SÉMINAIRE N. BOURBAKI

GEORGES MALTSINIOTIS

Le théorème de Brill-Noether

Séminaire N. Bourbaki, 1981, exp. nº 571, p. 157-175

<http://www.numdam.org/item?id=SB_1980-1981__23__157_0>

Séminaire BOURBAKI 571-01
33e année, 1980/81, n° 571 Février 1981

LE THÉORÈME DE BRILL-NOETHER
[d'après P. Griffiths, J. Harris, G. Kempf, S. Kleiman et D. Laksov]

par Georges MALTSINIOTIS

Introduction

Soient k un corps algébriquement clos de caractéristique quelconque, C une courbe projective, lisse, connexe, de genre g sur k, D un diviseur de degré d de C. Un problème classique est de déterminer

$$h^o(D) = \dim(H^o(O_C(D))) = \dim(L(D))$$

où $O_C(D)$ est le faisceau inversible associé au diviseur D et

$$L(D) = \{f : f \text{ fonction méromorphe sur } C \text{ tel que } D + \operatorname{div}(f) \geq 0\}$$

ou la dimension $r(D)$ de l'espace projectif $|D|$ des diviseurs positifs linéairement équivalents à D. Vu que $|D| \simeq \mathbb{P}(L(D))$ on a $r(D) = h^o(D) - 1$. Il est clair que si $d < 0$, $h^o(D) = 0$; on s'intéresse donc au cas $d \geq 0$ et on remarque que dans le cas particulier où $d = 0$, $h^o(D) = 1$ si D est linérairement équivalent au diviseur 0 et $h^o(D) = 0$ sinon.

Les premiers renseignements sur $h^o(D)$ sont donnés par la formule de Riemann-Roch :

$$h^o(D) = d - g + 1 + h^o(K - D)$$

où K est un diviseur canonique sur C. On rappelle que $h^o(K) = g$ et que le degré de K est égal à $2g - 2$. Si $d > 2g - 2$ on obtient donc que :

$$h^o(D) = d - g + 1 .$$

Ces renseignements nous permettent d'élucider entièrement le problème si $g = 0,1$:

Si $g = 0$ $h^o(D) = \sup\{0 , d + 1\}$

Si $g = 1$ et $d \neq 0$ $h^o(D) = \sup\{0,d\}$.

On suppose donc désormais que $g \geq 2$ et que $0 \leq d \leq 2g - 2$.

Si $0 \leq d \leq g - 1$, l'image du module $C^{(d)}$ des diviseurs positifs de degré d

de C dans la jacobienne J de C étant un fermé distinct de J, si la classe de D dans J est "générale" $h^o(D) = 0$. De même si $g-1 \leq d \leq 2g-2$ la formule de Riemann-Roch implique que si la classe de D dans J est "générale" (donc aussi celle de $K-D$ dont le degré est compris entre 0 et $g-1$) alors $h^o(D) = d-g+1$. Donc dans les deux cas :

$$h^o(D) = \sup\{0, d-g+1\} .$$

On dit qu'un diviseur D est spécial si

$$h^o(D) > \sup\{0, d-g+1\}$$

(cette inégalité implique que $0 \leq d \leq 2g-2$) ou, ce qui est équivalent, si $h^o(D) \neq 0$ et $h^o(K-D) \neq 0$. En particulier si le diviseur D est spécial il existe un diviseur positif linéairement équivalent à D. Si on s'intéresse donc aux classes de diviseurs spéciaux on peut se limiter à l'étude des classes de diviseurs spéciaux positifs. Si D est positif dire qu'il est spécial équivaut à dire que $h^o(K-D) \neq 0$ ou encore qu'il est majoré par un diviseur canonique.

On se pose la question de savoir quelles sont les classes de diviseurs spéciaux qui existent sur C et "combien il y en a". Plus précisément si pour d, $0 \leq d \leq 2g-2$ et r, $\sup\{0, d-g+1\} \leq r$, on pose

$$C^r_d = \{D \in C^{(d)} : h^o(D) > r\} = \{D \in C^{(d)} : r(D) \geq r\}$$

et on note W^r_d l'image de C^r_d dans la jacobienne, on se pose la question de savoir quand est-ce que W^r_d est non vide et quelle est, dans ce cas, sa dimension. (On remarque que la formule de Riemann-Roch montre immédiatement que l'automorphisme de la jacobienne qui associe à la classe d'un diviseur D la classe du diviseur $K-D$ induit un isomorphisme de W^r_d sur $W^{r-d+g-1}_{2g-2-d}$).

On a une réponse immédiate à ces questions dans le cas où $r = \sup\{0, d-g+1\}$ (dans quel cas W^r_d est l'ensemble des classes de tous les diviseurs spéciaux de degré d). En effet dans ce cas si $0 \leq d \leq g-1$, $W^r_d = W^o_d$ est l'ensemble des classes de tous les diviseurs positifs de degré d donc est irréductible de dimension d et si $g-1 \leq d \leq 2g-2$, $W^r_d = W^{d-g+1}_d$ est isomorphe à W^o_{2g-2-d} donc irréductible de dimension $2g-2-d$. Donc si $r = \sup\{0, d-g+1\}$ W^r_d est irréductible et

$$\dim W^r_d = \inf\{d, 2g-2-d\} .$$

Dans le cas général le théorème de Clifford donne une réponse partielle à la première question :

$$\text{si } r > d/2 \text{ alors } W^r_d = \emptyset$$

qui est dans un sens la meilleure car si C est une courbe hyperelliptique, et $0 \leq d \leq 2g-2$, $\sup\{0, d-g+1\} \leq r \leq d/2$ alors $W^r_d \neq \emptyset$. D'autre part une généralisation facile du théorème de Clifford montre que si $0 \leq d \leq 2g-2$ et

$\sup\{0, d-g+1\} \le r \le d/2$, alors $\dim W_d^r \le d - 2r$, l'égalité étant atteinte pour une courbe hyperelliptique ce qui donne une réponse partielle à la deuxième question, et résout entièrement le problème pour $g = 2$.

Mais pour $g \ge 3$ les courbes hyperelliptiques sont "exceptionnelles" et on peut se poser les mêmes questions en supposant la courbe C "générale". Brill et Noether [5] ont affirmé que si C est une courbe générale de genre g , $g \ge 2$, alors W_d^r est non vide si et seulement si $g - (r+1)(g-d+r) \ge 0$ et qu'alors

$$\dim W_d^r = g - (r+1)(g-d+r)$$

(conjecture de Brill-Noether). En fait, leur démonstration semble prouver seulement que (sans supposer que la courbe soit générale) toute composante irréductible de W_d^r est de dimension supérieure ou égale à $g - (r+1)(g-d+r)$ (ce qui ne prouve pas que W_d^r est non vide si $g - (r+1)(g-d+r) \ge 0$).

Actuellement la conjecture de Brill-Noether a été entièrement démontrée grâce aux travaux de Kleiman-Laksov, Kempf et Griffiths-Harris et on dispose du théorème suivant :

THÉORÈME.— *Soient* C *une courbe projective, lisse, connexe, de genre* g , $g \ge 2$, *sur un corps algébriquement clos* k , d *et* r *deux entiers tels que* $0 \le d \le 2g-2$ *et* $\sup\{0, d-g+1\} \le r$. *Alors*

(i) *Si* $r > d/2$, W_d^r *est vide. Si* $r \le d/2$, *toute composante irréductible de* W_d^r *a une dimension supérieure ou égale à* $g - (r+1)(g-d+r)$ *et inférieure ou égale à* $d-2r$, *pour* $r = \sup\{0, d-g+1\}$, W_d^r *est irréductible et de dimension* $g - (r+1)(g-d+r) = d-2r = \inf\{d, 2g-2-d\}$ *et pour* $d/2 \ge r > \sup\{0, d-g+1\}$, W_d^r *a une conposante irréductible de dimension* $d-2r$ *si et seulement si* C *est hyperelliptique.*

(ii) *Si* $g - (r+1)(g-d+r) \ge 0$, W_d^r *est non vide.*

(iii) *Il existe un ouvert dense* U *de* M_g *(module des courbes de genre* g *) tel que si l'image de* C *dans* M_g *est dans* U *alors :*

a) $\dim W_d^r = \sup\{-1, g-(r+1)(g-d+r)\}$;

b) *si* $g - (r+1)(g-d+r) \ge 0$ *la classe fondamentale* w_d^r *de* W_d^r *dans la cohomologie de la jacobienne de* C *est donnée par la formule :*

$$w_d^r = \prod_{i=0}^{r} \frac{i!}{(g-d+r+i)!}\, \theta^{(r+1)(g-d+r)} \tag{1}$$

où θ *est la classe du diviseur thêta (* θ *est la classe fondamentale de* W_{g-1}^o *).*

La partie (i) du théorème est déjà essentiellement démontrée dans la littérature classique mais une présentation moderne et rigoureuse est donnée par H. Martens [20]. La partie (ii) est restée longtemps conjecturale. Elle a été démontrée pour $r = \sup\{0, d-g+1\} + 1$ et $k = \mathbb{C}$ par T. Meiss en 1960 [27] et Gunning en 1971 [10] par des méthodes différentes. Le cas général a été démontré indépendamment par Kempf et Kleiman-Laksov en 1971 [11], [14], [15] (1). Ils démontrent que si

(1) Fulton et Lazarsfeld ont récemment démontré ce même résultat par une méthode différente.

