Sur les données endoscopiques dans le cas de l'endoscopie tordue

J.-L. Waldspurger

29 juillet 2024

Abstract. We give a simple combinatorial description of the elliptic endoscopic data of a twisted space under a group G, assuming that G is semi-simple and simply connected. Assuming the same hypothesis and that the base field is a number field, we prove that, if two elliptic endoscopic data are equivalent almost everywhere, then they are equivalent.

Introduction

Considérons un corps de nombres k et un groupe réductif connexe G défini sur k. Notons $\mathbb{A}$ l'anneau des adèles de k et considérons de plus un caractère continu χ de $G(\mathbb{A})$ trivial sur $G(k)$. On sait définir la notion de donnée endoscopique pour (G,χ). Pour toute place v de k, des objets précédents se déduisent des objets définis sur le complété k_v. Considérons deux données endoscopiques sur k et supposons que, pour presque toute place v, les données sur v qui s'en déduisent sont équivalentes. B. Lemaire et l'auteur ont prouvé en [**?**], proposition 1, que les deux données étaient alors globalement équivalentes.

On considère ici le cas de l'endoscopie tordue, c'est-à-dire que l'on se donne de plus un espace tordu $\tilde{G}$ sous G, défini sur k (cf. [**?**] I.1.1 pour une définition précise). Il y a encore une notion de donnée endoscopique. Le résultat de [**?**] ne s'étend pas à ce cas. Nous donnerons un contre-exemple dans le paragraphe **??**. Nous prouverons toutefois qu'il reste valide si l'on impose les hypothèses suivantes :

- les données endoscopiques sont "s-unitaires", cf. paragraphe **??** ;

- le groupe G est semi-simple et simplement connexe (cf. paragraphes **??** et **??**) ou semi-simple et absolument presque simple (cf. paragraphe **??**).

Les données elliptiques sont s-unitaires. Le résultat est certainement vrai sans cette hypothèse d'unitarité mais il nous a paru inutile de la lever.

En fait, on trouve dans la littérature deux définitions d'équivalence de données endoscopiques, cf. paragraphe 2. L'une des définitions est plus restrictive que l'autre. C'est celle-là que nous appellerons désormais équivalence en utilisant la terminologie d'équivalence faible pour l'autre. L'équivalence est la notion la plus utile dans le cadre de la formule des traces stable tandis que l'équivalence faible est sans doute mieux adaptée pour la formulation des conjectures de Langlands. Nos résultats sont valables pour les deux notions d'équivalence. Le cas de l'équivalence faible est techniquement plus compliqué mais nous avons décidé de l'inclure pour ne pas laisser ce cas en suspens.

L'intérêt du résultat ci-dessus est médiocre. Sa démonstration nous semble plus intéressante (accès d'optimisme ?). Considérons le cas où G est semi-simple et simplement connexe. Dans la proposition 2 de [**?**], où nous considérions le cas non tordu et où l'on supposait de plus G absolument presque simple, nous avons donné une description facile

des classes d'équivalence des données endoscopiques elliptiques. Elle reposait sur une construction assez magique de Langlands, cf. [**?**] pages 708-709, et celui-ci ne considère que le cas non tordu. Nous étendons ici cette description au cas tordu. Expliquons-la. En fait, tout notre article se passe dans le groupe dual $\hat{G}$. Le corps k n'intervient que par une action continue du groupe de Galois absolu Γ_k sur $\hat{G}$ par automorphismes algébriques. On a supposé ci-dessus que k était un corps de nombres mais la description qui suit vaut aussi si k est un corps local de caractéristique nulle. Puisque G est simplement connexe, $\hat{G}$ est adjoint. De l'espace tordu $\tilde{G}$ se déduit un automorphisme θ de $\hat{G}$, qui commute à l'action galoisienne. Notons e l'ordre de θ et Θ le groupe d'automorphismes engendré par θ. Notons $I(\hat{G})$ l'ensemble des composantes simples de $\hat{G}$. Le groupe $\Theta \times \Gamma_k$ agit sur $I(\hat{G})$, notons $i(\hat{G}, \theta \times \Gamma_k)$ le nombre d'orbites.

Introduisons deux corps locaux F et E de caractéristique nulle, de caractéristique résiduelle $p > e$, tels que E soit une extension galoisienne cyclique totalement ramifiée de F de degré e. Introduisons un groupe réductif connexe $\mathbf{G}$ défini et quasi-déployé sur F vérifiant les hypothèses suivantes :

$\mathbf{G}$ a mêmes données de racines que $\hat{G}$ (en oubliant les actions galoisiennes) ; cela entraîne que θ se transfère en un automorphisme algébrique encore noté θ de $\mathbf{G}$;

$\mathbf{G}$ est déployé sur E et il existe un générateur du groupe de Galois $\Gamma_{E/F}$ dont l'action sur $\mathbf{G}$ induise une action sur les données de racines coïncidant avec θ.

L'action de Γ_k sur $\hat{G}$ se transfère en une action de Γ_k sur $\mathbf{G}$ par automorphismes algébriques. On note $\sigma \mapsto \sigma_G$ cette action. Introduisons les immeubles de Bruhat-Tits $Imm_E(\mathbf{G})$ et $Imm_F(\mathbf{G})$ de $\mathbf{G}$ sur E et F. Des actions de θ et Γ_k sur $\mathbf{G}$ se déduisent des actions sur l'immeuble $Imm_E(\mathbf{G})$. Parce que l'extension E/F est modérément ramifiée, l'immeuble $Imm_F(\mathbf{G})$ s'identifie au sous-ensemble de points fixes $Imm_E(\mathbf{G})^\theta$, cf. [**?**] 2.6.1. On peut fixer un appartement $App_E \subset Imm_E(\mathbf{G})$ et une alcôve $C \subset App_E$ qui soient conservés par θ et par l'action de Γ_k. L'ensemble $\mathbf{A}_F = App_E^\theta$ est un appartement de $Imm_F(\mathbf{G})$ et l'ensemble C^θ est contenu dans une unique alcôve C_F de cet appartement. On sait bien (cf. [**?**] 1.8) qu'il y a un ensemble fini de "racines" $\Delta_{a,F}$ et, pour toute $\beta \in \Delta_{a,F}$, une racine affine β^{aff} sur $\mathbf{A}_F$ de sorte que

C_F soit l'ensemble des $x \in \mathbf{A}_F$ tels que $\beta^{aff}(x) > 0$ pour toute $\beta \in \Delta_{a,F}$;

pour tout $\beta \in \Delta_{a,F}$, l'hyperplan annulateur de β^{aff} soit un mur de l'adhérence $\bar{C}_F$ de C_F.

Bruhat et Tits définissent le groupe de Weyl affine étendu $\mathbf{W}_F^{aff}$. Il agit sur $\mathbf{A}_F$. On note Ω_F le sous-groupe des éléments de $\mathbf{W}_F^{aff}$ dont l'action conserve C_F. C'est un groupe abélien fini. L'action $\sigma \mapsto \sigma_G$ de Γ_k conserve C_F. Notons $\underline{Endo}$ l'ensemble des couples $(\omega_\star, x)$ tels que

$\omega_\star : \Gamma_k \to \Omega_F$ est une application continue et l'application $\sigma \mapsto \sigma_\star := \omega_\star(\sigma) \circ \sigma_G$ est un homomorphisme (à valeurs dans le groupe d'automorphismes de $\mathbf{A}_F$) ;

x est un élément de $\bar{C}_F$ fixé par $\sigma_\star$ pour tout $\sigma \in \Gamma_k$.

Pour $(\omega_\star, x) \in \underline{Endo}$, notons $S(x)$ l'ensemble des $\beta \in \Delta_{a,F}$ tels que $\beta^{aff}(x) = 0$. C'est un sous-ensemble propre de $\Delta_{a,F}$. De l'action $\sigma \mapsto \sigma_\star$, qui conserve C_F, se déduit une action sur $\Delta_{a,F}$, notée de la même façon. Cette action conserve $S(x)$, donc aussi $\Delta_{a,F} - S(x)$. On vérifie facilement que le nombre d'orbites de l'action de Γ_k sur $\Delta_{a,F} - S(x)$ est minoré par $i(\hat{G}, \theta \times \Gamma_k)$. Disons que $(\omega_\star, x)$ est elliptique si ce nombre d'orbites est égal à $i(\hat{G}, \theta \times \Gamma_k)$.

Deux éléments $(\omega_{\star,1}, x_1)$ et $(\omega_{\star,2}, x_2)$ de $\underline{Endo}$ sont dits équivalents si et seulement s'il existe $\omega \in \Omega_F$ tel que $\omega(x_1) = x_2$ et $\omega \sigma_{\star,1} \omega^{-1} = \sigma_{\star,2}$ pour tout $\sigma \in \Gamma_k$. On note $Endo$ l'ensemble des classes d'équivalence et $Endo_{ell}$ le sous-ensemble des classes elliptiques.

Notre résultat est qu'il y a une bijection "naturelle" entre l'ensemble des classes d'équivalence de données endoscopiques s-unitaires et l'ensemble $Endo$ et que cette bijection se restreint en une bijection entre l'ensemble des classes d'équivalence de données endoscopiques elliptiques et l'ensemble $Endo_{ell}$. C'est le théorème du paragraphe **??**. Cela fournit une description combinatoire simple des données endoscopiques s-unitaires ou elliptiques.

Remarque. Comme on l'a dit plus haut, le corps k n'intervient que par l'action de Γ_k sur $\hat{G}$. L'hypothèse que k est de caractéristique nulle n'est pas vraiment utile. Toutefois, la motivation du problème concerne un espace tordu sur k et les textes standard de Kottwitz et Shelstad ou Labesse concernant de tels espaces supposent cette hypothèse. C'est pourquoi l'auteur préfère la conserver pour plus de sûreté.

Je remercie le rapporteur pour sa lecture soignée et ses critiques constructives.

