

QUASI-GROUPOÏDES QUANTIQUES

Alain Bruguières et Georges Maltsiniotis

Résumé - Le but de cette note est d'introduire une notion généralisant à la fois celle de groupoïde quantique, introduite dans [4], et celle de quasi-groupe quantique (quasi-bigèbre de Hopf, quasi-triangulaire), introduite par Drinfeld [3]. Cette notion, qu'on pourrait appeler quasi-groupoïde quantique, permet de généraliser certains résultats de [1].

QUASI-QUANTUM GROUPOIDS

Abstract - The aim of this note is to introduce a notion that generalizes simultaneously the notion of quantum groupoid [4] and the notion of quasi-quantum group (quasi-triangular quasi-Hopf algebra) introduced by Drinfeld [3]. This new mathematical object may be called a quasi-quantum groupoid. Some results of [1] can be generalized in this framework.

Dans cette note, k désigne un anneau commutatif. Par algèbre, on entend k -algèbre associative, unitaire. Le produit tensoriel sur k est noté \otimes . Si B est une algèbre, on note B^o l'algèbre opposée, et B^e l'algèbre enveloppante $B^o \otimes B$. La catégorie des B -modules à droite est notée $\text{Mod}(B)$. On identifie la catégorie $\text{Bimod}(B, B)$ des (B, B) -bimodules à la catégorie $\text{Mod}(B^e)$ en munissant tout (B, B) -bimodule M de la structure de B^e -module à droite donnée par : $m \cdot (x \otimes y) = x \cdot m \cdot y$. Un tel bimodule M peut aussi être vu comme un (B^o, B^o) -bimodule ; on le note alors M^o .

Rappels sur les cogébroïdes [2], [1]. — Soit B une algèbre. Un *cogébroïde de base B* est un (B, B) -bimodule L muni de morphismes de (B, B) -bimodules $\Delta : L \rightarrow L \otimes_B L$ et $\varepsilon : L \rightarrow B$, appelés respectivement *coproduit* et *coïunité*, vérifiant les axiomes suivants : $(1_L \otimes_B \Delta)\Delta = (\Delta \otimes_B 1_L)\Delta$ et $(1_L \otimes_B \varepsilon)\Delta = 1_L = (\varepsilon \otimes_B 1_L)\Delta$. Un *morphisme de cogébroïdes de base B* est un morphisme de (B, B) -bimodules compatible aux coproduits et aux coïunités.

Le (B, B) -bimodule B^e est muni d'une structure de cogébroïde, dont le coproduit est défini par $\Delta(x \otimes y) = (x \otimes 1) \otimes_B (1 \otimes y)$ et la co-unité par $\varepsilon(x \otimes y) = xy$. Si L est un cogébroïde de base B , L^o est naturellement muni d'une structure de cogébroïde de base B^o . Si $\phi : B \rightarrow C$ est un morphisme d'algèbres, et si L est un cogébroïde de base B , alors $C \otimes_B L \otimes_B C$ est naturellement muni d'une structure de cogébroïde de base C , qu'on note $\phi_* L$. Si L et L' sont des cogébroïdes de bases respectives B et B' , $L \otimes L'$ est naturellement muni d'une structure de cogébroïde de base $B \otimes B'$. Lorsque $B = B'$ et B est commutatif, $L \otimes_{B^e} L'$ est muni d'une structure de cogébroïde de base B , s'identifiant au cogébroïde $\mu_{B^*}(L \otimes L')$, où μ_B désigne la multiplication de B .

Soit L un cogébroïde de base B . Un L -comodule à droite est un B -module à droite V muni d'une *coaction à droite de L* , c'est-à-dire un morphisme de B -modules à droite $\delta : V \rightarrow V \otimes_B L$ vérifiant les axiomes suivants : $(\delta \otimes_B 1_L)\delta = (1_V \otimes_B \Delta)\delta$ et $(1_V \otimes_B \varepsilon)\delta = 1_V$. Un *morphisme de L -comodules à droite* est un morphisme de B -modules à droite compatible aux coactions. La catégorie des L -comodules à droite est notée $\text{Comod}(L)$.