$g - (r+1)(g-d+r) \geq 0$ alors la classe de cohomologie $\prod_{i=0}^{r} \frac{i!}{(g-d+r+i)!}\, \theta^{(r+1)(g-d+r)}$ est "portée" par W_d^r ce qui implique que W_d^r est non vide, et que si $\dim W_d^r = g - (r+1)(g-d+r)$ alors on a l'égalité (1) du théorème.

La partie (iii) a) a été démontrée pour $r = \sup\{0, d-g+1\} + 1$ et $k = \mathbb{C}$ par R. Lax [18], en 1974, qui s'appuie sur les travaux de Meis [27], pour $r = \sup\{0, d-g+1\} + 1$ et k quelconque par H. Martens [21] en 1968 et Laksov [16] en 1975 et récemment pour $r = \sup\{0, d-g+1\} + 2$ par Arbarello et Cornalba [1]. Dans le cas général le pas crucial a été fait par Kleiman [13] qui développant une idée de Severi [30] utilise une méthode de dégénération de Castelnuovo [6] pour ramener (iii) a) à la conjecture suivante :

Conjecture (Castelnuovo-Severi-Kleiman).— *Soient* d, g, ℓ *trois entiers tels que* $d \geq 1$, $g \geq 0$, $0 \leq \ell < d$, C *une courbe rationnelle normale de degré* d *dans* $\mathbb{P}^d$ *qui n'est contenue dans aucun hyperplan de* $\mathbb{P}^d$. *Alors l'ensemble des sous-espaces projectifs de dimension* ℓ *de* $\mathbb{P}^d$ *qui rencontrent* g *cordes données de* C *en "position générale" est un fermé de la grassmannienne de dimension inférieure ou égale à*

$$\sup\{-1\,,\,(\ell+1)(d-\ell) - g(d-\ell-1)\}\ .$$

Cette conjecture a été démontrée par Griffiths-Harris [9], en 1979, et la conjecture de Brill-Noether (partie (iii) a) du théorème) est ainsi entièrement démontrée. Ils exposent également une méthode plus géométrique que celle de Kleiman pour ramener la conjecture de Brill-Noether à celle de Castelnuovo-Severi-Kleiman. Enfin ils affirment que pour une courbe "générale", W_d^r n'a pas de composantes multiples (du moins en caractéristique zéro) pour sa structure naturelle de schéma, affirmation qu'ils déduisent d'une forme plus fine de la conjecture de Castelnuovo-Severi-Kleiman. Les détails de cette démonstration ne m'étant pas entièrement clairs, je ne parlerais pas de ce point. En fait actuellement on sait démontrer que pour une courbe "générale", W_d^r est réduit [1] et [8].

Une conjecture liée à celle de Brill-Noether est la conjecture de Petri [28] :

Si C *est "générale" et si* D *désigne un diviseur quelconque et* K *un diviseur canonique alors le "cup" produit*

$$\mu_0 : H^0(C, \mathcal{O}_C(D)) \otimes H^0(C, \mathcal{O}_C(K-D)) \longrightarrow H^0(C, \mathcal{O}_C(K))$$

est injectif.

On remarque que si D n'est pas un diviseur spécial, ou si D est un diviseur spécial tel que $r(D) = \sup\{0, d(D)-g+1\}$ l'injectivité de μ_0 est évidente (sans hypothèse sur C). Dans le cas général on démontre que si l'image de D dans la jacobienne est un point de $W_d^r - W_d^{r+1}$, l'espace tangent de Zariski de W_d^r en ce point est égal à $(\mathrm{Im}(\mu_0))^{\perp}$. Par conséquent la conjecture de Petri est équivalente à la conjonction de la conjecture de Brill-Noether et de l'assertion (conjecture de Mayer) :

Si C *est "générale"* W_d^{r+1} *est formé de l'ensemble des points singuliers de* W_d^r .

La conjecture de Mayer a été démontrée pour $r = \sup\{0, d-g+1\} + 1$ par Martens [21], et Arbarello et Cornalba [1] ont démontré directement la conjecture de Petri pour $r(D) = \sup\{0, d(D)-g+1\} + 2$ (c'est ainsi qu'ils ont démontré Brill-Noether dans ce cas). D. Gieseker [8] vient de démontrer la conjecture de Petri dans le cas général en utilisant les méthodes de Griffiths-Harris.

Au § 1 on expose quelques préliminaires, au § 2 on donne une démonstration complète de la conjecture de Castelnuovo-Severi-Kleiman, au § 3 on résume de façon informelle les propriétés des courbes de Castelnuovo et au § 4 on expose brièvement l'idée de la méthode de Griffiths-Harris pour ramener la conjecture de Brill-Noether à celle de Castelnuovo-Severi-Kleiman.

§ 1. Préliminaires

Soient n un entier, $n \geq 1$, C une courbe irréductible dans $\mathbb{P}^n$ (un sous-schéma fermé, irréductible de $\mathbb{P}^n$ de dimension 1) qui n'est contenue (ensemblistement) dans aucun hyperplan de $\mathbb{P}^n$.

On rappelle que le groupe des cycles 1-codimensionnels de C est le groupe libre commutatif $Z^1(C)$, engendré par l'ensemble des points fermés de C , $Z^1(C) = \mathbb{Z}^{(I)}$ où $I = C - \{\eta\}$, η étant le point générique de C , qui est muni naturellement d'une relation d'ordre partiel et qu'on appellera simplement groupe des cycles de C . Si

$$Z = \sum_{p \in C-\{\eta\}} n_p . p$$

est un cycle de C , pour tout point fermé p de C on note $m_p(Z)$ l'entier n_p et on pose

$$d(Z) = \sum_{p \in C-\{\eta\}} m_p(Z)$$

Si C est lisse on rappelle que $Z^1(C)$ s'identifie canoniquement au groupe ordonné de diviseurs de C .

Si H est un hyperplan de $\mathbb{P}^n$, on note C.H le cycle

$$Z = \sum_{p \in C-\{\eta\}} n_p . p$$

de C , où pour tout point fermé p de C , n_p est la multiplicité d'intersection de H avec C en p . Si Λ est un sous-espace projectif de $\mathbb{P}^n$ différent de $\mathbb{P}^n$ on note $C.\Lambda$ le cycle de C défini par

$$C.\Lambda = \inf_{\substack{H \text{ hyperplan de } \mathbb{P}^n \\ \Lambda \subset H}} C.H$$

Réciproquement si Z est un cycle de C on pose

$$\overline{Z} = \bigcap_{\substack{H \text{ hyperplan de } \mathbb{P}^n \\ C.H \geq Z}} H$$

On remarque immédiatement qu'on a $Z \le C.\overline{Z}$ (si $\overline{Z} \neq \mathbb{P}^d$) et $\overline{C.\Lambda} \subset \Lambda$.

PROPOSITION 1.1.— *Soient* C *une courbe projective, lisse, connexe sur* k , D *un diviseur très ample de* C , $\varphi_D : C \hookrightarrow \mathbb{P}^n = |D|^*$ $(n = h^o(D) - 1)$ *le plongement correspondant et* D' *un diviseur positif de* C . *Alors (en identifiant* C *à son image par* φ_D *dans* $\mathbb{P}^n$ *) on a* $\dim(\overline{D'}) = n - h^o(D - D') = h^o(D) - h^o(D - D') - 1$ *et* $C.\overline{D'} = D' + D''$ *où* D'' *est le diviseur de points fixes de* $|D - D'|$ *(* D'' *est la borne inférieure de* $|D - D'|$ *dans l'ensemble ordonné de diviseurs).*

La démonstration (immédiate) de cette proposition est laissée au lecteur.

COROLLAIRE 1.2 (formule de Riemann-Roch géométrique).— *Si* C *est de genre* g , $g \ge 3$, *non hyperelliptique et* $D = K$ *est un diviseur canonique alors*

$$h^o(D') = d(D') - \dim(\overline{D'}) .$$

Démonstration.— Il résulte de la proposition que dans ce cas $\dim(\overline{D'}) = g - 1 - h^o(K - D')$ et le corollaire est une conséquence de la formule de Riemann-Roch.

COROLLAIRE 1.3.— *Si* C *est de genre* 0 *et* D *de degré* d $(d \ge 1)$ *alors* $n = d$ *et*

(i) *si* $d(D') \le d$ *on a* $\dim(\overline{D'}) = d(D') - 1$ *et* $C.\overline{D'} = D'$

(ii) *si* $d(D') > d$ *on a* $\overline{D'} = \mathbb{P}^d$.

