LE THÉORÈME DE QUILLEN, D'ADJONCTION DES FONCTEURS DÉRIVÉS, REVISITÉ

par

Georges MALTSINIOTIS

Résumé. — Le but de cet article est de donner une preuve originale très facile, voire purement formelle, du théorème d'adjonction des foncteurs dérivés, dû à Quillen [**8**], ainsi que de ses variantes et généralisations plus récentes [**3**], [**9**]. Pour cela, on démontre un résultat, encore plus général, d'adjonction des foncteurs dérivés « absolus ». En contraste avec toutes les preuves connues, la démonstration de ce théorème est indépendante de la construction explicite des foncteurs dérivés. La notion de « foncteur dérivé absolu » est une version non additive de celle de « foncteur dérivé partout défini » considérée par Deligne [**1**, Exp. XVII, Déf. 1.2.1].

Abstract. — The aim of this paper is to present a very simple original, purely formal, proof of Quillen's adjunction theorem for derived functors [**8**], and of some more recent variations and generalizations of this theorem [**3**], [**9**]. This is obtained by proving an abstract adjunction theorem for « absolute » derived functors. In contrast with all known proofs, the explicit construction of the derived functors is not used. The « absolute derived functors » are a non-additive generalization of Deligne's « everywhere defined derived functors » [**1**, Exp. XVII, Déf. 1.2.1].

On rappelle que pour toute catégorie $\mathcal{C}$, et toute classe de flèches W de $\mathcal{C}$, il existe, modulo des difficultés ensemblistes, une catégorie $W^{-1}\mathcal{C}$, appelée *localisation de* $\mathcal{C}$ *par* W, et un foncteur $P : \mathcal{C} \to W^{-1}\mathcal{C}$, appelé *foncteur de localisation*, transformant toute flèche de $\mathcal{C}$ appartenant à W en un isomorphisme de $W^{-1}\mathcal{C}$, et universel pour cette propriété : pour toute catégorie $\mathcal{D}$, et tout foncteur $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ tel que $F(W)$ soit contenu dans la classe des isomorphismes de $\mathcal{D}$, il existe un unique foncteur $\widetilde{F} : W^{-1}\mathcal{C} \to \mathcal{D}$ tel que $F = \widetilde{F}P$.

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[d, "P"'] \arrow[dr, "F"] & \\ W^{-1}\mathcal{C} \arrow[r, dashed, "\widetilde{F}"'] & \mathcal{D} \end{tikzcd}$$

***Classification mathématique par sujets* (2000).** — 18A40, 18E35, 18G10, 18G55, 55P60, 55U35.

La catégorie $W^{-1}\mathcal{C}$ est obtenue de $\mathcal{C}$ en inversant formellement les flèches appartenant à W ; elle a les mêmes objets que $\mathcal{C}$, les morphismes étant des classes d'équivalence de « zigzag composables » de morphismes de $\mathcal{C}$, les flèches allant dans le « mauvais sens » appartenant à W (voir [**4**]). La catégorie $W^{-1}\mathcal{C}$ peut ne pas être *localement petite*, autrement dit, la *classe* des flèches d'un objet vers un autre n'est pas en général un *ensemble*. Ce problème peut être contourné en utilisant la théorie des univers de Grothendieck [**1**]. Dans cet article, pour simplifier, on pose la définition suivante.

Définition. — Un *localisateur* est un couple formé d'une catégorie $\mathcal{C}$, et d'une classe W de flèches de $\mathcal{C}$ telles que la catégorie localisée $W^{-1}\mathcal{C}$ soit localement petite.

Exemples. — Si $\mathcal{C}$ est une *petite* catégorie, pour tout ensemble de flèches W de $\mathcal{C}$, le couple $(\mathcal{C}, W)$ est un localisateur. Si $\mathcal{C}$ est une catégorie de modèles au sens de Quillen, et W la classe des équivalences faibles de C, alors $(\mathcal{C}, W)$ est un localisateur [**8**, Ch. I, 1.13, Th. 1′].

