Le langage des espaces et des groupes quantiques

Georges MALTSINIOTIS

Introduction.

Le but de cet article est de présenter une étude systématique d'un calcul différentiel non commutatif, dans le cadre des espaces et des groupes quantiques. Dans l'esprit du livre de Yu. I. Manin *"Quantum groups and non-commutative geometry"*, un espace quantique est une "variété algébrique" en "géométrie algébrique non commutative". Par analogie à la géométrie commutative ordinaire, on est tenté d'identifier les "K-espaces quantiques affines", où K désigne un corps commutatif (ou plus généralement un anneau commutatif), aux objets de la catégorie opposée à celle des K-algèbres associatives, unifères, non nécessairement commutatives. Néanmoins, si en géométrie algébrique commutative, la donnée de l'anneau structural d'un schéma affine définit canoniquement une "structure différentielle" sur ce schéma, il n'en est pas de même dans le cas non commutatif. Plus précisement, si A est une K-algèbre commutative, et si l'on désigne par $\mu : A \otimes A \to A$ l'application K-linéaire définissant la multiplication de A, le noyau I de μ est un idéal de $A \otimes A$, l'application K-linéaire $d : A \to I/I^2$, définie par $d(a) = a \otimes 1 - 1 \otimes a$, est une dérivation et toute dérivation de A à valeurs dans un A-module se factorise de façon unique à travers d. Il existe un prolongement unique de d en une antidérivation K-linéaire, de carré nul, de l'algèbre extérieure $\bigwedge_A(I/I^2)$, qui fait de cette algèbre un complexe différentiel gradué, appelé *complexe de de Rham algébrique.* On peut considérer que c'est ce complexe qui définit la "structure différentielle" du schéma $\mathrm{Spec}(A)$. Si l'algèbre A n'est pas commutative, cette construction ne se généralise pas. En effet, alors I n'est plus un idéal de $A \otimes A$, mais seulement un (A, A)-bimodule, et en particulier, $I^2 \not\subset I$ et on ne peut donc même pas considérer I/I^2. On peut néanmoins, définir une application K-linéaire $d : A \to I$, par $d(a) = a \otimes 1 - 1 \otimes a$, qui est une dérivation, universelle parmi les dérivations de A à valeurs dans un *bimodule*, et qui se prolonge en une antidérivation K-linéaire, de carré nul, unique de l'algèbre *tensorielle*

$$T_A(I) = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \underbrace{I \otimes_A I \otimes_A \cdots \otimes_A I}_{n \text{ fois}}$$

du bimodule I, qui fait de $T_A(I)$ un complexe différentiel gradué, appelé *complexe de de Rham universel* ([**Co**], [**Ka**]). Ce complexe ne constitue pas une généralisation du complexe de de Rham algébrique. En effet, si l'algèbre A est commutative, il est en général beaucoup plus gros que ce dernier. En plus, il ne paraît être un bon substitut du complexe de de Rham algébrique que pour des algèbres "très loin du cas commutatif" (comme les algèbres associatives libres, ou les algèbres de matrices).

Idéalement, pour généraliser la notion de complexe de de Rham algébrique, au cas non commutatif, on voudrait associer fonctoriellement à toute algèbre associative unifère, un complexe différentiel gradué, de sorte que l'on obtienne le complexe de de Rham universel, dans le cas d'une algèbre associative libre, et le complexe de de Rham algébrique, dans le cas d'une algèbre commutative. Cela paraît impossible, du moins de "façon canonique". La philosophie de cet article est que la donnée de "l'algèbre des fonctions" sur un "espace non commutatif", ou "quantique", ne suffit pas pour déterminer la structure différentielle de ce dernier, mais qu'il faut, pour cela, se donner en plus un complexe différentiel gradué, appelé *complexe de de Rham*, considéré comme faisant partie des données définissant la structure de cet espace. A une même algèbre plusieurs telles structures peuvent correspondre (on verra même des exemples de structures différentielles "non commutatives" sur une algèbre commutative). On définira donc un *espace quantique*, comme étant un objet de la catégorie opposée à celle des K-algèbres "munies d'un complexe de de Rham".

La motivation d'origine de mon travail vient du livre de Manin cité ci-dessus. Dans ce livre, Manin associe naturellement à toute algèbre quadratique graduée, considérée comme un espace linéaire quantique, un groupe linéaire quantique pouvant être interprété comme un "objet d'automorphismes linéaires" de cet espace. Pour obtenir par cette construction le groupe linéaire classique, dans le cas commutatif, ou le groupe quantique usuel GL_q (q-déformation du groupe linéaire "commutatif"), dans le cas quantique, il faut "ajouter les relations manquantes" ("add missing relations"), que Manin obtient moyennant une identification symétrique de l'espace vectoriel engendré par les générateurs de l'algèbre quadratique, à son dual. Le groupe quantique qu'il obtient dépend de cette identification. Ainsi, Manin parle de groupe "crypto-orthogonal" car il revient au même de se fixer une forme bilinéaire symétrique non dégénérée et d'imposer qu'elle reste invariante par les "automorphismes". Dans cet article, on interprète les relations manquantes de Manin autrement. Elles proviennent simplement du fait qu'on impose que les "automorphismes" respectent la structure différentielle qu'on se donne. La plupart des résultats de Manin s'étendent sans difficulté dans ce nouveau contexte, en modifiant à peine les démonstrations. (Après la fin de cette rédaction, j'ai reçu un preprint de Manin, où il adopte le point de vue exposé ici [**Man4**].)

Dans le premier paragraphe, on développe les préliminaires relatifs aux algèbres différentielles graduées. Au paragraphe deux, on introduit la notion d'espace quantique, ainsi que celle de cône quantique. On définit le produit de deux espaces quantiques, l'espace quantique opposé, les espaces quantiques de type fini, et les immersions fermées, ou ouvertes, d'un espace quantique dans un autre. On étudie les propriétés élémentaires de ces espaces et on en donne quelques exemples. Dans le paragraphe trois, on introduit la notion de monoïde quantique, celle de monoïde quantique matriciel, on définit l'action d'un monoïde quantique sur un espace quantique et on démontre l'existence de l'espace quantique des morphismes d'un cône quantique dans un autre, généralisant un résultat de Manin. On obtient ainsi, comme cas particulier, le monoïde quantique des endomorphismes d'un cône quantique. On termine par quelques exemples de monoïdes quantiques, et on retrouve une construction analogue à celle du QISM, associant à une R-matrice, un monoïde quantique. Au paragraphe quatre, on introduit la notion de groupe quantique, et en généralisant une construction de Manin, on associe, de façon universelle, à tout monoïde quantique un groupe quantique. Cette construction est l'équivalent quantique du procédé qui associe à un monoïde, le groupe de ses éléments inversibles. Enfin, on termine par l'étude des monoïdes de Cramer, et l'exemple d'un calcul différentiel sur la déformation multiparamétrique du groupe linéaire, introduite par M. Artin, W. Shelter et J. Tate [**AST**].

Une version préliminaire de ce travail a été rédigée l'été 1989, sous forme d'une lettre adressée à J.-L. Verdier. J'ai appris sa mort tragique, avant que cette lettre ne soit postée. Un résumé a été publié aux C.R.A.S. [**Mal1**]. Le présent article est incontestablement influencé par le livre de Yu. I. Manin [**Man2**], par les articles de S. L. Woronowicz (qui est je pense à l'origine de l'idée de considérer un "calcul différentiel" comme étant une donnée supplémentaire dans la définition d' un espace non commutatif, ou "pseudoespace" [**Wo1**], [**Wo2**]), ainsi que par les exposés de P. Cartier au Séminaire de l'École Normale Supérieure, P. Cartier que je voudrais remercier pour les discussions utiles que j'ai pu avoir avec lui. Je remercie également Y. Kosmann-Schwarzbach, pour sa lecture attentive de mon manuscrit et ses nombreuses remarques. Je voudrais citer ici les noms des personnes qui ont travaillé sur le même sujet et qui ont obtenu indépendamment des résultats ou des exemples analogues, sans avoir eu une influence directe sur ce travail: D. Bernard, T. Brzeziński, U. Carow-Watamura, H. Dabrowski, E. Demidov, D. Gurevich, T. Hibi, B. Jurčo, E. Mukhin, F. Müller-Hoissen, M. Noumi, A. Radul, J. Rembieliński, M. Rosso, V. Rubtsov, A. Schirrmacher, M. Schlieker, W. B. Schmidke, B. Tsygan T. Umeda, S. P. Vokos, M. Wakayama, S. Watamura, W. Weich, J. Wess, D. Zhdanovich et B. Zumino ([**Bd**], [**Br**], [**BDR**], [**CSWW**], [**GRR**], [**HW**], [**Ju**], [**M-H**], [**NUW**], [**Ro**], [**Sch**], [**SWZ**], [**SVZ**], [**Tsy**], [**WZ**]). Dans une direction différente, on doit mentionner le travail de K. Aomoto ([**Ao1**], [**Ao2**], [**Ao3**]), de M. Dubois-Violette, R. Kerner et J. Madore ([**DV1**], [**DV2**], [**DKM1**], [**DKM2**]), ainsi que le point de vue très original de S. Zakrzewski [**Za2**]. Enfin, on ne peut parler de calcul différentiel non commutatif sans citer A. Connes, bien que son point de vue soit totalement différent de celui adopté ici, et les adeptes de la cohomologie cyclique ([**Co**], [**FT**], [**Ka**], [**Kas**], [**MNW1**], [**MNW2**], [**Ta**]). Je voudrais présenter mes excuses à tous ceux dont j'oublie de mentionner le travail. Ce n'est que par simple ignorance.

1. Algèbres différentielles

Dans cet article, K désigne un anneau commutatif. Toutes les algèbres considérées seront des K-algèbres associatives unifères, non nécessairement commutatives, et les morphismes d'algèbres seront unifères. On notera $\otimes$ le produit tensoriel $\otimes_K$ sur K. Si I désigne un ensemble et pour tout i, $i \in I$, x_i l'image canonique de i dans l'algèbre associative unifère libre construite sur I ([**Bo**], A III, p. 21), on notera cette dernière $K\langle(x_i)_{i\in I}\rangle$, et on dira qu'elle est *l'algèbre des polynômes non-commutatifs en les indéterminées* $(x_i)_{i\in I}$.

1.1. Bimodule des différentielles non commutatives

(1.1.1) Soient A une K-algèbre et M un (A, A)-bimodule ([**Bo**], A III p. 38-39). On rappelle qu'une *K-dérivation* de A dans M est une application K-linéaire $D : A \to M$ telle que

$$\forall a, a' \in A \qquad D(a \cdot a') = (Da) \cdot a' + a \cdot (Da').$$

On dit que M est *engendré par l'image de D*, si $D(A)$ engendre M comme A-module à gauche (ou comme A-module à droite, ou comme (A, A)-bimodule, conditions qui sont équivalentes).

(1.1.2) Soit $\mu : A \otimes A \to A$ l'application K-linéaire définie par la multiplication de A ($\mu(a \otimes b) = a \cdot b$). Alors μ est un morphisme de (A, A)-bimodules et en particulier le noyau $I = \mathrm{Ker}(\mu)$ est un (A, A)-bimodule (bimodule des “différentielles non commutatives” de A) et l'application K-linéaire $d : A \to I$ définie par

$$d(a) = a \otimes 1 - 1 \otimes a$$

est une K-dérivation dont l'image engendre I et qui possède la propriété universelle suivante : pour tout (A, A)-bimodule M et toute K-dérivation $D : A \to M$ il existe un morphisme unique de (A, A)-bimodules $h : I \to M$ tel que $D = h \circ d$ ([**Bo**], A III, p. 132).

(1.1.3) On rappelle que dans le cas où l'algèbre A est commutative, μ est un morphisme de K-algèbres, I est un idéal de $A \otimes A$ et si l'on pose $\Omega^1 = I/I^2$ (module des différentielles ordinaires), les deux structures de A-module sur Ω^1 déduites de la structure de bimodule de I sont identiques et le composé de d avec la surjection canonique $I \to \Omega^1$ (composé qu'on désignera aussi par d) est une K-dérivation jouissant de la propriété universelle suivante : pour tout A-module M et toute K-dérivation $D : A \to M$ (pour la structure de (A, A)-bimodule de M déduite de sa structure de A-module) il existe une application A-linéaire unique $h : \Omega^1 \to M$ telle que $D = h \circ d$ ([**Bo**], A III, p. 133-134).

1.2. Algèbres différentielles graduées.

Définition (1.2.1) On appelle *algèbre différentielle graduée*, ou plus simplement *algèbre différentielle*, une K-algèbre $\mathbb{N}$-graduée

$$\Omega = \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} \Omega^n$$

munie d'une application K-linéaire d (la différentielle) homogène de degré 1

$$d : \Omega \to \Omega\,, \quad d = \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} d_n\,, \quad d_n : \Omega^n \to \Omega^{n+1}$$

telle que :

i) $d^2 = 0$;

ii) $d(a \cdot b) = da \cdot b + (-1)^n a \cdot db\,, \quad a \in \Omega^n\,, \quad b \in \Omega\,.$

On remarque que Ω^0 est une sous-algèbre de Ω, que Ω^1 est un (Ω^0, Ω^0)-bimodule et que $d_0 : \Omega^0 \to \Omega^1$ est une K-dérivation. Un *morphisme d'algèbres différentielles* est un morphisme de K-algèbres graduées, de degré 0, qui commute aux différentielles. On dit qu'une algèbre différentielle (Ω, d) est *engendrée par ses éléments de degré* 0, si la K-algèbre sous-jacente à Ω est engendrée par $\Omega^0 \cup d\Omega^0$, ou ce qui est équivalent, si toute sous-K-algèbre de Ω stable par d (sous-algèbre différentielle) contenant Ω^0 est égale à Ω, autrement dit, si Ω est engendrée par Ω^0 comme K-algèbre différentielle.

Exemple (1.2.2) Soient I un ensemble et $\Omega = K\langle (x_i)_{i\in I}, (\xi_i)_{i\in I}\rangle$ l'algèbre associative unifère libre construite sur l'ensemble somme disjointe

$$I \amalg I = I \times \{0\} \cup I \times \{1\} = I \times \{0, 1\},$$

où x_i (resp. ξ_i) désigne l'image canonique de $(i, 0)$ (resp. de $(i, 1)$) dans Ω. On considère la graduation de type $\mathbb{N}$ sur Ω définie par l'application

$$\varphi : I \amalg I \longrightarrow \mathbb{N}\,,$$

$\varphi(i, 0) = 0$, $\varphi(i, 1) = 1$ ([**Bo**], A III, p. 31), autrement dit, la graduation du "degré total en les $(\xi_i)_{i\in I}$". On définit une différentielle d sur Ω par $dx_i = \xi_i$, pour $i \in I$, et les propriétés (i) et (ii) de la définition (1.2.1). Alors Ω est une K-algèbre différentielle graduée appelée *K-algèbre différentielle libre construite sur I*, ou *K-algèbre différentielle libre engendrée par la famille des indéterminées $(x_i)_{i\in I}$* et elle est notée $K\langle\langle (x_i)_{i\in I}\rangle\rangle$. Elle est engendrée par ses éléments de degré 0 et satisfait à la propriété universelle suivante : pour toute K-algèbre différentielle graduée Ω' et toute famille $(a_i)_{i\in I}$ d'éléments de Ω'^0 il existe un morphisme unique $f : \Omega \to \Omega'$ de K-algèbres différentielles tel que $f(x_i) = a_i$, pour $i \in I$.

Définition (1.2.3) Soit (Ω, d) une K-algèbre différentielle. On dit qu'une partie J de Ω est un *idéal différentiel* (gradué) si :

$i)$ J est un idéal bilatère gradué de Ω ;

$ii)$ $d(J) \subset J$.

Le noyau d'un morphisme d'algèbres différentielles est un idéal différentiel, l'intersection d'une famille d'idéaux différentiels est un idéal différentiel, pour toute partie d'une algèbre différentielle il existe un plus petit idéal différentiel la contenant, appelé *idéal différentiel engendré* par cette partie, l'algèbre quotient d'une algèbre différentielle par un idéal différentiel est munie canoniquement d'une structure d'algèbre différentielle satisfaisant à une propriété universelle facile à formuler.

Si S désigne une partie de Ω formée d'éléments homogènes, l'idéal différentiel engendré par S est égal à l'idéal bilatère engendré par $S \cup d(S)$.

Théorème (1.2.4) *Soient A une K-algèbre, M un (A, A)-bimodule et $D : A \to M$ une K-dérivation telle que M soit engendré par l'image de D. Alors il existe une K-algèbre différentielle (Ω_D, d), engendrée par ses éléments de degré 0, telle que $\Omega_D^0 = A$, $\Omega_D^1 = M$, $d_0 = D$ et satisfaisant à la propriété universelle suivante : pour toute K-algèbre différentielle (Ω', d') et tout morphisme de K-algèbres $\rho : A \to \Omega'^0$ tel qu'il existe un morphisme (nécessairement unique) de (A, A)-bimodules $\sigma : M \to \Omega'^1$ tel que $d'_0 \circ \rho = \sigma \circ D$, il existe un morphisme unique de K-algèbres différentielles $f : \Omega_D \to \Omega'$ tel que $f_0 = \rho$ (et alors $f_1 = \sigma$).*

Démonstration : Soient $(a_i)_{i \in I}$ un système de générateurs de la K-algèbre A et $\Omega = K\langle\langle (x_i)_{i \in I} \rangle\rangle$ l'algèbre différentielle libre construite sur I. La K-algèbre Ω^0 s'identifie canoniquement à l'algèbre des polynômes non-commutatifs $K\langle (x_i)_{i \in I} \rangle$ et le (Ω^0, Ω^0)-bimodule Ω^1 est canoniquement isomorphe au bimodule $\Omega^0 \otimes K^{(I)} \otimes \Omega^0$, où $K^{(I)}$ désigne le K-module libre de base $(dx_i)_{i \in I}$. Il existe donc un morphisme unique de K-algèbres $p_0 : \Omega^0 \to A$ (resp. de (Ω^0, Ω^0)-bimodules $p_1 : \Omega^1 \to M$) tel que $p_0(x_i) = a_i$ (resp. $p_1(dx_i) = Da_i$), pour $i \in I$. On a $p_1 \circ d = D \circ p_0$ et si l'on pose $J_0 = \mathrm{Ker}(p_0)$ et $J_1 = \mathrm{Ker}(p_1)$, $d(J_0) \subset J_1$. L'idéal différentiel J de Ω engendré par $J_0 \cup J_1$ est donc l'idéal bilatère de Ω engendré par $J_0 \cup J_1 \cup d(J_1)$. On en déduit que si l'on pose $\Omega_D = \Omega / J$, le morphisme p_0 (resp. p_1) induit un isomorphisme de Ω_D^0 (resp. Ω_D^1) sur A (resp. M) (car la famille $(a_i)_{i \in I}$ engendre A et l'image de D engendre M) et ces isomorphismes identifient d_0 à D. La propriété universelle de Ω_D résulte aussitôt de celle de Ω.