§ 2. Démonstration de la conjecture de Castelnuovo-Severi-Kleiman

Dans ce paragraphe C désigne une courbe projective, lisse, connexe de genre 0 , D un diviseur positif de C , de degré d , $d \ge 1$, (qui est très ample), $\varphi_D : C \longrightarrow \mathbb{P}^d = |D|^*$ le plongement correspondant. On identifie C à son image par φ_D . On se fixe un entier k , $0 \le k \le d$, et on désigne par G la grassmannienne $G(k,d)$ des sous-espaces projectifs de dimension k de $\mathbb{P}^d$. On se fixe un point fermé p de C . Pour tout i , $0 \le i \le d$, on pose $V_i = \overline{(i+1)p}$, alors $\dim(V_i) = i$ (corollaire 1.3) et $V = (V_i)_{0 \le i \le d}$ est un drapeau dans $\mathbb{P}^d$ (le drapeau osculateur de C en p). Pour tout indice de Schubert

$$a = (a_0, a_1, \dots, a_k) , \quad d - k \ge a_0 \ge a_1 \ge \dots \ge a_k \ge 0$$

on désigne par $\sigma_a(p)$ le cycle de Schubert $\sigma_a(V)$ dans G :

$$\sigma_a(p) = \{\Lambda \in G : \forall i , 0 \le i \le k , \dim(\Lambda \cap \overline{(d-k+i-a_i+1)p}) \ge i\} .$$

On pose par convention $a_{-1} = d - k$. Pour tout couple de points fermés q et r (non nécessairement distincts) de C on désigne par $\tau(\overline{q+r})$ le cycle de Schubert $\sigma_{d-k-1,0,\dots,0}(V')$ dans G , où $V' = (V'_i)_{0 \le i \le d}$ est un drapeau quelconque dans $\mathbb{P}^d$ tel que V'_1 soit la droite $\overline{q+r}$ (corollaire 1.3) :

$$\tau(\overline{q+r}) = \{\Lambda \in G : \Lambda \cap \overline{q+r} \neq \emptyset\} .$$

Lemme 2.1.— *Soient* q *et* r *deux points fermés (non nécessairement distincts) de* C *, distincts de* p *. Alors*

(i) *Si* $\sigma_a(p) \cap \tau(\overline{q+r}) \neq \emptyset$ *, on a* $a_k = 0$ *ou* $a_k = 1$.

(ii) *Pour tout* Λ *,* $\Lambda \in \sigma_a(p) \cap \tau(\overline{q+r})$ *et tout* i *,* $-1 \leq i \leq k-1$ *, on a*

$$\dim(\Lambda \cap \overline{(d-k+i-a_i+1)p+q+r}) \geq i+1 .$$

Démonstration.— Remarquons d'abord que pour tout d' , $0 \leq d' \leq d-1$, $\overline{q+r} \cap \overline{d'p} = \emptyset$. En effet, pour cela, il suffit de démontrer que $\overline{q+r} \cap \overline{(d-1)p} = \emptyset$. Or, s'il existait s appartenant à $\overline{q+r} \cap \overline{(d-1)p}$ on aurait $s \neq q$ (car $q \neq p$ implique que $q \notin \overline{(d-1)p}$ (corollaire 1.3)) et par conséquent $\overline{q+r}$ serait la droite qui joint q et s et comme $s \in \overline{(d-1)p+q}$ et $q \in \overline{(d-1)p+q}$ on aurait $\overline{q+r} \subset \overline{(d-1)p+q}$ ce qui est absurde (car $r \neq p$ implique $\overline{q+r} \not\subset \overline{(d-1)p+q}$ (corollaire 1.3)).

Cela établi, soit i , $-1 \leq i \leq k$, et supposons d'abord que

$$(1) \qquad d-k+i-a_i+1 \leq d-1 .$$

Alors ce qui précède montre que $\overline{q+r} \cap \overline{(d-k+i-a_i+1)p} = \emptyset$. Par conséquent si $\Lambda \in \sigma_a(p) \cap \tau(\overline{q+r})$ ce qui implique en particulier que $\Lambda \cap \overline{q+r} \neq \emptyset$, il existe η tel que $\eta \in \Lambda \cap \overline{q+r}$ et $\eta \notin \Lambda \cap \overline{(d-k+i-a_i+1)p}$ donc $\dim(\Lambda \cap \overline{(d-k+i-a_i+1)p+q+r}) \geq \dim(\Lambda \cap \overline{(d-k+i-a_i+1)p}) + 1 \geq i+1$ (car $\Lambda \in \sigma_a(p)$). Cela démontre l'assertion (ii) dans la cas où l'inégalité (1) est vérifiée et montre que pour $i = k$ l'inégalité (1) est impossible si $\sigma_a(p) \cap \tau(\overline{q+r}) \neq \emptyset$; donc dans ce cas $d-k+k-a_k+1 > d-1$ c'est-à-dire $a_k < 2$ ce qui démontre l'assertion (i).

Reste à démontrer (ii) pour i , $-1 \leq i \leq k-1$, tel que $d-k+i-a_i+1 > d-1$. Mais alors $\overline{(d-k+i-a_i+1)p+q+r} = \mathbb{P}^d$ (corollaire 1.3) donc $\dim(\Lambda \cap \overline{(d-k+i-a_i+1)p+q+r}) = k \geq i+1$ ce qui démontre le lemme.

Notation 2.2.— Pour tout point fermé q de C et tout i_o , $-1 \leq i_o < k$, on pose :

$$W_{i_o}(q) = \left\{ \Lambda \in G : \begin{array}{ll} \dim(\Lambda \cap \overline{(d-k+i-a_i+2)p}) \geq i+1 & -1 \leq i < i_o \\ \dim(\Lambda \cap \overline{(d-k+i_o-a_{i_o}+2)p+q}) \geq i_o+1 & \\ \dim(\Lambda \cap \overline{(d-k+i-a_i+1)p+q}) \geq i+1 & i_o < i < k \end{array} \right\}$$

Remarque 2.3.— On remarque que pour tout i_o , $-1 \leq i_o < k$, tel que $a_{i_o+1} < a_{i_o}$ on a $W_{i_o}(p) = \sigma_{a_{-1},a_o,\ldots,a_{i_o}-1,\ldots,a_{k-1}}(p)$.

Lemme 2.4.— *Soient* q *un point fermé de* C *et* i_o *,* $-1 \leq i_o < k-1$ *, et supposons que* $a_{i_o+1} = a_{i_o}$ *. Alors* $W_{i_o}(q) \subset W_{i_o+1}(q)$.

Démonstration.— Soit $\Lambda \in W_{i_o}(q)$ et démontrons que $\Lambda \in W_{i_o+1}(q)$. Il suffit de démontrer que :

$$(1) \qquad \dim(\Lambda \cap \overline{(d-k+i_o-a_{i_o}+2)p}) \geq i_o+1$$

et

(2) $$\dim(\Lambda \cap \overline{(d-k+i_o+1-a_{i_o+1}+2)p+q}) \geq i_o + 1 + 1$$

Or par l'hypothèse $\Lambda \in W_{i_o}(q)$ comme $i_o + 1 < k$ on a

(3) $$\dim(\Lambda \cap \overline{(d-k+i_o+1-a_{i_o+1}+1)p+q}) \geq i_o + 1 + 1$$

On remarque que (2) est une conséquence immédiate de (3). D'autre part comme $a_{i_o+1} = a_i$, (3) implique que

$$\dim(\Lambda \cap \overline{(d-k+i_o-a_{i_o}+2)p+q}) \geq i_o + 2$$

ce qui implique (1) (corollaire 1.3).

Lemme 2.5.— *Soient* q *un point fermé de* C *différent de* p *et* $\Lambda \in \sigma_a(p)$ *tel que :*

$$\dim(\Lambda \cap \overline{(d-k+i-a_i+2)p+q}) \geq i + 1 \qquad -1 \leq i < k$$

Alors :

(i) *Si* $a_k > 0$, $\Lambda \in \sigma_{a_{-1},a_o,\ldots,a_{k-1}}(p) = \sigma_{d-k,a_o,\ldots,a_{k-1}}(p)$.

(ii) *Si* $a_k = 0$, $\Lambda \in \bigcup_{\substack{-1\leq i<k \\ a_{i+1}<a_i}} W_i(q) \cup \sigma_{a_{-1},a_o,\ldots,a_{k-1}}(p)$.