1 Notations

On note $\mathbb{N}_{>0}$ l'ensemble des entiers strictement positifs. Pour $n \in \mathbb{N}_{>0}$, on note $\mu_n(\mathbb{C})$ l'ensemble des nombres complexes z tels que $z^n = 1$. On note $\mu(\mathbb{C})$ la réunion des $\mu_n(\mathbb{C})$ quand n décrit $\mathbb{N}_{>0}$. On note U^1 le groupe des nombres complexes de module 1.

Soit X un ensemble sur lequel agit un groupe G. On note X^G l'ensemble des points fixes pour cette action. Si G est engendré par un unique élément θ, on note aussi $X^\theta = X^G$. Pour $x \in X$, on note $Z_G(x)$ le fixateur de x dans G. Pour tout sous-ensemble $Y \subset X$, on note $Norm_G(Y)$ le sous-groupe des éléments de G qui conservent Y.

Pour tout groupe algébrique G défini sur un corps k de caractéristique nulle, on note G^0 sa composante neutre et $Z(G)$ son centre. Pour un tore T défini sur k, on note $X^*(T)$, resp. $X_*(T)$ le groupe des caractères, resp. cocaractères, de T définis sur une clôture algébrique de k. Si $k = \mathbb{C}$, on note T_u le sous-groupe $X_*(T) \otimes_{\mathbb{Z}} U^1$ de $T = T(\mathbb{C}) = X_*(T) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}^\times$.

Soit k un corps qui est soit un corps local de caractéristique nulle, soit un corps de nombres. On en fixe une clôture algébrique $\bar{k}$, on note Γ_k le groupe de Galois de $\bar{k}/k$ et W_k le groupe de Weil de k. Si k' est une extension galoisienne de k, que l'on suppose toujours contenue dans $\bar{k}$, on note $\Gamma_{k'/k}$ le groupe de Galois de k'/k. Si k est un corps de nombres, on note V_k son ensemble de places. Pour toute place $v \in V_k$, on note k_v le complété de k en v et on identifie Γ_{k_v} à un sous-groupe de décomposition de Γ_k. On a un homomorphisme naturel $W_{k_v} \to W_k$.

On fixe pour tout l'article un corps k qui est soit un corps local de caractéristique nulle, soit un corps de nombres.

2 Données endoscopiques

On rappelle ici la notion de donnée endoscopique dans le cas tordu, cf. [**?**] I.1.5 pour plus de détails. Soit G un groupe réductif connexe défini sur k et $\tilde{G}$ un espace tordu sous G, lui aussi défini sur k. On note $\hat{G}$ le dual de Langlands de G. Soit $\mathbf{a}$ un élément de $H^1(W_k, Z(\hat{G}))$ si k est local, de $H^1(W_k, Z(\hat{G}))/ker^1(W_k, Z(\hat{G}))$ si k est un corps de nombres, où $ker^1(W_k, Z(\hat{G}))$ est le noyau de l'homomorphisme

$$H^1(W_k, Z(\hat{G})) \to \prod_{v \in V_k} H^1(W_{k_v}, Z(\hat{G})).$$

L'espace tordu $\tilde{G}$ détermine un automorphisme θ_Z de $Z(G)$ et on suppose que celui-ci est d'ordre fini. Ces données étant fixées, on sait définir la notion de donnée endoscopique du triplet $(G, \tilde{G}, \mathbf{a})$. Le groupe $\hat{G}$ est muni d'une action de Γ_k, que l'on note $\sigma \mapsto \sigma_G$, et il existe par définition une paire de Borel épinglée $\hat{\mathcal{E}} = (\hat{B}, \hat{T}, (E_\alpha)_{\alpha\in\Delta})$ de $\hat{G}$ qui est conservée par cette action. On fixe une telle paire de Borel épinglée $\hat{\mathcal{E}}$. La donnée de $\tilde{G}$ détermine un automorphisme θ de $\hat{G}$ qui conserve $\hat{\mathcal{E}}$ et commute à l'action galoisienne. Cet automorphisme est d'ordre fini puisque θ_Z l'est. L'ensemble $\hat{G}\theta$ est un espace tordu sous $\hat{G}$. Introduisons le L-groupe ${}^LG = \hat{G} \rtimes W_k$. Alors l'ensemble ${}^LG\theta$ est aussi un espace tordu sous ${}^LG$.

Considérons un élément semi-simple $\tilde{s} \in \hat{G}\theta$. Posons $\hat{G}' = Z_{\hat{G}}(\tilde{s})^0$. Considérons un sous-groupe $\mathcal{G}' \subset {}^LG$. On suppose $\mathcal{G}' \cap \hat{G} = \hat{G}'$. On a donc une suite

$$(1) \qquad 1 \to \hat{G}' \to \mathcal{G}' \to W_k \to 1.$$

On suppose que cette suite est exacte et scindée, c'est-à-dire que la projection $\mathcal{G}' \to W_k$ admet une section qui soit un homomorphisme continu. Ces hypothèses impliquent que $\mathcal{G}'$ est un sous-groupe fermé de ${}^LG$. On suppose qu'il existe un cocycle $a : W_k \to Z(\hat{G})$ dont la classe soit $\mathbf{a}$ dans $H^1(W_k, Z(\hat{G}))$ si k est local ou dans $H^1(W_k, Z(\hat{G}))/ker^1(W_k, Z(\hat{G}))$ si k est un corps de nombres, de sorte que, pour tout $(g, w) \in \mathcal{G}'$, on ait l'égalité

$$\tilde{s}(g, w) = (a(w)g, w)\tilde{s}$$

dans ${}^LG\theta$. De la suite (1) se déduit une L-action de Γ_k dans $\hat{G}'$ que l'on note $\sigma \mapsto \sigma_{G'}$. Soit G' un groupe réductif connexe défini et quasi-déployé sur k de sorte que $\hat{G}'$ muni de cette action galoisienne soit un groupe dual de G'. A ces conditions, le triplet $(G', \mathcal{G}', \tilde{s})$ est appelé donnée endoscopique de $(G, \tilde{G}, \mathbf{a})$. La donnée est dite elliptique si $Z(\hat{G}')^{\Gamma_k,0} = Z(\hat{G})^{\theta,\Gamma_k,0}$.

Nous dirons que deux données endoscopiques $(G'_1, \mathcal{G}'_1, \tilde{s}_1)$ et $(G'_2, \mathcal{G}'_2, \tilde{s}_2)$ sont équivalentes s'il existe un élément $x \in \hat{G}$ tel que $x\tilde{s}_1x^{-1} \in \tilde{s}_2Z(\hat{G})$ et $x\mathcal{G}'_1x^{-1} = \mathcal{G}'_2$. Cette définition est celle utilisée dans [**?**], [**?**] et [**?**]. D'autres auteurs, à commencer par Langlands et Shelstad, utilisent une autre définition, que nous appellerons équivalence faible : deux données endoscopiques $(G'_1, \mathcal{G}'_1, \tilde{s}_1)$ et $(G'_2, \mathcal{G}'_2, \tilde{s}_2)$ sont faiblement équivalentes s'il existe un élément $x \in \hat{G}$ tel que $x\tilde{s}_1x^{-1} \in \tilde{s}_2Z(\hat{G})Z(\hat{G}'_2)^{\Gamma_k,0}$ et $x\mathcal{G}'_1x^{-1} = \mathcal{G}'_2$. Ces deux définitions coïncident bien sûr si l'une ou l'autre des données est elliptique.

3 Transformation de la définition

Considérons un groupe réductif connexe $\hat{G}$ défini sur $\mathbb{C}$, muni d'une action continue de Γ_k par automorphismes algébriques (continue signifiant qu'elle se quotiente par une action d'un groupe fini $\Gamma_{k'/k}$). De cette action se déduit une action du groupe de Weil W_k notée $w \mapsto w_G$. On suppose qu'il existe une paire de Borel épinglée $\hat{\mathcal{E}} = (\hat{B}, \hat{T}, (E_\alpha)_{\alpha\in\Delta})$ de $\hat{G}$ qui est conservée par cette action. On fixe une telle paire de Borel épinglée $\hat{\mathcal{E}}$. On pose encore ${}^LG = \hat{G} \rtimes W_k$. Considérons un automorphisme algébrique θ de $\hat{G}$ qui conserve $\hat{\mathcal{E}}$, est d'ordre fini et commute à l'action galoisienne. On a de nouveau des espaces tordus $\hat{G}\theta$ sous $\hat{G}$ et ${}^LG\theta$ sous ${}^LG$. Soit $\tilde{s}$ un élément semi-simple de $\hat{G}\theta$. Posons $\hat{G}' = Z_{\hat{G}}(\tilde{s})^0$. Considérons un sous-groupe $\mathcal{G}' \subset {}^LG$. On suppose $\mathcal{G}' \cap \hat{G} = \hat{G}'$. On a donc une suite

$$(1) \qquad 1 \to \hat{G}' \to \mathcal{G}' \to W_k \to 1.$$

On suppose que cette suite est exacte et scindée, au même sens que dans le paragraphe précédent. On suppose que

(2) pour tout $(g,w)\in\mathcal{G}'$, il existe $z\in Z(\hat{G})$ de sorte que $\tilde{s}(g,w)=(zg,w)\tilde{s}$.

Remarquons que l'élément z ne dépend que de l'élément w du couple (g,w).

A ces conditions, appelons le couple $(\mathcal{G}',\tilde{s})$ une pré-donnée endoscopique de $({}^LG,\theta)$. Les notions d'ellipticité d'une pré-donnée et d'équivalence ou d'équivalence faible de deux pré-données se définissent comme dans le paragraphe précédent.

Dans la situation de ce paragraphe précédent, une donnée endoscopique de $(G,\tilde{G},\mathbf{a})$ définit une pré-donnée de $({}^LG,\theta)$. Inversement, soit $(\mathcal{G}',\tilde{s})$ une pré-donnée de $({}^LG,\theta)$. A isomorphisme près, il existe un unique groupe réductif connexe G' défini et quasi-déployé sur k de sorte que $\hat{G}'$ en soit le groupe dual. Il existe alors une unique classe $\mathbf{a}$ de sorte que le triplet $(G',\mathcal{G}',\tilde{s})$ soit une donnée endoscopique de $(G,\tilde{G},\mathbf{a})$. Ces correspondances conservent la notion d'équivalence. Autrement dit, l'ensemble des pré-données endoscopiques de $({}^LG,\theta)$ s'identifie à la réunion sur les classes $\mathbf{a}$ des ensembles de données endoscopiques de $(G,\tilde{G},\mathbf{a})$.

