

Astérisque

GEORGES MALTSINIOTIS

Astérisque, tome 17 (1974), p. 51-67

http://www.numdam.org/item?id=AST_1974__17__51_0

© Société mathématique de France, 1974, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (<http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

PRECISE VANISHING THEOREM

par Georges MALTSINIOTIS

§ 1. Connexions.

Dans ce paragraphe X désignera une variété analytique complexe de dimension complexe n , E un fibré vectoriel holomorphe de rang r ainsi que le faisceau de ses sections holomorphes, E_∞ le fibré vectoriel C^∞ sous-jacent à E ainsi que le faisceau de ses sections C^∞ , \mathcal{O} le faisceau de fonctions holomorphes sur X , C^∞ le faisceau de fonctions C^∞ sur X à valeurs dans \mathbb{C} , $\Omega^{p,q}$ le faisceau de formes différentielles C^∞ à valeurs complexes de type p,q , Ω^p_{an} le faisceau de p -formes différentielles holomorphes.

DEFINITION 1.- On appelle connexion sur E_∞ un morphisme \mathbb{C} -linéaire

$$D : E_\infty \longrightarrow E_\infty \otimes_{C^\infty} (\Omega^{1,0} \oplus \Omega^{0,1})$$

tel que pour tout ouvert \mathcal{U} de X et tout $f \in \Gamma(\mathcal{U}, C^\infty)$, $\sigma \in \Gamma(\mathcal{U}, E_\infty)$

$$D(f \cdot \sigma) = \sigma \otimes df + fD(\sigma) \text{ .}$$

Soit $\Omega_E^{**} = E_\infty \otimes_{C^\infty} \Omega^{**}$ qui est un $(\Omega^{**}, \Omega^{**})$ -bimodule bigradué : pour tout ouvert \mathcal{U} de X et tout $\sigma \in \Gamma(\mathcal{U}, E_\infty)$, $\omega, \omega' \in \Gamma(\mathcal{U}, \Omega^{**})$, $\omega \wedge (\sigma \otimes \omega') = \sigma \otimes (\omega \wedge \omega')$ et $(\sigma \otimes \omega) \wedge \omega' = \sigma \otimes (\omega \wedge \omega')$. On remarquera que pour $f \in \Gamma(\mathcal{U}, C^\infty)$, $\sigma \in \Gamma(\mathcal{U}, E_\infty)$, $f \wedge \sigma = f\sigma = \sigma \wedge f$ et plus généralement pour $\omega \in \Gamma(\mathcal{U}, \Omega^{**})$, $\omega \wedge \sigma = \sigma \otimes \omega = \sigma \wedge \omega$ et que si $\alpha \in \Gamma(\mathcal{U}, \Omega_E^p)$ et $\omega \in \Gamma(\mathcal{U}, \Omega^q)$ $\omega \wedge \alpha = (-1)^{pq} \alpha \wedge \omega$.

Avec ces conventions, on peut dire qu'une connexion sur E_∞ est un morphisme \mathbb{C} -linéaire $D : \Omega_E^0 \longrightarrow \Omega_E^1$ tel que $(d, D, D) : (\Omega^0, \Omega_E^0, \Omega_E^0) \longrightarrow (\Omega^1, \Omega_E^1, \Omega_E^1)$ soit une dérivation ou tel que $(D, d, D) : (\Omega_E^0, \Omega^0, \Omega_E^0) \longrightarrow (\Omega_E^1, \Omega^1, \Omega_E^1)$ soit une dérivation suivant qu'on considère la structure de module à gauche ou à droite de Ω_E^* sur Ω^* .

PROPOSITION 1. - Etant donnée une connexion D° sur E_{∞} il existe un morphisme unique \mathbb{C} -linéaire de degré 1, $D : \Omega_E^* \rightarrow \Omega_E^*$ prolongeant D° tel que $(d, D, D) : (\Omega^*, \Omega_E^*, \Omega_E^*) \rightarrow (\Omega^*, \Omega_E^*, \Omega_E^*)$ soit une antiderivation pour la structure de Ω^* -module à gauche. Alors $(D, d, D) : (\Omega_E^*, \Omega^*, \Omega_E^*) \rightarrow (\Omega_E^*, \Omega^*, \Omega_E^*)$ est une antiderivation pour la structure de Ω^* -module à droite.

Démonstration.

Unicité. - Pour tout ouvert \mathcal{U} de X et tout $\sigma \in \Gamma(\mathcal{U}, E_{\infty})$, $\omega \in \Gamma(\mathcal{U}, \Omega^P)$ on doit avoir

$$D(\sigma \otimes \omega) = D(\omega \wedge \sigma) = d\omega \wedge \sigma + (-1)^P \omega \wedge D\sigma = \sigma \otimes d\omega + D^{\circ}\sigma \wedge \omega .$$

Existence. - On définit $\mathcal{D} : E_{\infty} \times \Omega^* \rightarrow \Omega_E^*$ par $\mathcal{D}(\sigma, \omega) = D^{\circ}\sigma \wedge \omega + \sigma \otimes d\omega$ pour tout ouvert \mathcal{U} de X et tout $\sigma \in \Gamma(\mathcal{U}, E_{\infty})$, $\omega \in \Gamma(\mathcal{U}, \Omega^*)$. Soit $f \in \Gamma(\mathcal{U}, \mathcal{C}^{\infty})$.

$$\mathcal{D}(\sigma, f, \omega) = \mathcal{D}(f, \sigma, \omega) = D^{\circ}(f\sigma) \wedge \omega + f\sigma \otimes d\omega = \sigma \otimes df \wedge \omega + fD^{\circ}\sigma \wedge \omega + f\sigma \otimes d\omega$$

et

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(\sigma, f\omega) &= D^{\circ}(\sigma) \wedge f\omega + \sigma \otimes d(f\omega) = fD^{\circ}\sigma \wedge \omega + \sigma \otimes df \wedge \omega + \sigma \otimes f \wedge d\omega = \\ &= fD^{\circ}\sigma \wedge \omega + \sigma \otimes df \wedge \omega + f\sigma \otimes d\omega . \end{aligned}$$

Donc $\mathcal{D}(\sigma, f, \omega) = \mathcal{D}(\sigma, f\omega)$ et par suite on déduit un morphisme \mathbb{C} -linéaire

$$D : \Omega_E^* \rightarrow \Omega_E^* .$$

Vérification des propriétés.

Soient \mathcal{U} un ouvert de X , $\omega \in \Gamma(\mathcal{U}, \Omega^r)$, $\sigma \in \Gamma(\mathcal{U}, E_{\infty})$, $\omega' \in \Gamma(\mathcal{U}, \Omega^*)$ il s'agit de démontrer que

$$i) \quad D(\omega \wedge (\sigma \otimes \omega')) = d\omega \wedge (\sigma \otimes \omega') + (-1)^r \omega \wedge D(\sigma \otimes \omega') .$$

En effet :

$$\begin{aligned} D(\omega \wedge (\sigma \otimes \omega')) &= D(\sigma \otimes (\omega \wedge \omega')) = D^{\circ}\sigma \wedge \omega \wedge \omega' + \sigma \otimes d(\omega \wedge \omega') = D^{\circ}(\sigma) \wedge \omega \wedge \omega' + \sigma \otimes (d\omega \wedge \omega' \\ &+ (-1)^r \sigma \otimes (\omega \wedge d\omega')) = d\omega \wedge (\sigma \otimes \omega') + (-1)^r \omega \wedge (D^{\circ}\sigma \wedge \omega') + (-1)^r \omega \wedge (\sigma \otimes d\omega') = \\ &= d\omega \wedge (\sigma \otimes \omega') + (-1)^r \omega \wedge D(\sigma \otimes \omega') . \end{aligned}$$

$$ii) \quad D((\sigma \otimes \omega) \wedge \omega') = D(\sigma \otimes \omega) \wedge \omega' + (-1)^r (\sigma \otimes \omega) \wedge d\omega' .$$

En effet

$$D((\sigma \otimes \omega) \wedge \omega') = D(\sigma \otimes (\omega \wedge \omega')) = D^0 \sigma \wedge \omega \wedge \omega' + \sigma \otimes d(\omega \wedge \omega') = D^0 \sigma \wedge \omega \wedge \omega' + \sigma \otimes (d\omega \wedge \omega' + (-1)^r \sigma \otimes (\omega \wedge d\omega')) = D(\sigma \otimes \omega) \wedge \omega' + (-1)^r (\sigma \otimes \omega) \wedge d\omega' .$$

iii) $D(\sigma \otimes 1) = D^0 \sigma .$

En effet

$$D(\sigma \otimes 1) = D^0(\sigma) \wedge 1 + \sigma \otimes d(1) = D^0 \sigma .$$

COROLLAIRE 1.- $D^2 = D \circ D$ est Ω^* -linéaire à gauche et à droite.