Démonstration.— Soit $I = \{i \in [-1,k] : \dim(\Lambda \cap \overline{(d-k+i-a_i+2)p}) \leq i\}$. L'ensemble I n'est pas vide car $k \in I$. Soit i_o le plus petit élément de I . On a

(1) $$\dim(\Lambda \cap \overline{(d-k+i-a_i+2)p}) \geq i + 1 \qquad -1 \leq i < i_o .$$

Si $i_o = k$ on en déduit que $\Lambda \in \sigma_{a_{-1},a_o,\ldots,a_{k-1}}(p)$.

On peut donc supposer que $i_o \in [-1 , k-1]$.

Par hypothèse on a alors

(2) $$\dim(\Lambda \cap \overline{(d-k+i_o-a_{i_o}+2)p+q}) \geq i_o + 1$$

et par définition de i_o on a

(3) $$\dim(\Lambda \cap \overline{(d-k+i_o-a_{i_o}+2)p}) \leq i_o .$$

On remarque d'abord que comme $i_o < k$, l'inégalité (3) implique que $\overline{(d-k+i_o-a_{i_o}+2)p} \subsetneq \mathbb{P}^d$ donc (corollaire 1.3)

(4) $$d - k + i_o - a_{i_o} + 2 \leq d$$

et en particulier $\dim\overline{(d-k+i_o-a_{i_o}+2)p} = d-k+i_o-a_{i_o}+1$ (corollaire 1.3) et par conséquent (3) implique que $d-k+i_o-a_{i_o}+1+k-d \leq i_o$ donc

(5) $$a_{i_o} \geq 1 .$$

D'autre part les inégalités (2) et (3) impliquent que

$$(\Lambda \cap \overline{(d-k+i_o-a_{i_o}+2)p+q}) - (\Lambda \cap \overline{(d-k+i_o-a_{i_o}+2)p}) \neq \emptyset .$$

Soit donc t tel que

(6) $$t \in \Lambda , \quad t \in \overline{(d-k+i_o-a_{i_o}+2)p+q} \quad \text{et} \quad t \notin \overline{(d-k+i_o-a_{i_o}+2)p}$$

On remarque que tout sous-espace projectif de $\mathbb{P}^d$ qui contient $\overline{(d-k+i_o-a_{i_o}+2)p}$ et t , contient $\overline{(d-k+i_o-a_{i_o}+2)p+q}$ et en particulier q (corollaire 1.3).

On en déduit que

(7) $$t \notin \overline{d'p} \qquad 0 \leq d' \leq d .$$

En effet il suffit de démontrer que $t \notin \overline{dp}$. Or l'inégalité (4) implique que $\overline{(d-k+i_0-a_{i_0}+2)p} \subset \overline{dp}$ donc si t appartenait à $\overline{dp}$, q appartiendrait aussi à $\overline{dp}$ ce qui est contraire à l'hypothèse $q \neq p$ (corollaire 1.3).

On déduit de (6) et (7) que $\Lambda \not\subset \overline{dp}$ et l'hypothèse $\Lambda \in \sigma_a(p)$ implique que $\Lambda \subset \overline{(d-a_k+1)p}$. On en déduit que

(8) $$a_k = 0$$

ce qui démontre (i).

Soit i tel que $i_0 < i < k$. Alors $d-k+i-a_i+1 \leq d$ donc (7) implique que $t \notin \overline{(d-k+i-a_i+1)p}$. Or $i_0 < i$ implique que $d-k+i-a_i+1 \geq d-k+i_0-a_{i_0}+2$ donc (6) implique que $t \in \overline{(d-k+i-a_i+1)p+q}$

On déduit que

$$\dim(\Lambda \cap \overline{(d-k+i-a_i+1)p+q}) \geq \dim(\Lambda \cap \overline{(d-k+i-a_i+1)p}) + 1$$

et comme l'hypothèse $\Lambda \in \sigma_a(p)$ implique que

$$\dim(\Lambda \cap \overline{(d-k+i-a_i+1)p}) \geq i$$

on déduit que

(9) $$\dim(\Lambda \cap \overline{(d-k+i-a_i+1)p+q}) \geq i+1 \qquad i_0 < i < k .$$

Alors (1), (2) et (9) impliquent que $\Lambda \in W_{i_0}(q)$. Si $i_0 = k-1$, (5) et (8) impliquent que $\Lambda \in \bigcup_{\substack{-1\leq i<k \\ a_{i+1}<a_i}} W_i(q)$. Si $i_0 < k-1$ vu que (3) implique que $\Lambda \notin W_{i_0+1}$, le lemme 2.4 implique que $a_{i_0+1} \neq a_{i_0}$ donc on a aussi $\Lambda \in \bigcup_{\substack{-1\leq i<k \\ a_{i+1}<a_i}} W_i(q)$ ce qui démontre la partie (ii).

THÉORÈME 2.6.— *Soit* g *un entier,* $g \geq 0$ *, et supposons* $k < d$ *. Alors il existe un ouvert non vide* U *de* C^{2g} *(donc dense) tel que pour tout point fermé* $(q_1,r_1,\ldots,q_g,r_g)$ *de* U *on ait*

$$\dim(\sigma_a(p) \cap \tau(\overline{q_1+r_1}) \cap \ldots \cap \tau(\overline{q_g+r_g})) \leq \sup\{-1,(k+1)(d-k) - \sum_{i=0}^{k} a_i - g(d-k-1)\} .$$

Démonstration.— On remarque d'abord que si l'intersection $\sigma_a(p) \cap \tau(\overline{q_1+r_1}) \cap \ldots \cap \tau(\overline{q_g+r_g})$ est non vide, la dimension de chacune de ses composantes irréductibles est supérieure ou égale à

$$\dim(G) - \operatorname{codim}(\sigma_a(p)) - \sum_{i=1}^{g} \operatorname{codim} \tau(\overline{q_i+r_i}) = (k+1)(d-k) - \sum_{i=0}^{k} a_i - g(d-k-1) .$$

D'autre part on constate facilement que l'ensemble

$$\{(\Lambda,q_1,r_1,\ldots,q_g,r_g) \in G \times C^{2g} : \Lambda \in \sigma_a(p) \cap \tau(\overline{q_1+r_1}) \cap \ldots \cap \tau(q_g+r_g)\}$$

est l'ensemble des points fermés d'un sous-schéma fermé T de $G \times C^{2g}$ dont la fibre au dessus d'un point fermé $(q_1,r_1,\ldots,q_g,r_g)$ de C^{2g} est $\sigma_a(p) \cap \tau(\overline{q_1+r_1}) \cap \ldots \cap \tau(\overline{q_g+r_g})$. Le morphisme de projection $T \to C^{2g}$ étant propre, le théorème sera établi si on démontre qu'il existe un point fermé $(q_1,r_1,\dots,q_g,r_g)$ de C^{2g} vérifiant les conditions du théorème.

Nous allons démontrer le théorème par récurrence sur g. Pour $g = 0$ le théorème est trivial et pour $g > 0$ si $a_k > 1$ il est une conséquence immédiate du lemme 2.1. Supposons donc le théorème établi pour g et démontrons le pour $g+1$ en supposant que $a_k = 0$ ou $a_k = 1$. L'intersection d'une famille finie d'ouverts non vides de C^{2g} étant non vide, l'hypothèse de récurrence implique qu'il existe un point fermé $(q_1,r_1,\dots,q_g,r_g)$ de C^{2g} tel que si l'on pose $\tau = \tau(\overline{q_1+r_1}) \cap \dots \cap \tau(\overline{q_g+r_g})$, pour tout indice de Schubert

$$b = (b_0,b_1,\dots,b_k) \qquad d-k \geq b_0 \geq b_1 \geq \dots \geq b_k \geq 0$$

on ait

$$\dim(\sigma_b(p) \cap \tau) \leq \sup\{-1\,,\,(k+1)(d-k) - \sum_{i=0}^{k} b_i - g(d-k-1)\}\ .$$

Considérons l'ensemble

$$\{(\Lambda,q,r) \in G \times (C-\{p\}) \times (C-\{p\}) : \Lambda \in \sigma_a(p) \cap \tau(\overline{q+r})\}\ .$$

Il est facile de constater qu'il est l'ensemble des points fermés d'un sous-schéma fermé Σ de $G \times (C-\{p\}) \times (C-\{p\})$ dont la fibre $\Sigma(q,r)$ au dessus d'un point fermé (q,r) de $(C-\{p\}) \times (C-\{p\})$ est $\sigma_a(p) \cap \tau(\overline{q+r})$. Soit $\overline{\Sigma}$ l'adhérence schématique de Σ dans $G \times (C-\{p\}) \times C$ et $\pi : \overline{\Sigma} \longrightarrow (C-\{p\}) \times C$ la projection. Pour tout point fermé (q,r) de $C-\{p\} \times C$ on désigne par $\overline{\Sigma}(q,r)$ la fibre de $\overline{\Sigma}$ au dessus de (q,r) ($\overline{\Sigma}(q,r) = \pi^{-1}(q,r)$) et si $r \neq p$ on a $\overline{\Sigma}(q,r) = \Sigma(q,r)$. On pose $\Sigma' = \pi^{-1}((C-\{p\}) \times \{p\})$; Σ' est un sous-schéma fermé de $G \times (C-\{p\})$. Soit $\overline{\Sigma}'$ l'adhérence schématique de Σ' dans $G \times C$, et $\pi' : \overline{\Sigma}' \to C$ la projection. Pour tout point fermé q de C (resp. de $C-\{p\}$) on note $\overline{\Sigma}'(q)$ (resp. $\Sigma'(q)$) la fibre de $\overline{\Sigma}'$ (resp. Σ') au dessus de q ; si $q \neq p$ on a $\overline{\Sigma}'(q) = \Sigma'(q) = \overline{\Sigma}(q,p)$.