Corollaire (1.2.5) *Soit A une K-algèbre. Il existe une K-algèbre différentielle (Ω, d) telle que $\Omega^0 = A$, satisfaisant à la propriété universelle suivante : pour toute K-algèbre différentielle (Ω', d') et tout morphisme de K-algèbres $\rho : A \to \Omega'^0$, il existe un morphisme unique de K-algèbres différentielles $f : \Omega \to \Omega'$ tel que $f_0 = \rho$.*

Démonstration : Le corollaire résulte du théorème (1.2.4) appliqué au bimodule I des différentielles non commutatives et à la dérivation universelle $d : A \to I$ définis dans (1.1.2).

Remarque (1.2.6) Ce corollaire est bien connu (voir par exemple [**Ka**], 1.24, p.18 et [**Co**], p. 98–99 pour une généralisation à la catégorie des algèbres associatives, non nécessairement unifères). Ces auteurs donnent d'ailleurs une description plus explicite de cette algèbre. En effet, on démontre que

$$\Omega^n = \underbrace{I \otimes_A I \otimes_A \cdots \otimes_A I}_{n \text{ fois}} \quad ,$$

la différentielle étant déterminée par la formule

$$d(a_0 da_1 \otimes da_2 \otimes \cdots \otimes da_n) = da_0 \otimes da_1 \otimes \cdots \otimes da_n,$$

pour $a_0, a_1, \ldots, a_n \in A$. Cette algèbre différentielle s'appelle *complexe de de Rham universel* et permet à M. Karoubi de définir la cohomologie de de Rham non commutative, intimement liée à la cohomologie cyclique de A. Connes ([**Ka**], théorème 2.15, p.31). Plus généralement, on appelle *complexe de de Rham* sur une K-algèbre A, une K-algèbre différentielle Ω telle que :

a) $\Omega^0 = A$;

b) Ω est engendrée par ses éléments de degré 0 (cf. déf. (1.1.1)).

Il résulte du corollaire (1.2.5) que tout complexe de de Rham est quotient du complexe de de Rham universel, et le théorème (1.2.4) permet d'associer à tout (A, A)-bimodule M et toute dérivation $D : A \to M$, dont l'image engendre M, un complexe de de Rham sur A.

Exemple (1.2.7) Le complexe de de Rham universel de l'algèbre des polynômes non commutatifs $K\langle(x_i)_{i\in I}\rangle$ est isomorphe à l'algèbre différentielle libre $K\langle\langle(x_i)_{i\in I}\rangle\rangle$ engendrée par la famille des indéterminées $(x_i)_{i\in I}$.

Exemple (1.2.8) Considérons une partie S de l'algèbre des polynômes non-commutatifs $K\langle(x_i)_{i\in I}\rangle$ et soit A l'algèbre quotient de $K\langle(x_i)_{i\in I}\rangle$ par l'idéal bilatère engendré par S. Alors le complexe de de Rham universel de A est isomorphe au quotient de l'algèbre différentielle libre $K\langle\langle(x_i)_{i\in I}\rangle\rangle$ par l'idéal différentiel engendré par S, autrement dit, l'idéal bilatère engendré par $S \cup d(S)$.

Exemple (1.2.9) Soient A une K-algèbre commutative, $M = I/I^2$ le module des différentielles ordinaires et $D : A \to M$ la dérivation universelle (cf. 1.1.3). Alors si 2 est inversible dans K, le complexe de de Rham associé à D par le théorème (1.2.4) est le complexe de de Rham algébrique habituel (cf. [**EGA IV**$_4$] 16.6.2, p.34).

Exemple (1.2.10) Soit $A = k[(x_i)_{i\in I}]$ l'algèbre des polynômes commutatifs ordinaires. L'algèbre A est le quotient de l'algèbre des polynômes non commutatifs $k\langle(x_i)_{i\in I}\rangle$ par l'idéal bilatère engendré par la famille

$$S = (x_i x_j - x_j x_i)_{i,j\in I} \quad .$$

Conformement à l'exemple (1.2.8), le complexe de de Rham universel de A est isomorphe au quotient de l'algèbre différentielle libre $k\langle\langle(x_i)_{i\in I}\rangle\rangle$ par l'idéal bilatère engendré par $S \cup dS$ et l'on a

$$dS = (\xi_i x_j + x_i \xi_j - \xi_j x_i - x_j \xi_i)_{i,j\in I} \quad ,$$

où $\xi_i = dx_i$, pour $i \in I$. On constate que les x_i ne commutent pas aux ξ_j et que les ξ_i n'anticommutent pas entre eux. En particulier, ce complexe de de Rham universel est distinct du complexe de de Rham algébrique (Ex. 1.2.9).

2. Espaces quantiques

2.1. La catégorie des espaces quantiques

Définition (2.1.1) La *catégorie des K-espaces quantiques* est la catégorie opposée à la catégorie des K-algèbres différentielles graduées, engendrées par les éléments de degré 0. On appelle *K-espace quantique*, ou plus simplement *espace quantique* (resp. *morphisme d'espaces quantiques*) un objet (resp. un morphisme) de cette catégorie.

Il est important de noter que dans la définition (2.1.1) on considère la catégorie opposée elle même, et non pas une catégorie équivalente à cette dernière. La catégorie des espaces quantiques est donc munie d'un foncteur contravariant canonique, associant à un espace quantique X une algèbre différentielle notée Ω_X et appelée *complexe de de Rham* de X et à tout morphisme d'espaces quantiques $f : X \to Y$ un morphisme d'algèbres différentielles graduées $f^* : \Omega_Y \to \Omega_X$. Ce foncteur est un isomorphisme de la catégorie opposée à celle des espaces quantiques sur la catégorie des algèbres différentielles graduées engendrées par les éléments de degré 0. L'isomorphisme inverse sera noté Spec. Le foncteur Spec associe donc à toute algèbre différentielle graduée Ω engendrée par ses éléments de degré 0, un espace quantique $\mathrm{Spec}(\Omega)$ et à tout morphisme d'algèbres différentielles $\varphi : \Omega \to \Omega'$ un morphisme d'espaces quantiques $\mathrm{Spec}(\varphi) : \mathrm{Spec}(\Omega') \to \mathrm{Spec}(\Omega)$.

En composant le foncteur qui associe à un espace quantique son complexe de de Rham avec le foncteur qui associe à une algèbre différentielle graduée l'algèbre formée de ses éléments de degré 0, on obtient un foncteur contravariant de la catégorie des espaces quantiques dans celle des K-algèbres, associant à un espace quantique X l'algèbre Ω_X^0, notée $\mathcal{O}_X$ et appelée *algèbre des fonctions sur X* (ou algèbre des *observables* sur l'espace quantique X), et à tout morphisme d'espaces quantiques $f : X \to Y$ la composante de degré 0 du morphisme $f^* : \Omega_Y \to \Omega_X$, notée aussi $f^* : \mathcal{O}_Y \to \mathcal{O}_X$. On remarque que Ω_X est un complexe de de Rham sur la K-algèbre $\mathcal{O}_X$ (cf. (1.2.6)).

Formellement, la définition (2.1.1) n'apporte rien de nouveau par rapport aux définitions du §1. Néanmoins, le simple fait d'inverser les flèches aide à stimuler l'intuition géométrique et rend les définitions des monoïdes et des groupes quantiques plus naturelles que si l'on se plaçait dans un cadre purement algébrique.

Remarque (2.1.2) On peut identifier la catégorie des K-schémas affines à une sous-catégorie pleine de la catégorie des K-espaces quantiques. En effet, la catégorie des K-schémas affines est équivalente à la catégorie opposée à celle des K-algèbres commutatives, et le foncteur pleinement fidèle qui associe à une K-algèbre commutative son complexe de de Rham algébrique ordinaire (cf. (1.2.9)) identifie la catégorie des K-algèbres commutatives à une sous-catégorie pleine de la catégorie des K-algèbres différentielles graduées engendrées par les éléments de degré 0. C'est d'ailleurs par analogie avec les schémas qu'on a introduit la notation Spec ci-dessus, bien qu'elle ne soit pas entièrement compatible. En effet, à toute K-algèbre commutative A on associe un K-schéma affine $\mathrm{Spec}(A)$, qui en vertu de ce qui précède, peut être considéré comme un espace quantique, qui en utilisant la notation de (2.1.1) est noté $\mathrm{Spec}(\Omega)$, où Ω désigne le complexe de de Rham algébrique de A. Si A est la K-algèbre K alors le complexe de de Rham de A est K concentré en degré 0, la différentielle étant identiquement nulle, et $\mathrm{Spec}(K)$ désigne indifféremment le schéma réduit à un point, ou l'espace quantique correspondant.

(2.1.3) Considérons la catégorie $\mathcal{C}$ dont les objets sont les triplets (A, M, D), où A désigne une K-algèbre, M un (A, A)-bimodule et $D : A \to M$ une K-dérivation dont l'image engendre M, les morphismes d'un objet (A, M, D) dans un objet (A', M', D') étant les couples (ρ, σ), où $\rho : A \to A'$ est un morphisme d'algèbres et $\sigma : M \to M'$ un morphisme de (A, A)-bimodules (autrement dit σ est additif et pour tout $a, b \in A$ et tout $x \in M$, $\sigma(axb) = \rho(a)\sigma(x)\rho(b)$) tels que $\sigma D = D'\rho$. Il résulte facilement du théorème (1.2.4) qu'il existe un foncteur de la catégorie $\mathcal{C}$ dans celle des K-algèbres différentielles graduées engendrées par les éléments de degré 0, associant à un objet (A, M, D) de $\mathcal{C}$ l'algèbre différentielle Ω_D définie dans ce théorème. On dit qu'un espace quantique est *simple* s'il existe un objet (A, M, D) de $\mathcal{C}$ tel que $X = \mathrm{Spec}(\Omega_D)$.

Soient X un espace quantique quelconque, Ω_X son complexe de de Rham et $d_X^0 : \mathcal{O}_X \to \Omega_X^1$ la 0-ième composante de la différentielle de Ω_X. Alors $(\mathcal{O}_X, \Omega_X^1, d_X^0)$ est un objet de $\mathcal{C}$ et si $\Omega = \Omega_{d_X^0}$ désigne l'algèbre différentielle associée à cet objet, conformément au théorème (1.2.4), il existe un morphisme unique d'algèbres différentielles $\varphi : \Omega \to \Omega_X$ tel que $\varphi_0 = \mathrm{id}_{\mathcal{O}_X}$ et $\varphi_1 = \mathrm{id}_{\Omega_X^1}$. On en déduit un morphisme d'espaces quantiques $\mathrm{Spec}(\varphi) : X \to \mathrm{Spec}(\Omega)$, et l'espace quantique X est simple si et seulement si ce morphisme est un isomorphisme.

Proposition (2.1.4) *Soient X un espace quantique, $(a_i)_{i\in I}$ une famille d'éléments de $\mathcal{O}_X$ qui engendrent l'algèbre différentielle Ω_X, $\Omega = K\langle\langle (x_i)_{i\in I}\rangle\rangle$ la K-algèbre différentielle libre engendrée par la famille des indéterminées $(x_i)_{i\in I}$, $\varphi : \Omega \to \Omega_X$ le morphisme (surjectif) de K-algèbres différentielles tel que $\varphi(x_i) = a_i$, pour $i \in I$,* (cf. (1.2.2)) *et $J = \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} J^n$ le noyau de φ. Pour que l'espace quantique X soit simple il faut et il suffit que J soit l'idéal différentiel de Ω engendré par $J^0 \cup J^1$.*

La démonstration de cette proposition est laissée au lecteur. Elle s'inspire directement de la démonstration du théorème (1.2.4).

2.2. Sous-espaces quantiques et espace quantique opposé

Définition (2.2.1) Soit X un espace quantique. On dit qu'un espace quantique X' est un *sous-espace quantique fermé* de X s'il existe un idéal différentiel $\mathcal{J}$ de Ω_X *engendré par ses éléments homogènes de degré* 0 (comme idéal différentiel) tel que $\Omega_{X'} = \Omega_X/\mathcal{J}$, et on dit que le morphisme $i : X' \to X$ déduit de la surjection canonique $\Omega_X \to \Omega_{X'}$ est *l'immersion (fermée) canonique* de X' dans X. On dit qu'un morphisme d'espaces quantiques $f : Y \to X$ est une *immersion fermée*, s'il existe un sous-espace quantique fermé X' de X et un isomorphisme $g : Y \to X'$, tels que $f = i \circ g$, où $i : X' \hookrightarrow X$ désigne l'immersion canonique.

Si X est un K-schéma affine ses sous-espaces quantiques fermés ne sont autres que ses sous-schémas fermés. Si X est un espace quantique simple, tout sous-espace quantique fermé de X est simple.

(2.2.2) Soit Ω une K-algèbre différentielle. On appelle *algèbre différentielle opposée* et on note Ω^{opp} l'algèbre différentielle dont le K-module gradué sous-jacent et la différentielle sont ceux de Ω et dont la multiplication $\circ$ est définie par

$$a \circ b = (-1)^{mn} ba \qquad a \in \Omega^m, \quad b \in \Omega^n.$$

On définit ainsi un foncteur de la catégorie des K-algèbres différentielles dans elle-même et on remarque que si Ω est engendrée par ses éléments de degré 0 il en est de même pour Ω^{opp}. On en déduit un foncteur de la catégorie des espaces quantiques dans elle-même qui est une involution.

Si X (resp. $f : X' \to X$) désigne un espace quantique (resp. un morphisme d'espaces quantiques) on note X^{opp} (resp. f^{opp}) son image par cette involution et on a donc $X^{\text{opp}} = \text{Spec}(\Omega_X^{\text{opp}})$. On dit que X^{opp} est *l'espace quantique opposé* à X. Cette involution induit l'identité sur la sous-catégorie des K-schémas affines et si X est un espaces quantique simple, il en est de même pour X^{opp}.

2.3. Produit d'espaces quantiques

(2.3.1) Soit S un espace quantique. Pour tout espace quantique X on appelle *S-point* de X un morphisme d'espaces quantiques de S dans X.

Définition (2.3.2) Soient S, X, X' des espaces quantiques et $f : S \to X$ et $f' : S \to X'$ deux S-points de X et X' respectivement. On dit que f et f' sont *simultanément observables* si $\text{Im}(f^*)$ et $\text{Im}(f'^*)$ commutent au sens gradué (élément par élément), autrement dit, si pour tout $a \in \text{Im}(f^*) \cap \Omega_S^m$ et tout $b \in \text{Im}(f'^*) \cap \Omega_S^n$ on a

$$ab = (-1)^{mn} ba \quad .$$

Si la relation "être simultanément observable" est bien symétrique, elle n'est ni réflexive ni transitive et en particulier, *elle n'est pas* une relation d'équivalence comme cette terminologie pourait le faire croire. Cette terminologie vient de la physique. En effet, on dit que deux éléments a et b de l'algèbre des observables $\mathcal{O}_S$ d'un espace quantique S (cf. (2.1.1)) sont simultanément observables si a et b commutent.

(2.3.3) On va définir un produit d'espaces quantiques qui ne sera pas le produit au sens des catégories (qui existe mais qui ne nous intéressera pas dans cet article). Le produit catégorique de deux espaces quantiques X et Y représente le foncteur contravariant qui à un espace quantique S associe l'ensemble des couples de S-points de X et Y. Le produit que nous allons définir représentera le foncteur associant l'ensemble des couples formés de S-points simultanément observables. Du point de vue de la physique, on peut dire que le produit de deux espaces quantiques représentera le système quantique formé par la juxtaposition des deux systèmes, sans interactions entre eux.

(2.3.4) Soient Ω' et Ω'' deux K-algèbres différentielles graduées. Le *produit tensoriel* Ω de Ω' et Ω'' est l'algèbre différentielle graduée définie comme suit :

a) comme K-module $\Omega = \Omega' \otimes \Omega''$;

b) comme K-algèbre $\Omega = \Omega' \,{}^g\!\!\otimes \Omega''$ ([**Bo**], A III, p.49), autrement dit,

$$(a \otimes a') \cdot (b \otimes b') = (-1)^{mn} ab \otimes a'b', \quad a \in \Omega', \quad a' \in \Omega''^m, \quad b \in \Omega'^n, \quad b' \in \Omega''$$

la graduation étant définie par

$$\Omega^m = \bigoplus_{\substack{m', m'' \geq 0 \\ m'+m''=m}} \Omega'^{m'} \otimes \Omega''^{m''} \ ;$$

c) la différentielle d de Ω est définie par

$$d(a \otimes a') = da \otimes a' + (-1)^m a \otimes da', \quad a \in \Omega'^m, \quad a' \in \Omega''.$$

On note $\Omega = \Omega' \,{}^g\!\!\otimes \Omega''$. Si Ω' et Ω'' sont engendrées par les éléments de degré 0 il en est de même pour Ω.