Notations diverses. — Soit B une algèbre commutative. Si P et M sont des (B, B) -bimodules, et n un entier, on notera $C^n(P, M)$ le k -module des applications de P^n dans M qui sont B -linéaires à droite et à gauche en chaque variable, et $C^\bullet(P, M)$ la somme directe $\bigoplus C^n(P, M)$. Posant $P^{(n)} = P \otimes_{B^e} P \otimes_{B^e} \cdots \otimes_{B^e} P$ (n fois), on identifiera $C^n(P, M)$ à $\text{Hom}_{B^e}(P^{(n)}, M)$. Pour $\varphi \in C^n(P, B)$ et $\psi \in C^m(P, M)$ (ou $\varphi \in C^n(P, M)$ et $\psi \in C^m(P, B)$) on note $\varphi \cdot \psi$ l'élément de $C^{n+m}(P, M)$ défini par :

$$(\varphi \cdot \psi)(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m) = \varphi(x_1, \dots, x_n) \psi(y_1, \dots, y_m) .$$

On fait ainsi de $C^\bullet(P, B)$ une algèbre graduée, et de $C^\bullet(P, M)$ un $C^\bullet(P, B)$ -bimodule gradué. Pour $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ et $\varphi \in C^n(P, M)$, on note $\varphi_{\sigma(1)\dots\sigma(n)}$ l'élément de $C^n(P, M)$ défini par : $(x_1, \dots, x_n) \mapsto \varphi(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)})$.

Soit à présent (L, Δ, ε) un cogébroïde de base B . Pour tout (B, B) -bimodule M , on pose $C^n(M) = C^n(L, M)$. Si M et N sont deux (B, B) -bimodules, on définit un produit $*$: $C^n(M) \times C^n(N) \rightarrow C^n(M \otimes_B N)$, appelé *produit de convolution*, par la formule :

$$(\varphi * \psi)(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i_1, \dots, i_n} \varphi(y_1^{i_1}, \dots, y_n^{i_n}) \otimes_B \psi(z_1^{i_1}, \dots, z_n^{i_n}) ,$$

où x_1, \dots, x_n sont dans L , et $\Delta(x_l) = \sum_{i \in I_l} y_l^{i_l} \otimes_B z_l^{i_l}$, pour $1 \leq l \leq n$. Le produit $*$ est associatif, et admet pour élément neutre $\varepsilon^n = \varepsilon \cdot \varepsilon \cdots \varepsilon \in C^n(B)$. En particulier, $C^n(B)$ est une algèbre unitaire. Pour $\rho : \{1, \dots, m\} \hookrightarrow \{1, \dots, n\}$ injection et $\psi \in C^m(B)$ on note $\psi_{\rho(1)\dots\rho(m)}$ l'élément $\varphi_{\sigma(1)\dots\sigma(n)}$ de $C^n(B)$, où $\varphi = \psi \cdot \varepsilon^{n-m}$ et $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ désigne un prolongement arbitraire de ρ .

Soient $X_1 = (V_1, \delta_1), \dots, X_n = (V_n, \delta_n)$ des L -comodules à droite, et M un (B, B) -bimodule. Pour $\varphi \in C^n(M)$, on définit une application $\varphi_{X_1, \dots, X_n}$ de $V_1 \otimes_B \cdots \otimes_B V_n$ dans $V_1 \otimes_B \cdots \otimes_B V_n \otimes_B M$ par la formule :

$$\varphi_{X_1, \dots, X_n}(v_1 \otimes_B \cdots \otimes_B v_n) = \sum_{i_1, \dots, i_n} w_1^{i_1} \otimes_B \cdots \otimes_B w_n^{i_n} \otimes_B \varphi(x_1^{i_1}, \dots, x_n^{i_n}),$$

où v_l est pour $1 \leq l \leq n$ un élément de V_l , d'image $\delta_l(v_l) = \sum_{i \in I_l} w_l^i \otimes_B x_l^i$ par la coaction de L . Lorsque $M = B$, on définit ainsi sur $V_1 \otimes_B \cdots \otimes_B V_n$ une structure de $C^n(B)$ -module à gauche.

