suites</u>

$$0 \longrightarrow C^q_m(X,F') \longrightarrow C^q_m(X,F) \longrightarrow C^q_m(X,F'') \longrightarrow 0$$

<u>sont exactes</u>.

<u>Démonstration</u>.- i) On peut supposer X connexe. Soient $i : X \hookrightarrow \overline{X}$ une immersion ouverte d'image dense où $\overline{X}$ est un schéma propre et lisse, φ_j une partition C^∞ de l'unité sur $\overline{X}^{an}$ subordonnée à un recouvrement ouvert fini

W_j de $\bar{X}$, $a_{ij\alpha}$ un système d'équations de $W_j - U_i$ dans W_j, $a_{ij} = \sum_\alpha a_{ij\alpha}\overline{a_{ij\alpha}}$, $b_{ij}^{(m)} = a_{ij}^m / \sum_i a_{ij}^m$ défini sur $W_j \cap X$, $b_i^{(m)} = \sum_j \varphi_j b_{ij}^{(m)}$ défini sur X.

On a $\sum_i b_i^{(m)} = 1$. En effet

$$\Sigma b_i^{(m)} = \sum_i \sum_j \varphi_j b_{ij}^{(m)} = \sum_i \sum_j \varphi_j \frac{a_{ij}}{\sum_i a_{ij}^m} = \sum_j \frac{\varphi_j}{\sum_i a_{ij}^m} \Sigma a_{ij}^m = \Sigma \varphi_j = 1 .$$

Démontrons que si $\beta = (\beta_{i_o \dots i_k})_{1 \le i_o \dots i_k \le N} \in C_m^q(X_k, F)$ alors pour m assez grand $H^{(m)}(\beta) \in C_m^q(X_{k-1}, F)$ où $H^{(m)}(\beta)$ est défini par

$$(H^{(m)}(\beta))_{i_o \dots i_{k-1}} = \sum_i b_i^{(m)} \beta_{i\, i_o \dots i_{k-1}} .$$

Il suffit de démontrer que si $\beta_{i_o \dots i_k} \in C_m^q(U_{i_o} \cap \dots \cap U_{i_k}, F)$ alors $b_{i_o}^{(m)} \beta_{i_o \dots i_k} \in C_m^q(U_{i_1} \cap \dots \cap U_{i_k}, F)$ pour m assez grand. Or suivant le lemme 2, il existe M_j tel que pour tout $m \ge M_j$,

$$\varphi_j a_{i_o j}^m \beta_{i_o \dots i_k} \in C_m^q(U_i \cap \dots \cap U_{i_k}, F) .$$

Soit $\psi_j\ \bar{X}^{an} \longrightarrow \mathbb{R}_+$ une fonction C^∞ telle que $\psi_j|\text{supp}(\varphi_j) = 1$ et $\text{supp}(\psi_j) \subset W_j$. Alors $\dfrac{\psi_j}{\sum_i a_{ij}^m}$ est une fonction qui a une croissance modérée à l'infini de X donc a fortiori à l'infini de $U_{i_1} \cap \dots \cap U_{i_k}$ et il en est de même pour

$$d''\left\|\left(\frac{\psi_j}{\sum_i a_{ij}^m}\right)\right\| \le \frac{\|d''\psi_j\|}{\sum_i a_{ij}^m} + \frac{\psi_j m \sum_i a_{ij}^{m-1} \|d'' a_{ij}\|}{(\Sigma a_{ij}^m)^2}$$

donc suivant le lemme 1

$$\varphi_j \frac{a_{i_o j}^m}{\sum_i a_{ij}^m} \beta_{i_o \dots i_k} = \frac{\psi_j}{\sum_i a_{ij}^m} \varphi_j a_{i_o j}^m \beta_{i_o \dots i_k} \in C_m^q(U_{i_1} \cap \dots \cap U_{i_k}, F) .$$

Par suite, si $m \ge \max_j M_j$ $b_{i_o}^{(m)} \beta_{i_o \dots i_k} \in C_m^q(U_{i_1} \cap \dots \cap U_{i_k}, F)$ et on déduit que pour m assez grand, $H^{(m)}(\beta) \in C_m^q(X_{k-1}, F)$.