Soient $(\mathcal{C}, W)$ un localisateur, $P : \mathcal{C} \to W^{-1}\mathcal{C}$ le foncteur canonique de localisation, et $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ un foncteur. On rappelle qu'un *foncteur dérivé à droite* de F est un couple $(\mathsf{R}F, \alpha)$, où $\mathsf{R}F : W^{-1}\mathcal{C} \to \mathcal{D}$ est un foncteur, et $\alpha : F \to \mathsf{R}F \circ P$ un morphisme de foncteurs,

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[d, "P"'] \arrow[dr, "F"] & \\ W^{-1}\mathcal{C} \arrow[r, "\mathsf{R}F"'] \arrow[ur, phantom, "\not\Downarrow\alpha"] & \mathcal{D} \end{tikzcd}$$

satisfaisant à la propriété universelle suivante. Pour tout foncteur $G : W^{-1}\mathcal{C} \to \mathcal{D}$, et tout morphisme de foncteurs $\gamma : F \to G \circ P$, il existe un unique morphisme de foncteurs $\delta : \mathsf{R}F \to G$ tel que $\gamma = (\delta \star P)\,\alpha$.

$$\begin{tikzcd} F \arrow[d, "\alpha"'] \arrow[dr, "\gamma"] & \\ \mathsf{R}F \circ P \arrow[r, "\delta \star P"'] & G \circ P \end{tikzcd}$$

Cela signifie exactement que le foncteur $\mathsf{R}F$ (muni du morphisme de foncteurs α) est une extension de Kan *à gauche* de F, le long du foncteur de localisation P. On dit que le couple $(\mathsf{R}F, \alpha)$ est un foncteur dérivé à droite *absolu* de F si pour tout foncteur $H : \mathcal{D} \to \mathcal{E}$, le couple $(H \circ \mathsf{R}F, H \star \alpha)$ est un foncteur dérivé à droite de $H \circ F$. Un foncteur dérivé à droite absolu de F est en particulier un foncteur dérivé à droite de F (prendre $H = 1_{\mathcal{D}}$).

Exemple. — Soient $\mathcal{C}$ une catégorie de modèles au sens de Quillen, et $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ un foncteur transformant les équivalences faibles entre objets fibrants de $\mathcal{C}$ en isomorphismes de $\mathcal{D}$. Alors F admet un foncteur dérivé à droite *absolu* $(\mathsf{R}F, \alpha)$. En effet, en vertu de [**8**, Ch. I, 4.2, Prop. 1], F admet un foncteur dérivé à droite $(\mathsf{R}F, \alpha)$ construit comme suit. Pour tout objet X de $\mathcal{C}$, on choisit une résolution fibrante $i_X : X \to X'$, et alors $\mathsf{R}F(X) = F(X')$ et $\alpha_X = F(i_X) : F(X) \to F(X') = \mathsf{R}F(X)$. Comme pour tout foncteur $H : \mathcal{D} \to \mathcal{E}$, le foncteur composé $H \circ F$ transforme les équivalences faibles entre objets fibrants de $\mathcal{C}$ en isomorphismes de $\mathcal{E}$, la même construction fournit un foncteur dérivé à droite du composé $H \circ F$ qui n'est autre que $(H \circ \mathsf{R}F, H \star \alpha)$, ce qui prouve l'assertion.

Soient $(\mathcal{C}, W)$ et $(\mathcal{C}', W')$ deux localisateurs, $P : \mathcal{C} \to W^{-1}\mathcal{C}$ et $P' : \mathcal{C}' \to W'^{-1}\mathcal{C}'$ les foncteurs de localisation, et $F : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ un foncteur. Un *foncteur dérivé total à droite* (resp. *foncteur dérivé total à droite absolu*) de F est un couple $(\underline{\mathsf{R}}F, \alpha)$, formé d'un foncteur $\underline{\mathsf{R}}F : W^{-1}\mathcal{C} \to W'^{-1}\mathcal{C}'$ et d'un morphisme de foncteurs $\alpha : P' \circ F \to \underline{\mathsf{R}}F \circ P$, qui est un foncteur dérivé à droite (resp. un foncteur dérivé à droite absolu) de $P' \circ F$.

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C} \arrow[r, "F"] \arrow[d, "P"'] \arrow[dr, phantom, "\not\Downarrow \alpha"] & \mathcal{C}' \arrow[d, "P'"] \\
W^{-1}\mathcal{C} \arrow[r, "\underline{\mathsf{R}}F"'] & W'^{-1}\mathcal{C}'
\end{tikzcd}$$

Exemple. — Soient $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ deux catégories de modèles au sens de Quillen, et $F : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ un foncteur transformant les équivalences faibles entre objets fibrants de $\mathcal{C}$ en équivalences faibles de $\mathcal{C}'$. Alors F admet un foncteur dérivé total à droite *absolu*. En effet, si P' désigne le foncteur de localisation de $\mathcal{C}$ par ses équivalences faibles, le foncteur $P' \circ F$ transforme les équivalences faibles entre objets fibrants de $\mathcal{C}$ en isomorphismes, et l'assertion est un cas particulier de l'exemple précédent.