Remarquons que la notion de pré-donnée endoscopique ne concerne que des objets définis sur $\mathbb{C}$. Le corps k n'y intervient que via une action continue de Γ_k.

4 Rappels concernant les pré-données endoscopiques

On se place dans la situation du paragraphe précédent. On note Σ l'ensemble des racines de $\hat{T}$ dans $\hat{G}$. Pour $\alpha\in\Sigma$, on note α_{res} la restriction de α à $\hat{T}^{\theta,0}$. On pose $\Sigma_{res}=\{\alpha_{res};\alpha\in\Sigma\}$. C'est un système de racines en général non réduit. On note $\Sigma_{res,ind}$ le sous-ensemble des racines indivisibles, qui est encore un système de racines. L'automorphisme θ agit sur Σ et Σ_{res} est en bijection avec l'ensemble des orbites pour cette action. Notons $\Delta_{res}=\{\alpha_{res};\alpha\in\Delta\}$. Cet ensemble est une base de $\Sigma_{res,ind}$. Pour $\alpha\in\Sigma$, on note $e(\alpha)$ le plus petit $n\in\mathbb{N}_{>0}$ tel que $\theta^n(\alpha)=\alpha$. Pour $\beta\in\Sigma_{res}$ et pour une racine $\alpha\in\Sigma$ telle que $\beta=\alpha_{res}$, l'entier $e(\alpha)$ ne dépend que de β, on le note aussi $e(\beta)$.

Notons W le groupe de Weyl de $\hat{G}$ relativement à $\hat{T}$. L'automorphisme θ agit sur W. Le groupe W^θ est le groupe de Weyl du système de racines $\Sigma_{res,ind}$. Plus précisément, W^θ s'identifie au groupe de Weyl du groupe $\hat{G}^{\theta,0}$ relativement au sous-tore maximal $\hat{T}^{\theta,0}$. Le système de racines de $\hat{G}^{\theta,0}$ est $\Sigma_{res,ind}$, cf. [?] 1.3.

Soit $(\mathcal{G}',\tilde{s})$ une pré-donnée endoscopique de $({}^LG,\theta)$. A équivalence près, on peut supposer $\tilde{s}=s\theta$, avec $s\in\hat{T}^{\theta,0}$. Supposons cette condition vérifiée. On a noté $\hat{G}'=Z_{\hat{G}}(\tilde{s})^0$. Le tore $\hat{T}^{\theta,0}$ en est un sous-tore maximal. Notons $W^{\hat{G}'}$ le groupe de Weyl de $\hat{G}'$ relatif à ce tore. Alors $W^{\hat{G}'}\subset W^\theta$. Notons $\Sigma(\hat{G}')$ l'ensemble de racines de $\hat{T}^{\theta,0}$ dans $\hat{G}'$. D'après [?] 1.3, $\Sigma(\hat{G}')$ est le sous-ensemble des racines $\beta\in\Sigma_{res}$ vérifiant l'égalité

$\beta(s)^{e(\beta)}=1$ si β est indivisible ;

$\beta(s)^{e(\beta)}=-1$ si β est divisible.

Le couple $(\hat{B}\cap\hat{G}',\hat{T}^{\theta,0})$ est une paire de Borel de $\hat{G}'$. Complétons-la en une paire de Borel épinglée $\hat{\mathcal{E}}'$. Le groupe $\mathcal{G}'$ normalise $\hat{G}'$. Pour tout $w\in W_k$, on peut donc fixer $(g(w),w)\in\mathcal{G}'$ tel que la restriction à $\hat{G}'$ de l'automorphisme $ad_{g(w)}\circ w_G$ conserve $\hat{\mathcal{E}}'$. On note $w\mapsto w_{G'}$ l'action de W_k sur $\hat{G}'$, $w\in W_k$ agissant par la restriction de l'automorphisme précédent. Puisque $ad_{g(w)}\circ w_G$ conserve $\hat{\mathcal{E}}'$ et que w_G conserve $\hat{T}^{\theta,0}$, la conjugaison par $g(w)$ conserve $\hat{T}^{\theta,0}$, donc aussi son commutant $\hat{T}$. Donc $g(w)$ appartient à $Norm_{\hat{G}}(\hat{T})$. Notons $u(w)$ son image dans W. Son action sur $\hat{T}$ conserve $\hat{T}^{\theta,0}$ et cela implique que $u(w)$ appartient à W^θ. D'après ce que l'on a dit ci-dessus, on peut fixer un

élément $n(w) \in Norm_{\hat{G}^{\theta,0}}(\hat{T}^{\theta,0})$ dont l'image dans W^θ soit $u(w)$. Il existe alors $t(w) \in \hat{T}$ tel que $g(w) = t(w)n(w)$. On a l'égalité $\mathcal{G}' = \{ht(w)n(w), w); w \in W_k, h \in \hat{G}'\}$. La condition **??**(2) équivaut à

(1) pour tout $w \in W_k$, il existe $z \in Z(\hat{G})$ de sorte que $w_{G'}(s) = zs\theta(t(w))t(w)^{-1}$.

L'existence d'une section continue de la projection $\mathcal{G}' \mapsto W_k$ entraîne que les applications $w \mapsto n(w), w_{G'}$ peuvent être choisies telles qu'elles se quotientent par un quotient fini de W_k, puis s'étendent en des applications définies sur Γ_k. On notera celles-ci $\sigma \mapsto n(\sigma), \sigma_{G'}$.

Introduisons quelques notations. On note $1 - \theta$ l'homomorphisme $t \mapsto t\theta(t)^{-1}$ de $\hat{T}$ dans lui-même. On note $\hat{G}_{AD}$ le groupe adjoint de $\hat{G}$. Pour un élément $g \in \hat{G}$, resp. un sous-groupe $\hat{H}$ de $\hat{G}$, on note g_{ad}, resp. $\hat{H}_{ad}$, son image dans $\hat{G}_{AD}$. Signalons que les groupes $\hat{T}^\theta_{ad}$ et $\hat{G}^\theta_{AD}$ sont connexes.

5 Les pré-données endoscopiques elliptiques sont d'ordre fini

Nous dirons qu'une pré-donnée endoscopique est s-unitaire si elle est équivalente à une pré-donnée $(\mathcal{G}', \tilde{s})$ telle que $\tilde{s} = s\theta$, où s est un élément de $\hat{T}^{\theta,0}$ tel que $\beta(s) \in U^1$ pour tout $\beta \in \Sigma_{res}$ (rappelons que U^1 est le groupe des nombres complexes de module 1). On dit qu'une pré-donnée endoscopique est d'ordre fini si elle équivalente à une pré-donnée $(\mathcal{G}', \tilde{s})$ telle que $\tilde{s} = s\theta$, où s est un élément de $\hat{T}^{\theta,0}$ dont l'image dans $\hat{T}^{\theta,0}/Z(\hat{G})^{\theta,0}$ est d'ordre fini. Une pré-donnée d'ordre fini est s-unitaire.

Remarque. On vérifie aisément qu'une pré-donnée endoscopique est s-unitaire, resp. d'ordre fini, si et seulement si, pour toute pré-donnée $(\mathcal{G}', \tilde{s})$ qui lui est équivalente, telle que $\tilde{s} = s\theta$, avec $s \in \hat{T}^{\theta,0}$, s vérifie la condition requise ci-dessus : $\beta(s) \in U^1$ pour toute $\beta \in \Sigma_{res}$, resp. l'image de s dans $\hat{T}^{\theta,0}/Z(\hat{G})^{\theta,0}$ est d'ordre fini.

Lemme. *Toute pré-donnée endoscopique elliptique est d'ordre fini, a fortiori s-unitaire.*

Preuve. Nous adaptons au cas tordu la preuve de Langlands, cf. [**?**] p. 705. On considère une pré-donnée endoscopique $(\mathcal{G}', \tilde{s})$ avec $\tilde{s} = s\theta$, où $s \in \hat{T}^{\theta,0}$. Supposons que l'image de s dans $\hat{T}^{\theta,0}/Z(\hat{G})^{\theta,0}$ n'est pas d'ordre fini. On va prouver que la pré-donnée n'est pas elliptique. On utilise les définitions et notations du paragraphe **??**. Notons Φ l'ensemble des $\beta \in \Sigma_{res,ind}$ tels que $\beta(s) \in \mu(\mathbb{C})$. D'après la description donnée au paragraphe **??** de l'ensemble $\Sigma(\hat{G}')$, tout élément de cet ensemble est multiple d'un élément de Φ. L'hypothèse que l'image de s dans $\hat{T}^{\theta,0}/Z(\hat{G})^{\theta,0}$ n'est pas d'ordre fini signifie que Φ n'est pas égal à $\Sigma_{res,ind}$ tout entier. Notons $\pi : \Sigma_{res,ind} \to \mathbb{C}^\times/\mu(\mathbb{C})$ l'application qui, à $\beta \in \Sigma_{res,ind}$ associe l'image de $\beta(s)$ dans $\mathbb{C}^\times/\mu(\mathbb{C})$. Notons A le groupe engendré par l'image de π. Alors A est un sous-groupe de type fini de $\mathbb{C}^\times/\mu(\mathbb{C})$, non réduit à l'élément neutre. Puisque $\mathbb{C}^\times/\mu(\mathbb{C})$ est sans torsion, A est un groupe abélien libre et on peut en fixer une base $\{a_1, ..., a_n\}$. On a $n \geq 1$. Notons A^M le sous-groupe de A engendré par $\{a_1, ..., a_{n-1}\}$ et A^P le sous-ensemble de A formé des éléments dont la n-ième coordonnée dans la base $\{a_1, ..., a_n\}$ est positive ou nulle. Notons $\Sigma^M_{res,ind}$, resp. $\Sigma^P_{res,ind}$, l'ensemble des $\beta \in \Sigma_{res,ind}$ telles que $\pi(\beta) \in A^M$, resp. $\pi(\beta) \in A^P$. L'ensemble $\Sigma^P_{res,ind}$ est un sous-ensemble parabolique propre de $\Sigma_{res,ind}$ et $\Sigma^M_{res,ind}$ en est le sous-ensemble de Levi. L'ensemble Φ est inclus dans $\Sigma^M_{res,ind}$. Notons $Z^M_* \subset X_*(\hat{T}^{\theta,0})$ l'annulateur de $\Sigma^M_{res,ind}$, c'est-à-dire l'ensemble des $x_* \in X_*(\hat{T}^{\theta,0})$ tels que $\beta(x_*) = 0$ pour tout $\beta \in \Sigma^M_{res,ind}$.