Soit maintenant $\beta \in C_m^q(X_k, F)$ tel que $\check{d}\beta = 0$ c'est-à-dire $\sum_q (-1)^q \beta_{i_o \dots \hat{i}_q \dots i_{k+1}} = 0$. Alors, pour m assez grand, $H^{(m)}(\beta) \in C_m^q(X_{k-1}, F)$ et $(\check{d}(H^{(m)}(\beta)))_{i_o \dots i_k} = \sum_p (-1)^p (H^m(\beta))_{i_o \dots \hat{i}_p \dots i_k} = \sum_p (-1)^p \sum_i b_i^{(m)} \beta_{i\, i_o \dots \hat{i}_p \dots i_k} =$

$$= \sum_i b_i^{(m)} \sum_p (-1)^p \beta_{ii_o\dots\hat{i}_p\dots i_k} = \sum_i b_i^{(m)} \beta_{i_o\dots i_k} = \beta_{i_o\dots i_k} \quad \text{donc} \quad \check{d}(H^{(m)}(\beta)) = \beta \ .$$

On déduit que les $C_m^q(X_k,F)$ $o\leq k$ forment une résolution de $C_m^q(X,F)$ pour la différentielle de Čech $\check{d}$.

ii) Pour démontrer (ii), il suffit d'appliquer (i) à un recouvrement $(U_i)_{1\leq i\leq N}$ affine de X . Alors la suite exacte $0 \longrightarrow F' \longrightarrow F \longrightarrow F'' \longrightarrow 0$ est scindée sur les X_k pour $k \geq 0$ et par suite, les suites

$$0 \longrightarrow C_m^q(X_k,F') \longrightarrow C_m^q(X_k,F) \longrightarrow C_m^q(X_k,F'') \longrightarrow 0$$

sont exactes, donc suivant (i) la suite

$$0 \longrightarrow C_m^q(X,F') \longrightarrow C_m^q(X,F) \longrightarrow C_m^q(X,F'') \longrightarrow 0$$

est exacte.

LEMME 3.- Soient des applications linéaires à domaine de définition dense et à graphe fermé entre espaces de Hilbert

$$H_1 \xrightarrow{T} H_2 \xrightarrow{S} H_3$$

telles que

a) $\mathrm{dom}(S) \supset \mathrm{Im}(T)$ et $S\circ T = 0$.

b) Il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\forall a \in \mathrm{dom}(S) \cap \mathrm{dom}(T^*) \quad \|a\| \leq C \ (\|T^*a\| + \|Sa\|) \ .$$

(La condition (b) peut être remplacée par la condition plus faible :

b') Il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\forall a \in \mathrm{Ker}(S) \cap \mathrm{dom}(T^*) \quad \|a\| \leq C \|T^*a\| \ ) .$$

Alors si $z \in \mathrm{dom}(S)$ et $S(z) = 0$, il existe $\eta \in H_1$ tel que $z = T\eta$.

Démonstration.- Soit $z \in \mathrm{dom}(S)$ tel que $S(z) = 0$. Alors dire que $z = T\eta$ équivaut à dire que pour tout $a \in \mathrm{dom}\,T^*$ $< z,a >_2 = < \eta , T^*a >_1$. Donc pour qu'il existe η tel que $z = T\eta$, il suffit que $T^*a \longmapsto < z,a >_2$ soit la restriction d'une forme antilinéaire continue sur H_1 donc par Hahn-Banach il suffit qu'il existe une constante A telle que pour tout $a \in \mathrm{dom}\,T^*$ $| < z,a >_2| \leq A \|T^*a\|$. Posons $a = a_1 + a_2$ avec $a_1 \in \mathrm{Ker}(S)$, $a_2 \in \mathrm{Ker}(S)^\perp$; alors puisque $z \in \mathrm{Ker}(S)$ $< z,a >_2 = 0$ et pour tout $j \in \mathrm{dom}\,T$ $< Tj,a_2 > = 0$

(puisque $S \circ T = 0$) donc $T^*a_2 = 0$. On peut donc supposer que $a \in \mathrm{dom}(T^*)$ Ker(S). Alors $|<z,a>_2| \leq \|z\| \; \|a\| \leq \|z\| . C \, \|T^*a\|$. On déduit le lemme en posant $A = \|z\| . C$.