Les notions de *foncteur dérivé à gauche*, de *foncteur dérivé à gauche absolu*, de *foncteur dérivé total à gauche*, et de *foncteur dérivé total à gauche absolu* se définissent de façon duale.

Théorème. — *Soient* $(\mathcal{C}, W)$ *et* $(\mathcal{C}', W')$ *deux localisateurs,* $P : \mathcal{C} \to W^{-1}\mathcal{C}$ *et* $P' : \mathcal{C}' \to W'^{-1}\mathcal{C}'$ *les foncteurs de localisation,*

$$F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}' \quad , \qquad G : \mathcal{C}' \longrightarrow \mathcal{C}$$

un couple de foncteurs adjoints, et

$$\varepsilon : F \circ G \longrightarrow 1_{\mathcal{C}'} \quad , \qquad \eta : 1_{\mathcal{C}} \longrightarrow G \circ F$$

les morphismes d'adjonction. On suppose que le foncteur F (resp. G) *admet un foncteur dérivé total à gauche* (resp. *à droite*) *absolu* $(\underline{\mathsf{L}}F, \alpha)$ (resp. $(\underline{\mathsf{R}}G, \beta)$).

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[r, "F"] \arrow[d, "P"'] \arrow[dr, phantom, "\alpha\Nearrow"] & \mathcal{C}' \arrow[d, "P'"] \\ W^{-1}\mathcal{C} \arrow[r, "\underline{\mathsf{L}}F"'] & W'^{-1}\mathcal{C}' \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \mathcal{C}' \arrow[r, "G"] \arrow[d, "P'"'] \arrow[dr, phantom, "\Swarrow\beta"] & \mathcal{C} \arrow[d, "P"] \\ W'^{-1}\mathcal{C}' \arrow[r, "\underline{\mathsf{R}}G"'] & W^{-1}\mathcal{C} \end{tikzcd}$$

Alors les foncteurs

$$\underline{\mathsf{L}}F : W^{-1}\mathcal{C} \longrightarrow W'^{-1}\mathcal{C}' \quad , \qquad \underline{\mathsf{R}}G : W'^{-1}\mathcal{C}' \longrightarrow W^{-1}\mathcal{C}$$

forment un couple de foncteurs adjoints, et on peut choisir les morphismes d'adjonction

$$\underline{\varepsilon} : \underline{\mathsf{L}}F \circ \underline{\mathsf{R}}G \longrightarrow 1_{W'^{-1}\mathcal{C}'} \quad , \qquad \underline{\eta} : 1_{W^{-1}\mathcal{C}} \longrightarrow \underline{\mathsf{R}}G \circ \underline{\mathsf{L}}F$$

de sorte que les deux carrés suivants soient commutatifs.

$$\begin{tikzcd} \underline{\mathsf{L}}F \circ P \circ G \arrow[r, "\underline{\mathsf{L}}F \star \beta"] \arrow[d, "\alpha \star G"'] & \underline{\mathsf{L}}F \circ \underline{\mathsf{R}}G \circ P' \arrow[d, "\underline{\varepsilon} \star P'"] \\ P' \circ F \circ G \arrow[r, "P' \star \varepsilon"'] & P' \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \underline{\mathsf{R}}G \circ P' \circ F & \underline{\mathsf{R}}G \circ \underline{\mathsf{L}}F \circ P \arrow[l, "\underline{\mathsf{R}}G \star \alpha"'] \\ P \circ G \circ F \arrow[u, "\beta \star F"] & P \arrow[l, "P \star \eta"] \arrow[u, "\underline{\eta} \star P"'] \end{tikzcd}$$