Puisque tout élément de $\Sigma(\hat{G}')$ est multiple d'un élément de Φ, lequel est contenu dans $\Sigma^M_{res,ind}$, Z^M_* est contenu dans $X_*(Z(\hat{G}')^0)$.

L'action galoisienne $\sigma \mapsto \sigma_{G'}$ de Γ_k sur $\hat{T}^{\theta,0}$ conserve $\Sigma_{res,ind}$. Montrons que

(1) cette action conserve $\Sigma^M_{res,ind}$ et $\Sigma^P_{res,ind}$.

Soit $\sigma \in \Gamma_k$. Il suffit de prouver que $\pi \circ \sigma_{G'}^{-1} = \pi$. Posons $s' = \sigma_{G'}(s)$. Pour $\beta \in \Sigma_{res,ind}$, on a $\sigma_{G'}^{-1}(\beta)(s) = \beta(s')$. En vertu de la définition de π, il suffit de prouver que $\beta(s') \in \mu(\mathbb{C})\beta(s)$ pour tout $\beta \in \Sigma_{res,ind}$. La relation **??**(1) entraîne que s'_{ad} appartient à $(1-\theta)(\hat{T}_{ad})s_{ad}$. Puisque s_{ad} et s'_{ad} appartiennent tous deux à $\hat{T}^{\theta}_{ad}$, on a même $s'_{ad} \in s_{ad}\left((1-\theta)(\hat{T}_{ad}) \cap \hat{T}^{\theta}_{ad}\right)$. Mais ce groupe $(1-\theta)(\hat{T}_{ad}) \cap \hat{T}^{\theta}_{ad}$ est fini. Il en résulte que, pour tout $\beta \in \Sigma_{res,ind}$, le quotient $\beta(s')\beta(s)^{-1}$ est une racine de l'unité. C'est la propriété voulue qui démontre (1).

A toute racine $\beta \in \Sigma_{res,ind}$ est associée une coracine $\check{\beta} \in X_*(\hat{T}^{\theta,0})$. Notons $\check{\delta}$ la somme des coracines associées aux éléments $\beta \in \Sigma^P_{res,ind} - \Sigma^M_{res,ind}$. C'est un élément de Z^M_* qui n'appartient pas à $X_*(Z(\hat{G})^0)$. La propriété (1) entraîne que $\check{\delta}$ est fixé par l'action $\sigma \mapsto \sigma_{G'}$. Puisque $Z^M_* \subset X_*(Z(\hat{G}')^0)$, on obtient que $\check{\delta}$ est un élément de $X_*(Z(\hat{G}')^{\Gamma_k,0})$ qui n'appartient pas à $X_*(Z(\hat{G})^{\theta,\Gamma_k,0})$. Donc la pré-donnée $(\mathcal{G}', \tilde{s})$ n'est pas elliptique. Cela achève la preuve. □

6 Constructions immobilières

Pour ce paragraphe et les suivants jusqu'au paragraphe **??**, on suppose que $\hat{G}$ est adjoint.

Notons e l'ordre de θ. Fixons un nombre premier $p > e$ et une puissance q de p telle que $q \equiv 1 \, mod \, e\mathbb{Z}$. Fixons un corps local F non-archimédien de caractéristique nulle dont le corps résiduel est $\mathbb{F}_q$. On peut fixer une extension galoisienne totalement ramifiée E/F de sorte que $\Gamma_{E/F} \simeq \mathbb{Z}/e\mathbb{Z}$. On fixe un générateur $\gamma \in \Gamma_{E/F}$. Il existe à isomorphisme près un unique groupe réductif connexe $\mathbf{G}$ défini et quasi-déployé sur F de sorte que les conditions suivantes soient vérifiées. Fixons une paire de Borel épinglée $\boldsymbol{\mathcal{E}} = (\mathbf{B}, \mathbf{T}, (\mathbf{E}_\alpha)_{\alpha \in \Delta})$ de $\mathbf{G}$ conservée par l'action galoisienne. Alors il existe des isomorphismes en dualité $X_*(\hat{T}) \simeq X_*(\mathbf{T})$ et $X^*(\hat{T}) \simeq X^*(\mathbf{T})$ qui font se correspondre les coracines, resp. racines, de $\hat{T}$ dans $\hat{G}$ et de $\mathbf{T}$ dans $\mathbf{G}$, ainsi que les coracines, resp. racines, simples relativement à $\hat{B}$, resp. $\mathbf{B}$ (c'est pourquoi nous avons noté par anticipation Δ l'ensemble commun de racines simples). Le groupe $\mathbf{G}$ est déployé sur E et, par les isomorphismes précédents, l'action de θ sur Δ correspond à l'action de $\gamma \in \Gamma_{E/F}$. On notera encore θ l'action algébrique sur $\mathbf{T}$ déduite de l'action de γ, ou encore transportée par les isomorphismes précédents de l'action de θ sur $\hat{T}$. Le groupe $\mathbf{G}$ est adjoint et de même type que $\hat{G}$. On note encore Σ l'ensemble commun de racines de $\mathbf{T}$ dans $\mathbf{G}$ ou de $\hat{T}$ dans $\hat{G}$. De l'action du groupe Γ_k sur $\hat{G}$ se déduit une action sur Σ qui préserve Δ. Elle se transporte donc en une action de Γ_k sur $\mathbf{G}$ par automorphismes algébriques qui conservent $\boldsymbol{\mathcal{E}}$ et commutent à l'action de γ. On note $\sigma \mapsto \sigma_G$ cette action.

Introduisons les immeubles de Bruhat-Tits $Imm_E(\mathbf{G})$ et $Imm_F(\mathbf{G})$ de $\mathbf{G}$ sur E et F. Au tore $\mathbf{T}$ est associé un appartement $App_E(\mathbf{T})$ dans $Imm_E(\mathbf{G})$. Notons val_F la valuation usuelle de F et prolongeons-la en une valuation de $\bar{F}$ à valeurs dans $\mathbb{Q} \cup \{\infty\}$. On a $val_F(E^\times) = \frac{1}{e}\mathbb{Z}$. De la valuation val_F se déduit un homomorphisme

$$val_{\mathbf{T}} : \mathbf{T}(\bar{F}) = X_*(\mathbf{T}) \otimes_{\mathbb{Z}} \bar{F}^\times \to X_*(\mathbf{T}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}.$$

L'appartement $App_E(\mathbf{T})$ s'identifie à $X_*(\mathbf{T})\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{R}$ de telle sorte que l'action d'un élément $t\in\mathbf{T}(E)$ sur $App_E(\mathbf{T})$ s'identifie à la translation par $-val_{\mathbf{T}}(t)$ dans $X_*(\mathbf{T})\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{R}$. A la paire de Borel épinglée $\boldsymbol{\mathcal{E}}$ est associée une alcôve $C\subset App_E(\mathbf{T})$.

Supposons un instant que $\mathbf{G}$ soit simple sur E (cela équivaut à ce que $\hat{G}$ soit simple sur $\mathbb{C}$). Notons α_0 l'opposée de la racine de plus grande longueur de Σ (relativement à la base Δ) et posons $\Delta_a=\Delta\cup\{\alpha_0\}$. Notons $\bar{C}$ l'adhérence de C. Cet ensemble $\bar{C}$ s'identifie à l'ensemble des éléments $x\in X_*(\mathbf{T})\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{R}$ vérifiant les conditions $\alpha(x)\geq 0$ pour tout $\alpha\in\Delta$ et $-\alpha_0(x)+\frac{1}{e}\geq 0$. L'ensemble Δ_a s'identifie à l'ensemble des sommets du simplexe $\bar{C}$. On note $\alpha\mapsto s_\alpha$ cette bijection. Le sommet s_{α_0} n'est autre que $0\in X_*(\mathbf{T})\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{R}$. Revenons au cas général où $\mathbf{G}$ n'est pas supposé simple. Notons

$$\mathbf{G}=\prod_{i\in I(\mathbf{G})}\mathbf{G}_i$$

la décomposition de $\mathbf{G}$ en composantes simples. Les objets introduits ci-dessus qui ne dépendent que de la structure de $\mathbf{G}$ sur E ont des analogues pour chaque $\mathbf{G}_i$ et on affecte ces analogues d'un indice i. On a

$$App_E(\mathbf{T})=\prod_{i\in I(\mathbf{G})}App_E(\mathbf{T}_i)\simeq\prod_{i\in I(\mathbf{G})}X_*(\mathbf{T}_i)\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{R}\simeq X_*(\mathbf{T})\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{R},$$

et $C=\prod_{i\in I(\mathbf{G})}C_i$. On pose $\Delta_a=\sqcup_{i\in I(\mathbf{G})}\Delta_{a,i}$.