Quasi-bigébroïdes. — Soit B une algèbre commutative. On appelle *quasi-bigébroïde de base B* la donnée d'un cogébroïde L de base B muni d'éléments $\mu \in C^2(L)$, $\eta \in C^0(L)$, et $\Phi \in C^3(B)$, vérifiant les axiomes suivants :

- (QB1) $\mu : L \otimes_{B^e} L \longrightarrow L$ est un morphisme de cogébroïdes de base B ;
- (QB2) $\eta : B^e \longrightarrow L$ est un morphisme de cogébroïdes de base B ;
- (QB3) η est neutre à droite et à gauche pour μ (on a $\mu \circ (\eta \otimes_{B^e} 1_L) = 1_L = \mu \circ (1_L \otimes_{B^e} \eta)$);
- (QB4) $\Phi * (\mu \circ (\mu \otimes_{B^e} 1_L)) = (\mu \circ (1_L \otimes_{B^e} \mu)) * \Phi$ dans $C^3(L)$;
- (QB5) $(\Phi \circ (1_L \otimes_{B^e} 1_L \otimes_{B^e} \mu)) * (\Phi \circ (\mu \otimes_{B^e} 1_L \otimes_{B^e} 1_L)) = (\varepsilon \cdot \Phi) * (\Phi \circ (1_L \otimes_{B^e} \mu \otimes_{B^e} 1_L)) * (\Phi \cdot \varepsilon)$ dans $C^4(B)$;
- (QB6) $\Phi \circ (1_L \otimes_{B^e} \eta \otimes_{B^e} 1_L) = \varepsilon^2$;
- (QB7) Φ est inversible dans $C^3(B)$ pour le produit de convolution (et son inverse sera noté Φ^{-1}).

REMARQUE. L'application μ définit une structure d'algèbre non associative sur L possédant un élément unité égal à $\eta(1 \otimes 1)$, et les applications $s, b : B \longrightarrow L$ définies par

$s(a) = \eta(1 \otimes a)$ et $b(a) = \eta(a \otimes 1)$, pour $a \in B$, sont des morphismes d'algèbres, correspondant aux morphismes source et but d'un groupoïde. Lorsque $\Phi = \varepsilon^3$, on retrouve la notion de bigébroïde introduite par G. Maltiniotis dans [4]; lorsque $B = k$, on obtient la notion duale à la notion de quasi-bigèbre ("quasibialgebra") introduite par Drinfeld [3].

Théorème. *Soit $\mathcal{L} = (L, \mu, \eta, \Phi)$ un quasi-bigébroïde de base B . Alors il existe sur $\text{Comod}(L)$ une structure naturelle de catégorie monoïdale, qu'on notera $\text{Rep}(\mathcal{L})$; en outre le foncteur oublié $U : \text{Rep}(\mathcal{L}) \longrightarrow \text{Mod}(B)$ commute aux produits tensoriels et envoie l'objet unité I sur B .*

DÉMONSTRATION. — 1) Si $X_1 = (V_1, \delta_1)$ et $X_2 = (V_2, \delta_2)$ sont des L -comodules à droite, leur produit tensoriel est, par définition, le L -comodule à droite $X_1 \otimes X_2 = (V_1 \otimes_B V_2, \delta)$, où $\delta = \mu_{X_1, X_2} : V_1 \otimes_B V_2 \longrightarrow V_1 \otimes_B V_2 \otimes_B L$. Que δ soit une coaction à droite résulte de la condition (QB1) et cette construction est clairement fonctorielle.

2) L'objet-unité est défini par $I = (B, s)$, où $s : B \rightarrow L = B \otimes L$ est défini ci dessus. Il résulte de (QB2) que s est une coaction et de (QB3) que I est neutre à droite et à gauche pour le produit tensoriel.

3) La contrainte d'associativité a . Soient trois L -comodules à droite $X_i = (V_i, \delta_i)$ pour $i = 1, 2, 3$. Considérons $a_{X_1, X_2, X_3} = \Phi_{X_1, X_2, X_3} : V_1 \otimes_B V_2 \otimes_B V_3 \longrightarrow V_1 \otimes_B V_2 \otimes_B V_3$. Il résulte de (QB4) que a_{X_1, X_2, X_3} est un morphisme de comodules de $(X_1 \otimes X_2) \otimes X_3$ vers $X_1 \otimes (X_2 \otimes X_3)$, et a est clairement fonctoriel. De (QB5) résulte que a rend commutatif le pentagone de MacLane, de (QB6), que a est compatible à l'unité, et de (QB7), que a est un isomorphisme. \square