Démonstration.

Soient \mathcal{U} un ouvert de X , $\omega \in \Gamma(\mathcal{U}, \Omega^r)$, $\alpha \in \Gamma(\mathcal{U}, \Omega_E^*)$

$$D^2(\omega \wedge \alpha) = D(d\omega \wedge \alpha + (-1)^r \omega \wedge D(\alpha)) = dd\omega \wedge \alpha + (-1)^{r+1} d\omega \wedge D\alpha + (-1)^r d\omega \wedge D\alpha + (-1)^r (-1)^r \omega \wedge D^2(\alpha) = \omega \wedge D^2(\alpha) .$$

La linéarité à droite se démontre de la même façon.

DEFINITION 2.- L'opérateur D^2 est appelé courbure de la connexion D^0 .

Remarque.- On a $D(\Omega_E^{p,q}) \subset \Omega_E^{p+1,q} \oplus \Omega_E^{p,q+1}$. En effet soient \mathcal{U} un ouvert de X , $\sigma \in \Gamma(\mathcal{U}, E_\infty)$, $\omega \in \Gamma(\mathcal{U}, \Omega_E^{p,q})$. Alors $D(\sigma \otimes \omega) = D^0 \sigma \wedge \omega + \sigma \otimes d\omega$ et $D^0 \sigma \in \Omega_E^{1,0} \oplus \Omega_E^{0,1}$ donc $D^0 \sigma \wedge \omega \in \Omega_E^{p+1,q} \oplus \Omega_E^{p,q+1}$ et $d\omega \in \Omega_E^{p+1,q} \oplus \Omega_E^{p,q+1}$ donc $\sigma \otimes d\omega \in \Omega_E^{p+1,q} \oplus \Omega_E^{p,q+1}$.

On pose $D = D' + D''$ avec $D' : \Omega_E^{p,q} \longrightarrow \Omega_E^{p+1,q}$ et $D'' : \Omega_E^{p,q} \longrightarrow \Omega_E^{p,q+1}$

DEFINITION 3.- On dit que la connexion D est holomorphe si pour tout ouvert \mathcal{U} de X et toute section holomorphe σ de E au-dessus de \mathcal{U} , $D''(\sigma) = 0$.

Par définition $\Omega_E^{*,*} = E_\infty \otimes_{C^\infty} \Omega^{*,*} = E \otimes_{\mathcal{O}_E} C^\infty \otimes_{C^\infty} \Omega^{*,*} = E \otimes_{\mathcal{O}_E} \Omega^{*,*}$. Le morphisme d'' étant \mathcal{O}^* -linéaire, on peut considérer $1_E \otimes d''$. Si D est une connexion holomorphe $D'' = 1_E \otimes d''$. En effet soient \mathcal{U} un ouvert de X , $\sigma \in \Gamma(\mathcal{U}, E)$, $\omega \in \Gamma(\mathcal{U}, \Omega^{*,*})$ alors $D''(\sigma \otimes \omega) = D''(\sigma) \wedge \omega + \sigma \otimes d''\omega = \sigma \otimes d''\omega$. En particulier $D''^2 = 0$.

THEOREME 1.- Si D est une connexion holomorphe sur E_∞ et si $\Gamma(X, \Omega^p, \cdot)$ désigne le complexe :

$$\dots \rightarrow 0 \rightarrow 0 \rightarrow \Gamma(X, \Omega_E^{p,0}) \xrightarrow{D''} \Gamma(X, \Omega_E^{p,1}) \xrightarrow{D''} \dots \xrightarrow{D''} \Gamma(X, \Omega_E^{p,n}) \rightarrow 0 \rightarrow \dots$$

alors $H^q(X, E \otimes_{\mathcal{O}} \Omega_{an}^p) = H^q(\Gamma(X, \Omega^p, \cdot))$.

Démonstration.

Suivant le théorème de Dolbeault, on a une suite exacte

$$0 \rightarrow \Omega_{an}^p \rightarrow \Omega^{p,0} \xrightarrow{d''} \Omega^{p,1} \xrightarrow{d''} \dots \xrightarrow{d''} \Omega^{p,n} \rightarrow 0$$

d'où E étant localement libre une suite exacte

$$0 \rightarrow E \otimes_{\mathcal{O}} \Omega_{an}^p \rightarrow E \otimes_{\mathcal{O}} \Omega^{p,0} \xrightarrow{1_E \otimes d''} E \otimes_{\mathcal{O}} \Omega^{p,1} \rightarrow \dots \xrightarrow{1_E \otimes d''} E \otimes_{\mathcal{O}} \Omega^{p,n} \rightarrow 0$$

d'où suivant ce qui précède une suite exacte

$$0 \rightarrow E \otimes_{\mathcal{O}} \Omega_{an}^p \xrightarrow{D''} \Omega_E^{p,0} \xrightarrow{D''} \Omega_E^{p,1} \xrightarrow{D''} \dots \xrightarrow{D''} \Omega_E^{p,n} \rightarrow 0 \quad \cdot$$

Or les faisceaux $\Omega_E^{p,q}$ étant mous, on en conclut le théorème.

§ 2. Connexions hermitiennes.

Dans ce paragraphe, on garde les mêmes notations que dans le paragraphe précédent et on suppose que le fibré E est muni d'une structure hermitienne C^∞ . Le produit hermitien en question sera noté $\{.,.\}$.

On définit un morphisme sesquilinéaire de $\Omega_E^{p,p} \times \Omega_E^{p,p} \rightarrow \Omega^{p,p}$ en posant pour tout ouvert \mathcal{U} de X , $\sigma, \sigma' \in \Gamma(\mathcal{U}, E_\infty)$, $\omega, \omega' \in \Gamma(\mathcal{U}, \Omega^{p,p})$ $\{\sigma \otimes \omega, \sigma' \otimes \omega'\} = \{\sigma, \sigma'\} \omega \wedge \bar{\omega}'$. Si $\alpha \in \Gamma(\mathcal{U}, \Omega_E^p)$, $\beta \in \Gamma(\mathcal{U}, \Omega_E^q)$, $\{\beta, \alpha\} = (-1)^{pq} \overline{\{\alpha, \beta\}}$.

PROPOSITION 1.- Il existe une connexion holomorphe et une seule $D^0: E_\infty = \Omega_E^0 \rightarrow \Omega_E^1$ telle que pour tout ouvert \mathcal{U} de X et tout $\sigma, \sigma' \in \Gamma(\mathcal{U}, E_\infty)$:

$$d\{\sigma, \sigma'\} = \{D^0\sigma, \sigma'\} + \{\sigma, D^0\sigma'\} \quad \cdot$$

Démonstration.

La question étant locale, supposons le fibré holomorphe E trivial et soient $\sigma_1, \dots, \sigma_r \in \Gamma(X, E)$ tels que pour tout $x \in X$ $\sigma_1(x), \dots, \sigma_r(x)$ forment

une base de la fibre du fibré E en x .