Notons $\mathbf{T}_F$ le plus grand sous-tore de $\mathbf{T}$ qui est déployé sur F. C'est un sous-tore de $\mathbf{G}$, maximal parmi les sous-tores déployés sur F (parce que $\mathbf{G}$ est quasi-déployé sur F et que $\mathbf{T}$ fait partie d'un épinglage conservé par l'action galoisienne). On a $X_*(\mathbf{T}_F)=X_*(\mathbf{T})^{\Gamma_{E/F}}=X_*(\mathbf{T})^\theta$. Le groupe $\Gamma_{E/F}$ agit sur $Imm_E(\mathbf{G})$ et $Imm_F(\mathbf{G})$ s'identifie à l'ensemble des points fixes de cette action (parce que l'extension E/F est modérément ramifiée). En particulier, l'appartement $App_F(\mathbf{T}_F)$ s'identifie à l'ensemble des points fixes de l'action naturelle de θ dans $App_E(\mathbf{T})$, ou encore à $X_*(\mathbf{T}_F)\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{R}$. Posons

$$\mathbf{A}_F=App_F(\mathbf{T}_F)=X_*(\mathbf{T}_F)\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{R}.$$

L'ensemble C^θ des points fixes par θ dans C est contenu dans une unique alcôve C_F de $\mathbf{A}_F$. Toute racine $\beta\in\Sigma_{res}$ définit une forme linéaire sur $\mathbf{A}_F$. Pour $\lambda\in\mathbb{R}$, notons $\beta[\lambda]$ la fonction affine $x\mapsto\beta(x)+\lambda$ sur $\mathbf{A}_F$. Bruhat et Tits définissent l'ensemble des racines affines de cet appartement. Pour tout $\beta\in\Sigma_{res}$, il existe un sous-ensemble discret $\Lambda(\beta)\subset\mathbb{Q}$ de sorte que l'ensemble des racines affines soit égal à $\{\beta[\lambda];\beta\in\Sigma_{res},\lambda\in\Lambda(\beta)\}$. Rappelons la description de cet ensemble, cf. [**?**] 2.2.7. On a les égalités

$\Lambda(\beta)=\frac{1}{e(\beta)}\mathbb{Z}$, si β est indivisible ;

$\Lambda(\beta)=\frac{1}{e(\beta)}(\frac{1}{2}+\mathbb{Z})$, si β est divisible.

Notons Θ le groupe d'automorphismes de $\mathbf{G}$ engendré par θ. Ce groupe Θ agit naturellement sur $I(\mathbf{G})$. On note $I(\mathbf{G})/\Theta$ l'ensemble d'orbites. Supposons un instant qu'il n'y a qu'une orbite. Pour $\beta\in\Delta_{res}$, on a $0\in\Lambda(\beta)$ et on pose $\beta^{aff}=\beta[0]$. Il existe une unique racine $\beta_0\in\Sigma_{res}$ et un unique élément $\lambda_0\in\Lambda(\beta_0)$ tels qu'en posant $\beta_0^{aff}=\beta_0[\lambda_0]$ et $\Delta_{a,F}=\Delta_{res}\cup\{\beta_0\}$, C_F soit le sous-ensemble des $x\in\mathbf{A}_F$ tels que $\beta^{aff}(x)>0$ pour tout $\beta\in\Delta_{a,F}$. De plus, il existe d'uniques coefficients réels $(d_\beta)_{\beta\in\Delta_{a,F}}$ de sorte que l'on ait l'égalité

$$(1)\qquad\sum_{\beta\in\Delta_{a,F}}d_\beta\beta^{aff}(x)=1$$

pour tout $x \in \mathbf{A}_F$. Ces coefficients sont en fait des entiers strictement positifs. L'adhérence $\bar{C}$ est un simplexe dont les sommets sont en bijection avec $\Delta_{a,F}$, on note $\beta \mapsto s_\beta$ cette bijection. Revenons au cas général où l'on ne suppose plus que $I(\mathbf{G})/\Theta$ est réduit à un unique élément. Pour $\mathrm{j} \in I(\mathbf{G})/\Theta$, posons $\mathbf{G}_\mathrm{j} = \prod_{i \in \mathrm{j}} \mathbf{G}_i$. Ce groupe est défini sur F (et quasi-simple sur F) et les objets introduits ci-dessus conservent un sens pour lui. On les affecte d'indices j. On a $\mathbf{A}_F = \prod_{\mathrm{j} \in I(\mathbf{G})/\Theta} \mathbf{A}_{F,\mathrm{j}}$, $C_F = \prod_{\mathrm{j} \in I(\mathbf{G})/\Theta} C_{F,\mathrm{j}}$ et on pose $\Delta_{a,F} = \sqcup_{\mathrm{j} \in I(\mathbf{G})/\Theta} \Delta_{a,F,\mathrm{j}}$.

Fixons $\mathrm{j} \in I(\mathbf{G})/\Theta$ et $i \in \mathrm{j}$. La composante simple $\mathbf{G}_i$ de $\mathbf{G}$ correspond à une composante simple $\hat{G}_i$ de $\hat{G}$. Notons n le nombre d'éléments de j. L'automorphisme algébrique θ^n conserve $\hat{G}_i$. Notons θ' sa restriction à $\hat{G}_i$ et e' son ordre. Evidemment, ne' divise e. Notons F' et E' les corps tels que $F \subset F' \subset E' \subset E$ et $[F' : F] = n$, $[E' : F'] = e'$. L'élément γ^n appartient à $\Gamma_{F'}$. Notons γ' son image dans $\Gamma_{E'/F'}$. C'est un générateur de ce groupe. Le groupe $\mathbf{G}_i$ est un groupe réductif défini sur F' et déployé sur E'. En reprenant notre construction en remplaçant les données $\hat{G}$, θ, F, E et γ par $\hat{G}_i$, θ', F', E' et γ', il est clair que l'on obtient ce groupe $\mathbf{G}_i$ (on a $\mathbf{G}_\mathrm{j} = Res_{F'/F}(\mathbf{G}_i)$). Notons $\mathbf{T}'$ l'analogue de $\mathbf{T}$ et $\mathbf{A}'_F$ celui de $\mathbf{A}_F$. Il est clair que $\mathbf{T}'_F \simeq \mathbf{T}_{F,\mathrm{j}}$ et $\mathbf{A}'_F \simeq \mathbf{A}_{F,\mathrm{j}}$. On doit toutefois prendre garde aux identifications $\mathbf{A}'_F \simeq X_*(\mathbf{T}'_F) \otimes_\mathbb{Z} \mathbb{R}$ et $\mathbf{A}_{F,\mathrm{j}} \simeq X_*(\mathbf{T}_{F,\mathrm{j}}) \otimes_\mathbb{Z} \mathbb{R}$. Leurs définitions utilisent les homomorphismes $val_\mathbf{T}$ et $val_{\mathbf{T}'}$ dans les définitions desquels interviennent les valuations val_F et $val_{F'}$. Puisque F'/F est totalement ramifiée de degré n, $val_{\mathbf{T}'}$ est égal à n fois la restriction de $val_\mathbf{T}$ à $\mathbf{T}'(\bar{F})$. On obtient que le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{A}_{F,\mathrm{j}} & \simeq & \mathbf{A}'_F \\ \downarrow & & \downarrow \\ X_*(\mathbf{T}_{F,\mathrm{j}}) \otimes_\mathbb{Z} \mathbb{R} & \overset{x \mapsto nx}{\to} & X_*(\mathbf{T}'_F) \otimes_\mathbb{Z} \mathbb{R} \end{array}$$

Le groupe W agit linéairement sur $App_E(\mathbf{T})$ et W^θ agit linéairement sur $\mathbf{A}_F$. Bruhat et Tits définissent un groupe de Weyl affine $\mathbf{W}_F^{aff}$ qui agit par transformations affines sur $\mathbf{A}_F$ et qui est produit semi-direct de W^θ et d'un groupe de translations que nous notons R. Ce groupe de translations est un sous-groupe de $\mathbf{A}_F$. Il contient le groupe $X_*(\mathbf{T}_F)$ comme sous-groupe d'indice fini. On note $p_{W^\theta} : \mathbf{W}_F^{aff} \to W^\theta$ la projection naturelle.

En fait, on peut définir différents groupes de Weyl affines et celui que nous considérons est le plus gros possible. Il contient comme sous-groupe d'indice fini un sous-groupe $\mathbf{W}_{F,sc}^{aff}$ qui est engendré par les symétries associées aux racines affines mais, en général, il ne lui est pas égal. On note Ω_F le sous-groupe des éléments de $\mathbf{W}_F^{aff}$ qui conservent l'alcôve C_F. C'est un groupe abélien fini. On a la décomposition en produit semi-direct $\mathbf{W}_F^{aff} = \mathbf{W}_{F,sc}^{aff} \rtimes \Omega_F$, cf. [?] lemme 14. Introduisons les diagrammes de Dynkin $\mathcal{D}_F$ et $\mathcal{D}_{a,F}$ associés aux ensembles de racines Δ_{res} et $\Delta_{a,F}$. Notons $Aut(\mathcal{D}_F)$ et $Aut(\mathcal{D}_{a,F})$ leurs groupes finis d'automorphismes. Le groupe $Aut(\mathcal{D}_F)$ est égal au sous-groupe des éléments de $Aut(\mathcal{D}_{a,F})$ qui permutent les points du diagramme associés aux racines $\beta_{0,\mathrm{j}}$ pour $\mathrm{j} \in I(\mathbf{G})/\Theta$. Le groupe Ω_F s'identifie à un sous-groupe de $Aut(\mathcal{D}_{a,F})$. Il s'avère que $Aut(\mathcal{D}_{a,F}) = \Omega_F \rtimes Aut(\mathcal{D}_F)$.

Notons $Out(\mathbf{G})$ l'ensemble des automorphismes algébriques de $\mathbf{G}$ qui conservent $\boldsymbol{\mathcal{E}}$. Notons $Out(\mathbf{G})^\theta$ le sous-ensemble de ceux qui commutent à θ. Le groupe $Out(\mathbf{G})$ agit sur $App_E(\mathbf{T})$ en conservant C. Il s'en déduit une action sur le diagramme de Dynkin $\mathcal{D}$ associé à l'ensemble de racines simples Δ. En fait, $Out(\mathbf{G})$ s'identifie au groupe des automorphismes de $\mathcal{D}$. Le groupe $Out(\mathbf{G})^\theta$ permute les groupes $\mathbf{G}_\mathrm{j}$ pour $\mathrm{j} \in I(\mathbf{G})/\Theta$. Il agit sur $\mathbf{A}_F$ en conservant C_F et Δ_{res}. On en déduit un homomorphisme $Out(\mathbf{G})^\theta \to Aut(\mathcal{D}_F)$.