Définition (2.3.5) Soient X et Y deux espaces quantiques. On appelle *produit* de X et Y, et on note $X \times Y$, l'espace quantique $\mathrm{Spec}(\Omega_X \,{}^g\!\!\otimes \Omega_Y)$.

L'application canonique $\Omega_X \to \Omega_X \,{}^g\!\!\otimes \Omega_Y$ (resp. $\Omega_Y \to \Omega_X \,{}^g\!\!\otimes \Omega_Y$) définie par $a \mapsto a \otimes 1$ (resp. $a' \mapsto 1 \otimes a'$) définit un morphisme d'espaces quantiques $X \times Y \to X$ (resp. $X \times Y \to Y$) appelé *première* (resp. *deuxième*) *projection*.

Proposition (2.3.6) *Soient X et Y deux espaces quantiques, $pr_1 : X \times Y \to X$ (resp. $pr_2 : X \times Y \to Y$) la première (resp. la deuxième) projection. Pour tout espace quantique S l'application qui associe à un S-point $f : S \to X \times Y$ le couple $(pr_1 \circ f, pr_2 \circ f)$ établi une bijection entre les S-points de $X \times Y$ et les couples formés de S-points simultanément observables de X et Y.*

(2.3.7) La démonstration de la proposition (2.3.6) ainsi que la vérification des propriétés suivantes est laissée au lecteur.

(2.3.7.1) Le produit d'espaces quantiques définit un bifoncteur et si X, Y et Z désignent des espaces quantiques il existe des isomorphismes fonctoriels canoniques

$$(X \times Y) \times Z \to X \times (Y \times Z) \qquad \text{(contrainte d'associativité)}$$

$$X \times Y \longrightarrow Y \times X \qquad \text{(contrainte de commutativité)}$$

$$\left.\begin{array}{l} X \times \mathrm{Spec}(K) \longrightarrow X \\ \mathrm{Spec}(K) \times X \longrightarrow X \end{array}\right\} \qquad \text{(contraintes d'unité)}$$

satisfaisant aux conditions de compatibilité des catégories tensorielles symétriques ([**DM**], p.104-105). La seule précision utile concerne la contrainte de commutativité : l'isomorphisme $s : X \times Y \to Y \times X$ est égal à $\mathrm{Spec}(\sigma)$, où $\sigma : \Omega_Y \,{}^g\!\otimes \Omega_X \to \Omega_X \,{}^g\!\otimes \Omega_Y$ est défini par

$$\sigma(a \otimes a') = (-1)^{mm'} a' \otimes a, \quad a \in \Omega_Y^m, \quad a' \in \Omega_X^{m'}.$$

(2.3.7.2) Le produit de deux K-schémas affines en tant qu'espaces quantiques n'est autre que leur produit en tant que K-schémas.

(2.3.7.3) Le produit de deux espaces quantiques simples est un espace quantique simple.

(2.3.7.4) Le produit de deux immersions fermées est une immersion fermée.

(2.3.7.5) Si X et Y désignent des espaces quantiques, on a

$$(X \times Y)^{\mathrm{opp}} = X^{\mathrm{opp}} \times Y^{\mathrm{opp}}.$$

2.4. Cônes quantiques

Définition (2.4.1) On appelle *cône quantique* un espace quantique X, dont le complexe de de Rham Ω_X est muni d'une bigraduation compatible avec la graduation d'algèbre différentielle de Ω_X, autrement dit, pour tout n, $n \in \mathbb{N}$, d'une décomposition en somme directe de K-modules

$$\Omega_X^n = \bigoplus_{m \in \mathbb{N}} \Omega_X^{m,n}$$

satisfaisant aux propriétés suivantes :

i) $\Omega_X^{0,0} = K$;

ii) Ω_X^0 est engendré par $\Omega_X^{1,0}$ comme K-algèbre ;

iii) la multiplication est compatible avec la bigraduation :

$$\Omega_X^{m,n} \cdot \Omega_X^{m',n'} \subset \Omega_X^{m+m',n+n'}, \quad m, n, m', n' \in \mathbb{N} \,;$$

iv) la différentielle est bihomogène de bidegré $(-1,1)$:

$$d(\Omega_X^{m,n}) \subset \Omega_X^{m-1,n+1}, \quad m,n \in \mathbb{N}\,.$$

Un *morphisme de cônes quantiques* est un morphisme d'espaces quantiques $f : X \to Y$ tel que f^* soit bihomogène de bidegré $(0,0)$:

$$f^*(\Omega_Y^{m,n}) \subset \Omega_X^{m,n}, \qquad m,n \in \mathbb{N}.$$

Il est facile de vérifier que pour cela il suffit que

$$f^*(\Omega_Y^{1,0}) \subset \Omega_X^{1,0}.$$

Exemple (2.4.2) Soit $\Omega = K\langle\langle (x_i)_{i\in I}\rangle\rangle$ l'algèbre différentielle libre engendrée par la famille des indéterminées $(x_i)_{i\in I}$ (cf. (1.2.2)). On définit une bigraduation sur Ω par le "degré total en les $(x_i)_{i\in I}$" et le "degré total en les $(\xi_i)_{i\in I}$", où $\xi_i = dx_i$, pour $i \in I$. L'espace quantique $\mathrm{Spec}(\Omega)$ est ainsi muni d'une structure de cône quantique. On dit que X est *le cône quantique associé à l'ensemble* I, qu'on note $C(I)$. Si J désigne un idéal différentiel bigradué de Ω, l'algèbre différentielle quotient Ω/J est munie d'une bigraduation et $\mathrm{Spec}(\Omega/J)$ d'une structure de cône quantique. Tout cône quantique est isomorphe à un cône ainsi défini. En effet, si Y désigne un cône quantique, en vertu de (2.4.1), (*ii*), il existe une famille $(a_i)_{i\in I}$ d'éléments de $\Omega_Y^{1,0}$ qui engendrent Ω_Y comme K-algèbre différentielle. Alors si $\varphi : \Omega \to \Omega_Y$ désigne le morphisme (surjectif) d'algèbres différentielles graduées tel que $\varphi(x_i) = a_i$, pour $i \in I$, et si l'on pose $J = \mathrm{Ker}(\varphi)$, J est un idéal différentiel bigradué de Ω et on a $Y \simeq \mathrm{Spec}(\Omega/J)$.

Exercice (2.4.3) Soient X et X' deux cônes quantiques. Alors il existe une structure unique de cône quantique sur le produit $X \times X'$ des espaces quantiques sous-jacent telle que les projections

$$X \times X' \to X \quad \text{et} \quad X \times X' \to X'$$

soient des morphismes de cônes quantiques. Cette structure satisfait à une propriété universelle facile à énoncer.

2.5. Espaces quantiques de type fini

Définition (2.5.1) On dit qu'un K-espace quantique X est de *type fini* si la K-algèbre $\mathcal{O}_X$ est de type fini. On dit qu'un cône quantique est de *type fini* si l'espace quantique sous-jacent l'est.

Exercice (2.5.2) Soit X un espace quantique. Les conditions suivantes sont équivalentes :

i) X est de type fini ;

ii) Ω_X est une K-algèbre de type fini ;

iii) Ω_X est engendrée comme K-algèbre différentielle par un nombre fini d'éléments.

De plus, si X est un cône quantique ces conditions sont équivalentes à :

iv) $\Omega_X^{1,0}$ est un K-module de type fini.

2.6. Immersions ouvertes élémentaires

Proposition (2.6.1) *Soient X un espace quantique et A une matrice carrée à coefficients dans $\mathcal{O}_X$. Il existe un espace quantique X_A et un morphisme d'espaces quantiques $i_A : X_A \to X$ tel que $i_A^*(A)$ soit une matrice inversible à coefficients dans $\mathcal{O}_{X_A}$, et possédant la propriété universelle suivante : pour tout morphisme d'espaces quantiques $f : Y \to X$ tel que $f^*(A)$ soit une matrice inversible, il existe un morphisme unique d'espaces quantiques $g : Y \to X_A$ tel que $f = i_A \circ g$.*

DÉMONSTRATION : Soient $(b_i)_{i\in I}$ une famille d'éléments de $\mathcal{O}_X$ qui engendre l'algèbre différentielle Ω_X, $\Omega = K\langle\langle (x_i)_{i\in I}\rangle\rangle$ l'algèbre différentielle libre engendrée par la famille des indéterminées $(x_i)_{i\in I}$, $\psi : \Omega \to \Omega_X$ le morphisme (surjectif) de K-algèbres différentielles tel que $\psi(x_i) = b_i$, pour $i \in I$, (cf. (1.2.2)), $(R_{i'})_{i'\in I'}$ une famille d'éléments de Ω engendrant le noyau de ψ comme idéal différentiel et $(S_k^j)_{1\leq j,k\leq n}$ une famille d'éléments de Ω^0 telle que $A = (\psi(S_k^j))_{1\leq j,k\leq n}$. On pose $X_A = \mathrm{Spec}(\Omega'/J)$, où

$$\Omega' = K\langle\langle (x_i)_{i\in I}, (y_k^j)_{1\leq j,k\leq n}\rangle\rangle$$

désigne l'algèbre différentielle libre engendrée par les indéterminées $(x_i)_{i\in I}$ et $(y_k^j)_{1\leq j,k\leq n}$ et J l'idéal différentiel de Ω' engendré par les familles

$$(R_{i'})_{i'\in I'}, \quad \left(\sum_{k=1}^n S_l^k a_k^j - \delta_l^j\right)_{1\leq j,l\leq n} \quad \text{et} \quad \left(\sum_{k=1}^n a_l^k S_k^j - \delta_l^j\right)_{1\leq j,l\leq n}$$

(où δ_l^j désigne le symbole de Kronecker). Si l'on désigne par ψ' l'isomorphisme inverse de l'isomorphisme de $\Omega/\mathrm{Ker}(\psi)$ sur Ω_X déduit de ψ et par φ' le morphisme de K-algèbres différentielles de $\Omega/\mathrm{Ker}(\psi)$ dans Ω'/J obtenu par passage au quotient de l'injection φ de Ω dans Ω' définie par $\varphi(x_i) = x_i$, pour $i \in I$, et si l'on pose $i_A = \mathrm{Spec}(\varphi' \circ \psi')$ on vérifie aussitôt que le couple (X_A, i_A) satisfait aux conditions de la proposition.

Remarque (2.6.2) Il résulte de la démonstration de la proposition (2.6.1) que, si l'espace quantique X est de type fini, il en est de même pour X_A. De façon plus précise, si $(b_i)_{i\in I}$ désigne une famille de générateurs de la K-algèbre différentielle Ω_X et B une matrice à coefficients dans $\mathcal{O}_{X_A}$ telle que $B \cdot i_A^*(A) = i_A^*(A) \cdot B = I$ (où I désigne la matrice unité), alors la K-algèbre différentielle Ω_{X_A} est engendrée par la famille $(i_A^*(b_i))_{i\in I}$ et les coefficients de la matrice B.

Définition (2.6.3) On dit qu'un morphisme d'espaces quantiques $i : Y \to X$ est *une immersion ouverte presque élémentaire d'ordre n*, s'il existe une matrice carrée A d'ordre n à coefficients dans $\mathcal{O}_X$ et un isomorphisme d'espaces quantiques $f : Y \to X_A$ (cf (2.6.1)) tel que $i = i_A \circ f$. On dit que i est *une immersion ouverte élémentaire*, si i est une immersion ouverte presque élémentaire d'ordre 1. Pour toute matrice carrée A à coefficients dans $\mathcal{O}_X$ on dit que $i_A : X_A \to X$ est *l'immersion ouverte presque élémentaire associée à la matrice A.*

Remarque (2.6.4) Si X est un schéma affine et $i : Y \hookrightarrow X$ une immersion ouverte presque élémentaire (d'ordre arbitraire) alors i est une immersion ouverte élémentaire (grâce au déterminant) et Y est un schéma affine (i étant alors une immersion ouverte au sens des schémas). En revanche, si X est un espace quantique général, ces deux notions ne sont pas équivalentes. Plus généralement, si $m \leq n$, toute immersion ouverte presque élémentaire d'ordre m est une immersion ouverte presque élémentaire d'ordre n, la réciproque n'étant pas nécessairement vraie.

2.7. Exemples d'espaces et de cônes quantiques

Dans les exemples suivants, si Ω désigne une algèbre différentielle graduée et $a_1, \dots, a_n$ des éléments homogènes de Ω, on désigne par $(a_1, \dots, a_n)$ (resp. $((a_1, \dots, a_n))$) l'idéal bilatère (resp. l'idéal différentiel) engendré par ces éléments.

Exemple (2.7.1) (P. Cartier [**Ca**])

$$X = \operatorname{Spec}(K\langle\langle x\rangle\rangle/((\xi x - qx\xi))\,),$$

où $\xi = dx$ et q désigne un élément de l'anneau K. L'algèbre des observables de X est isomorphe à l'algèbre des polynômes commutatifs $K[x]$. On peut donc considérer que l'espace X est la droite affine ("commutative") munie d'une structure différentielle non commutative. Si K est un corps et $q \neq -1$ on a

$$\Omega_X = K\langle\langle x\rangle\rangle/(\xi x - qx\xi, \xi^2)$$

(cf.(1.2.3)). Si $q = -1$

$$\Omega_X = K\langle\langle x\rangle\rangle/(\xi x + x\xi)$$

et l'espace quantique

$$X' = \operatorname{Spec}\left(K\langle\langle x\rangle\rangle/(\xi x + x\xi, \xi^2)\right)$$

n'est pas un espace quantique simple (cf. (2.1.4)). L'élément $\xi x - qx\xi$ de $K\langle\langle x\rangle\rangle$ étant bihomogène en x et ξ , l'espace quantique X est muni d'une structure de cône quantique (cf. (2.4.2))

Exemple (2.7.2) (Plan quantique) $\mathbb{A}^2_{q,p} = \operatorname{Spec}(K\langle\langle x, y\rangle\rangle/J)$, où si l'on pose $\xi = dx$ et $\eta = dy$, J désigne l'idéal bilatère engendré par

$$\begin{aligned}
&yx - qxy, \\
&\xi x - pqx\xi, \quad \xi y - py\xi, \quad \eta x - qx\eta - (pq-1)y\xi, \quad \eta y - pqy\eta, \\
&\xi^2, \quad \eta^2, \quad \xi\eta + p\eta\xi \qquad (p, q \in K)\,.
\end{aligned}$$

L'idéal J est bigradué (pour la bigraduation définie par le degré total en x et y et le degré total en ξ et η) et l'espace $\mathbb{A}^2_{q,p}$ est ainsi muni d'une structure de cône quantique (cf.

(2.4.2)). L'espace quantique $\mathbb{A}^2_{q,p}$ est simple si et seulement si $pq+1$ est inversible dans K. En effet, si $pq+1$, est inversible on a

$$J = ((yx - qxy, \quad \xi x - pqx\xi, \quad \xi y - py\xi, \quad \eta y - pqy\eta)).$$

Un cas particulier intéressant est le cas où $p = q$ (plan quantique symétrique) introduit par P. Cartier [**Ca**]. Si $q = 1$ et $p \neq 1$ l'espace quantique $\mathbb{A}^2_{q,p}$ est le plan affine (commutatif) muni d'une structure différentielle non commutative. Un autre cas particulier qui pourrait être intéressant est celui où q est inversible et $p = q^{-1}$.

Exercice (2.7.3) Démontrer que si K est un corps et $q, p, q', p' \in K$ les espaces quantiques $\mathbb{A}^2_{q,p}$ et $\mathbb{A}^2_{q',p'}$ sont isomorphes, si et seulement si

$$(q' = q \quad \text{et} \quad p' = p) \quad \text{ou} \quad (pq = 1 \quad \text{et} \quad p' = q \quad \text{et} \quad q' = p).$$

Exemple (2.7.4) (Plan quantique de Jordan)

$$\mathbb{A}^2_{\mathrm{Jord},\lambda,\mu} = \mathrm{Spec}(K\langle\langle x, y\rangle\rangle/J),$$

où, si l'on pose $\xi = dx$ et $\eta = dy$, J désigne l'idéal bilatère engendré par

$$\begin{aligned}
&yx - xy - \lambda x^2,\\
&\xi x - x\xi, \quad \xi y + \lambda x\xi - y\xi, \quad \eta x - \lambda x\xi - x\eta, \quad \eta y + \lambda\mu x\xi + \mu x\eta - \mu y\xi - y\eta,\\
&\xi^2, \quad \eta\xi + \xi\eta, \quad \eta^2 - \mu\xi\eta \qquad (\lambda, \mu \in K).
\end{aligned}$$

On peut y définir une structure de cône quantique comme dans l'exemple (2.7.2). L'espace quantique $\mathbb{A}^2_{\mathrm{Jord},\lambda,\mu}$ est simple si et seulement si 2 est inversible dans K et alors

$$J = ((yx - xy - \lambda x^2, \quad \xi x - x\xi, \quad \xi y + \lambda x\xi - y\xi, \quad \eta y + \lambda\mu x\xi + \mu x\eta - \mu y\xi - y\eta)).$$

Exercice (2.7.5) Démontrer que si K est un corps et $\lambda, \mu, \lambda', \mu' \in K$, les espaces quantiques $\mathbb{A}^2_{\mathrm{Jord},\lambda,\mu}$ et $\mathbb{A}^2_{\mathrm{Jord},\lambda',\mu'}$ sont isomorphes si et seulement s'il existe $\rho \in K^*$ tel que

$$\lambda' = \rho\lambda \quad \text{et} \quad \mu' = \rho\mu.$$

Exemple (2.7.6) (Tore quantique)

$$\mathbb{T}^2_{p,q} = \mathrm{Spec}(K\langle\langle x, y, x', y'\rangle\rangle/J),$$

où, si l'on pose $\xi = dx$, $\eta = dy$, $\xi' = dx'$ et $\eta' = dy'$, J désigne l'idéal engendré par

$$\begin{aligned}
&yx - qxy, \quad x'x - 1, \quad xx' - 1, \quad y'y - 1, \quad yy' - 1\\
&\xi x - pqx\xi, \quad \xi y - py\xi, \quad \eta x - qx\eta - (pq-1)y\xi, \quad \eta y - pqy\eta\\
&\xi' + x'\xi x', \quad \eta' + y'\eta y'\\
&\xi^2, \quad \eta^2, \quad \xi\eta + p\eta\xi \qquad (p, q \in K).
\end{aligned}$$

L'espace quantique $\mathbb{T}^2_{p,q}$ est simple si et seulement si $pq+1$ est inversible et alors

$$\begin{aligned}
J = ((yx - qxy, \quad x'x - 1, \quad xx' - 1, \quad y'y - 1, \quad yy' - 1,&\\
\xi x - pqx\xi, \quad \xi y - py\xi, \quad \eta y - pqy\eta)).&
\end{aligned}$$

L'espace quantique $\mathbb{T}^2_{p,q}$ ne possède pas en général de structure de cône quantique.