Unicité.- Soient \mathcal{U} un ouvert de X et $\sigma \in \Gamma(\mathcal{U}, E_\infty)$. Alors

$$\sigma = \sum_{i=1}^r f_i \sigma_i \quad \text{avec } f_i \in \Gamma(\mathcal{U}, C^\infty) \quad \text{et on doit avoir}$$

$$D^0 \sigma = \sum_{i=1}^r \sigma_i \otimes df_i + \sum_{i=1}^r f_i D^0 \sigma_i$$

et par suite il suffit de démontrer que les $D^0 \sigma_i$ sont déterminés par les hypothèses.

Soit $D^0 \sigma_i = \sum_{K=1}^r \sigma_K \otimes \omega_{Ki}$. Alors $\omega_{Ki} \in \Gamma(X, \Omega^{1,0})$ car D^0 doit être une connexion holomorphe et les σ_i sont des sections holomorphes. D'autre part on doit avoir

$$\alpha\{\sigma_i, \sigma_j\} = \{D^0 \sigma_i, \sigma_j\} + \overline{\{D^0 \sigma_j, \sigma_i\}}$$

$$\text{et } \{D^0 \sigma_i, \sigma_j\} \in \Gamma(X, \Omega^{1,0}) \quad \text{et } \overline{\{D^0 \sigma_j, \sigma_i\}} \in \Gamma(X, \Omega^{0,1})$$

$$\text{donc } \{D^0 \sigma_i, \sigma_j\} = d'\{\sigma_i, \sigma_j\}$$

c'est-à-dire

$$\sum_{K=1}^r \{\sigma_K, \sigma_j\} \omega_{Ki} = d'\{\sigma_i, \sigma_j\} \quad \text{pour tout } i \text{ et } j .$$

En faisant varier j on obtient un système de r équations à r inconnues qui détermine les ω_{Ki} puisque pour tout $x \in X$, $\det\{\sigma_K(x), \sigma_j(x)\} \neq 0$ la forme hermitienne étant non dégénérée. On déduit les $D^0 \sigma_i$.

Existence.- Soient $\omega_{Ki} \in \Omega^{1,0}$ définis par les systèmes d'équations

$$\sum_{K=1}^r \{\sigma_K, \sigma_j\} \omega_{Ki} = d'\{\sigma_i, \sigma_j\} \quad \text{et } \alpha_i = \sum_{K=1}^r \sigma_K \otimes \omega_{Ki} .$$

Pour tout ouvert \mathcal{U} de X et tout $\sigma = \sum_{i=1}^r f_i \sigma_i$ avec $\sigma \in \Gamma(\mathcal{U}, E_\infty)$

$f_i \in \Gamma(\mathcal{U}, C^\infty)$ on pose

$$D^0 \sigma = \sum_{i=1}^r \sigma_i \otimes df_i + \sum_{i=1}^r f_i \alpha_i .$$

Vérification des propriétés.

i) D^0 est une connexion.

Soit $f \in \Gamma(\mathcal{U}, C^\infty)$; alors $f\sigma = \sum_{i=1}^r f f_i \sigma_i$ et

$$D^0(f\sigma) = \sum_{i=1}^r \sigma_i \otimes d(ff_i) + \sum_{i=1}^r ff_i \alpha_i = \left(\sum_{i=1}^r f_i \sigma_i \right) \otimes df + f \sum_{i=1}^r \sigma_i \otimes df_i + f \sum_{i=1}^r f_i \alpha_i = \\ = \sigma \otimes df + fD^0(\sigma) \quad .$$

ii) D^0 est une connexion holomorphe.

Si σ est une section holomorphe les f_i sont holomorphes donc

$$D^0\sigma = \sum_{i=1}^r \sigma_i \otimes d'f_i + \sum_{i=1}^r f_i \alpha_i$$

d'où

$$D^0\sigma \in \Gamma(\mathcal{U}, \Omega_E^{1,0}) \quad \text{et} \quad D^0\sigma = 0 \quad .$$

iii) Soient $\sigma' = \sum_{i=1}^r f'_i \sigma_j$ avec $\sigma' \in \Gamma(\mathcal{U}, E_\infty)$, $f'_j \in \Gamma(\mathcal{U}, \mathcal{O}^\infty)$.

Il s'agit de démontrer que $d\{\sigma, \sigma'\} = \{D^0\sigma, \sigma'\} + \{\sigma, D^0\sigma'\}$.

En effet

$$\{D\sigma, \sigma'\} = \sum_{i,j=1}^r \overline{f'_j} \{\sigma_i, \sigma_j\} df_i + \sum_{i,j=1}^r f_i \overline{f'_j} \{\alpha_i, \sigma_j\}$$

$$\{\sigma, D\sigma'\} = \sum_{i,j=1}^r f_i \{\sigma_i, \sigma_j\} d\overline{f'_j} + \sum_{i,j=1}^r f_i \overline{f'_j} \{\sigma_i, \alpha_j\}$$

$$d\{\sigma, \sigma'\} = d\left(\sum_{i,j=1}^r f_i \overline{f'_j} \{\sigma_i, \sigma_j\} \right) = \sum_{i,j=1}^r \overline{f'_j} \{\sigma_i, \sigma_j\} df_i + \sum_{i,j=1}^r f_i \{\sigma_i, \sigma_j\} d\overline{f'_j} +$$

$$+ \sum_{i,j=1}^r f_i \overline{f'_j} d\{\sigma_i, \sigma_j\} \quad .$$

Or par hypothèse $d\{\sigma_i, \sigma_j\} = \{\alpha_i, \sigma_j\}$ et d'autre part

$$d''\{\sigma_i, \sigma_j\} = \overline{d'\{\sigma_i, \sigma_j\}} = \overline{d'\{\sigma_j, \sigma_i\}} = \overline{\{\alpha_j, \sigma_i\}} = \{\sigma_i, \alpha_j\} \quad \text{et par suite}$$

$$d\{\sigma_i, \sigma_j\} = \{\alpha_i, \sigma_j\} + \{\sigma_i, \alpha_j\} \quad \text{d'où le résultat.}$$

DEFINITION 1.- La connexion, définie par la proposition précédente, est appelée connexion hermitienne associée à la structure hermitienne du fibré E .

Désormais D^0 désignera la connexion ainsi définie et D le prolongement de D^0 sur $\Omega_E^{*,*}$ défini dans la proposition 1 du paragraphe 1.

PROPOSITION 2.- $(D, D, d) : (\Omega_E^*, \Omega_E^*, \Omega^*) \longrightarrow (\Omega_E^*, \Omega_E^*, \Omega^*)$ est une antidérivation

de degré 1 pour le produit $\{.,.\}$.

Démonstration.

Soient \mathcal{U} un ouvert de X , $\sigma, \sigma' \in \Gamma(\mathcal{U}, \mathbb{R}_\infty)$, $\omega \in \Gamma(\mathcal{U}, \Omega^r)$, $\omega' \in \Gamma(\mathcal{U}, \Omega^s)$,
il s'agit de démontrer que

$$d\{\sigma \otimes \omega, \sigma' \otimes \omega'\} = \{D(\sigma \otimes \omega) , \sigma' \otimes \omega'\} + (-1)^r \{\sigma \otimes \omega , D(\sigma' \otimes \omega')\} .$$

En effet

$$\begin{aligned} d\{\sigma \otimes \omega, \sigma' \otimes \omega'\} &= d\{\sigma, \sigma'\} \wedge \omega \bar{\omega}' = d\{\sigma, \sigma'\} \wedge \omega \wedge \bar{\omega}' + \{\sigma, \sigma'\} d\omega \wedge \bar{\omega}' + (-1)^r \{\sigma, \sigma'\} \omega \wedge d\bar{\omega}' = \\ &= \{D^0 \sigma \wedge \omega, \sigma' \otimes \omega'\} + \{\sigma \otimes d\omega, \sigma' \otimes \omega'\} + (-1)^r \{\sigma \otimes \omega, D^0(\sigma') \wedge \omega'\} + (-1)^r \{\sigma \otimes \omega, \sigma' \otimes d\omega'\} = \\ &= \{D(\sigma \otimes \omega), \sigma' \otimes \omega'\} + (-1)^r \{\sigma \otimes \omega, D(\sigma' \otimes \omega, D(\sigma' \otimes \omega'))\} . \end{aligned}$$

PROPOSITION 3.- Soient \mathcal{U} un ouvert de X , $\alpha, \beta \in \Gamma(\mathcal{U}, \Omega_E^s)$. Alors

$$\{D^2 \alpha, \beta\} + \{\alpha, D^2 \beta\} = 0 .$$

Démonstration.