Cette application est bijective si $\theta = 1$. En tout cas, on obtient un homomorphisme $\Gamma_k \to Aut(\mathcal{D}_F) \subset Aut(\mathcal{D}_{F,a})$, que l'on note encore $\sigma \mapsto \sigma_G$.

Soit $x \in \mathbf{A}_F$. Bruhat et Tits ont associé à x un groupe réductif connexe $\mathbb{G}_x$ défini sur $\mathbb{F}_q$. Du tore $\mathbf{T}_F$ est issu un sous-tore maximal $\mathbb{T}_x$ de $\mathbb{G}_x$ qui est défini sur $\mathbb{F}_q$ et maximalement déployé. En fait, nos hypothèses impliquent que $\mathbb{G}_x$ est déployé : l'action galoisienne de $\Gamma_{E/F}$ sur $\mathbf{G}$ se fait par θ et devient triviale sur $\mathbf{T}_F$. En particulier, $\mathbb{T}_x$ est déployé. Notons $\Sigma^{aff}(x)$ l'ensemble des racines affines $\beta[\lambda]$ telles que $\beta[\lambda](x) = 0$. Notons $p_{\Sigma_{res}}$ l'application qui, à une racine affine $\beta[\lambda]$, associe la racine $\beta \in \Sigma_{res}$. Cette application est injective sur $\Sigma^{aff}(x)$: pour $\beta[\lambda] \in \Sigma^{aff}(x)$, λ est uniquement déterminé par β et par l'égalité $\beta(x) + \lambda = 0$. Notons $\Sigma(x)$ l'image de $\Sigma^{aff}(x)$ par $p_{\Sigma_{res}}$. C'est l'ensemble des racines $\beta \in \Sigma_{res}$ telles que $\beta(x) \in \Lambda(\beta)$. Notons $\mathbf{W}_{F,sc}(x)$ le sous-groupe de $\mathbf{W}^{aff}_{F,sc}$ engendré par les symétries associées aux éléments de $\Sigma^{aff}(x)$. L'action de $\mathbf{W}_{F,sc}(x)$ sur $\mathbf{A}_F$ fixe x. La projection $p_{W^\theta} : \mathbf{W}^{aff}_F \to W^\theta$ est injective sur $\mathbf{W}_{F,sc}(x)$. En effet, si $v, v' \in \mathbf{W}_{F,sc}(x)$ vérifient $p_{W^\theta}(v) = p_{W^\theta}(v')$, il existe $r \in R$ tel que $v' = rv$. Or v et v' fixent x et la seule translation qui fixe un point de $\mathbf{A}_F$ est 0. Donc $r = 0$ et $v = v'$. D'après Bruhat et Tits, l'ensemble $\Sigma(x)$ est égal à celui des racines de $\mathbb{T}_x$ dans $\mathbb{G}_x$. L'image de $\mathbf{W}_{F,sc}(x)$ par p_{W^θ} est le sous-groupe de W^θ engendré par les symétries relatives aux éléments de $\Sigma(x)$. Il en résulte qu'il s'identifie au groupe de Weyl de $\mathbb{G}_x$ relatif à $\mathbb{T}_x$.

On sait que l'ensemble des sous-groupes de Borel de $\mathbb{G}_x$ contenant $\mathbb{T}_x$ est en bijection avec l'ensemble $\mathcal{C}(x)$ des alcôves $C_{F,\dagger}$ de $\mathbf{A}_F$ dont l'adhérence contient x. Cette bijection se caractérise de la façon suivante. Soit $\mathbb{B}_x$ un sous-groupe de Borel de $\mathbb{G}_x$ contenant $\mathbb{T}_x$. Il lui correspond un sous-ensemble de racines positives $\Sigma(x)^+ \subset \Sigma(x)$. Notons $\Sigma^{aff}(x)^+$ son image réciproque dans $\Sigma^{aff}(x)$. Alors l'alcôve associée à $\mathbb{B}_x$ est l'unique alcôve $C_{F,\dagger} \in \mathcal{C}(x)$ dont l'adhérence contient x et telle que, pour tout $y \in C_{F,\dagger}$ et tout $\beta[\lambda] \in \Sigma^{aff}(x)^+$, on ait $\beta[\lambda](y) > 0$.

Fixons $C_{F,\dagger} \in \mathcal{C}(x)$. Montrons que

(2) l'application $v \mapsto v(C_{F,\dagger})$ est une bijection de $\mathbf{W}_{F,sc}(x)$ sur l'ensemble $\mathcal{C}(x)$.

En effet, le groupe de Weyl de $\mathbb{G}_x$ agit simplement et transitivement sur l'ensemble des sous-groupes de Borel de $\mathbb{G}_x$ contenant $\mathbb{T}_x$.

Montrons que

(3) $\mathbf{W}_{F,sc}(x)$ est le fixateur de x dans $\mathbf{W}^{aff}_{F,sc}$.

Soit $w \in \mathbf{W}^{aff}_{F,sc}$ tel que $w(x) = x$. Pour $C_{F,\dagger}$ comme ci-dessus, on a $w(C_{F,\dagger}) \in \mathcal{C}(x)$, donc il existe $w' \in \mathbf{W}_{F,sc}(x)$ tel que $w(C_{F,\dagger}) = w'(C_{F,\dagger})$. L'élément $w^{-1}w'$ de $\mathbf{W}^{aff}_{F,sc}$ conserve alors $C_{F,\dagger}$ et on sait bien que cela entraîne $w^{-1}w' = 1$. Donc $w = w' \in \mathbf{W}_{F,sc}(x)$.

Supposons $x \in \bar{C}_F$. Notons $S(x)$ l'ensemble des $\beta \in \Delta_{a,F}$ telles que $\beta^{aff}(x) = 0$ et $S^{aff}(x) = \{\beta^{aff}; \beta \in S(x)\}$. D'après Bruhat et Tits, l'ensemble $S(x)$ est l'ensemble de racines simples de $\mathbb{G}_x$ associé au sous-groupe de Borel de ce groupe correspondant à l'alcôve C_F. Montrons que

(4) $\Sigma^{aff}(x)$ est l'ensemble des racines affines qui sont combinaisons linéaires à coefficients dans $\mathbb{Z}$ d'éléments de $S^{aff}(x)$.

Preuve. Il est clair que toute telle combinaison linéaire annule x. Inversement, soit $\gamma[\lambda] \in \Sigma^{aff}(x)$. Alors γ est une racine de $\mathbb{G}_x$ et s'écrit $\gamma = \sum_{\beta \in S(x)} n_\beta \beta$ avec des coefficients $n_\beta \in \mathbb{Z}$. Il existe $\lambda' \in \mathbb{R}$ tel que $\sum_{\beta \in S(x)} n_\beta \beta^{aff} = \gamma[\lambda']$. Puisque $\gamma[\lambda]$ et $\gamma[\lambda']$ s'annulent toutes deux en x, on a $\lambda = \lambda'$. Cela prouve (4).

7 Un lemme préliminaire

Puisque $\hat{G}$ est adjoint, $\hat{T}^\theta$ est connexe et égal à $X_*(\hat{T})^\theta \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}^\times$. Rappelons que l'on note $\hat{T}^\theta_u$ le sous-groupe des éléments unitaires de $\hat{T}^\theta$, c'est-à-dire $\hat{T}^\theta_u = X_*(\hat{T})^\theta \otimes_{\mathbb{Z}} U^1$. L'homomorphisme $z \mapsto e^{2\pi i z}$ identifie $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ à U^1. On en déduit des isomorphismes

$$\hat{T}^\theta_u \simeq (X_*(\hat{T})^\theta \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R})/X_*(\hat{T})^\theta \simeq (X_*(\mathbf{T}_F) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R})/X_*(\mathbf{T}_F) = \mathbf{A}_F/X_*(\mathbf{T}_F).$$

L'intersection $(1-\theta)(\hat{T}) \cap \hat{T}^\theta$ est finie, contenue dans $\hat{T}^\theta_u$. On a introduit au paragraphe **??** un sous-groupe R de $\mathbf{A}_F$, qui contient $X_*(\mathbf{T}_F)$.

Lemme. *L'isomorphisme ci-dessus* $\hat{T}^\theta_u \simeq \mathbf{A}_F/X_*(\mathbf{T}_F)$ *envoie* $(1-\theta)(\hat{T}) \cap \hat{T}^\theta$ *sur* $R/X_*(\mathbf{T}_F)$.