Or si (Λ,q,r) est un point fermé de Σ, $\Lambda \in \sigma_a(p) \cap \tau(\overline{q+r})$ et le lemme 2.1 implique que

$$\dim(\Lambda \cap \overline{(d-k+i-a_i+1)p+q+r}) \geq i+1 \qquad -1 \leq i \leq k-1\ .$$

Comme il s'agit des conditions fermées on déduit que si (Λ,q) est un point fermé de Σ' (c'est-à-dire si (Λ,q,p) est un point fermé de $\overline{\Sigma}$) alors $\Lambda \in \sigma_a(p)$ et

$$\dim(\Lambda \cap \overline{(d-k+i-a_i+2)p+q}) \geq i+1 \qquad -1 \leq i \leq k-1\ .$$

Alors le lemme 2.5 implique que :

(i) Si $a_k = 1$ alors $\Lambda \in \sigma_{a_{-1},a_0,\dots,a_{k-1}}(p)$.

(ii) Si $a_k = 0$ alors $\Lambda \in \bigcup_{\substack{-1\leq i<k \\ a_{i+1}<a_i}} W_i(q) \cup \sigma_{a_{-1},a_0,\dots,a_{k-1}}(p)$.

Comme il s'agit de nouveau des conditions fermées on déduit que si Λ est un point fermé de $\overline{\Sigma}'(p)$ alors :

(i) Si $a_k = 1$ alors $\Lambda \in \sigma_{a_{-1},a_0,..,a_{k-1}}(p)$

(ii) Si $a_k = 0$ alors $\Lambda \in \bigcup_{\substack{-1\le i<k \\ a_{i+1}<a_i}} W_i(p) \cup \sigma_{a_{-1},a_0,\dots,a_{k-1}}(p) =$

$$= \bigcup_{\substack{-1\le i<k \\ a_{i+1}<a_i}} \sigma_{a_{-1},a_0,\dots,a_i-1,\dots,a_{k-1}}(p) \cup \sigma_{a_{-1},a_0,\dots,a_{k-1}}(p) \quad \text{(remarque 2.3)}$$

Or $a_k = 0$ et $k < d$ impliquent que

$$\sigma_{a_{-1},a_0,\dots,a_{k-1}}(p) \subset \bigcup_{\substack{-1\le i<k \\ a_{i+1}<a_i}} \sigma_{a_{-1},a_0,\dots,a_i-1,\dots,a_{k-1}}(p)$$

On a donc les inclusions ensemblistes :

(i) Si $a_k = 1$ alors $\overline{\Sigma}'(p) \subset \sigma_{a_{-1},a_0,\dots,a_{k-1}}(p)$.

(ii) Si $a_k = 0$ alors $\overline{\Sigma}'(p) \subset \bigcup_{\substack{-1\le i<k \\ a_{i+1}<a_i}} \sigma_{a_{-1},a_0,\dots,a_i-1,\dots,a_{k-1}}(p)$.

On en déduit que si $a_k = 1$

$$\dim(\overline{\Sigma}'(p) \cap \tau) \le \dim(\sigma_{a_{-1},a_0,\dots,a_{k-1}}(p) \cap \tau)$$

et par l'hypothèse de récurrence

$$\dim(\sigma_{a_{-1},a_0,\dots,a_{k-1}}(p) \cap \tau) \le \sup\{-1,(k+1)(d-k) - \sum_{i=-1}^{k-1} a_i - g(d-k-1)\} =$$

$$= \sup\{-1,(k+1)(d-k) - \sum_{i=0}^{k} a_i - (g+1)(d-k-1)\} .$$

De même si $a_k = 0$

$$\dim(\overline{\Sigma}'(p) \cap \tau) \le \sup_{\substack{-1\le i<k \\ a_{i+1}<a_i}} \dim(\sigma_{a_{-1},a_0,\dots,a_i-1,\dots,a_{k-1}}(p) \cap \tau)$$

et par l'hypothèse de récurrence pour tout i , $-1 \le i < k$, tel que $a_{i+1} < a_i$

$$\dim(\sigma_{a_{-1},a_0,\dots,a_i-1,\dots,a_{k-1}}(p) \cap \tau) \le \sup\{-1,(k+1)(d-k) - (\sum_{i=-1}^{k-1} a_i - 1) - g(d-k-1)\} =$$

$$= \sup\{-1,(k+1)(d-k) - \sum_{i=0}^{k} a_i - (g+1)(d-k-1)\}$$

Dans les deux cas on a donc

$$\dim(\overline{\Sigma}'(p) \cap \tau) \le \sup\{-1,(k+1)(d-k) - \sum_{i=0}^{k} a_i - (g+1)(d-k-1)\} .$$

Le morphisme de projection $\overline{\Sigma}' \cap (\tau \times C) \to C$ étant un morphisme propre et pour tout point fermé q de C la fibre au dessus de q étant égale à $\overline{\Sigma}'(q) \cap \tau$ qui est égale à $\overline{\Sigma}(q,p) \cap \tau$ si $q \neq p$, on déduit qu'il existe un point fermé q de $C - \{p\}$ tel que

$$\dim(\overline{\Sigma}(q,p) \cap \tau) \le \sup\{-1,(k+1)(d-k) - \sum_{i=0}^{k} a_i - (g+1)(d-k-1)\} .$$

De même le morphisme de projection $\overline{\Sigma} \cap (\tau \times (C - \{p\}) \times C) \longrightarrow (C - \{p\}) \times C$ étant propre et pour tout point fermé (q,r) de $(C - \{p\}) \times C$ la fibre au dessus de

(q,r) étant égale à $\overline{\Sigma}(q,r) \cap \tau$ qui est égale à $\sigma_a(p) \cap \tau(\overline{q+r}) \cap \tau$ si $r \neq p$, on déduit qu'il existe un point fermé (q,r) de $(C-\{p\}) \times (C-\{p\})$ tel que

$$\dim(\sigma_a(p) \cap \tau(\overline{q+r}) \cap \tau) \leq \sup\{-1,(k+1)(d-k) - \sum_{i=0}^{k} a_i - (g+1)(d-k-1)\}$$

ce qui démontre le théorème.

§ 3. Courbes de Castelnuovo

Dans ce paragraphe on donnera un apperçu de la théorie des courbes canoniques de Castelnuovo.

Une courbe de Castelnuovo de genre arithmétique g, est obtenue en identifiant g paires de points fermés de $\mathbb{P}^1$. Plus précisément pour tout point fermé $t = (p_1,q_1,\ldots,p_g,q_g)$ de $(\mathbb{P}^1)^{2g}$ tel que l'ensemble $\{p_1,q_1,\ldots,p_g,q_g\}$ soit formé de $2g$ points deux à deux distincts (ce qui revient à dire que t appartient à l'ouvert $(\mathbb{P}^1)^{2g} - \Delta$ de $(\mathbb{P}^1)^{2g}$ où Δ est la réunion de toutes les diagonales partielles de $(\mathbb{P}^1)^{2g}$) on définit une relation d'équivalence R_t sur $\mathbb{P}^1$ par

$$(pR_tq) \Leftrightarrow [(p=q) \text{ ou } (\exists\alpha\ ,\ 1 \leq \alpha \leq g : (p=p_\alpha \text{ et } q=q_\alpha) \text{ ou } (p=q_\alpha \text{ et } q=p_\alpha))]\ ,$$

on munit l'ensemble quotient C_t de la topologie quotient et on définit un faisceau O_{C_t} en posant pour tout ouvert U de C_t

$$\Gamma(U,O_{C_t}) = \{f \in \Gamma(\pi^{-1}(U),O_{\mathbb{P}^1}) : \forall\alpha\ ,\ 1 \leq \alpha \leq g : (p_\alpha \in \pi^{-1}(U) \Rightarrow f(p_\alpha) = f(q_\alpha))\}$$

où $\pi : \mathbb{P}^1 \to C_t$ désigne la surjection canonique. Pour cette structure, C_t est une courbe projective, à g point doubles ordinaires comme seules singularités, dont le normalisé est $\mathbb{P}^1$, appelée courbe de Castelnuovo, et $\pi : \mathbb{P}^1 \to C_t$ est une normalisation de C_t.