Supposons que $\alpha \in \Gamma(\mathcal{U}, \Omega_E^r)$. Alors $d\{\alpha, \beta\} = \{D\alpha, \beta\} + (-1)^r \{\alpha, D\beta\}$

d'où

$$\begin{aligned} 0 = dd\{\alpha, \beta\} &= d\{D\alpha, \beta\} + (-1)^r d\{\alpha, D\beta\} = \{D^2 \alpha, \beta\} + (-1)^{r+1} \{D\alpha, D\beta\} + (-1)^r \{D\alpha, D\beta\} + \\ &+ (-1)^r (-1)^r \{\alpha, D^2 \beta\} = \{D^2 \alpha, \beta\} + \{\alpha, D^2 \beta\} \end{aligned}$$

d'où le résultat.

PROPOSITION 4.- La courbure D^2 est de bidegré $(1,1)$ autrement dit $D''^2 = D'^2 = 0$.

Démonstration.

La connexion D^0 étant holomorphe, on sait déjà que $D''^2 = 0$. Soient \mathcal{U}
un ouvert de X , $\alpha \in \Gamma(\mathcal{U}, \Omega_E^{p,q})$, $\beta \in \Gamma(\mathcal{U}, \Omega_E^{r,s})$. Suivant la proposi-
tion précédente $\{D^2 \alpha, \beta\} + \{\alpha, D^2 \beta\} = 0$ c'est-à-dire

$$0 = \{D'^2 \alpha, \beta\} + \{(D'D'' + D''D')(\alpha), \beta\} + \{\alpha, D'^2 \beta\} + \{\alpha, (D'D'' + D''D')(\beta)\} .$$

$$\text{Or } \{D'^2 \alpha, \beta\} \in \Gamma(\mathcal{U}, \Omega^{p+2+s, q+r}) , \quad \{\alpha, D'^2 \beta\} \in \Gamma(\mathcal{U}, \Omega^{p+s, q+r+2})$$

$$\text{et } \{(D'D'' + D''D')(\alpha), \beta\} + \{\alpha, (D'D'' + D''D')(\beta)\} \in \Gamma(\mathcal{U}, \Omega^{p+s+1, q+r+1})$$

donc $\{D^2\alpha, \beta\} = 0$ pour tout $\alpha, \beta \in \Gamma(\mathcal{U}, \Omega_E^{**})$ et par suite $D^2\alpha = 0$ pour tout $\alpha \in \Gamma(\mathcal{U}, \Omega_E^{**})$ donc $D^2 = 0$.

Remarque.— Suivant le corollaire 1 de la proposition 1 du paragraphe 1,

$$D^2 \in \text{Hom}_{\Omega}(\Omega_E^*, \Omega_E^*) = \text{Hom}_{\Omega}(E_{\infty} \otimes_{C^{\infty}} \Omega^*, E_{\infty} \otimes_{C^{\infty}} \Omega^*) = \text{Hom}_{C^{\infty}}(E_{\infty}, E_{\infty} \otimes_{C^{\infty}} \Omega^*)$$

et suivant la proposition 4, $D^2 \in \text{Hom}_{C^{\infty}}(E_{\infty}, E_{\infty} \otimes_{C^{\infty}} \Omega^{1,1})$. Or

$\text{Hom}_{C^{\infty}}(E_{\infty}, E_{\infty} \otimes_{C^{\infty}} \Omega^{1,1})$ est canoniquement isomorphe à $\check{\text{End}}_{C^{\infty}}(E_{\infty}) \otimes_{C^{\infty}} \Omega^{1,1}$

donc

$$\text{Hom}_{C^{\infty}}(E_{\infty}, E_{\infty} \otimes_{C^{\infty}} \Omega^{1,1}) \simeq \Gamma(X, \check{\text{End}}_{C^{\infty}}(E_{\infty}) \otimes_{C^{\infty}} \Omega^{1,1})$$

La courbure D^2 considérée comme élément de $\Gamma(X, \check{\text{End}}_{C^{\infty}}(E_{\infty}) \otimes_{C^{\infty}} \Omega^{1,1})$ sera

notée C_E . Si on note $C_{\mathbb{R}}^{\infty}$ le faisceau de fonctions C^{∞} à valeurs réelles

et $\Omega_{\mathbb{R}}^{1,1}$ les formes C^{∞} de type $(1,1)$ réelles, alors

$$\check{\text{End}}_{C^{\infty}}(E_{\infty}) \otimes_{C^{\infty}} \Omega^{1,1} = \check{\text{End}}_{C^{\infty}}(E_{\infty}) \otimes_{C^{\infty}} C_{\mathbb{R}}^{\infty} \otimes_{C_{\mathbb{R}}^{\infty}} \Omega_{\mathbb{R}}^{1,1} = \check{\text{End}}_{C_{\mathbb{R}}^{\infty}}(E_{\infty}) \otimes_{C_{\mathbb{R}}^{\infty}} \Omega_{\mathbb{R}}^{1,1}$$

et on peut considérer le sous- $C_{\mathbb{R}}^{\infty}$ -module $\check{\text{End}}_{\text{herm}_{C_{\mathbb{R}}^{\infty}}}(E_{\infty}) \otimes_{C_{\mathbb{R}}^{\infty}} \Omega_{\mathbb{R}}^{1,1}$ où

$\check{\text{End}}_{\text{herm}_{C_{\mathbb{R}}^{\infty}}}(E_{\infty})$ désigne le faisceau d'endomorphismes hermitiens de E_{∞} .

PROPOSITION 5.— $iC_E \in \Gamma(X, \check{\text{End}}_{\text{herm}_{C_{\mathbb{R}}^{\infty}}}(E_{\infty}) \otimes_{C_{\mathbb{R}}^{\infty}} \Omega_{\mathbb{R}}^{1,1})$.

Démonstration.

L'assertion étant locale, on peut supposer $\Omega_{\mathbb{R}}^{1,1}$ libre et choisir une base $\omega_1, \dots, \omega_t \in \Gamma(X, \Omega_{\mathbb{R}}^{1,1})$. Alors soit $C_E = \sum_{i=1}^t \rho_i \otimes \omega_i$ avec $\rho_i \in \Gamma(X, \check{\text{End}}_{C_{\mathbb{R}}^{\infty}}(E_{\infty}))$. Or suivant la proposition 3, pour tout $\sigma, \sigma' \in \Gamma(X, E_{\infty})$,

$$\{D^2\sigma, \sigma'\} + \{\sigma, D^2\sigma'\} = 0$$

c'est-à-dire

$$\left\{ \sum_{i=1}^t \rho_i(\sigma) \otimes \omega_i, \sigma' \right\} + \left\{ \sigma, \sum_{i=1}^t \rho_i(\sigma') \otimes \omega_i \right\} = 0$$

donc

$$\sum_{i=1}^t \{\rho_i(\sigma), \sigma'\} \omega_i + \sum_{i=1}^t \{\sigma, \rho_i(\sigma')\} \omega_i = 0$$

donc pour tout i

$$\{\rho_i(\sigma), \sigma'\} + \{\sigma, \rho_i(\sigma')\} = 0$$

d'où le résultat.

PROPOSITION 6.- Si le rang r du fibré E est égal à 1 , $C_E \in \Gamma(X, \Omega^{1,1})$ est une forme fermée. Plus précisément, si \mathcal{U} est un ouvert au-dessus duquel le fibré E est trivial et σ est une section holomorphe inversible de E au-dessus de \mathcal{U} $C_E|_{\mathcal{U}} = d''d'\text{Log}\{\sigma, \sigma\}$.