LEMME 4.- Soient X un sous-schéma fermé lisse de dimension n de $\mathbb{C}^m$ muni de la structure hermitienne kählérienne g induite par la structure canonique de $\mathbb{P}^m(\mathbb{C})$, (si $Z_o, Z_1, \ldots, Z_m$) désignent des coordonnées homogènes de $\mathbb{P}^m(\mathbb{C})$, U_K l'ouvert affine où $Z_K \neq 0$, $\omega \in \Gamma(\mathbb{P}^m(\mathbb{C}), \Omega^{1,1}_{\mathbb{R}})$ la forme différentielle de définition de la structure kählerienne, $\omega | U_K = \frac{i}{2} d'd''\mathrm{Log} \sum_{i=o}^{m} \frac{Z_i \bar{Z}_i}{Z_k \bar{Z}_k}$ ([4], III, n°5) et en particulier $\omega | \mathbb{C}^m = \frac{i}{2} d'd''\mathrm{Log}(1 + \sum_{i=1}^{m} z_i \bar{z}_i)$ où $z_1, \ldots, z_m$ désignent les coordonnées affines de $\mathbb{C}^m$), $\Omega = \Omega^n_h$ le faisceau de formes différentielles holomorphes de degré n sur X muni de la structure hermitienne déduite de g, $k > 0$ une constante, $\varphi = \mathrm{Log}(1 + \sum_{i=1}^{m} z_i \bar{z}_i)$, L le faisceau Ω muni de la structure hermitienne $e^{-k\varphi}$ fois la structure hermitienne de Ω. Alors les applications linéaires partiellement définies entre espaces de Hilbert

$$L^2(\Omega^{o,q-1}(L)) \xrightarrow{d''} L^2(\Omega^{o,q}(L)) \xrightarrow{d''} L^2(\Omega^{o,q+1}(L))$$

vérifient les hypothèses du lemme 3 pour $q \geq 1$.

Démonstration.- L'hypothèse (a) est évidente. Pour démontrer (b) nous allons démontrer que si $\alpha \in L^2(\Omega^{o,q}(L))$ tel que $d''\alpha$ et $\delta''\alpha$ soient définis

$$(1) \qquad (\int_X < \alpha, \alpha > dg)^{1/2} \leq K^{-1/2}[(\int_X < d''\alpha, d''\alpha > dg)^{1/2} + (\int_X < \delta''\alpha, \delta''\alpha > dg)^{1/2}]$$

Nous allons démontrer cela d'abord pour α à support compact de classe C^∞. Pour cela, il suffit de démontrer que, pour $\alpha \in \Gamma(X, \Omega^{o,q}(L))$, $q \geq 1$ à support compact et de classe C^∞

$$(2) \qquad \int_X k < \alpha, \alpha > dg \leq \int_X < d''\alpha, d''\alpha > dg + \int_X < \delta''\alpha, \delta''\alpha > dg$$

ou encore puisque le complexe de faisceaux muni de la structure hermitienne $\Omega^{n,\bullet}$ est isomorphe à $\Omega^{o,\bullet} \otimes_{\mathcal{O}} \Omega$ que pour $\alpha \in \Gamma(X, \Omega^{n,q}(\Omega^{-1} \otimes_{\mathcal{O}} L))$ à support compact et de classe C^∞ on a la même inégalité. Pour cela (Exp. n°3, § 3, th. 3) il suffit de démontrer que $\frac{\Phi_{\Omega^{-1}\otimes_{\mathcal{O}}\mathcal{L}}}{2} \geq k\Phi_X$ où $\Phi_{\Omega^{-1}\otimes_{\mathcal{O}}\mathcal{L}}$ est la forme quadratique associée à $i\, C_{\Omega^{-1}\otimes_{\mathcal{O}}\mathcal{L}}$, $C_{\Omega^{-1}\mathcal{L}}$ étant donnée par la formule $C_{\Omega^{-1}\otimes_{\mathcal{O}}\mathcal{L}} = d''d'\mathrm{Log}\, e^{-k\varphi}$ (exp. n°3, § 2, prop. 6) car $\Omega^{-1}\otimes_{\mathcal{O}}\mathcal{L}$ est le faisceau $\mathcal{O}$ muni de la structure hermitienne qui fait que $< 1,1 > = e^{-k\varphi}$ et où Φ_X est la forme quadratique déduite de la forme de Kähler ω sur X .