On définit le faisceau des différentiels abéliens Ω sur C_t en posant pour tout ouvert U de C_t

$\Gamma(U,\Omega) = \{\omega : \omega$ est une 1-forme méromorphe sur $\pi^{-1}(U)$ qui a au plus des pôles simples sur $\pi^{-1}(U) \cap \{p_1,q_1,\ldots,p_g,q_g\}$ et telle que pour tout α, $1 \leq \alpha \leq g$, tel que $p_\alpha \in \pi^{-1}(U)$ on ait $\mathrm{Res}_{p_\alpha}(\omega) + \mathrm{Res}_{q_\alpha}(\omega) = 0\}$.

Le faisceau Ω est un O_{C_t}-module inversible tel que $h^0(\Omega) = g$ et il est très ample sauf s'il existe une involution u de $\mathbb{P}^1$ (un automorphisme tel que $u^2 = \mathrm{id}_{\mathbb{P}^1}$) telle que pour tout α, $1 \leq \alpha \leq g$, $u(p_\alpha) = q_\alpha$, auquel cas on dit que C_t est hyperelliptique. Autrement dit, si G désigne le groupe des involutions de $\mathbb{P}^1$,

$$\Phi : G \times (\mathbb{P}^1)^g \longrightarrow (\mathbb{P}^1)^{2g}$$

le morphisme défini par

$$\Phi(u,p_1,\ldots,p_g) = (p_1,u(p_1),\ldots,p_g,u(p_g))$$

et Z l'image de Φ, alors C_t est hyperelliptique si et seulement si t appartient à Z. Or Z est un fermé de $(\mathbb{P}^1)^{2g}$, Φ est injectif pour $g \geq 2$ et

$\dim(G) = 2$, donc pour $g \geq 2$, $\dim(Z) = g + 2$ ce qui prouve que pour $g \geq 3$, Z est un fermé d'intérieur vide de $(\mathbb{P}^1)^{2g}$ (pour $g \geq 3$ une courbe de Castelnuovo "générale" est non-hyperelliptique). Si C_t est une courbe de Castelnuovo non hyperelliptique on appelle plongement canonique de C_t dans $\mathbb{P}^{g-1}$ l'immersion fermée $\varphi_\Omega : C_t \hookrightarrow \mathbb{P}^{g-1}$ définie par Ω . En termes de coordonnées, si x est une coordonnée affine de $\mathbb{P}^1$ telle que pour tout α , $1 \leq \alpha \leq g$, $\lambda_\alpha = x(p_\alpha)$ et $\lambda'_\alpha = x(q_\alpha)$ soient finis et si on pose $\omega_\alpha = \dfrac{dx}{(x-\lambda_\alpha)(x-\lambda'_\alpha)}$ alors $(\omega_\alpha)_{1\leq\alpha\leq g}$ est une base de $H^0(C_t,\Omega)$ et si C_t n'est pas hyperelliptique le plongement canonique φ_Ω est donné par $\varphi_\Omega(x) = (\omega_1(x),\ldots,\omega_g(x))$.

Soit D un diviseur de C_t . On note, comme dans le cas de courbes normales, $|D|$ l'espace projectif des diviseurs positifs de C_t linéairement équivalents à D , $d(D)$ le degré de D et $r(D)$ la dimension de $|D|$ et on a une formule de Riemann-Roch géométrique :

PROPOSITION 3.1.— *Soient* $C_t \hookrightarrow \mathbb{P}^{g-1}$ *une courbe de Castelnuovo de genre arithmétique* $g \geq 3$ *, non hyperelliptique canoniquement plongée dans* $\mathbb{P}^{g-1}$ *et* D *un diviseur positif de* C_t *de degré* d *dont le support ne rencontre pas les points doubles de* C_t *. Alors on a*

$$\dim(\overline{D}) = d - 1 - r(D)$$

Pour terminer notre discussion de courbes de Castelnuovo nous allons étudier les diviseurs spéciaux de ces courbes.

Pour tout couple d'entiers d et r , tels que $0 \leq d \leq 2g-2$ et $\sup\{0 , d-g+1\} \leq r$, on note J^r_d l'ensemble des classes (dans la jacobienne généralisée de C_t) de diviseurs positifs de degré d , dont le support ne rencontre pas les points doubles de C_t , tels que $r(D) \geq r$. L'ensemble J^r_d est une partie localement fermée de la jacobienne (généralisée) de C_t .

Pour étudier les séries linéaires $|D|$ où D est un diviseur positif de degré d , $d > 0$, de C_t dont le support ne rencontre pas les points doubles de C_t on considère la normalisation $\pi : \mathbb{P}^1 \to C_t$ et on suppose $\mathbb{P}^1$ plongé dans $\mathbb{P}^d$ par l'immersion fermée correspondant à un diviseur de degré d de $\mathbb{P}^1$. Alors $\widetilde{D} = \pi^{-1}(D)$ est un diviseur positif de degré d de $\mathbb{P}^1$ et $\overline{\widetilde{D}}$ est un hyperplan de $\mathbb{P}^d$ tel que $(\mathbb{P}^1.\overline{\widetilde{D}}) = \widetilde{D}$. Comme le support de D ne rencontre pas les points doubles de C_t , le support de $\widetilde{D}$ ne rencontre pas l'ensemble $\{p_1,q_1,\ldots,p_g,q_g\}$ et pour tout α , $1 \leq \alpha \leq g$, $\overline{\widetilde{D}} \cap \overline{p_\alpha + q_\alpha} = \{r_\alpha\}$ où $r_\alpha \neq p_\alpha$ et $r_\alpha \neq q_\alpha$. Si D' est un diviseur positif de C_t linéairement équivalent à D il existe une fonction méromorphe f sur C_t telle que $D' = D + \mathrm{div}(f)$. La fonction méromorphe f est régulière aux points doubles de C_t et $\widetilde{f} = f \circ \pi$ est une fonction méromorphe sur $\mathbb{P}_1$ qui n'a pas de pôles aux points de l'ensemble $\{p_1,q_1,\ldots p_g,q_g\}$ et telle que pour tout α , $1 \leq \alpha \leq g$, $\widetilde{f}(p_\alpha) = \widetilde{f}(q_\alpha)$. D'autre part $\widetilde{D}' = \pi^{-1}(D')$ est un diviseur positif de degré d de $\mathbb{P}_1$, linéairement équivalent à $\widetilde{D}$, tel que $\widetilde{D}' = \widetilde{D} + \mathrm{div}(\widetilde{f})$ et $\overline{\widetilde{D}}'$ est un hyperplan de $\mathbb{P}^d$. Si on désigne par L (resp. L')

une équation homogène de l'hyperplan $\tilde{\overline{D}}$ (resp. $\tilde{\overline{D}}'$), on a $\tilde{f} = \lambda \frac{L'}{L}$ où λ est une constante différente de 0 et pour tout α , $1 \leq \alpha \leq g$, les égalités $\tilde{f}(p_\alpha) = \tilde{f}(q_\alpha)$ et $L(r_\alpha) = 0$ impliquent que $L'(r_\alpha) = 0$ donc que $\tilde{\overline{D}}'$ passe aussi par r_α . On déduit que l'ensemble $|D|$ est en bijection (par l'application $D' \longmapsto \tilde{\overline{D}}'$) avec l'ensemble des hyperplans de $\mathbb{P}^d$ qui contiennent un sous-espace projectif Λ de $\mathbb{P}^d$ ($\Lambda = \bigcap_{D' \in |D|} \tilde{\overline{D}}'$) de dimension $d - r(D) - 1$ qui rencontre, pour tout α , $1 \leq \alpha \leq g$, la droite $\overline{p_\alpha + q_\alpha}$ (au point r_α). On déduit donc une application

$$\Psi : J^r_d \longrightarrow G(d - r - 1 , d)$$

(application qui associe Λ à la classe de D) qui est un morphisme injectif dont l'image est contenue dans

$$\tau(\overline{p_1 + q_1}) \cap \ldots \cap \tau(\overline{p_g + q_g}) \ .$$

Or le théorème 2.6 affirme l'existence d'un ouvert dense U de C^{2g} tel que si $t \in U$

$$\begin{aligned}\dim(\tau(\overline{p_1 + q_1}) \cap \ldots \cap \tau(\overline{p_g + q_g})) &\leq \sup\{-1, ((d-r-1) + 1)(d - (d-r-1)) - g(d - (d-r-1) - 1)\} = \\ &= \sup\{-1 \, , g - (r + 1)(g - d + r)\}\end{aligned}$$

on a donc la proposition

PROPOSITION 3.2.— *Il existe un ouvert dense* U *de* C^{2g} *tel que si* $t \in U$ *on a*

$$\dim(J^r_d) \leq \sup\{-1 \, , g - (r + 1)(g - d + r)\} \ .$$

§ 4. Réduction de la conjecture de Brill-Noether à celle de Castelnuovo-Severi-Kleiman

Dans ce paragraphe nous allons exposer l'idée de la méthode de Griffiths-Harris pour ramener la conjecture de Brill-Noether à celle de Castelnuovo-Severi-Kleiman.