Démonstration.

Il suffit de démontrer la seconde assertion puisque

$$d''d'\text{Log}\{\sigma, \sigma\} = dd'\text{Log}\{\sigma, \sigma\} .$$

Alors par définition $D^2(\sigma) = \sigma \otimes C_E$ et suivant la démonstration de la proposition 1

$$D(\sigma) = \sigma \otimes \frac{d'\{\sigma, \sigma\}}{\{\sigma, \sigma\}} = \sigma \otimes d'\text{Log}\{\sigma, \sigma\}$$

et par suite

$$D^2(\sigma) = D(\sigma) \wedge d'\text{Log}\{\sigma, \sigma\} + \sigma \otimes dd'\text{Log}\{\sigma, \sigma\} = \sigma \otimes d'\text{Log}\{\sigma, \sigma\} \wedge d'\text{Log}\{\sigma, \sigma\} + \sigma \otimes d''d'\text{Log}\{\sigma, \sigma\} = \sigma \otimes d''d'\text{Log}\{\sigma, \sigma\}$$

d'où le résultat σ étant inversible.

Remarque.- Suivant la proposition 5, $iC_E \in \Gamma(X, \text{Endherm}_{C^\infty}(E_\infty) \otimes C_{\mathbb{R}}^\infty \Omega_{\mathbb{R}}^{1,1})$.

Or $\Omega_{\mathbb{R}}^{1,1}$ est un sous- C^∞ -module de $\Lambda^2 T^* = (\Lambda^2 T)^*$, où T désigne le fibré tangent, donc iC_E définit une application bilinéaire alternée

$$a_E : T^2 \longrightarrow \text{Endherm}_{C^\infty}(E_\infty)$$

d'où une application quadratique $\Phi_E : T \longrightarrow \text{Endherm}_{C^\infty}(E_\infty)$ définie par

$$\Phi_E(t) = a_E(t, it) .$$

DEFINITION 2.- On dit que le fibré E muni de sa structure hermitienne est positif, si pour tout $x \in X$ et $t \in T_x - \{0\}$, $\Phi_E(t)$ soit positif non dégénéré c'est-à-dire $\forall \eta \in E_x - \{0\}$, $\{\Phi_E(t)(\eta), \eta\} > 0$.

DEFINITION 3.- On dit qu'un fibré E holomorphe de rang r est positif s'il existe une structure hermitienne sur E pour laquelle il est positif.

§ β . Precise vanishing theorem.

Dans ce paragraphe on garde les mêmes notations que dans les paragraphes précédents et on suppose que X est une variété hermitienne de forme fondamentale $\omega \in \Gamma(X, \Omega_{\mathbb{R}}^{1,1})$ et que E_{∞} est muni d'une structure hermitienne de connexion $D^0 : E_{\infty} = \Omega_E^0 \longrightarrow \Omega_E^1$ prolongée en $D : \Omega_E^* \longrightarrow \Omega_E^*$. On notera encore par $L, \Lambda, *, C$ les opérateurs $1_{E_{\infty}} \otimes L, 1_{E_{\infty}} \otimes \Lambda, 1_{E_{\infty}} \otimes *, 1_{E_{\infty}} \otimes C$ de l'exposé 2. On définit un produit hermitien sur Ω_E^* par

$$\langle \sigma \otimes \omega, \sigma' \otimes \omega' \rangle = \{ \sigma, \sigma' \} \langle \omega, \omega' \rangle$$

pour tout ouvert \mathcal{U} de X et $\sigma, \sigma' \in \Gamma(\mathcal{U}, E_{\infty})$, $\omega, \omega' \in \Gamma(\mathcal{U}, \Omega^*)$.

PROPOSITION 1.- Soient \mathcal{U} un ouvert de X , $\alpha, \beta \in \Gamma(\mathcal{U}, \Omega_E^p)$. Alors $\langle \alpha, \beta \rangle_{\tau} = \{ \alpha, * \beta \}$ où τ désigne l'élément de volume sur X .

Démonstration.

Soient $\sigma, \sigma' \in \Gamma(\mathcal{U}, E_{\infty})$, $\omega, \omega' \in \Gamma(\mathcal{U}, \Omega^p)$. Alors $\langle \sigma \otimes \omega, \sigma' \otimes \omega' \rangle_{\tau} = \{ \sigma, \sigma' \} \langle \omega, \omega' \rangle_{\tau} = \{ \sigma, \sigma' \} \omega \wedge * \bar{\omega}'$ (Exp. n°1, 1.3) et $\{ \sigma, \sigma' \} \omega \wedge * \bar{\omega}' = \{ \sigma, \sigma' \} \omega \overline{\wedge * \omega'}$ car $*$ est réel et finalement

$$\langle \sigma \otimes \omega, \sigma' \otimes \omega' \rangle_{\tau} = \{ \sigma \otimes \omega, \sigma' \otimes * \omega' \}$$

On suppose désormais que X est compacte. Alors on pose pour $\alpha, \beta \in \Gamma(X, \Omega_E^*)$

$$(\alpha, \beta) = \int_X \langle \alpha, \beta \rangle_{\tau}$$

PROPOSITION 2.- L'opérateur $\delta = - * D *$ est adjoint de D pour (\cdot, \cdot) .

Démonstration.

Soient $\alpha \in \Gamma(X, \Omega_E^p)$, $\beta \in \Gamma(X, \Omega_E^{p+1})$ et démontrons que $(D\alpha, \beta) = (\alpha, \delta\beta)$. En effet $(D\alpha, \beta) = \int_X \langle D\alpha, \beta \rangle_{\tau} = \int_X \{ D\alpha, * \beta \}$ suivant la proposition 1. Donc $(D\alpha, \beta) = (-1)^{p+1} \int_X \{ \alpha, D * \beta \} + \int_X d\{ \alpha, * \beta \}$ suivant la proposition 2 du paragraphe 2 et suivant le théorème de Stokes $(D\alpha, \beta) = (-1)^{p+1} \int_X \{ \alpha, D * \beta \} = (-1)^{p+1} (\alpha, (-1)^{(2n-p)P} * D * \beta)$ (où $2n$ est la dimension sur \mathbb{R} de X) donc $(D\alpha, \beta) = (\alpha, \delta\beta)$.

On suppose désormais que X est une variété kähliérienne compacte.

PROPOSITION 3.- On a les relations :

$$[L, D] = 0 \quad , \quad [\Lambda, \delta] = 0 \quad , \quad [L, \delta] = D^C \quad , \quad [\Lambda, D] = -\delta^C \quad .$$

Démonstration.

La première est une conséquence immédiate de la relation $d\omega = 0$, la deuxième résulte de la première et la troisième de la dernière. La dernière résulte du lemme à la proposition 1 du paragraphe 2 de l'exposé 2, en remarquant que la décomposition en somme directe de Ω^* , obtenue par les formes différentielles primitives, définit une décomposition analogue de Ω_E^* par tensorisation par E_∞ .

THEOREME 1.- On a les relations $\Delta = 2^*\square - i[\Lambda, D^2] = 2^*\square + i[\Lambda, D^2]$ en posant $\Delta = [D, \delta]$, $^*\square = [D', \delta']$, $^{\circ}\square = [D'', \delta'']$.

Démonstration.

C'est une conséquence immédiate de la proposition 3 et du lemme au théorème 1, paragraphe 3 de l'exposé 2.

COROLLAIRE 1.- Soit $\alpha \in \Gamma(X, \Omega_E^*)$ tel que $^{\circ}\square(\alpha) = 0$. Alors $([\Lambda, iD^2](\alpha), \alpha) \geq 0$.