Exercice (2.7.7) En gardant les notations de l'exemple (2.7.2), démontrer qu'il existe un morphisme d'espaces quantiques

$$\mathbb{T}^2_{p,q} \longrightarrow \mathbb{A}^2_{p,q}$$

s'identifiant à l'immersion ouverte presque élémentaire associée à la matrice

$$A = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix}.$$

Démontrer que si q est inversible, alors ce morphisme est en fait une immersion ouverte élémentaire.

3. Monoïdes quantiques

3.1. Monoïdes quantiques

Définition (3.1.1) On appelle *monoïde quantique* un triplet (X, m, e), où X désigne un espace quantique et

$$m : X \times X \to X \qquad \text{et} \qquad e : \mathrm{Spec}(K) \to X$$

des morphismes d'espaces quantiques satisfaisant aux propriétés suivantes :

$i)$ associativité : le diagramme

$$\begin{tikzcd}
X \times X \times X \arrow[r, "m \times \mathrm{id}_X"] \arrow[d, "\mathrm{id}_X \times m"'] & X \times X \arrow[d, "m"] \\
X \times X \arrow[r, "m"] & X
\end{tikzcd}$$

est commutatif (où l'on identifie $(X \times X) \times X$ à $X \times (X \times X)$ par la contrainte d'associativité) ;

$ii)$ élément neutre : les diagrammes suivants sont commutatifs :

$$\begin{tikzcd}
& X \times X \arrow[dr, "m"] & \\
X \times \mathrm{Spec}(K) \arrow[ur, "\mathrm{id}_X \times e"] \arrow[rr, "\sim"] & & X
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
& X \times X \arrow[dr, "m"] & \\
\mathrm{Spec}(K) \times X \arrow[ur, "e \times \mathrm{id}_X"] \arrow[rr, "\sim"] & & X
\end{tikzcd}$$

(où les isomorphismes $X \times \mathrm{Spec}(K) \xrightarrow{\sim} X$ et $\mathrm{Spec}(K) \times X \xrightarrow{\sim} X$ sont les contraintes d'unité).

Si (X, m, e) et (X', m', e') sont des monoïdes quantiques, un *morphisme de monoïdes quantiques* de (X, m, e) dans (X', m', e') est un morphisme d'espaces quantiques

$$f : X \to X'$$

rendant commutatifs les diagrammes suivants :

$$\begin{tikzcd}
X \times X \arrow[r, "f \times f"] \arrow[d, "m"'] & X' \times X' \arrow[d, "m'"] \\
X \arrow[r, "f"] & X'
\end{tikzcd}$$

et

$$\begin{tikzcd}
& \mathrm{Spec}(K) \arrow[dl, "e"'] \arrow[dr, "e'"] & \\
X \arrow[rr, "f"] & & X' .
\end{tikzcd}$$

La notion de monoïde quantique est un cas particulier de la notion de monoïde dans une catégorie tensorielle.

Remarque (3.1.2) Soit (X, m, e) un monoïde quantique. Alors m^* et e^* :

$$m^* : \Omega_X \to \Omega_X \,{}^g\!\otimes \Omega_X, \qquad e^* : \Omega_X \to K$$

sont respectivement le coproduit et la coünité d'une structure de K-bigèbre graduée gauche sur l'algèbre graduée sous-jacente à l'algèbre différentielle Ω_X ([**Bo**], A III, p. 148-149) et en particulier, la restriction de m^* et e^* à l'algèbre des observables $\mathcal{O}_X$:

$$m^* : \mathcal{O}_X \to \mathcal{O}_X \otimes \mathcal{O}_X, \qquad e^* : \mathcal{O}_X \to K$$

définit une structure de bigèbre sur cette algèbre. La condition de compatibilité de la différentielle d_X de Ω_X avec le coproduit m^*, exprimant que m est un morphisme d'espaces quantiques, se traduit comme suit : si

$$m^*(a) = \sum_{i=1}^{n} a'_i \otimes a''_i, \quad a \in \Omega_X, \quad a'_i \in \Omega_X^{n_i}, \quad a''_i \in \Omega_X \,,$$

alors

$$m^*(d_X(a)) = \sum_{i=1}^{n} d_X a'_i \otimes a''_i + (-1)^{n_i} \sum_{i=1}^{n} a'_i \otimes d_X a''_i \,.$$

On définit ainsi la notion de bigèbre différentielle graduée.

Exemple (3.1.3) Soient $\Omega = K\langle\langle (a^i_j)_{1 \le i,j \le n} \rangle\rangle$ l'algèbre différentielle libre engendrée par les indéterminées $(a^i_j)_{1\le i,j\le n}$ et $\Delta : \Omega \to \Omega \,{}^g\!\otimes \Omega$ et $\varepsilon : \Omega \to K$ les morphismes d'algèbres différentielles définis par

$$\Delta(a^i_j) = \sum_{k=1}^{n} a^k_j \otimes a^i_k \quad \text{et} \quad \varepsilon(a^i_j) = \delta^i_j, \quad 1 \le i,j \le n \,,$$

(où δ^i_j désigne le symbole de Kronecker). Alors $(\Omega, \Delta, \varepsilon)$ est une bigèbre différentielle graduée et $(\mathrm{Spec}(\Omega), \mathrm{Spec}(\Delta), \mathrm{Spec}(\varepsilon))$ un monoïde quantique.

3.2. Monoïdes quantiques matriciels

Définition (3.2.1) Soient (X, m, e) un monoïde quantique et $(b^i_j)_{1\leq i,j\leq n}$ une matrice à coefficients dans $\mathcal{O}_X$. On dit que $(b^i_j)_{1\leq i,j\leq n}$ est une *matrice multiplicative*, si

$$m^*(b^i_j) = \sum_{k=0}^{n} b^k_j \otimes b^i_k \quad \text{et} \quad e^*(b^i_j) = \delta^i_j, \quad 1 \leq i, j \leq n\,.$$

On dit que (X, m, e) est un *monoïde quantique matriciel* s'il possède une matrice multiplicative dont les coefficients engendrent la K-algèbre différentielle Ω_X.

Proposition (3.2.2) *Soit (X, m, e) un monoïde quantique. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

i) (X, m, e) est un monoïde quantique matriciel ;

ii) il existe une famille finie de matrices multiplicatives dont les coefficients engendrent l'algèbre différentielle Ω_X ;

iii) (Ω_X, m^*, e^*) est une bigèbre différentielle quotient d'une bigèbre du type de celles définies dans l'exemple (3.1.3).

Démonstration : Les implications $(i) \Rightarrow (ii)$ et $(iii) \Rightarrow (i)$ sont évidentes. L'implication $(i) \Rightarrow (iii)$ résulte de la propriété universelle des algèbres différentielles libres. Pour démontrer que (ii) implique (i) il suffit de remarquer que si $(A_i)_{1\leq i\leq n}$ est une famille finie de matrices multiplicatives alors la matrice

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & A_n \end{pmatrix}$$

est également multiplicative.

Remarque (3.2.3) L'espace quantique sous-jacent à un monoïde quantique matriciel est de type fini. On dira qu'un tel monoïde quantique est de *type fini*. On démontre que si K est un corps alors un monoïde quantique est matriciel si et seulement s'il est de type fini.

Proposition (3.2.4) *Soient (X, m, e) un monoïde quantique, A une matrice multiplicative et $i_A : X_A \to X$ l'immersion ouverte presque élémentaire associée à la matrice A* (cf. (2.6.3))*. Alors il existe une structure unique de monoïde quantique (X_A, m_A, e_A) sur X_A, telle que i_A soit un morphisme de monoïdes quantiques. De plus, si (X, m, e) est un monoïde quantique matriciel, il en est de même pour (X_A, m_A, e_A).*

Démonstration : Posons $A = (a^i_j)_{1\leq i,j\leq n}$, $a^i_j \in \mathcal{O}_X$, et soit $B = (b^i_j)_{1\leq i,j\leq n}$ la matrice à coefficients dans $\mathcal{O}_{X_A}$ inverse de $i^*_A(A)$. On a

$$\sum_{k=1}^{n} b^k_j i^*_A(a^i_k) = \sum_{k=1}^{n} i^*_A(a^k_j) b^i_k = \delta^i_j\,.$$

Considérons le morphisme composé

$$m \circ (i_A \times i_A) : X_A \times X_A \to X \times X \to X$$

et démontrons que la matrice $(m \circ (i_A \times i_A))^*(A)$ est inversible. Avec des notations évidentes, on a

$$\begin{aligned}
[(m \circ (i_A \times i_A))^*(A)]^i_j &= [(i_A \times i_A)^*(m^*(A))]^i_j \\
&= \sum_{k=1}^{n} i_A^*(a^k_j) \otimes i_A^*(a^i_k)\,.
\end{aligned}$$

Soit $C = (c^i_j)_{1 \leq i,j \leq n}$ la matrice à coefficients dans $\mathcal{O}_{X_A \times X_A}$, définie par

$$c^i_j = \sum_{k=1}^{n} b^i_k \otimes b^k_j\,, \qquad 1 \leq i, j \leq n\,.$$

Alors on a

$$\begin{aligned}
\big[\big((m \circ (i_A \times i_A)^*)(A)\big)C\big]^i_j &= \sum_{l=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{n} i_A^*(a^k_j) \otimes i_A^*(a^l_k) \right) \left(\sum_{k'=1}^{n} b^i_{k'} \otimes b^{k'}_l \right) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \sum_{k'=1}^{n} \left(i_A^*(a^k_j) b^i_{k'} \otimes \sum_{l=1}^{n} i_A^*(a^l_k) b^{k'}_l \right) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \sum_{k'=1}^{n} i_A^*(a^k_j) b^i_{k'} \otimes \delta^{k'}_k \\
&= \sum_{k=1}^{n} i_A^*(a^k_j) b^i_k \otimes 1 \\
&= \delta^i_j (1 \otimes 1)\,.
\end{aligned}$$

On a donc

$$\text{(3.2.4.1)} \qquad \Big(\big(m \circ (i_A \times i_A)\big)^*(A) \Big)\, C = I$$

et un calcul analogue montre qu'on a aussi

$$\text{(3.2.4.2)} \qquad C\, \Big(\big(m \circ (i_A \times i_A)\big)^*(A) \Big) = I\,.$$

On en déduit (2.6.1) l'existence d'un morphisme unique d'espaces quantiques

$$m_A : X_A \times X_A \to X_A$$

rendant le diagramme

$$\begin{tikzcd} X_A \times X_A \arrow[r, "i_A \times i_A"] \arrow[d, "m_A"'] & X \times X \arrow[d, "m"] \\ X_A \arrow[r, "i_A"] & X \end{tikzcd}$$

commutatif. De même, comme $e^*(A) = I$ est une matrice inversible à coefficients dans K, on en déduit l'existence d'un morphisme unique d'espaces quantiques $e_A : \mathrm{Spec}(K) \to X_A$ tel que le diagramme

$$\begin{tikzcd} & \mathrm{Spec}(K) \arrow[dl, "e_A"'] \arrow[dr, "e"] & \\ X_A \arrow[rr, "i_A"] & & X \end{tikzcd}$$

soit commutatif. Démontrons que (X_A, m_A, e_A) est un monoïde quantique. En effet, on a

$$\begin{aligned} i_A \circ m_A \circ (m_A \times \mathrm{id}_{X_A}) &= m \circ (i_A \times i_A) \circ (m_A \times \mathrm{id}_{X_A}) = m \circ (i_A m_A \times i_A) \\ &= m \circ ((m \circ (i_A \times i_A)) \times i_A) = m \circ (m \times \mathrm{id}_X) \circ (i_A \times i_A \times i_A) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} i_A \circ m_A \circ (\mathrm{id}_{X_A} \times m_A) &= m \circ (i_A \times i_A) \circ (\mathrm{id}_{X_A} \times m_A) = m \circ (i_A \times i_A m_A) \\ &= m \circ (i_A \times (m \circ (i_A \times i_A))) = m \circ (\mathrm{id}_X \times m) \circ (i_A \times i_A \times i_A) . \end{aligned}$$

On a donc

$$i_A \circ m_A \circ (m_A \times \mathrm{id}_{X_A}) = i_A \circ m_A \circ (\mathrm{id}_{X_A} \times m_A) ,$$

ce qui implique, en utilisant la partie unicité de la propriété universelle de i_A (2.6.1), que

$$m_A \circ (m_A \times \mathrm{id}_{X_A}) = m_A \circ (\mathrm{id}_{X_A} \times m_A) .$$

De même, on a

$$\begin{aligned} i_A \circ m_A \circ (\mathrm{id}_{X_A} \times e_A) &= m \circ (i_A \times i_A) \circ (\mathrm{id}_{X_A} \times e_A) \\ &= m \circ (\mathrm{id}_X \times e) \circ (i_A \times \mathrm{id}_{\mathrm{Spec}(K)}) \\ &= \rho_X \circ (i_A \times \mathrm{id}_{\mathrm{Spec}(K)}) = i_A \circ \rho_{X_A} , \end{aligned}$$

où $\rho_X : X \times \mathrm{Spec}(K) \to X$ (resp. $\rho_{X_A} : X_A \times \mathrm{Spec}(K) \to X_A$) désigne la contrainte d'unité (cf. (2.3.7.1)), d'où

$$m_A \circ (\mathrm{id}_{X_A} \times e_A) = \rho_{X_A} .$$

On démontre de façon analogue que

$$m_A \circ (e_A \times \mathrm{id}_{X_A}) = \lambda_{X_A} ,$$

où $\lambda_{X_A} : \mathrm{Spec}(K) \times X_A \to X_A$ désigne la contrainte d'unité (cf. (2.3.7.1)).

Il reste à prouver que si le monoïde quantique (X, m, e) est matriciel, il en est de même pour (X_A, m_A, e_A). Supposons donc qu'il existe une matrice multiplicative A' dont les coefficients engendrent la K-algèbre différentielle Ω_X. Alors les coefficients de $i_A^*(A')$ et de B engendrent la K-algèbre différentielle Ω_{X_A} (remarque (2.6.2)). Comme i_A est un morphisme de monoïdes quantiques, la matrice $i_A^*(A')$ est une matrice multiplicative à coefficients dans $\mathcal{O}_{X_A}$ et il résulte de (3.2.4.1) et (3.2.4.2) que $m_A^*(B) = C$, ce qui implique que la matrice transposée de B est une matrice multiplicative. En vertu de la proposition (3.2.2), on en déduit que (X_A, m_A, e_A) est un monoïde quantique matriciel.

3.3. Familles de morphismes de cônes quantiques

Définition (3.3.1) Soient C et C' deux cônes quantiques et X un espace quantique. On appelle *famille de morphismes de cônes quantiques de C dans C' indexée par l'espace quantique X* (ou plus simplement *famille de morphismes de C dans C' indexée par X*) un morphisme d'espaces quantiques $f : X \times C \to C'$ (où l'on désigne aussi par C (resp. C') l'espace quantique sous-jacent au cône quantique C (resp. C')) tel que

$$f^*(\Omega_{C'}^{1,0}) \subset \Omega_X \otimes \Omega_C^{1,0}.$$

Si $f' : X' \times C \to C'$ désigne une famille de morphismes de C dans C' indexée par l'espace quantique X', on appelle *morphisme de f dans f'* un morphisme d'espaces quantiques $g : X \to X'$ tel que le diagramme

$$\begin{tikzcd} X \times C \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g \times \mathrm{id}_C"'] & C' \arrow[d, "\mathrm{id}_{C'}"] \\ X' \times C \arrow[r, "f'"'] & C' \end{tikzcd}$$

soit commutatif. On définit ainsi la *catégorie des familles de morphismes de cônes quantiques de C dans C'*.

Théorème (3.3.2) *Soient C et C' deux cônes quantiques. On suppose que*

i) K est un corps ;

ii) C et C' sont de type fini.

Alors la catégorie des familles de morphismes de C dans C' possède un objet final. Autrement dit, il existe un espace quantique X_0 et une famille de morphismes de C dans C' indexée par X_0

$$f_0 : X_0 \times C \longrightarrow C'$$

tels que pour toute famille de morphismes de C dans C' indexée par un espace quantique X

$$f : X \times C \longrightarrow C'$$

il existe un morphisme unique d'espaces quantiques $g : X \to X_0$ tel que le diagramme

$$\begin{tikzcd} X \times C \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g \times \mathrm{id}_C"'] & C' \arrow[d, "\mathrm{id}_{C'}"] \\ X_0 \times C \arrow[r, "f_0"'] & C' \end{tikzcd}$$

soit commutatif.