Le point de départ est la formule de Riemann-Roch géométrique (corollaire 1.2) :

Si C est une courbe (projective, lisse, connexe) de genre g , $g \geq 3$, non hyperelliptique, plongée canoniquement dans $\mathbb{P}^{g-1}$, D un diviseur positif de C de degré d et de dimension projective $r(D) = r$ alors

$$\dim(\overline{D}) = d - r - 1$$

et $C.\overline{D} \geq D$ (si $\overline{D} \neq \mathbb{P}^{g-1}$).

Alors si on considère la grassmannienne $G(d - r - 1 , g - 1)$ et si on suppose que $0 \leq d \leq 2g - 2$ et $\sup\{0 , d - g + 1\} \leq r$ l'application

$$\varphi : C^r_d - C^{r+1}_d \longrightarrow G(d - r - 1 , g - 1)$$

définie par $\varphi(D) = \overline{D}$, est un morphisme quasi-fini dont l'image est contenue dans le fermé

$$G^r_d = \{\Lambda : G(d - r - 1 , g - 1) : d(C.\Lambda) \geq d\}$$

de la grassmannienne.

Alors la conjecture de Brill-Noether est ramenée à l'assertion suivante :

(*) *Pour tout couple d'entiers* d *et* r *tels que* $0 \leq d \leq 2g-2$ *et* $\sup\{0, d-g+1\} \leq r \leq d$, *si* C *est "générale" on a :*

$$\dim(G_d^r) \leq \sup\{-1, g-(r+1)(g-d+r)+r\} .$$

En effet comme on sait que pour $r' > \frac{d}{2}$ on a $C_d^{r'} = \emptyset$ on déduit que :

$$C_d^r = \bigcup_{r \leq r' \leq d/2} (C_d^{r'} - C_d^{r'+1}) .$$

Donc l'assertion (*), le fait que φ est quasi-fini et la remarque que $g-(r+1)(g-d+r)+r$ est une fonction décroissante de r , pour $r \geq d-g+1$ et g et d constants, impliquent que :

$$\dim(C_d^r) \leq \sup\{-1, g-(r+1)(g-d+r)+r\} .$$

Les fibres du morphisme $C_d^r \to W_d^r$ étant de dimension supérieure ou égale à r on déduit que :

$$\dim(W_d^r) \leq \sup\{-1, g-(r+1)(g-d+r)\}$$

et comme on sait déjà que :

$$\dim(W_d^r) \geq \sup\{-1, g-(r+1)(g-d+r)\}$$

([20], [11], [14], [15]) on déduit l'égalité :

$$\dim(W_d^r) = \sup\{-1, g-(r+1)(g-d+r)\} .$$

Pour démontrer l'assertion (*) on remarque qu'il suffit de la démontrer pour une seule courbe C . En effet les G_d^r peuvent être considérés comme les fibres d'un schéma propre au dessus de l'ouvert V de M_g formé des courbes non-hyperelliptiques (plus exactement ce schéma existe uniquement localement pour la topologie étale sur V).

D'autre part, on sait que pour toute courbe de Castelnuovo "générale" C_t , de genre arithmétique g , $g \geq 3$, il existe un schéma algébrique X de dimension 1 , un sous-schéma fermé $\mathscr{C}$ de $X \times \mathbb{P}^{g-1}$, π-plat, où π désigne la projection $\pi : X \times \mathbb{P}^{g-1} \longrightarrow X$, et un point fermé x_0 de X , tels que la fibre au dessus de x_0 soit C_t canoniquement plongée dans $\mathbb{P}^{g-1}$ et pour tout point fermé x de X , différent de x_0 , la fibre au dessus de x soit une courbe lisse connexe de genre g canoniquement plongée dans $\mathbb{P}^{g-1}$ [13]. Pour tout couple d'entiers d et r , tels que

$$0 \leq d \leq 2g-2 \quad \text{et} \quad \sup\{0, d-g+1\} \leq r \leq d$$

l'ensemble :

$$\{(\Lambda, x) \in G(d-r-1, g-1) \times (X - \{x_0\}) : d(\mathscr{C}(x).\Lambda) \geq d\}$$

où $\mathscr{C}(x)$ désigne la fibre de $\mathscr{C}$ au dessus de x) est l'ensemble des points fermés d'un sous-schéma fermé Σ_d^r de $G(d-r-1, g-1) \times (X - \{x_0\})$. Soit $\overline{\Sigma_d^r}$ l'adhérence shématique de Σ_d^r dans $G(d-r-1, g-1) \times X$. La projection $\overline{\Sigma_d^r} \longrightarrow X$ étant un morphisme propre, pour démontrer l'assertion (*) pour la fibre "générale" de $\mathcal{E}$ il suffit de démontrer que :

$$\dim(\overline{\Sigma^r_d}(x_0)) \leq \sup\{-1\ ,\ g-(r+1)(g-d+r)+r\}$$

(où $\overline{\Sigma^r_d}(x_0)$ désigne la fibre de $\overline{\Sigma^r_d}$ au dessus de x_0). Cela n'est pas possible directement mais Griffiths et Harris arrivent au résultat voulu en étudiant simultanément $\overline{\Sigma^r_d}$ et $\overline{\Sigma^{r-d+g-1}_{2g-2-d}}$ (qui correspond aux séries linéaires duales) et ramènent l'assertion (*) au lemme suivant :

Lemme 4.1.— *Soient* $C_t \hookrightarrow \mathbb{P}^{g-1}$ *une courbe de Castelnuovo "générale" de genre arithmétique* g *,* $g \geq 3$ *, canoniquement plongée dans* $\mathbb{P}^{g-1}$ *et* d *,* δ *,* r *trois entiers tels que*

$$0 \leq d \leq 2g-2 \quad , \quad \sup\{0\ ,\ d-g+1\} \leq r \leq d \quad , \quad 0 \leq \delta \leq d-r$$

(ce qui implique que $\delta < g$ *). Alors l'ensemble des sous-espaces projectifs* Λ *de* $\mathbb{P}^{g-1}$ *de dimension* $d-r-1$ *qui rencontrent exactement* δ *points doubles de* C_t *et tels que* $d(C_t.\Lambda) \geq d+\delta$ *, est l'ensemble des points fermés d'une partie localement fermée de la grassmannienne* $G(d-r-1\ ,\ g-1)$ *de dimension inférieure ou égale à*

$$\sup\{-1\ ,\ g-(r+1)(g-d+r)+r-\delta\}\ .$$

Démonstration.— En remarquant que, C_t étant "générale", la projection de $\mathbb{P}^{g-1}-\mathbb{P}^{\delta-1}$ sur $\mathbb{P}^{g-1-\delta}$, définie par le sous-espace projectif $\mathbb{P}^{\delta-1}$ de $\mathbb{P}^{g-1}$ engendré par δ points doubles de C_t , projette C_t sur une courbe de Castelnuovo "générale" $\overline{C_t}$, de genre arithmétique $g-\delta$, plongée canoniquement dans $\mathbb{P}^{g-1-\delta}$, et projette bijectivement l'ensemble des sous-espaces projectifs Λ de $\mathbb{P}^g$, de dimension $d-r-1$, qui passent par ces δ points doubles de C_t et seulement par ceux-là, et tels que $d(C_t.\Lambda) \geq d+\delta$, sur l'ensemble des sous-espaces projectifs $\overline{\Lambda}$ de $\mathbb{P}^{g-\delta-1}$, de dimension $d-r-\delta-1$, qui ne rencontrent pas les points doubles de $\overline{C_t}$, et tels que $d(\overline{C_t}.\overline{\Lambda}) \geq d-\delta$, et vu que

$$g-\delta-(r+1)[(g-\delta)-(d-\delta)+r]+r = g-(r+1)(g-d-r)+r-\delta$$

on voit qu'il suffit de démontrer le lemme pour $\delta = 0$.

Démontrons le lemme pour $\delta = 0$. Soit Λ un sous-espace projectif de $\mathbb{P}^{g-1}$, de dimension $d-r-1$, qui ne rencontre pas les points doubles de C_t et tel que $d(C_t.\Lambda) \geq d$. Alors, il existe un diviseur positif D de C_t , de degré d , dont le support ne rencontre pas les points doubles de C_t et tel que $D \leq C_t.\Lambda$, ce qui implique que $\overline{D} \subset \Lambda$. Soit ε la codimension de $\overline{D}$ dans Λ ($0 \leq \varepsilon \leq d-r-1$ et $\dim(\overline{D}) = d-r-1-\varepsilon$). Alors, la formule de Riemann-Roch géométrique pour les courbes de Castelnuovo (prop. 3.1) implique que $r(D) = d-1-\dim(\overline{D}) = r+\varepsilon$, ce qui prouve que la classe de D dans la jacobienne généralisée J de C_t appartient à $J^{r+\varepsilon}_d - J^{r+\varepsilon+1}_d$ (cf. notation § 3).