Démonstration. — Comme $(\underline{\mathsf{R}}G, \beta)$ (resp. $(\underline{\mathsf{L}}F, \alpha)$) est un foncteur dérivé total à droite (resp. à gauche) absolu de G (resp. de F), autrement dit un foncteur dérivé à droite (resp. à gauche) absolu de $P \circ G$ (resp. de $P' \circ F$), le couple $(\underline{\mathsf{L}}F \circ \underline{\mathsf{R}}G, \underline{\mathsf{L}}F \star \beta)$ (resp. $(\underline{\mathsf{R}}G \circ \underline{\mathsf{L}}F, \underline{\mathsf{R}}G \star \alpha)$) est un foncteur dérivé à droite (resp. à gauche) de $\underline{\mathsf{L}}F \circ P \circ G$ (resp. de $\underline{\mathsf{R}}G \circ P' \circ F$). La propriété universelle de ce foncteur affirme que pour tout foncteur $H' : W'^{-1}\mathcal{C}' \to W'^{-1}\mathcal{C}'$ (resp. $H : W^{-1}\mathcal{C} \to W^{-1}\mathcal{C}$) et tout morphisme de foncteurs $\gamma' : \underline{\mathsf{L}}F \circ P \circ G \to H' \circ P'$ (resp. $\gamma : H \circ P \to \underline{\mathsf{R}}G \circ P' \circ F$), il existe un morphisme de foncteurs unique

$$\delta' : \underline{\mathsf{L}}F \circ \underline{\mathsf{R}}G \longrightarrow H' \qquad (\text{ resp.} \quad \delta : H \longrightarrow \underline{\mathsf{R}}G \circ \underline{\mathsf{L}}F \ )$$

tel que

$$\gamma' = (\delta' \star P')(\underline{\mathsf{L}}F \star \beta) \qquad (\text{ resp.} \quad \gamma = (\underline{\mathsf{R}}G \star \alpha)(\delta \star P) \ ) \quad .$$

En appliquant cette propriété universelle au foncteur $H' = 1_{W'^{-1}\mathcal{C}'}$ (resp. $H = 1_{W^{-1}\mathcal{C}}$) et au morphisme de foncteurs composé

$$\gamma' = (P' \star \varepsilon)(\alpha \star G) : \ \underline{\mathsf{L}}F \circ P \circ G \xrightarrow{\alpha \star G} P' \circ F \circ G \xrightarrow{P' \star \varepsilon} P' = 1_{W'^{-1}\mathcal{C}'} \circ P'$$

(resp. $\gamma = (\beta \star F)(P \star \eta) : \ 1_{W^{-1}\mathcal{C}} \circ P = P \xrightarrow{P \star \eta} P \circ G \circ F \xrightarrow{\beta \star F} \underline{\mathsf{R}}G \circ P' \circ F$),

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{C}' \arrow[d, "P'"'] \arrow[drr, "\underline{\mathsf{L}}F\circ P\circ G"] \arrow[dr, phantom, "\Swarrow\underline{\mathsf{L}}F\star\beta"] & & \\
W'^{-1}\mathcal{C}' \arrow[rr, "\underline{\mathsf{L}}F\circ\underline{\mathsf{R}}G"'] & & W'^{-1}\mathcal{C}'
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\mathcal{C}' \arrow[d, "P'"'] \arrow[drr, "\underline{\mathsf{L}}F\circ P\circ G"] \arrow[dr, phantom, "\Swarrow(P'\star\varepsilon)(\alpha\star G)"] & & \\
W'^{-1}\mathcal{C}' \arrow[rr, "1_{W'^{-1}\mathcal{C}'}"'] & & W'^{-1}\mathcal{C}'
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{C} \arrow[d, "P"'] \arrow[drr, "\underline{\mathsf{R}}G\circ P'\circ F"] \arrow[dr, phantom, "\underline{\mathsf{R}}G\star\alpha\Nearrow"] & & \\
W^{-1}\mathcal{C} \arrow[rr, "\underline{\mathsf{R}}G\circ\underline{\mathsf{L}}F"'] & & W^{-1}\mathcal{C}
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\mathcal{C} \arrow[d, "P"'] \arrow[drr, "\underline{\mathsf{R}}G\circ P'\circ F"] \arrow[dr, phantom, "(\beta\star F)(P\star\eta)\Nearrow"] & & \\
W^{-1}\mathcal{C} \arrow[rr, "1_{W^{-1}\mathcal{C}}"'] & & W^{-1}\mathcal{C}
\end{tikzcd}
$$

on en déduit qu'il existe un morphisme de foncteurs

$$\underline{\varepsilon} : \underline{\mathsf{L}}F\circ\underline{\mathsf{R}}G \longrightarrow 1_{W'^{-1}\mathcal{C}'} \qquad (\text{resp.}\quad \underline{\eta} : 1_{W^{-1}\mathcal{C}} \longrightarrow \underline{\mathsf{R}}G\circ\underline{\mathsf{L}}F\ )$$

tel que

$$(P'\star\varepsilon)(\alpha\star G) = (\underline{\varepsilon}\star P')(\underline{\mathsf{L}}F\star\beta) \qquad (\text{resp.}\quad (\beta\star F)(P\star\eta) = (\underline{\mathsf{R}}G\star\alpha)(\underline{\eta}\star P)\ ),$$

et que ce morphisme est unique.