Définition. Soit $\mathcal{L} = (L, \mu, \eta, \Phi)$ un quasi-bigébroïde de base B . On appelle *tressage* de \mathcal{L} tout élément R de $C^2(B)$ vérifiant les conditions suivantes :

$$(T1) \quad \mu_{21} * R = R * \mu \text{ dans } C^2(L);$$

$$(T2) \quad R \circ (\mu \otimes_{B^e} 1_L) = \Phi_{312} * R_{13} * \Phi_{132}^{-1} * R_{23} * \Phi \text{ dans } C^3(B);$$

$$(T3) \quad R \circ (1_L \otimes_{B^e} \mu) = \Phi_{231}^{-1} * R_{13} * \Phi_{213} * R_{12} * \Phi^{-1} \text{ dans } C^3(B);$$

$$(T4) \quad R \text{ est inversible dans } C^2(B).$$

Théorème. Soit \mathcal{L} un quasi-bigébroïde de base B . La donnée d'un tressage de \mathcal{L} définit un tressage dans la catégorie monoïdale $\text{Rep}(\mathcal{L})$.

DÉMONSTRATION. Soit R un tressage de $\mathcal{L} = (L, \mu, \eta, \Phi)$. Soient $X_1 = (V_1, \delta_1)$, $X_2 = (V_2, \delta_2)$ deux objets de $\text{Rep}(\mathcal{L})$. On note $\sigma_{V_1, V_2} : V_1 \otimes_B V_2 \rightarrow V_2 \otimes_B V_1$ l'échange des facteurs. Soit \mathcal{R}_{X_1, X_2} l'application $\sigma_{V_1, V_2} \circ R_{X_1, X_2}$ de $V_1 \otimes_B V_2$ dans $V_2 \otimes_B V_1$. Il résulte de (T1) que \mathcal{R}_{X_1, X_2} est un morphisme de L -comodules à droite de $X_1 \otimes X_2$ vers $X_2 \otimes X_1$, et de (T4), que c'est un isomorphisme. La functorialité de \mathcal{R} est immédiate. Les hypothèses (T2) et (T3) assurent la commutativité des deux hexagones de MacLane. \square

Définition. Soit $\mathcal{L} = (L, \mu, \eta, \Phi)$ un quasi-bigébroïde de base B . On appelle *antipode de \mathcal{L}* la donnée d'un élément S de $C^1(L^\circ)$ et de deux éléments α, β de $C^1(B)$, vérifiant :

- (A1) $S : L \rightarrow L^\circ$ est un morphisme de cogébroïdes;
- (A2) $s \circ \alpha = \mu \circ (S * \alpha * 1_L)$;
- (A3) $b \circ \beta = \mu \circ (1_L * \beta * S)$;
- (A4) $\Phi \circ (1_L * \beta * S * \alpha * 1_L) = \varepsilon = \Phi^{-1} \circ (S * \alpha * 1_L * \beta * S)$;

(s et b sont définis dans la remarque). On dit qu'un quasi-bigébroïde \mathcal{L} est un *quasi-bigébroïde de Hopf* s'il possède un antipode (S, α, β) , avec S *bijectif*.

RAPPELS. Soient \mathcal{C} une catégorie monoïdale de produit tensoriel \otimes , d'objet unité (strict) I et de contrainte d'associativité a , X et Y des objets de \mathcal{C} , et $e : X \otimes Y \rightarrow I$, $h : I \rightarrow Y \otimes X$ des morphismes de \mathcal{C} . On dit que (X, Y, e, h) est une *dualité de \mathcal{C}* si $(e \otimes 1_X) a_{X, Y, X}^{-1} (1_X \otimes h) = 1_X$ et $(1_Y \otimes e) a_{Y, X, Y} (h \otimes 1_Y) = 1_Y$. Le choix pour chaque objet X de \mathcal{C} d'une dualité $({}^\vee X, X, e_X, h_X)$ détermine un foncteur contravariant "dual à gauche" ${}^\vee ?$ de \mathcal{C} dans \mathcal{C} . En particulier, dans la catégorie $\text{proj}(B)$ des B -modules projectifs de type fini sur une algèbre commutative B , on a pour chaque objet V une dualité canonique (V^*, V, e_V, h_V) , où $V^* = \text{Hom}_B(V, B)$, $e_V : V^* \otimes_B V \rightarrow B$ est l'évaluation, et $h_V : B \rightarrow V \otimes_B V^*$ la co-évaluation (c'est-à-dire l'application B -linéaire qui envoie 1 sur l'élément de $V \otimes_B V^*$ correspondant à 1_V dans l'isomorphisme canonique $V \otimes_B V^* \simeq \text{End}_B(V)$). D'où un foncteur dual à gauche qu'on note $?^*$.