Posons $C^*_t = C_t - \{p_1,\ldots,p_g\}$, où $\{p_1,\ldots,p_g\}$ est l'ensemble des points doubles de C_t , et notons $\pi : (C_t^*)^d \to J$ le morphisme qui associe à un point fermé $(r_1, \dots, r_d)$ de $(C_t^*)^d$ la classe du diviseur $r_1 + \dots + r_d$,

$$\nu : \pi^{-1}(J_d^{r+\varepsilon} - J_d^{r+\varepsilon+1}) \longrightarrow G(d-r-\varepsilon-1\,,\,g-1)$$

le morphisme qui associe à un point fermé $(r_1,\dots,r_d)$ de $\pi^{-1}(J_d^{r+\varepsilon} - J_d^{r+\varepsilon+1})$ le sous-espace projectif $\overline{r_1 + \dots + r_d}$ de $\mathbb{P}^{g-1}$ (qui est de dimension $d-r-\varepsilon-1$ (prop 3.1)), T le sous-schéma fermé de $G(d-r-\varepsilon-1\,,\,g-1) \times G(d-r-1\,,\,g-1)$ dont l'ensemble des points fermés est égal à :

$$\{(\Lambda',\Lambda) \in G(d-r-\varepsilon-1\,,\,g-1) \times G(d-r-1\,,\,g-1) \;:\; \Lambda' \subset \Lambda\}\ ,$$

$s_1 : T \to G(d-r-\varepsilon-1\,,\,g-1)$ et $s_2 : T \to G(d-r-1\,,\,g-1)$ les projections. En utilisant ces notations, ce qu'on vient de démontrer peut s'exprimer en disant que l'ensemble des sous-espaces projectifs Λ de $\mathbb{P}^{g-1}$, de dimension $d-r-1$, qui ne rencontrent pas les points doubles de C_t et tels que $(C_t.\Lambda) \geq d$ est contenu dans l'ensemble :

$$\bigcup_{0\leq\varepsilon\leq d-r-1} s_2(s_1^{-1}(\nu(\pi^{-1}(J_d^{r+\varepsilon} - J_d^{r+\varepsilon+1}))))\ .$$

Or $\dim(J_d^{r+\varepsilon}) \leq \sup\{-1\,,\,g-(r+\varepsilon+1)(g-d+r+\varepsilon)\}$ (prop. 3.2), la dimension des fibres du morphisme

$$\pi \mid \pi^{-1}(J_d^{r+\varepsilon} - J_d^{r+\varepsilon+1}) \;:\; \pi^{-1}(J_d^{r+\varepsilon} - J_d^{r+\varepsilon+1}) \longrightarrow J_d^{r+\varepsilon} - J_d^{r+\varepsilon+1}$$

est égale à $r+\varepsilon$ et il est facile de voir que les fibres du morphisme s_1 sont de dimension $\varepsilon(g-d+r)$. On déduit donc que

$$\begin{aligned}
\dim\Big(\bigcup_{0\leq\varepsilon\leq d-r-1} & s_2(s_1^{-1}(\nu(\pi^{-1}(J_d^{r+\varepsilon} - J_d^{r+\varepsilon+1}))))\Big) \leq \\
&\leq \sup_{0\leq\varepsilon\leq d-r-1} \sup\{-1\,,\,g-(r+\varepsilon+1)(g-d+r+\varepsilon)+r+\varepsilon+\varepsilon(g-d+r)\} = \\
&= \sup_{0\leq\varepsilon\leq d-r-1} \sup\{-1\,,\,g-(r+1)(g-d+r)+r-\varepsilon(r+\varepsilon)\} = \\
&= \sup\{-1\,,\,g-(r+1)(g-d+r)+r\}
\end{aligned}$$

ce qui démontre le lemme.

BIBLIOGRAPHIE

[1] E. ARBARELLO et M. CORNALBA - *Su una conjettura di Petri*, à paraître dans Comm. Math. Helv.

[2] E. ARBARELLO et M. CORNALBA - *Su una proprietà notevole dei morfismi di una curva a moduli generali in uno spazio proiettivo*, à paraître.

[3] E. ARBARELLO, M. CORNALBA, P. GRIFFITHS et J. HARRIS - *Special divisors on algebraic curves*, à paraître.

[4] E. ARBARELLO et E. SERNESI - *Petri's approach to the study of the ideal associated to a special divisor*, Invent. Math. 49(1978), 99-119.

[5] A. BRILL et M. NOETHER - *Über die algebraischen Functionen und ihre Anwendungen in der Geometrie*, Math. Ann. 7(1874), 269-310.

[6] G. CASTELNUOVO - *Numero delle involutione rationali giancenti sopra una curva di dato genere*, Rend. della R. Acad. Lincei, ser. 4,5(1889).

[7] H.M. FARKAS - *Special divisors and analytic subloci of the Teichmüller space*, Amer. J. Math. 88(1966), 881-901.

[8] D. GIESEKER - *Stable curves and special divisors : Petri's conjecture*, à paraître.

[9] P. GRIFFITHS et J. HARRIS - *On the variety of special linear systems on a general algebraic curve*, Duke Math. J. 47,1(1980), 233-272.

[10] R.C. GUNNING - *Jacobi varieties*, Princeton Univ. Press, Princeton, N.J. (1972).

[11] G. KEMPF - *Schubert methods with an application to algebraic curves*, Publ. Math. Centrum, Amsterdam (1971).

[12] G. KEMPF - *On the geometry of a theorem of Riemann*, Ann. of Math. 98(1973), 178-185.

[13] S. KLEIMAN - r-*special subschemes and an argument of Severi's*, Advances in Math. 22(1976), 1-23.

[14] S. KLEIMAN et D. LAKSOV - *On the existence of special divisors*, Amer. J. Math. 94(1972), 431-436.

[15] S. KLEIMAN et D. LAKSOV - *Another proof of the existence of special divisors*, Acta Math. 132(1974), 163-176.

[16] D. LAKSOV - Appendice à l'article [13] de Kleiman, Advances in Math. 22(1976), 23-31.

[17] R.F. LAX - *On the dimension of varieties of special divisors*, Trans. Amer. Math. Soc. 203(1975), 141-159.

[18] R.F. LAX - *On the dimension of varieties of special divisors* II , Ill. J. of Math. 19(1975), 318-324.

[19] I.G. MACDONALD - *Symmetric products of an algebraic curve*, Topology 1(1962), 319-343.

[20] H.H. MARTENS - *On the varieties of special divisors on a curve,* Jour. Reine Angew. Math. 227(1967), 111-120.

[21] H.H. MARTENS - *Varieties of special divisors on a curve* II , Jour. Reine Angew. Math. 233(1968), 89-100.

[22] H.H. MARTENS - *From the classical theory of jacobian varieties,* Proceedings of the 15th Scandinavian Congress Oslo 1968, Lect. Notes in Math. 118, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, (1970), 74-98.

[23] A. MATTUCK - *Symmetric products and jacobians,* Amer. J. Math. 83(1961), 189-206.

[24] A. MATTUCK - *On symmetric products of curves,* Proc. Amer. Math. Soc. 13(1962), 82-87.

[25] A. MATTUCK - *Secant bundles on symmetric products,* Amer. J. Math. 87(1965), 779-797.

[26] A.L. MAYER - *Special divisors and the jacobian variety,* Math. Annalen 153(1964), 163-167.

[27] T. MEIS - *Die minimale Blätterzahl der Konkretisierung einer kompakten Riemannschen Fläche,* Schriftenreihe des Mathematischen Instituts, Heft 16, Univ. Münster (1960).

[28] K. PETRI - *Über Spezialkurven* I , Math. Ann. 93(1924), 182-209.

[29] R.L.E. SCHWARZENBERGER - *Jacobians and symmetric products,* Ill. J. of Math. 7(1963), 257-268.

[30] F. SEVERI - *Vorlesungen über algebraische Geometrie,* Teubner, Leipzig (1921), Anhang G.

[31] L. SZPIRO - *Travaux de Kempf, Kleiman, Laksov sur les diviseurs exceptionnels,* Sém. Bourbaki 24e année, Exposé 417(1971-72).

Je viens de recevoir un preprint de William FULTON et Robert LAZARSFELD : *On the connectedness of degeneracy loci and special divisors* ; ils démontrent que si $g-(r+1)(g-d+r) > 0$ alors W_d^r est connexe pour une courbe quelconque et irréductible pour une courbe générale.

Georges MALTSINIOTIS

E.R.A. 589 C.N.R.S.
Ecole Normale Supérieure
Centre de Mathématiques
45 rue d'Ulm
F-75230 PARIS CEDEX 05