DÉMONSTRATION : Il résulte de l'hypothèse (ii) que $\Omega^{1,0}_C$ et $\Omega^{1,0}_{C'}$ sont des K-espaces vectoriels de dimension finie. Soient $b_1, \ldots , b_n$ (resp. $b'_1, \ldots , b'_{n'}$) une base de $\Omega^{1,0}_C$ (resp. $\Omega^{1,0}_{C'}$), $\Omega = K\langle\langle x_1, \ldots , x_n\rangle\rangle$ (resp. $\Omega' = K\langle\langle x'_1, \ldots , x'_{n'}\rangle\rangle$) l'algèbre différentielle libre engendrée par la famille des indéterminées $(x_j)_{1\leq j\leq n}$ (resp. $(x'_{j'})_{1\leq j'\leq n'}$), $\varphi : \Omega \to \Omega_C$ (resp. $\varphi' : \Omega' \to \Omega_{C'}$) le morphisme (surjectif) d'algèbres différentielles défini par $\varphi(x_j) = b_j$ (resp. $\varphi'(x'_{j'}) = b'_{j'}$), pour $1 \leq j \leq n$ (resp. pour $1 \leq j' \leq n'$) et J (resp. J') le noyau de φ (resp. φ') qui est un idéal différentiel bigradué de Ω (resp. Ω') (cf. 2.4.2). Comme K est un corps, il existe un sous-espace vectoriel bigradué M de Ω tel que $\Omega = J \oplus M$ et une base $(s_i)_{i\in I}$ (resp. $(s'_{i'})_{i'\in I'}$) de M (resp. de J) formée d'éléments bihomogènes. Enfin, soit $(t_l)_{l\in L}$ un système de générateurs bihomogènes de J' en tant qu'idéal différentiel. On désigne par H l'algèbre différentielle libre $K\langle\langle(a^j_{j'})_{1\leq j\leq n,1\leq j'\leq n'}\rangle\rangle$ engendrée par la famille des indéterminées $(a^j_{j'})_{1\leq j\leq n,1\leq j'\leq n'}$ et on définit un morphisme d'algèbres différentielles

$$\psi : \Omega' \longrightarrow H \,{}^g\!\otimes \Omega$$

par $\psi(x_{j'}) = \sum\limits_{j=1}^{n} a^j_{j'} \otimes x_j$, pour $1 \leq j' \leq n'$. Pour tout l, $l \in L$,

$$\psi(t_l) = \sum_{i\in I} r_{li} \otimes s_i + \sum_{i'\in I'} r'_{li'} \otimes s'_{i'} \quad ,$$

où r_{li}, $r'_{li'} \in H$, les familles $(r_{li})_{l\in L,i\in I}$ et $(r'_{li'})_{l\in L,i'\in I'}$ étant uniquement déterminées par ces formules. Soit R l'idéal différentiel de H engendré par $(r_{li})_{l\in L,i\in I}$. Le morphisme ψ définit par passage au quotient un morphisme d'algèbres différentielles

$$\bar{\psi} : \Omega_{C'} \longrightarrow H/R \,{}^g\!\otimes \Omega_C$$

(en identifiant Ω_C à Ω/J et $\Omega_{C'}$ à Ω'/J'). Si l'on pose $X_0 = \mathrm{Spec}(H/R)$ et $f_0 = \mathrm{Spec}(\bar{\psi})$, alors

$$f_0 : X_0 \times C \longrightarrow C'$$

est une famille de morphismes de C dans C' indexée par X_0. Démontrons qu'elle satisfait à la propriété universelle du théorème. Soit $f : X \times C \to C'$ une famille de morphismes de C dans C' indexée par X. Comme

$$f^*(\Omega^{1,0}_{C'}) \subset \Omega_X \otimes \Omega^{1,0}_C,$$

pour tout j', $1 \leq j' \leq n'$, il existe une famille unique $(b_{j'}^{j})_{1\leq j \leq n}$ d'éléments de Ω_X^0 telle que

$$f^*(b_{j'}) = \sum_{j=1}^{n} b_{j'}^{j} \otimes b_j$$

(car $(b_j)_{1\leq j\leq n}$ est une base de $\Omega_C^{1,0}$). On en déduit un morphisme unique d'algèbres différentielles

$$\chi : H \longrightarrow \Omega_X$$

tel que pour tout j et j', $1 \leq j \leq n$, $1 \leq j' \leq n'$, $\chi(a_{j'}^{j}) = b_{j'}^{j}$, ou ce qui est équivalent, rendant commutatif le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccc} \Omega' & \xrightarrow{\psi} & H \,{}^{g}\!\otimes \Omega \\ {\scriptstyle \varphi'}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \chi \otimes \varphi} \\ \Omega_{C'} & \xrightarrow[f^*]{} & \Omega_X \,{}^{g}\!\otimes \Omega_C \end{array}$$

Pour tout l, $l \in L$, on a

$$(\chi \otimes \varphi) \circ \psi(t_l) = f^* \circ \varphi'(t_l) = 0 \quad ,$$

d'où

$$\sum_{i \in I} \chi(r_{li}) \otimes \varphi(s_i) = 0 \quad .$$

La famille $(s_i)_{i\in I}$ étant une base de M, la famille $(\varphi(s_i))_{i\in I}$ est une base du K-espace vectoriel Ω_C, on a donc pour tout i, $i \in I$, $\chi(r_{li}) = 0$. On en déduit que χ induit un morphisme d'algèbres différentielles

$$\bar{\chi} : H/R \longrightarrow \Omega_X$$

tel que si l'on pose $g = \mathrm{Spec}(\bar{\chi})$, le diagramme

$$\begin{array}{ccc} X \times C & \xrightarrow{f} & C' \\ {\scriptstyle g \times \mathrm{id}_C}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{id}_{C'}} \\ X_0 \times C & \xrightarrow[f_0]{} & C' \end{array}$$

soit commutatif, ce qui démontre le théorème.

(3.3.3) On dira que la famille de morphismes $f_0 : X_0 \times C \to C'$ satisfaisant aux propriétés du théorème (3.3.2) est *la famille universelle de morphismes de cônes quantiques de C dans C'*. La démonstration de ce théorème en donne une construction explicite, très utile pour étudier des exemples. On vérifie facilement que X_0 peut être canoniquement muni d'une structure de cône quantique, mais f_0 n'est pas un morphisme de cônes quantiques pour cette structure.

3.4. Action d'un monoïde quantique sur un espace quantique

Définition (3.4.1) Soient (M, m, e) un monoïde quantique et X un espace quantique. On appelle *action* (*à gauche*) de M sur X un morphisme d'espaces quantiques $f : M \times X \to X$ tel que les diagrammes suivants soient commutatifs :

$$\begin{tikzcd} M \times M \times X \arrow[r, "m \times \mathrm{id}_X"] \arrow[d, "\mathrm{id}_M \times f"'] & M \times X \arrow[d, "f"] \\ M \times X \arrow[r, "f"] & X \end{tikzcd}$$

et

$$\begin{tikzcd} & M \times X \arrow[dr, "f"] & \\ \mathrm{Spec}(K) \times X \arrow[ur, "e \times \mathrm{id}_X"] \arrow[rr, "\sim"] & & X \end{tikzcd} ,$$

l'isomorphisme $\mathrm{Spec}(K) \times X \xrightarrow{\sim} X$ étant la contrainte d'unité (cf. (2.3.7.1)). Si C désigne un cône quantique, on appelle *action* de M sur C un morphisme d'espaces quantiques $f : M \times C \to C$ qui est à la fois une action de M sur l'espace quantique sous-jacent à C et une famille de morphismes de cônes quantiques de C dans C. On dit alors que le monoïde quantique M *agit* sur l'espace quantique X, ou sur le cône quantique C.

Théorème (3.4.2) *Supposons que K soit un corps et soient C un cône quantique de type fini et $f_0 : X_0 \times C \to C$ la famille universelle de morphismes de cônes quantiques de C dans lui-même. Alors il existe une structure unique de monoïde quantique sur X_0 tel que f_0 soit une action de X_0 sur C. De plus, pour cette structure X_0 est un monoïde quantique matriciel.*

Démonstration : Le morphisme composé

$$f_0 \circ (\mathrm{id}_{X_0} \times f_0) : X_0 \times X_0 \times C \xrightarrow{\mathrm{id}_{X_0} \times f_0} X_0 \times C \xrightarrow{f_0} C$$

(resp. la contrainte d'unité (cf. (2.3.7.1))

$$\lambda_C : \mathrm{Spec}(K) \times C \longrightarrow C \quad)$$

est une famille de morphismes de C dans lui-même indexée par $X_0 \times X_0$ (resp. par $\mathrm{Spec}(K)$) et il résulte de la propriété universelle de f_0 (3.3.2) qu'il existe un morphisme d'espaces quantiques $m : X_0 \times X_0 \to X_0$ (resp. $e : \mathrm{Spec}(K) \to X_0$) tel que

(3.4.2.1) $$f_0 \circ (m \times \mathrm{id}_C) = f_0 \circ (\mathrm{id}_{X_0} \times f_0)$$

(resp.

(3.4.2.2) $$f_0 \circ (e \times \mathrm{id}_C) = \lambda_C \quad).$$

Démontrons que (X_0, m, e) est un monoïde quantique. En vertu de (3.4.2.1), on a

$$\begin{aligned} f_0(m(\mathrm{id}_{X_0} \times m) \times \mathrm{id}_C) &= f_0 \circ (\mathrm{id}_{X_0} \times f_0) \circ (\mathrm{id}_{X_0} \times m \times \mathrm{id}_C) \\ &= f_0 \circ (\mathrm{id}_{X_0} \times f_0) \circ (\mathrm{id}_{X_0} \times \mathrm{id}_{X_0} \times f_0) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} f_0(m(m \times \mathrm{id}_{X_0}) \times \mathrm{id}_C) &= f_0 \circ (\mathrm{id}_{X_0} \times f_0) \circ (m \times \mathrm{id}_{X_0} \times \mathrm{id}_C) \\ &= f_0 \circ (m \times f_0) = f_0 \circ (m \times \mathrm{id}_C) \circ (\mathrm{id}_{X_0} \times \mathrm{id}_{X_0} \times f_0) \\ &= f_0 \circ (\mathrm{id}_{X_0} \times f_0) \circ (\mathrm{id}_{X_0} \times \mathrm{id}_{X_0} \times f_0)\,. \end{aligned}$$

On en déduit que

$$f_0(m(\mathrm{id}_{X_0} \times m) \times \mathrm{id}_C) = f_0(m(m \times \mathrm{id}_{X_0}) \times \mathrm{id}_C)\,,$$

ce qui implique, en utilisant la partie unicité de la propriété universelle de f_0 (3.3.2), que

$$m(\mathrm{id}_{X_0} \times m) = m(m \times \mathrm{id}_{X_0})\,. \tag{3.4.2.3}$$

De même, en vertu de (3.4.2.1) et (3.4.2.2), on a

$$\begin{aligned} f_0(m(e \times \mathrm{id}_{X_0}) \times \mathrm{id}_C) &= f_0 \circ (\mathrm{id}_{X_0} \times f_0) \circ (e \times \mathrm{id}_{X_0} \times \mathrm{id}_C) \\ &= f_0 \circ (e \times f_0) = f_0 \circ (e \times \mathrm{id}_C) \circ (\mathrm{id}_{\mathrm{Spec}(K)} \times f_0) \\ &= \lambda_C(\mathrm{id}_{\mathrm{Spec}(K)} \times f_0) = f_0(\lambda_{X_0} \times 1_C)\,, \end{aligned}$$

où $\lambda_{X_0} : \mathrm{Spec}(K) \times X_0 \xrightarrow{\sim} X_0$ désigne la contrainte d'unité (cf. (2.3.7.1)), d'où

$$m(e \times \mathrm{id}_{X_0}) = \lambda_{X_0}\,. \tag{3.4.2.4}$$

Enfin, en vertu de ((3.4.2.1) et (3.4.2.2) on a

$$\begin{aligned} f_0(m(\mathrm{id}_{X_0} \times e) \times \mathrm{id}_C) &= f_0 \circ (\mathrm{id}_{X_0} \times f_0) \circ (\mathrm{id}_{X_0} \times e \times \mathrm{id}_C) \\ &= f_0(\mathrm{id}_{X_0} \times \lambda_C) = f_0(\rho_{X_0} \times \mathrm{id}_C)\,, \end{aligned}$$

où $\rho_{X_0} : X_0 \times \mathrm{Spec}(K) \xrightarrow{\sim} X_0$ désigne la contrainte d'unité (cf. (2.3.7.1)), d'où

$$m(\mathrm{id}_{X_0} \times e) = \rho_{X_0}\,. \tag{3.4.2.5}$$

Les égalités (3.4.2.3), (3.4.2.4) et (3.4.2.5) prouvent que (X_0, m, e) est un monoïde quantique et les égalités (3.4.2.1) et (3.4.2.2) que f_0 est une action de ce monoïde sur C. L'unicité de la structure de monoïde quantique sur X_0 résulte de l'unicité de m et e satisfaisant à (3.4.2.1) et (3.4.2.2) (cf. (3.3.2)).

Le fait que le monoïde quantique (X_0, m, e) est matriciel résulte de la construction explicite de X_0, décrite dans la démonstration du théorème (3.3.2). Les détails des vérifications sont laissés au lecteur. On peut d'ailleurs obtenir ainsi une démonstration directe du fait que (X_0, m, e) est un monoïde quantique.

(3.4.3) On dira que (X_0, m, e) est *le monoïde quantique des endomorphismes* du cône quantique C et que $f_0 : X_0 \times C \to C$ est *l'action canonique* de ce monoïde sur C. La démonstration ci-dessus, qui est une adaptation de celle de Manin [**Man2**], a le mérite d'être valable dans n'importe quelle catégorie monoïdale, pourvu qu'on ait un théorème analogue au théorème (3.3.2). Le monoïde quantique X_0 des endomorphismes d'un cône quantique C, muni de l'action canonique $f_0 : X_0 \times C \to C$, satisfait à la propriété universelle suivante : pour tout monoïde quantique X et toute action $f : X \times C \to C$ de X sur le *cône* quantique C, il existe un morphisme unique de monoïdes quantiques $g : X \to X_0$ tel que $f = f_0(g \times \mathrm{id}_C)$.

Exercice(3.4.4) Supposons que K soit un corps et soit C un cône quantique de type fini dont l'espace quantique sous-jacent est simple. Alors il en est de même pour l'espace quantique sous-jacent au monoïde quantique des endomorphismes de C.

3.5. Exemples de monoïdes quantiques

Notations (3.5.1) Soient n un entier, $n \in \mathbb{N}$, $R = (r_{ii'}^{jj'})_{1 \le i,i',j,j' \le n}$ une matrice carrée $n^2 \times n^2$, à coefficients dans K et U et V des relation binaires définies sur l'ensemble $\{1, \ldots, n\}$. En pratique

$$U, V \in \{=\,,\ \le\,,\ <\,,\ \ge\,,\ >\}\,.$$

On pose

$$\begin{aligned} R_U^V &= (r_{ii'}^{jj'})_{1 \le i,i',j,j' \le n,\, iUi',\, jVj'} \quad , \\ R_U &= (r_{ii'}^{jj'})_{1 \le i,i',j,j' \le n,\, iUi'} \quad , \\ R^V &= (r_{ii'}^{jj'})_{1 \le i,i',j,j' \le n,\, jVj'} \quad . \end{aligned}$$

Si S désigne une matrice du même type, W une autre relation et $\overline{W}$ sa négation,

$$i\,\overline{W}\,i' \quad \Longleftrightarrow \quad \text{non}\ i\,W\,i' \quad ,$$

on a

$$\begin{aligned} (RS)_U^V &= R_U^W S_W^V + R_U^{\overline{W}} S_{\overline{W}}^V \quad , \\ (RS)_U &= R_U^W S_W + R_U^{\overline{W}} S_{\overline{W}} \quad , \\ (RS)^V &= R^W S_W^V + R^{\overline{W}} S_{\overline{W}}^V \quad , \\ RS &= R^W S_W + R^{\overline{W}} S_{\overline{W}} \quad , \end{aligned}$$

par exemple,

$$(RS)_{\ge}^{\le} = R_{\ge}^{<} S_{<}^{\le} + R_{\ge}^{\ge} S_{\ge}^{\le} \quad .$$

Si I désigne la matrice unité,

$$I = (\delta_{ii'}^{jj'})_{1 \le i,i',j,j' \le n}\ ,$$

on remarque que I_W^W est encore une matrice unité, tandis que $I_W^{\overline{W}} = 0$. Par exemple,

$$I_{\le}^{>} = 0\,, \quad I_{<}^{\ge} = 0 \qquad \text{etc.}$$

Si m , m' , n et n' désignent des entiers, $m,m',n,n'\in\mathbb{N}$ et $R=(r_i^j)_{1\leq i\leq m\,,\ 1\leq j\leq n}$ et $S=(s_{i'}^{j'})_{1\leq i'\leq m'\,,\ 1\leq j'\leq n'}$ des matrices à coefficients dans K , on désigne par $R\otimes S$ la matrice

$$R\otimes S=(r_i^j s_{i'}^{j'})_{1\leq i\leq m\,,\ 1\leq i'\leq m'\,,\ 1\leq j\leq n\,,\ 1\leq j'\leq n'}\ ,$$

produit tensoriel des matrices R et S .