Théorème. Soient $\mathcal{L} = (L, \mu, \eta, \Phi)$ un quasi-bigébroïde de base B , \mathcal{C} la sous-catégorie monoïdale pleine de $\text{Rep}(\mathcal{L})$ formée des L -comodules à droite qui sont projectifs de type fini sur B , et (S, α, β) un antipode de \mathcal{L} . Alors la catégorie \mathcal{C} est autonome à gauche, et plus précisément, on peut construire pour chaque objet X de \mathcal{C} une dualité $({}^\vee X, X, e_X, h_X)$, de sorte que le foncteur oublié commute aux foncteurs “dual à gauche” (autrement dit : $U \circ {}^\vee ? = ?^* \circ U$). De plus, si \mathcal{L} est un quasi-bigébroïde de Hopf, la catégorie \mathcal{C} est autonome.

DÉMONSTRATION. Soient V un B -module à droite projectif de type fini, et (V^*, V, e_V, h_V) la dualité canonique. Soit δ une coaction à droite de L sur V , et $X = (V, \delta)$. Soit $\delta' = (1_{V^*} \otimes_B S) \sigma_{L, V^*} (e_V \otimes_B 1_{L \otimes_B V^*}) (1_{V^*} \otimes_B \delta \otimes_B 1_{V^*}) (1_{V^*} \otimes_B h_V) : V^* \longrightarrow V^* \otimes_B L$. Il résulte de (A1) que δ' est une coaction à droite de L sur V^* . Soit ${}^\vee X$ le comodule (V^*, δ') . Posons $e = e_V \circ (1_{V^*} \otimes_B \alpha_X)$ et $h = (\beta_X \otimes_B 1_{V^*}) \circ h_V$. Il résulte de (A2) et (A3) que e est un morphisme de comodules de ${}^\vee X \otimes X$ vers I , et h , de I vers $X \otimes {}^\vee X$. Il résulte de (A4) que $({}^\vee X, X, e, h)$ est une dualité de $\text{Rep}(\mathcal{L})$. Il résulte aussi de (A4) que si f est un morphisme de \mathcal{C} , $U({}^\vee f) = U(f)^*$ (transposé de $U(f)$).

Si S est un isomorphisme, soit $Y = (W, \delta')$ un L -comodule à droite, et supposons W projectif de type fini comme B -module. Posons $V = W^*$, de sorte que W s'identifie à V^* . Soit $\delta = (1_V \otimes_B e_V \otimes_B S^{-1}) (1_{V \otimes_B V^*} \otimes_B \sigma_{L, V}) (1_V \otimes_B \delta' \otimes_B 1_V) (h_V \otimes_B 1_V) : V \longrightarrow V \otimes_B L$. Alors δ est une coaction à droite de L sur V , d'où un comodule $X = (V, \delta)$, et Y s'identifie à ${}^\vee X$, donc admet X pour dual à droite. \square

Références bibliographiques.

- [1] A. BRUGUIÈRES, *Théorie tannakienne non commutative*, Preprint Univ. Paris VII, No. **69**, 1993 (à paraître dans Comm. in Algebra).
- [2] P. DELIGNE, Catégories tannakiennes, in *The Grothendieck Festschrift*, II, Progress in Mathematics, **87**, Birkhäuser, 1990, pp. 111–195.
- [3] V. G. DRINFELD, *Quasi-Hopf Algebras*, Leningrad Math. J., Vol. **1**, No. 6, pp.1419-1457, 1990.
- [4] G. MALTSINIOTIS, *Groupoïdes quantiques*, C. R. Acad. Sci. Paris, t. **314**, Série I, pp. 249–252, 1992.

Université Paris VII, UFR de Mathématiques, URA n° 212,
2, Place Jussieu, 75251 Paris CEDEX 05, France.