Démonstration.- D'après le théorème 1, $\Delta\alpha = [\Lambda, iD^2](\alpha)$. Or

$$(\Delta\alpha, \alpha) = ((D\delta + \delta D)(\alpha), \alpha) = (D\delta(\alpha), \alpha) + (\delta D(\alpha), \alpha) = (\delta\alpha, \delta\alpha) + (D\alpha, D\alpha) \geq 0$$

d'où $([\Lambda, iD^2](\alpha), \alpha) \geq 0$.

COROLLAIRE 2.- Les opérateurs Δ , $^*\square$, $^{\circ}\square$ sont elliptiques.

Démonstration.- Les opérateurs Δ , $^*\square$, $^{\circ}\square$ sont des opérateurs d'ordre 2, l'opérateur $i[\Lambda, D^2]$ étant d'ordre 0 car \mathbb{C}^∞ -linéaire, il suffit de démontrer le résultat pour Δ .

Calculons le symbole σ_D de D . Soient $x \in X$, $z \in T_x^*(X) - \{0\}$, $\eta \in \Omega_{E,x}^p$, $f \in \Gamma(X, \mathbb{C}^\infty)$ tel que $f(x) = 0$ et $df(x) = z$, $\alpha \in \Gamma(X, \Omega_E^p)$ tel que $\alpha(x) = \eta$. Alors :

$$\sigma_D(x, z)\eta = D(f\alpha)(x) = df(x) \wedge \alpha(x) + f(x) D(\alpha)_x = z \wedge \eta \quad .$$

Donc $\sigma_D(x, z) = e_z$ multiplication extérieure à gauche par z .

Donc $\sigma_\delta(x, z) = - * e_z * = - i_z$ (exp n°1, 2.7) multiplication intérieure à gauche par z et $\sigma_\Delta(x, z) = - e_z \circ i_z - i_z \circ e_z = -|z|^2 \text{id}$ (exp n°1, 2.9) et par suite Δ est un opérateur elliptique.

PROPOSITION 4.- Les opérateurs Δ, \square, \square sont des opérateurs auto-adjoints par rapport à (\cdot, \cdot) .

Démonstration.

Soient

$$\alpha, \beta \in \Gamma(X, \Omega_E^p) \quad (\Delta\alpha, \beta) = (D\delta\alpha, \beta) + (\delta D\alpha, \beta) = (\delta\alpha, \delta\beta) + (D\alpha, D\beta) = (\alpha, D\delta\beta) + (\alpha, \delta D\beta) = (\alpha, \Delta\beta)$$

et de même pour \square et \square .

DEFINITION 1.- On pose

$$H_E^{p,q} = \Gamma(X, \text{Ker } \Delta) \cap \Gamma(X, \Omega_E^{p,q})$$

$$\mathcal{H}_E^{p,q} = \Gamma(X, \text{Ker } \square) \cap \Gamma(X, \Omega_E^{p,q})$$

$$\mathcal{H}_E^{p,q} = \Gamma(X, \text{Ker } \square) \cap \Gamma(X, \Omega_E^{p,q}) \quad .$$

COROLLAIRE 1.- $\Gamma(X, \Omega_E^{p,q}) = H_E^{p,q} \oplus \Delta(\Gamma(X, \Omega_E^{p,q})) = \mathcal{H}_E^{p,q} \oplus \square(\Gamma(X, \Omega_E^{p,q})) = \mathcal{H}_E^{p,q} \oplus \square(\Gamma(X, \Omega_E^{p,q})) \quad .$

Démonstration.

Cela résulte des propositions 3, 4 et de l'exposé n°1, 2.13.

PROPOSITION 5.- $\alpha \in H_E \Leftrightarrow D\alpha = \delta\alpha = 0$

$$\alpha \in \mathcal{H}_E \Leftrightarrow D'\alpha = \delta'\alpha = 0$$

$$\alpha \in \mathcal{H}_E \Leftrightarrow D''\alpha = \delta''\alpha = 0 \quad .$$

Démonstration.

En effet $\alpha \in H_E \Rightarrow \Delta\alpha = 0 \Rightarrow (\Delta\alpha, \alpha) = 0 \Rightarrow (D\delta\alpha, \alpha) + (\delta D\alpha, \alpha) = 0 \Rightarrow (\delta\alpha, \delta\alpha) + (D\alpha, D\alpha) = 0 \Rightarrow \delta\alpha = D\alpha = 0$ la réciproque étant évidente.

On démontre de la même façon les deux autres assertions.

PROPOSITION 6.- $\mathbb{H}_E^{p,q} \simeq H^q(X, E \otimes_{\mathcal{O}} \Omega_{an}^p)$.

Démonstration.

D'après le théorème 1 du paragraphe 1, $H^q(X, E \otimes_{\mathcal{O}} \Omega_{an}^p) \simeq H^q(\Gamma(X, \Omega_E^{p,q}))$ pour la différentielle D'' . Donc il suffit de démontrer que pour tout $\alpha \in \Gamma(X, \Omega_E^{p,q})$ tel que $D''\alpha = 0$, il existe un et un seul $\alpha' \in \mathbb{H}_E^{p,q}$ cohomologue à α .

D'après le corollaire 1, $\alpha = \alpha' + \alpha''$, avec $\alpha' \in \mathbb{H}_E^{p,q}$ et $\alpha'' = \delta''\beta$ avec $\beta \in \Gamma(X, \Omega_E^{p,q})$. Alors $D''\alpha = 0$ entraîne $D''\alpha'' = 0$ donc $D''\delta''\beta = 0$ d'où $(D''\delta''\beta, D''\beta) = 0 \Rightarrow (\delta''D''\beta, \delta''D''\beta) = 0 \Rightarrow \delta''D''\beta = 0$ donc $\alpha = \alpha' + D''\delta''\beta$ et par suite α' est cohomologue à α .

Soit $\alpha \in \mathbb{H}_E^{p,q}$ avec $\alpha = D''\beta$, $\beta \in \Gamma(X, \Omega_E^{p,q})$ et démontrons que $\alpha = 0$. En effet $\delta''\alpha = 0$ donc $\delta''D''\beta = 0 \Rightarrow (\delta''D''\beta, \beta) = 0 \Rightarrow (D''\beta, D''\beta) = 0 \Rightarrow D''\beta = 0 \Rightarrow \alpha = 0$.

THEOREME 2.- Si E est un fibré positif de rang 1, $H^q(X, E \otimes_{\mathcal{O}} \Omega_{an}^p) = 0$ pour $p + q \geq n + 1$.

Démonstration.

Par hypothèse, on peut prendre comme structure kählérienne sur X celle définie par la forme iC_E . Alors $L = iD^2$ et d'après le corollaire 1 du théorème 1 pour tout $\alpha \in \mathbb{H}_E^{p,q}$ $([A, L](\alpha), \alpha) \geq 0 \Rightarrow (n-p-q)(\alpha, \alpha) \geq 0 \Rightarrow (\alpha, \alpha) = 0$ si $p+q \geq n+1$, donc $\alpha = 0$ dans les mêmes conditions. On en déduit que $\mathbb{H}_E^{p,q} = \{0\}$ si $p+q \geq n+1$, d'où le théorème d'après la proposition 6.

PROPOSITION 7.- L'opérateur * est orthogonal pour (.,.) .

Démonstration. Soient $\alpha \in \Gamma(X, \Omega_E^p)$, $\beta \in \Gamma(X, \Omega_E^{2n-p})$ et démontrons que

$$(\alpha, * \beta) = (*^{-1} \alpha, \beta) \text{ . En effet}$$

$$(\alpha, * \beta) = \int_X \langle \alpha, * \beta \rangle \tau = \int_X \{ \alpha, ** \beta \} = (-1)^{2n-p} \int_X \{ \alpha, \beta \} = (-1)^p (-1)^{p(2n-p)} \overline{\int_X \{ \beta, \alpha \}} =$$

$$(-1)^p (-1)^{p^2} \overline{\int_X \{ \beta, **^{-1} \alpha \}} = (-1)^{p(p+1)} \int_X \langle \beta, *^{-1} \alpha \rangle \tau =$$

$$\int_X \langle *^{-1} \alpha, \beta \rangle \tau = (*^{-1} \alpha, \beta) \text{ .}$$

PROPOSITION 8.- Si $u \in \Gamma(X, \Omega_R^{1,1})$ et L_u désigne la multiplication extérieure à gauche par u l'adjoint Λ_u pour (.,.) est donné par la formule $\Lambda_u = *^{-1} L_u *$.