Exemple (3.5.2) On suppose que K soit un corps. Soient n un entier, $n\in\mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
&Q=(q_{ii'}^{jj'})_{1\leq i'<i\leq n\,,\ 1\leq j\leq j'\leq n}\ ,\\
&R=(r_{ii'}^{jj'})_{1\leq i,i',j,j'\leq n}\ ,\\
&P=(p_{ii'}^{jj'})_{1\leq i\leq i'\leq n\,,1\leq j'<j\leq n}\ ,
\end{aligned}$$

des matrices à coefficients dans K , $\Omega_{(Q,R,P)}=\Omega/J$ l'algèbre différentielle graduée quotient de l'algèbre différentielle libre $\Omega=K\langle\langle x_1,\ldots,x_n\rangle\rangle$, engendrée par la famille des indéterminées $(x_i)_{1\leq i\leq n}$, par l'idéal différentiel J engendré par les relations

$$\begin{aligned}
x_ix_{i'}&=\sum_{j\leq j'}q_{ii'}^{jj'}x_jx_{j'}\ ,\ 1\leq i'<i\leq n\ ,\\
\xi_ix_{i'}&=\sum_{j,j'}r_{ii'}^{jj'}x_j\xi_{j'}\ ,\ 1\leq i,i'\leq n\ ,\\
\xi_i\xi_{i'}&=\sum_{j'<j}p_{ii'}^{jj'}\xi_j\xi_{j'}\ ,\ 1\leq i\leq i'\leq n\ ,
\end{aligned}$$

où $\xi_i=dx_i$, et $\mathbb{A}^n_{(Q,R,P)}=\operatorname{Spec}(\Omega_{(Q,R,P)})$ l'espace quantique correspondant (espace affine quantique de dimension n associé aux matrices Q , R et P). L'idéal J est bigradué et l'espace $\mathbb{A}^n_{(Q,R,P)}$ est ainsi muni d'une structure de cône quantique. En utilisant les notations de (3.5.1), les relations définissant l'idéal J s'écrivent de façon plus compacte:

(3.5.2.1) $$(x\otimes x)_{>}=Q_{>}^{\leq}(x\otimes x)_{\leq}\ ,$$

(3.5.2.2) $$\xi\otimes x=R(x\otimes\xi)\ ,$$

(3.5.2.3) $$(\xi\otimes\xi)_{\leq}=P_{\leq}^{>}(\xi\otimes\xi)_{>}\ ,$$

où x désigne la matrice $(x_i)_{1\leq i\leq n}$, ξ la matrice $(\xi_i)_{1\leq i\leq n}$ et $Q_{>}^{\leq}=Q$ et $P_{\leq}^{>}=P$, cette notation étant purement mnémotechnique, destinée à rappeler la forme des matrices Q et R (mais compatible avec les notations de (3.5.1), si l'on complète ces matrices de façon arbitraire en des matrices $n^2\times n^2$).

On remarque que

$$(x_{i_1}\cdots x_{i_m}\xi_{j_1}\cdots\xi_{j_{m'}})_{1\leq i_1\leq\cdots\leq i_m\leq n\,,\ 1\leq j_{m'}<\cdots<j_1\leq n}$$

est un système de générateurs du K-espace vectoriel $\Omega_{(Q,R,P)}$. On s'intéresse plus particulièrement au cas où le système ci-dessus est une base, autrement dit au cas où la fonction de Hilbert de $\Omega_{(Q,R,P)}$ est la même que celle du complexe de de Rham algébrique habituel sur l'anneau des polynômes commutatifs à n indéterminées :

$$\dim_K(\Omega^{m,m'}_{(Q,R,P)}) = \binom{m+n-1}{n-1} \cdot \binom{n}{m'} \qquad .$$

Supposons qu'il en soit ainsi, ou du moins que

$$\begin{array}{l} (x_i x_j)_{1\le i\le j\le n} \\ (x_i \xi_j)_{1\le i,j\le n} \\ (\xi_j \xi_i)_{1\le i<j\le n} \end{array}$$

soit une famille libre. En différentiant la relation (3.5.2.1), on obtient

$$(\xi\otimes x)_{>} + (x\otimes\xi)_{>} = Q^{\le}_{>}(\xi\otimes x)_{\le} + Q^{\le}_{>}(x\otimes\xi)_{\le} \quad ,$$

ce qui implique en utilisant (3.5.2.2) que

$$R_{>}(x\otimes\xi) + I_{>}(x\otimes\xi) = Q^{\le}_{>}R_{\le}(x\otimes\xi) + Q^{\le}_{>}I_{\le}(x\otimes\xi) \quad ,$$

où I désigne la matrice unité $n^2\times n^2$, et en vertu de l'hypothèse, on a

(3.5.2.4) $$R_{>} + I_{>} = Q^{\le}_{>}(R_{\le} + I_{\le}) \quad .$$

Cette relation se décompose en deux autres

(3.5.2.5) $$R^{\le}_{>} = Q^{\le}_{>}(R^{\le}_{\le} + I^{\le}_{\le})$$

et

(3.5.2.6) $$R^{>}_{>} + I^{>}_{>} = Q^{\le}_{>}R^{>}_{\le} \quad .$$

Supposons que

(3.5.2.7) $$\mathrm{rg}_K(R+I) = \mathrm{rg}_K(R^{\le}_{\le} + I^{\le}_{\le}) = n(n+1)/2 \quad .$$

Alors $R^{\le}_{\le} + I^{\le}_{\le}$ est inversible,

(3.5.2.8) $$Q^{\le}_{>} = R^{\le}_{>}(R^{\le}_{\le} + I^{\le}_{\le})^{-1}$$

et cette égalité implique (3.5.2.4).

De même, en différentiant (3.5.2.2), on obtient

$$-(\xi\otimes\xi) = R(\xi\otimes\xi) \quad ,$$

ce qui implique

$$(R^{\le}_{} + I^{\le}_{})(\xi \otimes \xi)_{\le} + (R^{>}_{} + I^{>}_{})(\xi \otimes \xi)_{>} = 0 \quad ,$$

d'où, en utilisant (3.5.2.3)

$$(R^{\le}_{} + I^{\le}_{})P^{>}_{\le}(\xi \otimes \xi)_{>} + (R^{>}_{} + I^{>}_{})(\xi \otimes \xi)_{>} = 0 \quad ,$$

et comme la famille $(\xi_j \xi_i)_{1 \le i < j \le n}$ est supposée libre, on a

(3.5.2.9) $$(R^{\le}_{} + I^{\le}_{})P^{>}_{\le} + R^{>}_{} + I^{>}_{} = 0 \quad .$$

La relation ci-dessus se décompose en deux :

(3.5.2.10) $$(R^{\le}_{\le} + I^{\le}_{\le})P^{>}_{\le} + R^{>}_{\le} = 0$$

et

(3.5.2.11) $$R^{\le}_{>}P^{>}_{\le} + R^{>}_{>} + I^{>}_{>} = 0 \quad .$$

On a donc sous l'hypothèse (3.5.2.7)

(3.5.2.12) $$P^{>}_{\le} = -(R^{\le}_{\le} + I^{\le}_{\le})^{-1} R^{>}_{\le} \quad ,$$

relation qui implique alors (3.5.2.9).

Réciproquement, soit R une matrice carrée $n^2 \times n^2$ satisfaisant à l'hypothèse (3.5.2.7), supposons que les matrices $Q^{\le}_{>}$ et $P^{>}_{\le}$ soient définies par les formules (3.5.2.8) et (3.5.2.12) et l'idéal J par les relations (3.5.2.1), (3.5.2.2) et (3.5.2.3). Alors on pose $\Omega_R = \Omega_{(Q,R,P)}$ et $\mathbb{A}^n_R = \mathbb{A}^n_{(Q,R,P)}$ et en vertu de ce qui précède, on vérifie facilement que J est l'idéal différentiel engendré par les relations (3.5.2.1) et (3.5.2.2) et que $(x_i x_j)_{1 \le i \le j \le n}$ est une base de $\Omega^{2,0}_R$, $(x_i \xi_j)_{1 \le i,j \le n}$ une base de $\Omega^{1,1}_R$ et $(\xi_j \xi_i)_{1 \le i < j \le n}$ une base de $\Omega^{0,2}_R$.

En complétant donc la réunion de ces trois familles en une base de Ω_R, on peut appliquer la méthode du théorème (3.3.2) pour construire le monoïde quantique des endomorphismes du cône quantique $\mathbb{A}^n_R$ (cf. (3.4.3)) (monoïde quantique des matrices $n \times n$, associé à la matrice R).

Proposition (3.5.3) *Sous ces hypothèses, le monoïde quantique des endomorphismes du cône quantique $\mathbb{A}^n_R$ est isomorphe à*

$$\mathrm{Spec}(H/J(R)) \quad ,$$

où

$$H = K\langle\langle (a^j_i)_{1 \le i,j \le n} \rangle\rangle$$

désigne l'algèbre différentielle libre engendrée par la famille des indéterminées $(a^j_i)_{1 \le i,j \le n}$ et $J(R)$ est l'idéal différentiel de H engendré par les coefficients des matrices

$$(A \otimes A)R - R(A \otimes A)$$

et

$$[dA \otimes A - R(A \otimes dA)](R+I)^{\leq} \quad ,$$

où $A = (a_i^j)_{1 \leq i,j \leq n}$ *et* $dA = (da_i^j)_{1 \leq i,j \leq n}$.

DÉMONSTRATION : Soit

$$\psi : \Omega \longrightarrow H\,{}^g\!\otimes \Omega$$

le morphisme d'algèbres différentielles graduées défini par

$$\psi(x_i) = \sum_{j=1}^{n} a_i^j \otimes x_j \quad , \qquad 1 \leq i \leq n \quad .$$

En utilisant les notations plus compactes introduites ci-dessus, ainsi que les propriétés des morphismes d'algèbres différentielles graduées, on remarque que ψ est l'unique morphisme d'algèbres graduées satisfaisant à

$$\psi(x) = A \cdot x \quad \text{et} \quad \psi(\xi) = dA \cdot x + A \cdot \xi \quad .$$

On a

$$\begin{aligned}
\psi\big[(x \otimes x)_> - Q_>^{\leq}(x \otimes x)_{\leq}\big] &= (A \otimes A)_>(x \otimes x) - Q_>^{\leq}(A \otimes A)_{\leq}(x \otimes x) \\
&= (A \otimes A)_>^{\leq}(x \otimes x)_{\leq} + (A \otimes A)_>^{>}(x \otimes x)_> \\
&- Q_>^{\leq}(A \otimes A)_{\leq}^{\leq}(x \otimes x)_{\leq} - Q_>^{\leq}(A \otimes A)_{\leq}^{>}(x \otimes x)_> \\
&= (A \otimes A)_>^{\leq}(x \otimes x)_{\leq} + (A \otimes A)_>^{>} Q_>^{\leq}(x \otimes x)_{\leq} \\
&- Q_>^{\leq}(A \otimes A)_{\leq}^{\leq}(x \otimes x)_{\leq} - Q_>^{\leq}(A \otimes A)_{\leq}^{>} Q_>^{\leq}(x \otimes x)_{\leq} \\
&+ (A \otimes A)_>^{>}(x \otimes x)_> - (A \otimes A)_>^{>} Q_>^{\leq}(x \otimes x)_{\leq} \\
&- Q_>^{\leq}(A \otimes A)_{\leq}^{>}(x \otimes x)_> + Q_>^{\leq}(A \otimes A)_{\leq}^{>} Q_>^{\leq}(x \otimes x)_{\leq} \quad .
\end{aligned}$$

On en déduit que

(3.5.3.1) $$\psi\big[(x \otimes x)_> - Q_>^{\leq}(x \otimes x)_{\leq}\big] \overset{[\mathrm{mod}\ H \otimes J]}{\equiv}$$

$$\equiv \big[(A \otimes A)_>^{\leq} + (A \otimes A)_>^{>} Q_>^{\leq} - Q_>^{\leq}(A \otimes A)_{\leq}^{\leq} - Q_>^{\leq}(A \otimes A)_{\leq}^{>} Q_>^{\leq}\big](x \otimes x)_{\leq} \ .$$

De même, on a

$$\begin{aligned}
\psi[\xi \otimes x - R(x \otimes \xi)] &= (dA\,x + A\xi) \otimes (Ax) - R[(Ax) \otimes (dA\,x + A\xi)] \\
&= [dA \otimes A - R(A \otimes dA)]^{\leq}(x \otimes x)_{\leq} \\
&+ [dA \otimes A - R(A \otimes dA)]^{>}(x \otimes x)_> \\
&+ (A \otimes A)(\xi \otimes x) - R(A \otimes A)(x \otimes \xi) \\
&= [dA \otimes A - R(A \otimes dA)]^{\leq}(x \otimes x)_{\leq} \\
&+ [dA \otimes A - R(A \otimes dA)]^{>} Q_>^{\leq}(x \otimes x)_{\leq} \\
&+ [(A \otimes A)R - R(A \otimes A)](x \otimes \xi) \\
&+ [dA \otimes A - R(A \otimes dA)]^{>}[(x \otimes x)_> - Q_>^{\leq}(x \otimes x)_{\leq}] \\
&+ (A \otimes A)[\xi \otimes x - R(x \otimes \xi)] \quad .
\end{aligned}$$

On en déduit que

$$(3.5.3.2)\qquad \begin{aligned} &\psi[\xi \otimes x - R(x \otimes \xi)] \overset{[\mathrm{mod}\ H\otimes J]}{\equiv} \\ &\equiv \Big[[dA \otimes A - R(A \otimes dA)]^{\leq} + [dA \otimes A - R(A \otimes dA)]^{>} Q^{\leq}_{>}\Big](x \otimes x)_{\leq} \\ &+ [(A \otimes A)R - R(A \otimes A)](x \otimes \xi) \quad . \end{aligned}$$

Conformément à la construction du monoïde quantique des endomorphismes d'un cône quantique (démonstration du théorème (3.3.2), théorème (3.4.2) et (3.4.3)), il résulte de (3.5.3.1) et de (3.5.3.2) que $\mathbb{A}^n_R$ est isomorphe à $\mathrm{Spec}(H/J(R))$, où $J(R)$ est l'idéal différentiel de H engendré par les coefficients des matrices

$$\begin{aligned} M_1 &= (A \otimes A)^{\leq}_{>} + (A \otimes A)^{>}_{>} Q^{\leq}_{>} - Q^{\leq}_{>}(A \otimes A)^{\leq}_{\leq} - Q^{\leq}_{>}(A \otimes A)^{>}_{\leq} Q^{\leq}_{>} \quad , \\ M_2 &= [dA \otimes A - R(A \otimes dA)]^{\leq} + [dA \otimes A - R(A \otimes dA)]^{>} Q^{\leq}_{>} \quad , \\ M_3 &= (A \otimes A)R - R(A \otimes A) \quad . \end{aligned}$$

Comme la matrice $R^{\leq}_{\leq} + I^{\leq}_{\leq}$ est inversible, l'idéal $J(R)$ est aussi l'idéal différentiel de H engendré par les coefficients des matrices $M'_1 = M_1\big(R^{\leq}_{\leq} + I^{\leq}_{\leq}\big)$, $M'_2 = M_2\big(R^{\leq}_{\leq} + I^{\leq}_{\leq}\big)$ et M_3. Or, on a

$$\begin{aligned} M'_2 &= [dA \otimes A - R(A \otimes dA)]^{\leq}\left(R^{\leq}_{\leq} + I^{\leq}_{\leq}\right) + [dA \otimes A - R(A \otimes dA)]^{>} R^{\leq}_{>} \\ &= [dA \otimes A - R(A \otimes dA)](R + I)^{\leq} \end{aligned}$$

(cf. 3.5.2.8). Pour conclure, il reste donc à prouver que les coefficients de la matrice M'_1 appartiennent à l'idéal $J_0(R)$ de H engendré par les coefficients de la matrice M_3. Notons "$\equiv$" la congruence modulo l'idéal $J_0(R)$. On a

$$\begin{aligned} M'_1 &= (A \otimes A)^{\leq}_{>}\left(R^{\leq}_{\leq} + I^{\leq}_{\leq}\right) + (A \otimes A)^{>}_{>}\left(R^{\leq}_{>} + I^{\leq}_{>}\right) \\ &\quad - Q^{\leq}_{>}(A \otimes A)^{\leq}_{\leq}\left(R^{\leq}_{\leq} + I^{\leq}_{\leq}\right) - Q^{\leq}_{>}(A \otimes A)^{>}_{\leq}\left(R^{\leq}_{>} + I^{\leq}_{>}\right) && \text{(cf. 3.5.2.8)} \\ &= (A \otimes A)_{>}(R + I)^{\leq} - Q^{\leq}_{>}(A \otimes A)_{\leq}(R + I)^{\leq} \\ &= (A \otimes A)_{>}(R + I)^{\leq} - Q^{\leq}_{>}\left[(A \otimes A)(R + I)\right]^{\leq}_{\leq} \\ &\equiv (A \otimes A)_{>}(R + I)^{\leq} - Q^{\leq}_{>}\left[(R + I)(A \otimes A)\right]^{\leq}_{\leq} \\ &= (A \otimes A)_{>}(R + I)^{\leq} - Q^{\leq}_{>}\Big(R_{\leq} + I_{\leq}\Big)(A \otimes A)^{\leq} \\ &= (A \otimes A)_{>}(R + I)^{\leq} - \Big(R_{>} + I_{>}\Big)(A \otimes A)^{\leq} && \text{(cf. 3.5.2.4)} \\ &= (A \otimes A)_{>}(R + I)^{\leq} - \Big[(R + I)(A \otimes A)\Big]^{\leq}_{>} \\ &\equiv (A \otimes A)_{>}(R + I)^{\leq} - \Big[(A \otimes A)(R + I)\Big]^{\leq}_{>} = 0 \quad , \end{aligned}$$

ce qui prouve la proposition.