Or

$$d''d'\mathrm{Log}\, e^{-k\varphi} = d''d'\mathrm{Log}(e^{-k\mathrm{Log}(1+\sum_{i=1}^{m} z_i\bar{z}_i)}) = d''d'\mathrm{Log}(1+\sum_{i=1}^{m} z_i\bar{z}_i)^{-K} =$$

$$= Kd'd''\mathrm{Log}(1+\sum_{i=1}^{m} z_i\bar{z}_i)$$

donc en fait $\frac{\Phi_{\Omega^{-1}\otimes_{\mathcal{O}}\mathcal{L}}}{2} = k\Phi_X$.

On en déduit l'inégalité (1) pour une forme à support compact et de classe C^∞ .

Pour en déduire l'inégalité (1) pour $\alpha \in L^2(\Omega^{o,q}(\mathcal{L}))$ telle que $d''\alpha$ et $\delta''\alpha$ soient définis, il suffit de démontrer que les formes à support compact de classe C^∞ sont denses dans cet ensemble pour la norme $\|\alpha\|_2 + \|d''\alpha\|_2 + \|\delta''\alpha\|_2$ ce qui résulte de [6], 4.4.

LEMME 5.- <u>En gardant les notations du lemme</u> 4, <u>soit</u> $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ <u>une fonction continue</u>. <u>Alors</u> f <u>a une croissance modérée le long de l'infini de</u> X <u>si et seulement si</u>, <u>pour tout compact</u> K <u>de</u> $\mathbb{P}^m(\mathbb{C})$, <u>il existe des constantes</u> A , $k > 0$ <u>telles que</u> $|f| \leq A(1+\sum_{i=1}^{m} z_i\bar{z}_i)^k$ <u>sur</u> $K \cap X$.

<u>Démonstration</u>.- En effet si $Z_o, Z_1, \ldots, Z_m$ désignent des coordonnées homogènes de $\mathbb{P}^m(C)$

$$\frac{Z_o\bar{Z}_o}{Z_o\bar{Z}_o + \ldots + Z_m\bar{Z}_m} = \frac{1}{1+\sum_{i=1}^{m} z_i\bar{z}_i} = 0$$

est une équation $\mathbb{R}$-analytique de l'infini de X . On en déduit le lemme (§ 1, prop. 1 et définitions).

LEMME 6.- <u>Si</u> X <u>est un schéma affine lisse de type fini sur</u> $\mathbb{C}$, <u>alors</u> $H^q_m(X,\Omega^n_{alg}) = 0$ <u>pour</u> $q \geq 1$.

Démonstration.- Il existe un entier m tel que X soit un sous-schéma fermé de $\mathbb{C}^m$. En reprenant les notations du lemme 4, g est une structure hermitienne modérée, $\Omega = (\Omega^n_{alg})^{an}$ et la "norme" sur Ω associée à la structure hermitienne sur Ω déduite de g est modérée. Soit $\alpha \in C^q_m(X,\Omega^n_{alg})$ telle que $d''\alpha = 0$. En utilisant le lemme 5 et la définition de formes modérées, il existe $k > 0$ tel que

$$\int_X (1 + \sum_{i=1}^m z_i\bar{z}_i)^{-k} < \alpha,\alpha >_{k\ddot{a}hl} dg < \infty$$

($< \cdot,\cdot >_{k\ddot{a}hl}$ désigne le produit scalaire sur $\Omega^{o,q}(\Omega)$ déduit de g).

Or
$$\int_X (1 + \sum_{i=1}^m z_i z_i)^{-k} < \alpha,\alpha >_{k\ddot{a}hl} dg = \int_X e^{-k\varphi} < \alpha,\alpha > k\ddot{a}hl\ dg =$$
$$= \int_X < \alpha,\alpha > dg$$

(où $<\cdot\cdot,\cdot>$ désigne le produit scalaire sur $\Omega^{o,q}(L)$). Donc $\alpha \in L^2(\Omega^{o,q}(L))$ et par suite d'après les lemmes 3 et 4, il existe $\beta \in L^2(\Omega^{o,q-1}(L))$ tel que $d''\beta = \alpha$. Or $\beta \in L^2(\Omega^{o,q-1}(L))$ entraine que $\int_X < \beta,\beta > dg < \infty$ donc $\int_X (1 + \sum_{i=1}^m z_i\bar{z}_i)^{-k} < \beta,\beta >_{k\ddot{a}hl} dg < \infty$ donc $\beta \in C^{q-1}_m(X,\Omega)$. On en déduit le lemme.