Démonstration. Soient $\alpha \in \Gamma(X, \Omega_E^p)$, $\beta \in \Gamma(X, \Omega_E^{p+2})$ et démontrons que

$$(u \wedge \alpha, \beta) = (\alpha, *^{-1}(u \wedge * \beta)) \text{ . En effet } (u \wedge \alpha, \beta) = \int_X \langle u \wedge \alpha, \beta \rangle \tau = \int_X \{ u \wedge \alpha, * \beta \} =$$

$$\int_X \{ \alpha, u \wedge * \beta \} = \int_X \{ \alpha, **^{-1}(u \wedge * \beta) \} = \int_X \langle \alpha, *^{-1}(u \wedge * \beta) \rangle \tau = (\alpha, *^{-1}(u \wedge * \beta)) \text{ .}$$

PROPOSITION 9.- Soit $u \in \Omega_R^{1,1}$ tel que la forme hermitienne associée à u soit positive. Alors si $\alpha \in \Gamma(X, \Omega^{p,0})$ ou $\alpha \in \Gamma(X, \Omega^{0,p})$ ($w \wedge \alpha, u \wedge \alpha$) ≥ 0 .

Démonstration. Supposons, par exemple, que $\alpha \in \Gamma(X, \Omega^{p,0})$. Nous allons vérifier que pour tout $x \in X$, $\langle w \wedge \alpha, u \wedge \alpha \rangle_x \geq 0$. Soit dz_1, \dots, dz_n une

base de $\Omega_x^{1,0}$ orthonormale en x pour la forme hermitienne déduite de w

et orthogonale en x pour la forme hermitienne déduite de u . Alors

$$w = \frac{i}{2} \sum_{i=1}^n dz_i \wedge d\bar{z}_i \text{ et } u = \frac{i}{2} \sum_{i=1}^n a_i dz_i \wedge d\bar{z}_i \text{ où } a_i \geq 0 \text{ . Soient } A \subset [1, n] \text{ ,}$$

$$\text{card } A = p \text{ , } dz_A = dz_{i_1} \wedge \dots \wedge dz_{i_p} \text{ où } A = \{i_1, \dots, i_p\} \text{ et } i_1 < \dots < i_p \text{ .}$$

Alors
$$w \wedge dz_A = \frac{i}{2} \sum_{i \notin A} dz_i \wedge d\bar{z}_i \wedge dz_A$$

et

$$u \wedge dz_A = \frac{i}{2} \sum_{j \notin A} a_j dz_j \wedge d\bar{z}_j \wedge dz_A \text{ ,}$$

où $A' \subset [1, n]$ et $\text{card } A' = p$.

Donc
$$\langle w \wedge dz_A, u \wedge dz_A \rangle_x =$$

$$\frac{1}{4} \sum_{i \notin A} \sum_{j \notin A} a_j \langle dz_i \wedge dz_i \wedge dz_A, dz_j \wedge dz_j \wedge dz_A \rangle_x =$$

$$\frac{1}{4} \sum_{i \notin A \cup A'} a_i \langle dz_i \wedge d\bar{z}_i \wedge dz_A, dz_i \wedge d\bar{z}_i \wedge dz_A \rangle_x$$

qui est nul sauf si $A = A'$, auquel cas il est égal à $\frac{1}{4} \sum_{i \notin A} a_i \geq 0$.
 D'où la proposition.

THEOREME 3. - Si le fibré E est de rang 1, soient $\rho : X \rightarrow \mathbb{R}_+$ une fonction continue, \mathfrak{f}_E la forme quadratique associée à $i c_E \in \Omega_{\mathbb{R}}^{1,1}$, \mathfrak{f}_X la forme quadratique associée à ω . Alors

(i) Si $\frac{\mathfrak{f}_E}{2} \geq \rho \mathfrak{f}_X$ pour tout $\alpha \in \Gamma(X, \Omega_E^{n,q})$ ou $\alpha \in \Gamma(X, \Omega_E^{q,n})$, on a l'inégalité :

$$\int_X q\rho \langle \alpha, \alpha \rangle \tau \leq \int_X \langle D''\alpha, D''\alpha \rangle \tau + \int_X \langle \delta''\alpha, \delta''\alpha \rangle \tau .$$

(ii) Si $-\frac{\mathfrak{f}_E}{2} \geq \rho \mathfrak{f}_X$ pour tout $\alpha \in \Gamma(X, \Omega_E^{0,q})$ ou $\alpha \in \Gamma(X, \Omega_E^{q,0})$ on a l'inégalité

$$\int_X (n-q)\rho \langle \alpha, \alpha \rangle \tau \leq \int_X \langle D''\alpha, D''\alpha \rangle \tau + \int_X \langle \delta''\alpha, \delta''\alpha \rangle \tau .$$

(iii) Si $-\frac{\mathfrak{f}_E}{2} \geq \rho \mathfrak{f}_X$ pour tout $\alpha \in \Gamma(X, \Omega_E^{n,q})$ ou $\alpha \in \Gamma(X, \Omega_E^{q,n})$ on a l'inégalité

$$\int_X q\rho \langle \alpha, \alpha \rangle \tau \leq \int_X \langle D'\alpha, D'\alpha \rangle \tau + \int_X \langle \delta'\alpha, \delta'\alpha \rangle \tau$$

(iv) Si $\frac{\mathfrak{f}_E}{2} \geq \rho \mathfrak{f}_X$ pour tout $\alpha \in \Gamma(X, \Omega_E^{0,q})$ ou $\alpha \in \Gamma(X, \Omega_E^{q,0})$ on a l'inégalité

$$\int_X (n-q)\rho \langle \alpha, \alpha \rangle \tau \leq \int_X \langle D'\alpha, D'\alpha \rangle \tau + \int_X \langle \delta'\alpha, \delta'\alpha \rangle \tau .$$

Démonstration. Remarquons

a) d'après le théorème 1

$$\Delta = 2\Box - i[\Lambda, D^2] = 2\Box + i[\Lambda, D^2] . \text{ Donc pour tout } \alpha \in \Gamma(X, \Omega_E) ,$$

$$(D\alpha, \alpha) = 2(\Box\alpha, \alpha) - (i[\Lambda, D^2]\alpha, \alpha) = 2(\Box\alpha, \alpha) + (i[\Lambda, D^2]\alpha, \alpha)$$

c'est-à-dire

$$\begin{aligned} (D\alpha, D\alpha) + (\delta\alpha, \delta\alpha) &= 2(D'\alpha, D'\alpha) + 2(\delta'\alpha, \delta'\alpha) - (i[\Lambda, D^2]\alpha, \alpha) = \\ &= 2(D''\alpha, D''\alpha) + 2(\delta''\alpha, \delta''\alpha) + (i[\Lambda, D^2]\alpha, \alpha) . \end{aligned}$$

Or on a $(D\alpha, D\alpha) + (\delta\alpha, \delta\alpha) \geq 0$. Donc

$$\int_X \langle D''\alpha, D''\alpha \rangle \tau + \int_X \langle \delta''\alpha, \delta''\alpha \rangle \tau \geq - \left(\frac{1}{2} [\Lambda, D^2]\alpha, \alpha \right)$$

et $\int_X \langle D'\alpha, D'\alpha \rangle \tau + \int_X \langle \delta'\alpha, \delta'\alpha \rangle \tau \geq \left(\frac{1}{2} [\Lambda, D^2]\alpha, \alpha \right)$.