Exemple (3.5.4) (Calcul différentiel sur la déformation multiparamétrique de l'algèbre des fonctions sur les matrices, introduite par M. Artin, W. Schelter, J. Tate [**AST**]). On suppose toujours que K soit un corps. Soient n un entier, $n \in \mathbb{N}$, et $q = (q_{ji})_{1 \leq i < j \leq n}$, $p = (p_{ij})_{1 \leq i < j \leq n}$ et $\lambda = (\lambda_j)_{1 \leq j \leq n}$ des familles d'éléments de K^* satisfaisant à la relation

$$\lambda_j = q_{ji} p_{ij} \quad , \qquad 1 \leq i < j \leq n \quad .$$

En gardant les notations de l'exemple (3.5.2), on définit des matrices $Q = Q^{\leq}_{>}$, R et $P = P^{>}_{\leq}$ par

$$\begin{aligned}
q^{ij}_{ji} &= q_{ji} \quad , & 1 \leq i < j \leq n \quad , \\
r^{ii}_{ii} &= \lambda_i \quad , & 1 \leq i \leq n \quad , \\
r^{ji}_{ij} &= p_{ij} \quad , & 1 \leq i < j \leq n \quad , \\
r^{ij}_{ji} &= q_{ji} \quad , & 1 \leq i < j \leq n \quad , \\
r^{ji}_{ji} &= \lambda_j - 1 \quad , & 1 \leq i < j \leq n \quad , \\
p^{ji}_{ij} &= -p_{ij} \quad , & 1 \leq i < j \leq n \quad ,
\end{aligned}$$

tous les autres coefficients étant nuls. On vérifie facilement que les matrices Q, R, P satisfont aux conditions (3.5.2.4) et (3.5.2.9) et que

$$(x_{i_1} \cdots x_{i_m} \xi_{j_1} \cdots \xi_{j_{m'}})_{1 \leq i_1 \leq \cdots \leq i_m \leq n \,,\ 1 \leq j_{m'} < \cdots < j_1 \leq n}$$

est une base de l'algèbre différentielle $\Omega_{(Q,R,P)}$. La condition (3.5.2.7) est équivalente à

$$\lambda_j \neq -1 \quad , \qquad 1 \leq j \leq n \quad ,$$

et l'espace quantique $\mathbb{A}^n_{q,p,\lambda} = \mathbb{A}^n_{(Q,R,P)}$ est simple, si et seulement si cette condition est satisfaite. Soit $\mathbb{M}^n_{q,p,\lambda}$ le monoïde quantique des endomorphismes du cône quantique $\mathbb{A}^n_{q,p,\lambda}$. L'espace quantique $\mathbb{M}^n_{q,p,\lambda}$ est muni canoniquement d'une structure de cône quantique (cf. (3.3.3)), mais on constate (en utilisant les formules de la proposition (3.5.3)) que la fonction de Hilbert de son complexe de de Rham $\Omega_{q,p,\lambda}$ n'est pas la même que celle du complexe de de Rham algébrique de l'anneau des polynômes commutatifs sur l'espace affine des matrices carrées $n \times n$, autrement dit, que

$$\dim_K(\Omega^{m,m'}_{q,p,\lambda}) \neq \binom{m + n^2 - 1}{n^2 - 1} \cdot \binom{n^2}{m'} \qquad .$$

Néanmoins, on démontre le théorème suivant [**Mal2**].

Théorème (3.5.5) *Pour qu'il existe un monoïde quantique* $\mathbb{M}$ *agissant sur le cône quantique* $\mathbb{A}^n_{q,p,\lambda}$ *, tel que*

$$\dim_K(\Omega_{\mathbb{M}}^{m,m'}) = \binom{m+n^2-1}{n^2-1}\cdot\binom{n^2}{m'}$$

et tel que si $g:\mathbb{M}\to\mathbb{M}^n_{q,p,\lambda}$ *désigne le morphisme de monoïdes quantiques défini par la propriété universelle de* $\mathbb{M}^n_{q,p,\lambda}$ (cf. (3.4.3)), $g^*:\Omega_{q,p,\lambda}\to\Omega_{\mathbb{M}}$ *soit surjectif, il faut et il suffit que pour tout* i *et* j , $1\le i,j\le n$, *on ait* $\lambda_i=\lambda_j$, *et alors ce monoïde quantique* $\mathbb{M}$ *est unique, à isomorphisme près, et l'algèbre différentielle graduée* $\Omega_{\mathbb{M}}$ *est isomorphe au quotient de l'algèbre différentielle libre engendrée par les indéterminées* $(a_i^j)_{1\le i,j\le n}$ *par l'idéal bilatère engendré par*

(1) $\quad a_j^k a_i^k - q_{ji}a_i^k a_j^k\ ,\qquad 1\le i<j\le n\ ,\quad 1\le k\le n$

(2) $\quad a_i^l a_i^k - p_{kl}a_i^k a_i^l\ ,\qquad 1\le i\le n\ ,\quad 1\le k<l\le n$

(3) $\quad a_j^k a_i^l - (p_{ij})^{-1}q_{lk}a_i^l a_j^k\ ,\qquad 1\le i<j\le n\ ,\ 1\le k<l\le n$

(4) $\quad a_j^l a_i^k - (p_{ij})^{-1}p_{kl}a_i^k a_j^l - (p_{ij})^{-1}(\lambda-1)a_i^l a_j^k\ ,\qquad 1\le i<j\le n\ ,\ 1\le k<l\le n$

(5) $\quad \alpha_i^k a_i^k - \lambda a_i^k\alpha_i^k\ ,\qquad 1\le i\le n\ ,\quad 1\le k\le n$

(6) $\quad \alpha_i^k a_j^k - p_{ij}a_j^k\alpha_i^k\ ,\qquad 1\le i<j\le n\ ,\quad 1\le k\le n$

(7) $\quad \alpha_j^k a_i^k - q_{ji}a_i^k\alpha_j^k - (\lambda-1)a_j^k\alpha_i^k\ ,\qquad 1\le i<j\le n\ ,\quad 1\le k\le n$

(8) $\quad \alpha_i^k a_i^l - q_{lk}a_i^l\alpha_i^k\ ,\qquad 1\le i\le n\ ,\quad 1\le k<l\le n$

(9) $\quad \alpha_i^l a_i^k - p_{kl}a_i^k\alpha_i^l - (\lambda-1)a_i^l\alpha_i^k\ ,\qquad 1\le i\le n\ ,\quad 1\le k<l\le n$

(10) $\quad \alpha_i^k a_j^l - p_{ij}(p_{kl})^{-1}a_j^l\alpha_i^k\ ,\qquad 1\le i<j\le n\ ,\ 1\le k<l\le n$

(11) $\quad \alpha_i^l a_j^k - (q_{ji})^{-1}p_{kl}a_j^k\alpha_i^l - (q_{ji})^{-1}(\lambda-1)a_j^l\alpha_i^k\ ,\qquad 1\le i<j\le n\ ,\ 1\le k<l\le n$

(12) $\quad \alpha_j^k a_i^l - q_{ji}(p_{kl})^{-1}a_i^l\alpha_j^k - (p_{kl})^{-1}(\lambda-1)a_j^l\alpha_i^k\ ,\qquad 1\le i<j\le n\ ,\ 1\le k<l\le n$

(13) $\quad \alpha_j^l a_i^k - q_{ji}(q_{lk})^{-1}a_i^k\alpha_j^l - (p_{ij})^{-1}(\lambda-1)a_i^l\alpha_j^k - (q_{lk})^{-1}(\lambda-1)a_j^k\alpha_i^l$
$\qquad -(\lambda-2+\lambda^{-1})a_j^l\alpha_i^k\ ,\qquad 1\le i<j\le n\ ,\quad 1\le k<l\le n$

(14) $\quad (\alpha_i^k)^2\ ,\qquad 1\le i\le n\ ,\quad 1\le k\le n$

(15) $\quad \alpha_i^k\alpha_j^k + p_{ij}\alpha_j^k\alpha_i^k\ ,\qquad 1\le i<j\le n\ ,\quad 1\le k\le n$

(16) $\quad \alpha_i^k\alpha_i^l + q_{lk}\alpha_i^l\alpha_i^k\ ,\qquad 1\le i\le n\ ,\quad 1\le k<l\le n$

(17) $\quad \alpha_i^k\alpha_j^l + p_{ij}(p_{kl})^{-1}\alpha_j^l\alpha_i^k\ ,\qquad 1\le i<j\le n\ ,\ 1\le k<l\le n$

(18) $\quad \alpha_i^l\alpha_j^k + (q_{ji})^{-1}p_{kl}\alpha_j^k\alpha_i^l + (q_{ji})^{-1}(\lambda-1)\alpha_j^l\alpha_i^k\ ,\qquad 1\le i<j\le n\ ,\ 1\le k<l\le n$

où $\alpha_i^j = da_i^j$ *et* $\lambda=\lambda_1=\cdots=\lambda_n$.

4. Groupes quantiques

4.1. Groupes quantiques

Définition (4.1.1) Soit (X, m, e) un monoïde quantique. On dit qu'un morphisme d'espaces quantiques $i : X \to X^{\mathrm{opp}}$ est un *antipode* du monoïde quantique (X, m, e), si le diagramme suivant d'applications K-linéaires est commutatif

$$\begin{tikzcd}
& \Omega_X \otimes \Omega_X \arrow[rr, "i^* \otimes \mathrm{id}_{\Omega_X}"] & & \Omega_X \otimes \Omega_X \arrow[dr, "\mu"] & \\
\Omega_X \arrow[ur, "m^*"] \arrow[dr, "m^*"'] \arrow[rr, "e^*"] & & K \arrow[rr, "\eta"] & & \Omega_X \\
& \Omega_X \otimes \Omega_X \arrow[rr, "\mathrm{id}_{\Omega_X} \otimes i^*"'] & & \Omega_X \otimes \Omega_X \arrow[ur, "\mu"'] &
\end{tikzcd}$$

où μ désigne l'application K-linéaire définissant la multiplication et η celle définissant l'unité de l'algèbre Ω_X.

Le diagramme ci-dessus n'est pas un diagramme de morphismes d'algèbres et il ne peut donc pas être traduit en un diagramme de la catégorie des espaces quantiques. Ce diagramme exprime que i^* est un antipode, au sens des bigèbres de Hopf ([**Ab**], p. 61), avec la seule différence qu'ici Ω_X est une bigèbre graduée gauche et en plus on impose à i^* d'être compatible avec la différentielle. En particulier, on en déduit une structure de bigèbre de Hopf sur l'algèbre des observables $\mathcal{O}_X$ (cf. (3.1.2)).

Théorème (4.1.2) *i) Un monoïde quantique possède au plus un antipode.*

ii) Si (X, m, e) désigne un monoïde quantique et i un antipode de ce monoïde, les diagrammes suivants sont commutatifs

$$\begin{tikzcd}
X \times X \arrow[r, "i \times i"] \arrow[d, "m"'] & X^{\mathrm{opp}} \times X^{\mathrm{opp}} \arrow[r, "s"] & X^{\mathrm{opp}} \times X^{\mathrm{opp}} \arrow[d, "m^{\mathrm{opp}}"] \\
X \arrow[rr, "i"] & & X^{\mathrm{opp}}
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} & \mathrm{Spec}(K) \arrow[dl, "e"'] \arrow[dr, "e^{\mathrm{opp}}"] & \\ X \arrow[rr, "i"] & & X^{\mathrm{opp}} \end{tikzcd}$$

où s désigne la contrainte de commutativité (cf. (2.3.7.1)).

La démonstration est une transposition immédiate de [**Ab**], p. 61-64.

Définition (4.1.3) On appelle *groupe quantique* un quadruplet (X, m, e, i), où (X, m, e) est un monoïde quantique et i un antipode de ce monoïde. On dit que (X, m, e) est le *monoïde quantique sous-jacent* à (X, m, e, i). Si (X, m, e, i) et (X', m', e', i') sont des groupes quantiques, un *morphisme de groupes quantiques* de (X, m, e, i) dans (X', m', e', i') est un morphisme f des monoïdes quantiques sous-jacents tel que le diagramme suivant soit commutatif

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "i"'] & X' \arrow[d, "i'"] \\ X^{\mathrm{opp}} \arrow[r, "f^{\mathrm{opp}}"'] & X'^{\mathrm{opp}} \end{tikzcd}$$

Exercice (4.1.4) Démontrer que la commutativité de ce diagramme résulte, en fait, de l'hypothèse que f soit un morphisme de monoïdes quantiques.

4.2. Groupe quantique associé à un monoïde quantique matriciel

En généralisant une construction de Manin ([**Man2**], p. 44, théorème 3), on peut associer à tout monoïde quantique matriciel un groupe quantique, correspondant en quelque sorte au “groupe des éléments inversibles” de ce monoïde.

Théorème (4.2.1) *Soit (X, m, e) un monoïde quantique matriciel. Il existe un groupe quantique $(\widetilde{X}, \widetilde{m}, \tilde{e}, i)$ et un morphisme de monoïdes quantiques f_0 du monoïde quantique sous-jacent à $(\widetilde{X}, \widetilde{m}, \tilde{e}, i)$ dans (X, m, e), possédant la propriété universelle suivante : Pour tout groupe quantique (X', m', e', i') et tout morphisme de monoïdes quantiques f de (X', m', e') dans (X, m, e) il existe un morphisme unique de groupes quantiques g de (X', m', e', i') dans $(\widetilde{X}, \widetilde{m}, \tilde{e}, i)$ tel que $f = f_0 \circ g$.*

Démonstration : Par hypothèse, il existe une matrice multiplicative $A = (a_i^j)_{1 \leq i,j \leq n}$, dont les coefficients engendrent la K-algèbre différentielle Ω_X. Soient

$$\Omega = K\langle\langle (a_i^j(l))_{1 \leq i,j \leq n, l \in \mathbb{N}} \rangle\rangle$$

l'algèbre différentielle libre engendrée par la famille des indéterminées $(a_i^j(l))_{1 \leq i,j \leq n, l \in \mathbb{N}}$ et Ω_0 la sous-algèbre différentielle engendrée par la famille $(a_i^j(0))_{1 \leq i,j \leq n}$. En vertu de la propriété universelle de Ω_0, il existe un morphisme unique d'algèbres différentielles

$\varphi_0 : \Omega_0 \to \Omega_X$ tel que $\varphi_0(a_i^j(0)) = a_i^j$, qui est surjectif et permet d'identifier Ω_X à $\Omega_0/\mathcal{I}$ où $\mathcal{I}$ désigne le noyau de φ_0.

En vertu de la propriété universelle de Ω, il existe un morphisme unique d'algèbres différentielles Δ (resp. ε) de Ω dans $\Omega \overset{g}{\otimes} \Omega$ (resp. dans K) tel que

$$\Delta(a_i^j(l)) = \sum_k a_i^k(l) \otimes a_k^j(l), \quad l \text{ pair}$$
$$\Delta(a_i^j(l)) = \sum_k a_k^j(l) \otimes a_i^k(l), \quad l \text{ impair}$$

(resp. $\varepsilon(a_i^j(l)) = \delta_i^j$) et on vérifie aussitôt que $(\mathrm{Spec}(\Omega), \mathrm{Spec}(\Delta), \mathrm{Spec}(\varepsilon))$ est un monoïde quantique. De même, il existe un morphisme unique d'algèbres différentielles S de Ω dans Ω^{opp} tel que

$$S(a_i^j(l)) = a_i^j(l+1).$$

On désigne par $A(l)$ la matrice $(a_i^j(l))_{1\le i,j\le n}$, par R l'idéal différentiel de Ω engendré par les coefficients des matrices

$$A(l)A(l+1) - I, \quad A(l+1)A(l) - I, \quad l \text{ pair}$$
$${}^tA(l)\,{}^tA(l+1) - I, \quad {}^tA(l+1)\,{}^tA(l) - I, \quad l \text{ impair}$$

(où I désigne la matrice unité) et les éléments $S^l(\mathcal{I})$, $l \in \mathbb{N}$, et on pose $\widetilde{\Omega} = \Omega/R$. On vérifie que Δ, ε et S définissent par passage au quotient des morphismes d'algèbres différentielles

$$\widetilde{\Delta} : \widetilde{\Omega} \longrightarrow \widetilde{\Omega} \overset{g}{\otimes} \widetilde{\Omega}$$
$$\tilde{\varepsilon} : \widetilde{\Omega} \longrightarrow K$$
$$\widetilde{S} : \widetilde{\Omega} \longrightarrow \widetilde{\Omega}^{\mathrm{opp}},$$

de sorte que si l'on pose $\widetilde{X} = \mathrm{Spec}(\widetilde{\Omega})$, $\widetilde{m} = \mathrm{Spec}(\widetilde{\Delta})$, $\tilde{e} = \mathrm{Spec}(\tilde{\varepsilon})$ et $i = \mathrm{Spec}(\widetilde{S})$, $(\widetilde{X}, \widetilde{m}, \tilde{e}, i)$ soit un groupe quantique. De plus, si l'on désigne par ψ_0 le morphisme d'algèbres différentielles de Ω_X dans $\widetilde{\Omega}$ obtenu, en identifiant Ω_X à $\Omega_0/\mathcal{I}$, par passage au quotient de l'inclusion $\Omega_0 \subset \Omega$, et si l'on pose $f_0 = \mathrm{Spec}(\psi_0)$, alors f_0 est un morphisme de monoïdes quantiques de $(\widetilde{X}, \widetilde{m}, \tilde{e})$ dans (X, m, e), satisfaisant à la propriété universelle du théorème.

(4.2.2) Il résulte de la démonstration ci-dessus que l'algèbre $\Omega_{\widetilde{X}}$ est engendrée par l'ensemble $\bigcup_{l\in\mathbb{N}} i^{*l} f_0^*(\Omega_X)$, autrement dit, que toute sous-algèbre de $\Omega_{\widetilde{X}}$ contenant $f_0^*(\Omega_X)$ et stable par i^* est égale à $\Omega_{\widetilde{X}}$.

(4.2.3) On dira que $(\widetilde{X}, \widetilde{m}, \tilde{e}, i)$ est *le groupe quantique associé au monoïde quantique matriciel* (X, m, e) et f_0 le *morphisme canonique*. Si (X, m, e) est le monoïde quantique des endomorphismes d'un cône quantique C (3.4.3), on dira que $(\widetilde{X}, \widetilde{m}, \tilde{e}, i)$ est le *groupe quantique des automorphismes* de C.

(4.2.4) Le monoïde quantique sous-jacent au groupe quantique associé à un monoïde quantique matriciel n'est pas en général un monoïde quantique matriciel, ni même de type fini, ce qui enlève une grande partie de l'interêt de cette construction. Néanmoins on définira (4.3.1) une classe de monoïdes quantiques matriciels dont le groupe quantique associé est matriciel (prop. (4.3.3)).

(4.2.5) On peut également généraliser dans le cadre du présent travail les autres constructions de Manin ([**Man2**], p. 46) pour obtenir un groupe quantique dont l'antipode est un isomorphisme ou même une involution.