Preuve. Pour $\alpha \in \Delta$, notons E_α le sous-corps de E formé des points fixes par $\gamma^{e(\alpha)}$. On a $[E_\alpha : F] = \frac{1}{e(\alpha)}$ et $val_F(E_\alpha^\times) = \frac{1}{e(\alpha)}\mathbb{Z}$. L'homomorphisme $val_{\mathbf{T}}$ introduit au paragraphe **??** est équivariant pour les actions de Γ_F, donc l'image de $\mathbf{T}(F) = \mathbf{T}(\bar{F})^{\Gamma_F}$ est contenue dans $\mathbf{A}_F$. D'après Bruhat et Tits, R est égal à cette image, cf. [**?**] 1.2. Introduisons la base $(\check{\varpi}_\alpha)_{\alpha\in\Delta}$ de $X_*(\mathbf{T})$ duale de Δ. L'automorphisme θ agit encore sur cette base. Pour $\alpha \in \Delta$, on pose $\check{\varpi}_{\alpha_{res}} = \sum_{n=1,\dots,e(\alpha)} \check{\varpi}_{\theta^n(\alpha)}$. Alors $(\check{\varpi}_\beta)_{\beta\in\Delta_{res}}$ est la base de $X_*(\mathbf{T}_F)$ duale de Δ_{res}. Puisque $\mathbf{T}$ est déployé sur E, on a $\mathbf{T}(E) = X_*(\mathbf{T}) \otimes_{\mathbb{Z}} E^\times$. Soit $t = \prod_{\alpha\in\Delta} \check{\varpi}_\alpha(t_\alpha) \in \mathbf{T}(E)$, avec des coefficients $t_\alpha \in E^\times$. On a $t \in \mathbf{T}(F)$ si et seulement si $\gamma(t_\alpha) = t_{\theta(\alpha)}$ pour tout $\alpha \in \Delta$. Cela entraîne $t_\alpha \in E_\alpha^\times$. Inversement, la condition peut être réalisée pour tout $t_\alpha \in E_\alpha^\times$, en supposant que $t_{\theta^n(\alpha)} = \gamma^n(t_\alpha)$ pour $n = 1, ..., e(\alpha) - 1$. Il s'en déduit que l'image $val_{\mathbf{T}}(\mathbf{T}(F))$, c'est-à-dire R, est égale à $\oplus_{\beta\in\Delta_{res}} \frac{1}{e(\beta)}\mathbb{Z}\check{\varpi}_\beta$. Soit maintenant $z = \prod_{\alpha\in\Delta} \check{\varpi}_\alpha(z_\alpha)$ un élément de $\hat{T}$, avec des $z_\alpha \in \mathbb{C}^\times$. Il appartient à $(1-\theta)(\hat{T})$ si et seulement s'il existe $z' = \prod_{\alpha\in\Delta} \check{\varpi}_\alpha(z'_\alpha)$ tel que $z = (1-\theta)(z') = \prod_{\alpha\in\Delta} \check{\varpi}_\alpha(z'_\alpha z'^{-1}_{\theta^{-1}(\alpha)})$. Cela équivaut à ce que, pour tout $\alpha \in \Delta$, on ait $\prod_{n=0,\dots,e(\alpha)-1} z_{\theta^n(\alpha)} = 1$. D'autre part, z appartient à $\hat{T}^\theta$ si et seulement si $z_{\theta^n(\alpha)} = z_\alpha$ pour tout $\alpha \in \Delta$ et tout $n = 1, ..., e(\alpha) - 1$. Donc $z \in (1-\theta)(\hat{T}) \cap \hat{T}^\theta$ si et seulement si, outre cette dernière condition, on a de plus $z_\alpha \in \mu_{e(\alpha)}(\mathbb{C})$. Autrement dit, $t = \prod_{\beta\in\Delta_{res}} \check{\varpi}_\beta(z_\beta)$ avec des $z_\beta \in \mu_{e(\beta)}(\mathbb{C})$. En comparant avec le calcul de R, on obtient le lemme. □

Il se déduit du lemme un isomorphisme

$$\iota : \hat{T}^\theta_u/((1-\theta)(\hat{T}) \cap \hat{T}^\theta) \to \mathbf{A}_F/R.$$

Les groupes W^θ et Γ_k agissent naturellement sur ces deux groupes et ι entrelace ces actions. Notons $p_{\mathbf{A}_F} : \mathbf{A}_F \to \mathbf{A}_F/R$ la projection naturelle. Le groupe $\mathbf{W}_F^{aff}$ agit sur $\mathbf{A}_F$ et W^θ agit sur $\mathbf{A}_F/R$. On a la relation $p_{\mathbf{A}_F}(v(x)) = (p_{W^\theta}(v))(p_{\mathbf{A}_F}(x))$ pour tous $x \in \mathbf{A}_F$ et $v \in \mathbf{W}_F^{aff}$. On note $p_{\hat{T}^\theta} : \hat{T}^\theta_u \to \hat{T}^\theta_u/((1-\theta)(\hat{T}) \cap \hat{T}^\theta)$ la projection naturelle.

Résumons ces constructions par le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc} \hat{T}^\theta_u & \simeq & \mathbf{A}_F/X_*(\mathbf{T}_F) & \leftarrow & \mathbf{A}_F \\ p_{\hat{T}^\theta} \downarrow & & \downarrow & & \downarrow p_{\mathbf{A}_F} \\ \hat{T}^\theta_u/((1-\theta)(\hat{T}) \cap \hat{T}^\theta) & \overset{\iota}{\simeq} & \mathbf{A}_F/R & = & \mathbf{A}_F/R \end{array}$$

8 Identification de deux sous-groupes de W^θ

Soient $s \in \hat{T}^\theta_u$ et $x \in \mathbf{A}_F$. Supposons que $\iota \circ p_{\hat{T}^\theta}(s) = p_{\mathbf{A}_F}(x)$. Posons $\tilde{s} = s\theta$ et $\hat{G}' = Z_{\hat{G}}(\tilde{s})^0$. On définit comme au paragraphe **??** l'ensemble de racines $\Sigma(\hat{G}')$ et le

groupe de Weyl $W^{\hat{G}'} \subset W^\theta$. On a défini le sous-groupe $\mathbf{W}_{F,sc}(x) \subset \mathbf{W}_F^{aff}$ au paragraphe **??** ainsi que l'ensemble de racines $\Sigma(x)$.

Lemme. *On a l'égalité $\Sigma(x) = \Sigma(\hat{G}')$. Le groupe $W^{\hat{G}'}$ est égal à l'image de $\mathbf{W}_{F,sc}(x)$ par p_{W^θ}.*

Preuve. Remarquons que, pour $\beta \in \Sigma_{res}$, l'homomorphisme $\beta^{e(\beta)} : \hat{T}_u^\theta \to U^1$ se descend en un homomorphisme encore noté $\beta^{e(\beta)}$ sur $\hat{T}_u^\theta/((1-\theta)(\hat{T}) \cap \hat{T}^\theta)$. En effet, soit $\alpha \in \Sigma$ tel que $\alpha_{res} = \beta$. Alors $\beta^{e(\beta)}$ coïncide sur $\hat{T}^\theta$ avec $\prod_{n=1,\dots,e(\alpha)} \theta^n(\alpha)$. Il est clair que cet homomorphisme est trivial sur $(1-\theta)(\hat{T})$. Cela prouve l'assertion. Via l'isomorphisme $\hat{T}_u^\theta \simeq \mathbf{A}_F/X_*(\mathbf{T}_F)$, β correspond à l'homomorphisme $\beta_{mod\,\mathbb{Z}}$ qui fait commuter le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{A}_F & \stackrel{\beta}{\to} & \mathbb{R} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbf{A}_F/X_*(\mathbf{T}_F) & \stackrel{\beta_{mod\,\mathbb{Z}}}{\to} & \mathbb{R}/\mathbb{Z} \simeq U^1 \end{array}$$

Via la remarque précédente, l'application $e(\beta)\beta_{mod\,\mathbb{Z}}$ se descend en un homomorphisme $e(\beta)\beta_{mod\,\mathbb{Z}} : \mathbf{A}_F/R \to \mathbb{R}/\mathbb{Z}$. En vertu de l'hypothèse $\iota \circ p_{\hat{T}^\theta}(s) = p_{\mathbf{A}_F}(x)$, on a alors les équivalences

$$\beta(s)^{e(\beta)} = 1 \iff e(\beta)\beta(x) \in \mathbb{Z},\ \beta(s)^{e(\beta)} = -1 \iff e(\beta)\beta(x) \in \frac{1}{2} + \mathbb{Z}.$$

Il suffit alors de comparer la description de $\Sigma(\hat{G}')$ donnée au paragraphe **??** et celle de l'ensemble $\Lambda(\beta)$ donnée au paragraphe **??** pour constater que $\beta \in \Sigma(\hat{G}')$ si et seulement si $\beta(x)$ appartient à $\Lambda(\beta)$, autrement dit $\beta \in \Sigma(x)$. Cela prouve la première assertion de l'énoncé.

Le groupe $\mathbf{W}_{F,sc}(x)$ est engendré par les symétries associées aux racines affines appartenant à $\Sigma^{aff}(x)$, cf. paragraphe **??**. L'image de $\mathbf{W}_{F,sc}(x)$ par p_{W^θ} est le sous-groupe de W^θ engendré par les symétries associées aux éléments de $\Sigma(x)$. D'autre part, $W^{\hat{G}'}$ est le sous-groupe de W^θ engendré par les symétries associées aux éléments de $\Sigma(\hat{G}')$. La seconde assertion de l'énoncé résulte donc de la première. □

9 L'ensemble *Endo*

Rappelons que l'on a défini le groupe Ω_F au paragraphe 6 et que Γ_k agit sur $\mathbf{A}_F$ par un homomorphisme $\sigma \mapsto \sigma_G$. Considérons l'ensemble $\underline{Endo}$ des couples $(\omega_\star, x)$ tels que

$\omega_\star$ est une application continue de Γ_k dans Ω_F telle que l'application $\sigma \mapsto \sigma_\star := \omega_\star(\sigma)\sigma_G$ soit un homomorphisme (à valeurs dans le groupe d'automorphismes de $\mathbf{A}_F$) ;

x est un élément de $\bar{C}_F$;

on a $\sigma_\star(x) = x$ pour tout $\sigma \in \Gamma_k$.

Deux éléments $(\omega_{\star,1}, x_1)$ et $(\omega_{\star,2}, x_2)$ de $\underline{Endo}$ sont dits équivalents s'il existe $\omega \in \Omega_F$ de sorte que $\omega(x_1) = x_2$ et $\sigma_{\star,2} = \omega\sigma_{\star,1}\omega^{-1}$ pour tout $\sigma \in \Gamma_k$. On note *Endo* l'ensemble des classes d'équivalence.

Le groupe $\Theta \times \Gamma_k$ agit naturellement sur $I(\mathbf{G})$ et Γ_k agit sur $I(\mathbf{G})/\Theta$. Notons $I(\mathbf{G})/(\Theta \times \Gamma_k)$ l'ensemble commun d'orbites et $i(\mathbf{G}, \theta \times \Gamma_k)$ son nombre d'éléments. Soit $(\omega_\star, x) \in \underline{Endo}$. De l'action $\sigma \mapsto \sigma_\star$ de Γ_k sur $\mathbf{A}_F$ se déduit une action algébrique de Γ_k sur $\mathbf{T}_F$ (on remplace $\omega_\star(\sigma)$ par $p_{W^\theta}(\omega_\star(\sigma))$). On note cette action $\sigma \mapsto \sigma_{\star,alg}$. Cette action conserve $\Delta_{a,F}$ et $S(x)$. Montrons que

(1) le nombre d'orbites de cette action dans $\Delta_{a,F} - S(x)$ a au moins $i(\mathbf{G}, \theta \times \Gamma_k)$ éléments.