Pour conclure, il reste à montrer les relations

$$(\underline{\mathsf{R}}G\star\underline{\varepsilon})(\underline{\eta}\star\underline{\mathsf{R}}G) = 1_{\underline{\mathsf{R}}G} \qquad \text{et} \qquad (\underline{\varepsilon}\star\underline{\mathsf{L}}F)(\underline{\mathsf{L}}F\star\underline{\eta}) = 1_{\underline{\mathsf{L}}F} \quad .$$

$$
\begin{tikzcd}
\underline{\mathsf{R}}G \arrow[r, "\underline{\eta}\star\underline{\mathsf{R}}G"] & \underline{\mathsf{R}}G\circ\underline{\mathsf{L}}F\circ\underline{\mathsf{R}}G \arrow[r, "\underline{\mathsf{R}}G\star\underline{\varepsilon}"] & \underline{\mathsf{R}}G
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
\underline{\mathsf{L}}F \arrow[r, "\underline{\mathsf{L}}F\star\underline{\eta}"] & \underline{\mathsf{L}}F\circ\underline{\mathsf{R}}G\circ\underline{\mathsf{L}}F \arrow[r, "\underline{\varepsilon}\star\underline{\mathsf{L}}F"] & \underline{\mathsf{L}}F
\end{tikzcd}
$$

En vertu de la partie unicité de la propriété universelle des foncteurs dérivés, il suffit de montrer que

$$\Big[\big((\underline{\mathsf{R}}G\star\underline{\varepsilon})(\underline{\eta}\star\underline{\mathsf{R}}G)\big)\star P'\Big]\beta = \beta \qquad \text{et} \qquad \alpha\Big[\big((\underline{\varepsilon}\star\underline{\mathsf{L}}F)(\underline{\mathsf{L}}F\star\underline{\eta})\big)\star P\Big] = \alpha \quad .$$

Vérifions par exemple la première de ces deux égalités :

$$\begin{aligned}
&\Big[\big((\underline{\mathsf{R}}G\star\underline{\varepsilon})(\underline{\eta}\star\underline{\mathsf{R}}G)\big)\star P'\Big]\beta = (\underline{\mathsf{R}}G\star\underline{\varepsilon}\star P')(\underline{\eta}\star\underline{\mathsf{R}}G\circ P')\beta = \\
&\quad = (\underline{\mathsf{R}}G\star\underline{\varepsilon}\star P')(\underline{\mathsf{R}}G\circ\underline{\mathsf{L}}F\star\beta)(\underline{\eta}\star P\circ G) = \Big[\underline{\mathsf{R}}G\star\big((\underline{\varepsilon}\star P')(\underline{\mathsf{L}}F\star\beta)\big)\Big](\underline{\eta}\star P\circ G) \\
&\quad = \Big[\underline{\mathsf{R}}G\star\big((P'\star\varepsilon)(\alpha\star G)\big)\Big](\underline{\eta}\star P\circ G) = (\underline{\mathsf{R}}G\circ P'\star\varepsilon)(\underline{\mathsf{R}}G\star\alpha\star G)(\underline{\eta}\star P\circ G) \\
&\quad = (\underline{\mathsf{R}}G\circ P'\star\varepsilon)\Big[\big((\underline{\mathsf{R}}G\star\alpha)(\underline{\eta}\star P)\big)\star G\Big] = (\underline{\mathsf{R}}G\circ P'\star\varepsilon)\Big[\big((\beta\star F)(P\star\eta)\big)\star G\Big] \\
&\quad = (\underline{\mathsf{R}}G\circ P'\star\varepsilon)(\beta\star F\circ G)(P\star\eta\star G) = \beta(P\circ G\star\varepsilon)(P\star\eta\star G) \\
&\quad = \beta\Big[P\star\big((G\star\varepsilon)(\eta\star G)\big)\Big] = \beta \quad .
\end{aligned}$$