4.3. Monoïdes quantiques de Cramer

Définition (4.3.1) On dit qu'un monoïde quantique (X, m, e) est de *Cramer à gauche* (resp. *à droite*), s'il existe une matrice multiplicative A, dont les coefficients engendrent la K-algèbre différentielle Ω_X, une matrice B à coefficients dans $\mathcal{O}_X$ et un élément t de $\mathcal{O}_X$, tels que

$$m^*(t) = t \otimes t, \qquad e^*(t) = 1$$

et

$$BA = tI \qquad (\text{resp.} \quad AB = tI)$$

(où I désigne la matrice unité). On dit qu'un monoïde quantique est *de Cramer*, s'il est à la fois de Cramer à gauche et de Cramer à droite.

On remarque qu'un monoïde quantique de Cramer à gauche ou à droite est en particulier un monoïde quantique matriciel.

Proposition (4.3.2) *Pour que le monoïde quantique sous-jacent à un groupe quantique soit de Cramer, il faut et il suffit qu'il soit matriciel.*

DÉMONSTRATION : Si (X, m, e, i) désigne un groupe quantique et A une matrice multiplicative, on a

$$i^*(A) \cdot A = A \cdot i^*(A) = I$$

(cf. (3.2.1) et (4.1.1)), ce qui démontre la proposition.

Proposition (4.3.3) *Soient (X, m, e) un monoïde quantique de Cramer à gauche (ou à droite) et $(\widetilde{X}, \widetilde{m}, \tilde{e}, i)$ le groupe quantique associé. Alors $(\widetilde{X}, \widetilde{m}, \tilde{e})$ est un monoïde quantique matriciel.*

DÉMONSTRATION : Soit $f_0 : \widetilde{X} \to X$ le morphisme canonique. Par hypothèse, il existe une matrice multiplicative A, dont les coefficients engendrent la K-algèbre différentielle Ω_X, une matrice B à coefficients dans $\mathcal{O}_X$ et un élément t de $\mathcal{O}_X$ tels que

$$m^*(t) = t \otimes t, \quad e^*(t) = 1 \tag{4.3.3.1}$$

et

$$BA = tI \quad . \tag{4.3.3.2}$$

Posons $\tilde{t} = f_0^*(t)$ et $s = i^*(\tilde{t})$. La condition (4.3.3.1) implique que

$$s\tilde{t} = \tilde{t}s = 1 \quad , \tag{4.3.3.3}$$

autrement dit, que $\tilde{t}$ est inversible d'inverse s, d'où

$$i^*(s) = \tilde{t} \quad . \tag{4.3.3.4}$$

La condition (4.3.3.2) implique, en vertu de (4.3.3.3), que si l'on pose

$$\widetilde{A} = f_0^*(A) \quad \text{et} \quad \widetilde{B} = f_0^*(B) \quad ,$$

on a

$$s\widetilde{B}\widetilde{A} = I \quad . \tag{4.3.3.5}$$

Comme A est une matrice multiplicative, il en est de même pour $\widetilde{A}$, d'où

$$i^*(\widetilde{A}) \cdot \widetilde{A} = \widetilde{A} \cdot i^*(\widetilde{A}) = I \quad , \tag{4.3.3.6}$$

et les conditions (4.3.3.5) et (4.3.3.6) impliquent que

$$i^*(\widetilde{A}) = s\widetilde{B} \quad . \tag{4.3.3.7}$$

Démontrons que l'algèbre différentielle $\Omega_{\widetilde{X}}$ est engendrée par les coefficients de $\widetilde{A}$ et s. Pour cela, en vertu de (4.2.2), il suffit de démontrer que la sous-algèbre différentielle Ω de $\Omega_{\widetilde{X}}$ engendrée par les coefficients de $\widetilde{A}$ et s (qui contient $f_0^*(\Omega_X)$, puisque Ω_X est engendrée par les coefficients de A) est stable par i^*. Comme i^* commute à la différentielle et inverse l'ordre des facteurs d'un produit, il suffit simplement de voir que les coefficients de $i^*(\widetilde{A})$ et $i^*(s)$ sont dans Ω. Mais cela résulte de (4.3.3.4) et (4.3.3.7) et du fait que Ω contient $f_0^*(\Omega_X)$. Pour terminer la démonstration, il suffit de remarquer que

$$\begin{pmatrix} \widetilde{A} & 0 \\ 0 & s \end{pmatrix}$$

est une matrice multiplicative à coefficients dans $\mathcal{O}_{\widetilde{X}}$.

Exemple (4.3.4) On démontre que le monoïde quantique défini par les relations (1) à (18) du théorème (3.5.5) est un monoïde quantique de Cramer. Explicitons le cas où n est égal à 2. Ce monoïde est alors isomorphe [**Mal1**] à

$$(X, m, e) = (\,\mathrm{Spec}(\Omega)\,,\,\mathrm{Spec}(\Delta)\,,\,\mathrm{Spec}(\varepsilon)\,) \quad ,$$

où $\Omega = K\langle\langle a,b,c,d\rangle\rangle/J$, a , b , c et d désignent des indéterminées, J est l'idéal bilatère de $K\langle\langle a,b,c,d\rangle\rangle$ engendré par

(1) $ba - pab$, $dc - pcd$, $ca - qac$, $db - qbd$, $pcb - qbc$,

(2) $q(da - ad) - q^2bc + cb \qquad (\Longleftrightarrow p(da - ad) - p^2cb + bc)$,

(3) $\alpha a - pqa\alpha$, $\beta b - pqb\beta$, $\gamma c - pqc\gamma$, $\delta d - pqd\delta$,

(4) $\alpha c - pc\alpha$, $\beta d - pd\beta$, $\alpha b - qb\alpha$, $\gamma d - qd\gamma$,

(5) $\beta a - pa\beta - (pq-1)b\alpha$, $\delta c - pc\delta - (pq-1)d\gamma$,

(6) $\gamma a - qa\gamma - (pq-1)c\alpha$, $\delta b - qb\delta - (pq-1)d\beta$,

(7) $\alpha d - d\alpha$, $q\beta c - pc\beta - (pq-1)d\alpha$, $p\gamma b - qb\gamma - (pq-1)d\alpha$,

(8) $pq\delta a - pqa\delta - q(pq-1)b\gamma - p(pq-1)c\beta - (pq-1)^2 d\alpha$,

(9) α^2 , β^2 , γ^2 , δ^2 ,

(10) $\alpha\gamma + p\gamma\alpha$, $\beta\delta + p\delta\beta$, $\alpha\beta + q\beta\alpha$, $\gamma\delta + q\delta\gamma$,

(11) $\delta\alpha + \alpha\delta$, $p\gamma\beta + q\beta\gamma - (pq-1)\alpha\delta$.

(où p , q désignent des éléments inversibles de K et α , β , γ et δ les différentielles de a , b , c et d respectivement) et Δ (resp. ε) l'unique morphisme d'algèbres différentielles tel que

$$\Delta(a) = a \otimes a + b \otimes c \quad ,$$
$$\Delta(b) = a \otimes b + b \otimes d \quad ,$$
$$\Delta(c) = c \otimes a + d \otimes c \quad ,$$
$$\Delta(d) = c \otimes b + d \otimes d \quad ,$$
$$(\text{resp.} \qquad \varepsilon(a) = \varepsilon(d) = 1 \quad \text{et} \quad \varepsilon(b) = \varepsilon(c) = 0 \quad).$$

Alors la matrice

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

est une matrice multiplicative dont les coefficients engendrent la K-algèbre différentielle Ω , et si l'on pose

$$t = ad - q^{-1}cb = da - qbc = da - pcb = ad - p^{-1}bc \quad ,$$

on a

$$\Delta(t) = t \otimes t \quad , \quad \varepsilon(t) = 1$$

et

$$\begin{pmatrix} d & -qb \\ -q^{-1}c & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d & -pb \\ -p^{-1}c & a \end{pmatrix} = tI \quad ,$$

ce qui prouve que le monoïde quantique (X, m, e) est un monoïde quantique de Cramer. De plus, on démontre que le monoïde quantique sous-jacent au groupe quantique $(\widetilde{X}, \widetilde{m}, \tilde{e}, i)$ associé à (X, m, e) n'est autre que le monoïde quantique (X_T, m_T, e_T) correspondant à la matrice multiplicative $T = (t)$ (cf. prop. (3.2.4)), le morphisme canonique de $\widetilde{X}$ dans X étant l'immersion ouverte élémentaire associée à cette matrice (cf. (2.6.3)). En termes plus concrets, $\Omega_{\widetilde{X}} = K\langle\langle a,b,c,d,s\rangle\rangle/J'$, où s désigne une nouvelle indéterminée et J' est l'idéal différentiel de $K\langle\langle a,b,c,d,s\rangle\rangle$ engendré par J , $st - 1$ et $ts - 1$, autrement dit, $\Omega_{\widetilde{X}}$ s'obtient de Ω_X en “inversant” l'élément t , qui s'appelle le déterminant quantique.

Références

[**Ab**] E. Abe, "Hopf algebras", Cambridge Tracts in Math. 74, Cambridge Univ. Press, 1980.

[**Ao1**] K. Aomoto, *q-analogue of the de Rham cohomology associated with Jackson integrals. I*, Proc. Japan Acad. **66 (A)** (1990), 161-164.

[**Ao2**] K. Aomoto, *q-analogue of the de Rham cohomology associated with Jackson integrals. II*, Proc. Japan Acad. **66 (A)** (1990), 240-244.

[**Ao3**] K. Aomoto, *Finiteness of a cohomology associated with certain Jackson integrals*, Tôhoku Math. J. **43** (1991), 75-101.

[**AST**] M. Artin, W. Schelter, J. Tate, *Quantum deformations of* GL_n, Comm. Pure Appl. Math. **44** (1991), 879-895.

[**Be**] G. M. Bergman, *The diamond lemma for ring theory*, Adv. Math. **29** (1978), 178-218.

[**Bd**] D. Bernard, *Quantum Lie algebras and differential calculus on quantum groups*, Preprint (1990).

[**Bo**] N. Bourbaki, "Éléments de Mathématique", Algèbre, Chapitres 1 à 3, Hermann, Paris, 1970.

[**Br**] T. Brzeziński, *Exterior bialgebras*, Preprint (1991).

[**BDR**] T. Brzeziński, H. Dabrowsky, J. Rembieliński, *On the quantum differential calculus and the quantum holomorphicity*, J. Math. Phys. **33, 1** (1992), 19-24.

[**CSWW**] U. Carow-Watamura, M. Schlieker, S. Watamura, W. Weich, *Bicovariant differential calculus on quantum groups* $SU_q(N)$ *and* $SO_q(N)$, Commun. Math. Phys. **142** (1991), 605-641.

[**Ca**] P. Cartier, *Calcul différentiel non commutatif*, Exposés à l'E.N.S. (1989).

[**Co**] A. Connes, *Non-commutative differential geometry*, Publications Mathématiques de l'I.H.E.S. **62** (1985), 41-144.

[**DM**] P. Deligne, J. S. Milne, *Tannakian categories*, "Hodge cycles, motives, and Shimura varieties", Lecture Notes in Mathematics 900, Springer-Verlag, 1982, pp. 101-228.

[**Dr**] V. G. Drinfel'd, *Quantum groups*, Proceedings of the International Congress of Mathematicians 1986", Berkeley, AMS, 1987, pp. 798-820.

[**DV1**] M. Dubois-Violette, *Dérivations et calcul différentiel non commutatif*, C.R.A.S. **307** (1988), 403-408.

[**DV2**] M. Dubois-Violette, *Noncommutative differential geometry, quantum mechanics and gauge theory*, Preprint, L.P.T.H.E.-Orsay 90/31 (1990).

[**DKM1**] M. Dubois-Violette, R. Kerner, J. Madore, *Noncommutative differential geometry of matrix algebras*, J. Math. Phys. **31, 2** (1990), 316-322.

[**DKM2**] M. Dubois-Violette, R. Kerner, J. Madore, *Noncommutative differential geometry and new models of gauge theory*, J. Math. Phys. **31, 2** (1990), 323-330.

[**FT**] P. Feng, B. Tsygan, *Hochschild and cyclic homology of quantum groups*, Commun. Math. Phys. **140** (1991), 481-521.

[**EGA IV**$_4$] A. Grothendieck, "Éléments de géométrie algébrique" IV, Publications Mathématiques de l'I.H.E.S. 32, 1967.

[**Gr**] A. Grothendieck, *On the De Rham cohomology of algebraic varieties*, Publications Mathématiques de l'I.H.E.S. **29** (1966), 95-103.

[**GRR**] D. Gurevich, A. Radul, V. Rubtsov, *Non-commutative differential geometry and Yang-Baxter equation*, Preprint (1990).

[**HW**] T. Hibi, M. Wakayama, *A q-analogue of Capelli's identity for* $GL(2)$, Preprint, Hokkaido University (1991).

[**J1**] M. Jimbo, *A q-difference analogue of* $U(g)$ *and the Yang-Baxter equation*, Lett. Math. Phys. **10** (1985), 63-69.

[**J2**] M. Jimbo, *Quantum R matrix for the generalized Toda system*, Commun. Math. Phys. **102** (1986), 537-547.

[**J3**] M. Jimbo, *A q-analogue of* $U(gl(N+1))$*, Hecke algebras and the Yang-Baxter equation*, Lett. Math. Phys. **11** (1986), 247-252.

[**Ju**] B. Jurčo, *Differential calculus on quantized simple Lie groups*, Lett. Math. Phys. **22** (1991), 177-186.

[**Ka**] M. Karoubi, "Homologie cyclique et K-théorie", Astérisque 149, 1987.

[**Kas**] C. Kassel, *Cyclic homology of differential operators, the Virasoro algebra and a q-analogue*, Preprint (1991).

[**Mal1**] G. Maltsiniotis, *Groupes quantiques et structures différentielles*, C.R.A.S. **311**, Sér. I (1990), 831-834.

[**Mal2**] G. Maltsiniotis, *Calcul différentiel sur le groupe linéaire quantique*, Preprint (1990).

[**Mal3**] G. Maltsiniotis, *Groupoïdes quantiques*, C.R.A.S. **314**, Sér. I (1992), 249-252.

[**Man1**] Yu. I. Manin, *Some remarks on Koszul algebras and quantum groups*, Ann. Inst. Fourier, **37, 4** (1987), 191-205.

[**Man2**] Yu. I. Manin, "Quantum groups and non-commutative geometry", Centre de Recherches Mathématiques de l'Université de Montréal, 1988.

[**Man3**] Yu. I. Manin, *Multiparametric quantum deformation of the general linear supergroup*, Commun. Math. Phys. **123** (1989), 163-175.

[**Man4**] Yu. I. Manin, *Notes on quantum groups and quantum de Rham complexes*, Preprint, MPI/91-60 (1991).

[**MNW1**] T. Masuda, Y. Nakagami, J. Watanabe, *Noncommutative differential geometry on the quantum $SU(2)$, I: An algebraic viewpoint*, K-Theory, **4** (1990), 157-180.

[**MNW2**] T. Masuda, Y. Nakagami, J. Watanabe, *Noncommutative differential geometry on the quantum two sphere of Podles, I: An algebraic viewpoint*, K-Theory, **5** (1991), 151-175.

[**M-H**] F. Müller-Hoissen, *Differential calculi on the quantum group $GL_{p,q}(2)$*, Preprint, GOET-TP 55/91 (1991).

[**NUW**] M. Noumi, T. Umeda, M. Wakayama, *A quantum analogue of the Capelli identity and an elementary differential calculus on $GL_q(n)$*, Preprint, University of Tokyo (1991).

[**Po**] P. Podles, *Differential calculus on quantum spheres*, Lett. Math. Phys. **18** (1989), 107-119.

[**RTF**] N. Yu. Reshetikhin, L. A. Takhtadzhyan, L. D. Faddeev, *Quantization of Lie groups and Lie algebras*, Len. Math. J. **1, 1** (1990), 193-225.

[**Ro**] M. Rosso, *Algèbres enveloppantes quantifiées, groupes quantiques compacts de matrices et calcul différentiel non commutatif*, Duke Math. J. **61, 1** (1990), 11-40.

[**Sch**] A. Schirrmacher, *Remarks on the use of R-matrices*, Preprint (1991).

[**SWZ**] A. Schirrmacher, J. Wess, B. Zumino, *The two-parameter deformation of $GL(2)$, its differential calculus, and Lie algebra*, Z. Phys. C - Particles and Fields, **49** (1991), 317-324.

[**SVZ**] W. B. Schmidke, S. P. Vokos, B. Zumino, *Differential geometry of the quantum supergroup $GL_q(1|1)$*, Z. Phys. C - Particles and Fields, **48** (1990), 249-255.

[**Su**] A. Sudbery, *Consistent multiparameter quantisation of $GL(n)$*, J. Phys. A: Math. Gen. **23** (1990), L697-L704.

[**Ta**] L. A. Takhtadzhyan, *Noncommutative homology of quantum tori*, Funct. Anal. and Appl. **23, 2** (1989), 147-149.

[**Tsy**] B. Tsygan, *Notes on differential forms on quantum groups*, Preprint (1991).

[**WZ**] J. Wess, B. Zumino, *Covariant differential calculus on the quantum hyperplane*, Preprint (1990).

[**Wo1**] S. L. Woronowicz, *Twisted $SU(2)$ group. An example of a non-commutative differential calculus*, Publ. RIMS **23** (1987), 117-181.

[**Wo2**] S. L. Woronowicz, *Differential calculus on compact matrix pseudogroups (quantum groups)*, Commun. Math. Phys. **122** (1989), 125-170.

[**Za1**] S. Zakrzewski, *A differential structure for quantum mechanics*, J. of Geom. and Phys. **2, 3** (1985), 135-145.

[**Za2**] S. Zakrzewski, *Quantum and classical pseudogroups. Part II. Differential and symplectic pseudogroups*, Commun. Math. Phys. **134** (1990), 371-395.