LEMME 7.- *Si X est un schéma affine lisse de type fini sur $\mathbb{C}$, F un faisceau algébrique localement libre de rang fini sur X, $H^o_m(X,F) = \Gamma(X,F)$ et $H^q_m(X,F) = 0$ pour $q \geq 1$.*

Démonstration.- Pour démontrer la première assertion, vu que F est un facteur direct de O^n_X pour un certain n il suffit de la démontrer pour O^n_X donc pour O_X.

Soient $X \hookrightarrow \bar{X}$ une immersion ouverte d'image dense où $\bar{X}$ est un schéma propre et lisse et $\bar{X} - X$ un diviseur à croisements normaux, g une structure hermitienne modérée sur X, $f \in C^o_m(X,O_X)$ telle que $d''f = 0$. Alors il existe par définition une fonction continue $\delta : X \longrightarrow \mathbb{R}^*_+$ qui a une croissance modérée à l'infini de X telle que $\int_X \delta^{-1} f\bar{f} dg < +\infty$.

Soit U un ouvert de $\bar{X}$ dans lequel $\bar{X} - X$ est défini par l'équation holomorphe sur U , $h = 0$. Alors il existe des constantes N , $A > 0$ telles que $\delta \leq \frac{A}{(h\bar{h})^N}$ d'où $\delta^{-1} \geq A^{-1}(h\bar{h})^N$. Donc $\int_X h^N f . \overline{h^N f}\, dg < \infty$. Or la fonction $h^N f$ est holomorphe sur $U \cap X$ car $d''f = 0$ donc elle l'est aussi au voisinage des points non singuliers de $\bar{X} - X \cap U$ (si $g : D^n - Y \longrightarrow \mathbb{C}$ est une fonction holomorphe carrée sommable, où D^n est le polydisque unité de $\mathbb{C}^n$ et Y l'hyperplan $z_1 = 0$, alors g est holomorphe sur D^n entier). On déduit que $h^N f$ est holomorphe sur U car elle l'est sauf au plus sur un sous-espace de codimension 2. Donc la fonction f est méromorphe le long de $\bar{X} - X$ et par suite $f \in \Gamma(X, O_X)$.

Pour démontrer la deuxième assertion, il suffit de remarquer que $\Omega^{-1} F^{an}$ est facteur direct de O_X^n pour un certain n donc F^{an} est facteur direct de $(\Omega)^n$. On déduit le lemme en utilisant le lemme 6.

THEOREME 1.- Soient X un schéma séparé lisse de type fini sur $\mathbb{C}$ et F un faisceau algébrique localement libre de rang fini sur X . Alors on a

$$H^*_m(X,F) = H^*(X,F) \quad .$$

Démonstration.- Soit $\mathcal{U}$ un recouvrement affine de X . Par définition, on a $H^*_m(X,F) = H^*(C^*_m(X,F)$. Or en gardant les notations de la proposition 1, d'après cette proposition $C^q_m(X,F) = H^* C^q_m(X_*,F) = H^0(C^q_m(X_*,F))$.
D'autre part, les X_k étant affines suivant le lemme 6

$$C^k(\mathcal{U},F) = H^*(C^*_m(X_k,F)) = H^0(C^*_m(X_k,F)) \quad .$$

Le double complexe $C^*_m(X_*,F)$ ayant donc des lignes et des colonnes acycliques, sauf en degré 0 , on a

$$H^*(C^*_m(X,F)) = H^*(C^*(\mathcal{U},F)) \quad \text{et} \quad H^*(C^*(\mathcal{U},F)) = H(X,F)$$

car le recouvrement $\mathcal{U}$ est affine. On en déduit le théorème.

BIBLIOGRAPHIE

[1] P. DELIGNE - Equations différentielles à points singuliers réguliers, Lecture Notes in Mathematics 163, Springer-Verlag 1970.

[2] M. NAGATA - Embedding of an abstract variety in a complete variety, J. Math. Kyoto 2 (1962).

[3] S. LOJASIEWICZ - Ensembles semi-analytiques, Institut des Hautes Etudes Scientifiques (1965).

[4] A. WEIL - Introduction à l'étude des variétés kählériennes, Hermann (1958).

[5] L. HORMANDER - L^2 estimates and existence theorems for the $\bar{\partial}$ operator, Acta Math., 113 (1965).

[6] L. HORMANDER - An introduction to complex analysis in several variables, (1966).