La seconde égalité se vérifie de façon duale. □

Corollaire. — **(Théorème d'adjonction de Quillen de foncteurs dérivés.)** *Soient $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ deux catégories de modèles au sens de Quillen, et*

$$F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}' \quad , \qquad G : \mathcal{C}' \longrightarrow \mathcal{C}$$

un couple de foncteurs adjoints. On suppose que F (resp. G) transforme les équivalences faibles entre objets cofibrants de $\mathcal{C}$ (resp. entre objets fibrants de $\mathcal{C}'$) en équivalences faibles de $\mathcal{C}'$ (resp. de $\mathcal{C}$). Alors F (resp. G) admet un foncteur dérivé total à gauche $(\underline{\mathsf{L}}F, \alpha)$ (resp. à droite $(\underline{\mathsf{R}}G, \beta)$), et le foncteur $\underline{\mathsf{L}}F$ est un adjoint à gauche du foncteur $\underline{\mathsf{R}}G$.

Démonstration. — En effet, en vertu de l'exemple qui précède le théorème, ainsi que de son dual, ces foncteurs dérivés existent et sont *absolus*. Le corollaire est donc un cas particulier du théorème ci-dessus. □

Remarques. — Dans son livre [**8**], Quillen démontre son théorème d'adjonction sous les hypothèses supplémentaires que F respecte les cofibrations et G les fibrations [*loc. cit.* Ch. 1, 4.5 Th. 3], mais il résulte de ce qui précède que ces hypothèses sont superflues. Dans les livres plus récents de Hovey [**6**] et de Hirschhorn [**5**], on démontre le théorème d'adjonction de Quillen avec des hypothèses encore plus fortes en demandant que (F, G) soit une *adjonction de Quillen* entre catégories de modèles *fermées*, et de plus avec *décompositions fonctorielles*. Les variantes du théorème d'adjonction dans un cadre plus général que celui des catégories de modèles de Quillen, obtenues par Dwyer, Hirschhorn, Kan et Smith [**3**], ou par Radulescu-Banu [**9**], dans son texte sur les *catégories de modèles d'Anderson-Brown-Cisinski*, alias *catégories dérivables* [**2**], sont également des cas particuliers du « théorème d'adjonction des foncteurs dérivés absolus », démontré ci-dessus. Dans un texte en préparation avec Bruno Kahn [**7**], on appliquera ce dernier théorème pour prouver une généralisation du théorème d'adjonction de Radulescu-Banu, impliquant tous les cas connus d'adjonction de foncteurs dérivés.

Références

[1] M. Artin, A. Grothendieck & J.-L. Verdier – *Théorie des topos et cohomologie étale des schémas* (SGA4), Lecture Notes in Mathematics, Vol. 269, 270, 305, Springer-Verlag, 1972-1973.

[2] D.-C. Cisinski – « Catégories dérivables », Prépublication, 2002.

[3] W. G. Dwyer, P. S. Hirschhorn, D. M. Kan & J. H. Smith – *Homotopy limit functors on model categories and homotopical categories*, Mathematical Surveys and Monographs, Vol. 113, American Mathematical Society, 2004.

[4] P. Gabriel & M. Zisman – *Calculus of fractions and homotopy theory*, Ergebnisse der Mathematik, Band 35, Springer-Verlag, 1967.

[5] P. S. Hirschhorn – *Model categories and their localizations*, Mathematical Surveys and Monographs, Vol. 99, American Mathematical Society, 2002.

[6] M. Hovey – *Model categories*, Mathematical Surveys and Monographs, Vol. 63, American Mathematical Society, 1999.

[7] B. Kahn & G. Maltsiniotis – « Structures de dérivabilité », En préparation.

[8] D. Quillen – *Homotopical algebra*, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 43, Springer-Verlag, 1967.

[9] A. Radulescu-Banu – « Cofibrations in homotopy theory », Prépublication, 2006.

Georges MALTSINIOTIS, Institut de Mathématiques de Jussieu, Université Paris 7 Denis Diderot, Case Postale 7012, 2, place Jussieu, F-75251 PARIS cedex 05, FRANCE
E-mail : maltsin@math.jussieu.fr • *Url :* http://www.math.jussieu.fr/~maltsin/