$$\begin{aligned} \text{b) } \left(\frac{1}{2} [\Lambda, D^2] \alpha, \alpha \right) &= \left(\frac{1}{2} (\Lambda D^2 - D^2 \Lambda) \alpha, \alpha \right) = \left(\Lambda \left(\frac{1}{2} C_E \wedge \alpha \right), \alpha \right) - \left(\frac{1}{2} C_E \wedge *^{-1}(\omega \wedge \alpha), \alpha \right) = \\ &= \left(\frac{1}{2} C_E \wedge \alpha, \omega \wedge \alpha \right) - \left(*^{-1}(\omega \wedge * \alpha), *^{-1} \left(\frac{1}{2} C_E \wedge * \alpha \right) \right) = \left(\frac{1}{2} C_E \wedge \alpha, \omega \wedge \alpha \right) - \left(\omega \wedge * \alpha, \frac{1}{2} C_E \wedge * \alpha \right), \end{aligned}$$

d'après les propositions 7 et 8.

c) Si $\alpha \in \Gamma(X, \Omega_E^{p,q})$, $(n-p-q)\alpha = [\Lambda, L]\alpha$ (exp. n°2, §1, prop. 6). Donc $((n-p-q)\rho\alpha, \alpha) = (\rho\Lambda\alpha, \alpha) - (\rho L\alpha, \alpha) = (\Lambda(\rho\omega \wedge \alpha), \alpha) - (\rho\omega \wedge *^{-1}(\omega \wedge * \alpha), \alpha) = (\rho\omega \wedge \alpha, \omega \wedge \alpha) - (*^{-1}(\omega \wedge * \alpha), *^{-1}(\rho\omega \wedge * \alpha)) = (\rho\omega \wedge \alpha, \omega \wedge \alpha) - (\omega \wedge * \alpha, \rho\omega \wedge * \alpha)$ d'après les propositions 7 et 8.

Démontrons :

i) D'après (a), il suffit de démontrer que $-\left(\frac{1}{2} [\Lambda, D^2] \alpha, \alpha\right) - (q\rho\alpha, \alpha) \geq 0$ et pour cela d'après (b) et (c) et en tenant compte que $\alpha \in \Gamma(X, \Omega_E^{n,q})$ ou $\alpha \in \Gamma(X, \Omega_E^{q,n})$ il suffit de démontrer que

$(\omega \wedge * \alpha, \frac{1}{2} C_E \wedge \alpha) - (\omega \wedge * \alpha, \rho\omega \wedge * \alpha) = (\omega \wedge * \alpha, (\frac{1}{2} C_E - \rho\omega) \wedge * \alpha) \geq 0$ ce qui est une conséquence de l'hypothèse $-\frac{\Phi_E}{2} \geq \rho\Phi_X$ d'après la proposition 9, vu que $*\alpha \in \Gamma(X, \Omega^{n-q,0})$ ou $*\alpha \in \Gamma(X, \Omega^{0,n-q})$.

ii) D'après (a), il suffit de démontrer que $-\left(\frac{1}{2} [\Lambda, D^2] \alpha, \alpha\right) - ((n-q)\rho\alpha, \alpha) \geq 0$ et pour cela d'après (b) et (c), et en tenant compte que $\alpha \in \Gamma(X, \Omega_E^{0,q})$ ou $\alpha \in \Gamma(X, \Omega_E^{q,0})$ il suffit de démontrer que

$-\left(\frac{1}{2} C_E \wedge \alpha, \omega \wedge \alpha\right) - (\rho\omega \wedge \alpha, \omega \wedge \alpha) = \left(-\frac{1}{2} C_E - \rho\omega\right) \wedge \alpha, \omega \wedge \alpha \geq 0$ ce qui est conséquence de l'hypothèse $-\frac{\Phi_E}{2} \geq \rho\Phi_X$ suivant la proposition 9, vu que $\alpha \in \Gamma(X, \Omega_E^{0,q})$ ou $\alpha \in \Gamma(X, \Omega_E^{q,0})$.

iii) D'après (a), il suffit de démontrer que $\left(\frac{1}{2} [\Lambda, D^2] \alpha, \alpha\right) - (q\rho\alpha, \alpha) \geq 0$ et pour cela d'après (b) et (c) et en tenant compte que $\alpha \in \Gamma(X, \Omega_E^{n,q})$ ou $\alpha \in \Gamma(X, \Omega_E^{q,n})$, il suffit de démontrer que

$-(\omega \wedge * \alpha, \frac{1}{2} C_E \wedge * \alpha) - (\omega \wedge * \alpha, \rho\omega \wedge * \alpha) = (\omega \wedge * \alpha, (-\frac{1}{2} C_E - \rho\omega) \wedge * \alpha) \geq 0$ ce qui est une conséquence de l'hypothèse $-\frac{\Phi_E}{2} \geq \rho\Phi_X$ d'après la proposition 9, vu que $*\alpha \in \Gamma(X, \Omega_E^{n-q,0})$ ou $*\alpha \in \Gamma(X, \Omega_E^{0,n-q})$.

iv) D'après (a), il suffit de démontrer que $\left(\frac{1}{2} [\Lambda, D^2] \alpha, \alpha\right) - ((n-q)\rho\alpha, \alpha) \geq 0$

et pour cela d'après (b) et (c) et en tenant compte que $\alpha \in \Gamma(X, \Omega_E^{q, q})$ ou $\alpha \in \Gamma(X, \Omega_E^{q, 0})$ il suffit de démontrer que

$$\left(\frac{1}{2} C_E \wedge \alpha, \omega \wedge \alpha\right) - (\rho \omega \wedge \alpha, \omega \wedge \alpha) = \left(\left(\frac{1}{2} C_E - \rho \omega\right) \wedge \alpha, \omega \wedge \alpha\right) \geq 0$$

ce qui est une conséquence de l'hypothèse $\frac{\Phi_E}{2} \geq \rho \Phi_X$ d'après la proposition 9 vu que $\alpha \in \Gamma(X, \Omega_E^{0, q})$ ou $\alpha \in \Gamma(X, \Omega_E^{q, 0})$.

THEOREME 4. - Sous les mêmes hypothèses que le théorème 3 si $|\Phi_E| \geq \rho \Phi_X$

i) pour tout $\alpha \in \Gamma(X, \Omega_E^{n, q})$ ou $\alpha \in \Gamma(X, \Omega_E^{q, n})$ on a l'inégalité

$$\int_X \eta \rho \langle \alpha, \alpha \rangle \tau \leq \int_X \langle D\alpha, D\alpha \rangle \tau + \int_X \langle \delta\alpha, \delta\alpha \rangle \tau .$$

ii) pour tout $\alpha \in \Gamma(X, \Omega_E^{0, q})$ ou $\alpha \in \Gamma(X, \Omega_E^{q, 0})$ on a l'inégalité

$$\int_X (n - q) \rho \langle \alpha, \alpha \rangle \tau \leq \int_X \langle D\alpha, D\alpha \rangle \tau + \int_X \langle \delta\alpha, \delta\alpha \rangle \tau .$$

Démonstration.

La démonstration est analogue à celle du théorème 3, en remarquant que les formules $\Delta = 2 \cdot \square - i[\Lambda, D^2] = 2 \cdot \square + i[\Lambda, D^2]$ entraînent que

$$\int_X \langle D\alpha, D\alpha \rangle \tau + \int_X \langle \delta\alpha, \delta\alpha \rangle \tau \geq - (i[\Lambda, D^2]\alpha, \alpha)$$

et

$$\int_X \langle D\alpha, D\alpha \rangle \tau + \int_X \langle \delta\alpha, \delta\alpha \rangle \tau \geq (i[\Lambda, D^2]\alpha, \alpha)$$

car

$$(\square\alpha, \alpha) = (D'\alpha, D'\alpha) + (\delta'\alpha, \delta'\alpha) \geq 0$$

et

$$(\square\alpha, \alpha) = (D''\alpha, D''\alpha) + (\delta''\alpha, \delta''\alpha) \geq 0 .$$