Notons $\xi : \Delta_{a,F} \to I(\mathbf{G})/\Theta$ l'application qui, à $\beta \in \Delta_{a,F}$, associe l'élément $\mathrm{j} \in I(\mathbf{G})/\Theta$ tel que $\beta \in \Delta_{a,F,\mathrm{j}}$. Munissons $\Delta_{a,F}$ de l'action $\sigma \mapsto \sigma_{\star,alg}$ de Γ_k et $I(\mathbf{G})/\Theta$ de l'action $\sigma \mapsto \sigma_G$. Alors ξ est équivariante pour ces actions. Décomposons x en $x = \prod_{\mathrm{j} \in I(\mathbf{G})/\Theta} x_{\mathrm{j}}$ où $x_{\mathrm{j}} \in \bar{C}_{F,\mathrm{j}}$. Pour tout j, l'ensemble $\Delta_{a,F,\mathrm{j}} - S(x_{\mathrm{j}})$ n'est pas vide. Donc la restriction de ξ à $\Delta_{a,F} - S(x)$ est surjective. L'assertion (1) en résulte.

On dit que $(\omega_\star, x)$ est elliptique si le nombre d'orbites de l'action $\sigma \mapsto \sigma_{\star,alg}$ dans $\Delta_{a,F} - S(x)$ est égal à $i(\mathbf{G}, \theta \times \Gamma_k)$. On note $\underline{Endo}_{ell}$ l'ensemble des couples elliptiques et $Endo_{ell}$ l'ensemble de leurs classes d'équivalence.

10 Construction de pré-données endoscopiques

Soit $(\omega_\star, x) \in \underline{Endo}$. Fixons $s \in \hat{T}^\theta_u$ tel que $\iota \circ p_{\hat{T}^\theta}(s) = p_{\mathbf{A}_F}(x)$ et posons $\tilde{s} = s\theta$. Pour $\sigma \in \Gamma_k$, posons $u(\sigma) = p_{W^\theta}(\omega_\star(\sigma))$. Relevons l'application $\sigma \mapsto u(\sigma)$ en une application continue $n : \Gamma_k \to Norm_{\hat{G}^\theta}(\hat{T}^\theta)$. Pour $\sigma \in \Gamma_k$, l'égalité $\sigma_\star(x) = x$ et les propriétés d'entrelacement de l'isomorphisme ι et de nos différentes projections impliquent l'égalité $u(\sigma) \circ \sigma_G(s) \in s(1-\theta)(\hat{T})$. Donc $n(\sigma)\sigma_G(s)n(\sigma)^{-1} \in s(1-\theta)(\hat{T})$. Fixons une application continue $t : \Gamma_k \to \hat{T}$ de sorte que $n(\sigma)\sigma_G(s)n(\sigma)^{-1} = st(\sigma)^{-1}\theta(t(\sigma))$ pour tout $\sigma \in \Gamma_k$. Posons $\tilde{s} = s\theta$ et $g(\sigma) = t(\sigma)n(\sigma)$ pour tout $\sigma \in \Gamma_k$. Des applications $\sigma \mapsto n(\sigma), g(\sigma)$ etc... se déduisent de mêmes applications continues définies sur le groupe de Weil W_k (par composition avec l'homomorphisme $W_k \to \Gamma_k$). Parce que $n(w) \in \hat{G}^\theta$, l'égalité $n(w)w_G(s)n(w)^{-1} = st(w)^{-1}\theta(t(w))$ équivaut à

(1) $\tilde{s}(g(w), w) = (g(w), w)\tilde{s}$ pour tout $w \in W_k$.

Posons $\hat{G}' = Z_{\hat{G}}(\tilde{s})^0$ et définissons $\mathcal{G}' = \{(hg(w), w); w \in W_k, h \in \hat{G}'\}$. Cet ensemble ne dépend pas des choix de $n(w)$ et $t(w)$. En effet $n(w)$ est uniquement déterminé modulo $\hat{T}^\theta \subset \hat{G}'$ et $t(w)$ l'est aussi car l'élément $(1-\theta)(t(w))$ est uniquement déterminé.

Lemme. *Le couple $(\mathcal{G}', \tilde{s})$ est une pré-donnée endoscopique s-unitaire de $({}^L G, \theta)$.*

Preuve. On voit que les éléments $n(1)$ et $t(1)$ appartiennent à $\hat{T}^\theta$, donc à $\hat{G}'$. D'où aussi $g(1) \in \hat{G}'$. Cela entraîne $\mathcal{G}' \cap \hat{G} = \hat{G}'$. D'après (1), on a la relation clé

(2) $\tilde{s}(g, w) = (g, w)\tilde{s}$ pour tout $(g, w) \in \mathcal{G}'$.

Il reste à prouver que $\mathcal{G}'$ est un groupe et que la projection $\mathcal{G}' \to W_k$ admet une section qui soit un homomorphisme continu. Le fait que l'application $\sigma \mapsto \sigma_\star$ est un homomorphisme implique que, pour $\sigma, \sigma' \in \Gamma_k$, on a $n(\sigma)\sigma(n(\sigma')) \in \hat{T}^\theta n(\sigma\sigma')$. Il en résulte que, pour $w, w' \in W_k$, on a la relation $g(w)w(g(w')) \in \hat{T}g(ww')$. Ecrivons $g(w)w(g(w')) = t_2(w, w')g(ww')$, avec $t_2(w, w') \in \hat{T}$. Parce que $(g(w), w)$, $(g(w'), w')$ et $(g(ww'), ww')$ vérifient tous les trois la relation (2), on a $t_2(w, w') \in \hat{T}^\theta$. Alors $(g(w), w)(g(w'), w') = (t_2(w, w')g(ww'), ww')$ appartient à $\mathcal{G}'$. Un argument analogue prouve que $(g(w), w)^{-1}$ appartient à $\mathcal{G}'$. D'autre part, la relation (2) implique que tout élément de $\mathcal{G}'$ normalise $\hat{G}'$. De ces propriétés résulte que $\mathcal{G}'$ est un groupe. L'application $w \mapsto (g(w), w)$ est une section continue de la projection $\mathcal{G}' \to W_k$. Ce n'est pas forcément un homomorphisme. Définissons une action de Γ_k sur $\hat{T}$ par $\sigma \mapsto \sigma_{G'} = u(\sigma) \circ \sigma_G$. Elle conserve $\hat{T}^\theta$. L'application $(w, w') \mapsto t_2(w, w')$ définie ci-dessus est par construction un 2-cocycle pour cette action, qui provient d'un 2-cocycle continu défini sur Γ_k. On a vu qu'elle prenait ses valeurs dans $\hat{T}^\theta$. Parce que ce groupe est un tore, ce cocycle est trivial, cf. [**?**] lemme 4. On peut donc choisir une application continue $w \mapsto t'(w)$ de W_k dans $\hat{T}^\theta$

dont le cobord soit t_2. L'application $w \mapsto (t'(w)^{-1}g(w), w)$ est alors un homomorphisme continu qui scinde la projection $\mathcal{G}' \to W_k$. Cela achève la démonstration. □.

La pré-donnée que l'on a construite dépend du choix de s. La proposition **??** montrera que sa classe d'équivalence n'en dépend pas.

11 Equivalences

Soient $(\mathcal{G}'_1, \tilde{s}_1)$ et $(\mathcal{G}'_2, \tilde{s}_2)$ deux pré-données endoscopiques de $({}^L G, \theta)$. Introduisons l'ensemble $Isom(\tilde{s}_1; \tilde{s}_2)$ des $g \in \hat{G}$ tels que $g\tilde{s}_1 g^{-1} = \tilde{s}_2$. Notons $Isom(\mathcal{G}'_1, \tilde{s}_1; \mathcal{G}'_2, \tilde{s}_2)$ l'ensemble des $g \in Isom(\tilde{s}_1; \tilde{s}_2)$ tels que $g\mathcal{G}'_1 g^{-1} = \mathcal{G}'_2$. Dans le cas où les deux pré-données sont égales, notons-les simplement $(\mathcal{G}', \tilde{s})$. Alors $Isom(\tilde{s}; \tilde{s}) = Z_{\hat{G}}(\tilde{s})$ et on note $Aut(\mathcal{G}', \tilde{s}) = Isom(\mathcal{G}', \tilde{s}; \mathcal{G}', \tilde{s})$. On a l'inclusion $\hat{G}' \subset Aut(\mathcal{G}', \tilde{s})$. Revenons au cas général où les pré-données ne sont pas supposées égales. Si $Isom(\tilde{s}_1; \tilde{s}_2)$, resp $Isom(\mathcal{G}'_1, \tilde{s}_1; \mathcal{G}'_2, \tilde{s}_2)$, est non vide, c'est un torseur à gauche sous le groupe $Z_{\hat{G}}(\tilde{s}_2)$, resp. $Aut(\mathcal{G}'_2, \tilde{s}_2)$.

Soient $(\omega_{\star,1}, x_1)$ et $(\omega_{\star,2}, x_2)$ deux éléments de $\underline{Endo}$. Notons $\Omega_F(x_1; x_2)$ l'ensemble des $\omega \in \Omega_F$ tels que $\omega(x_1) = x_2$. Notons $Isom(\omega_{\star,1}, x_1; \omega_{\star,2}, x_2)$ l'ensemble des $\omega \in \Omega_F(x_1; x_2)$ tels que $\omega\sigma_{\star,1}\omega^{-1} = \sigma_{\star,2}$ pour tout $\sigma \in \Gamma_k$. Si $(\omega_{\star,1}, x_1) = (\omega_{\star,2}, x_2)$, on note simplement $(\omega_\star, x)$ cet élément et on pose $\Omega_F(x) = \Omega_F(x; x)$ et $Aut(\omega_\star, x) = Isom(\omega_\star, x; \omega_\star, x)$. Revenons au cas général où les deux éléments ne sont pas supposés égaux. Si $\Omega_F(x_1; x_2)$, resp. $Isom(\omega_{\star,1}, x_1; \omega_{\star,2}, x_2)$, n'est pas vide, c'est un torseur à gauche sous le groupe $\Omega_F(x_2)$, resp $Aut(\omega_{\star,2}, x_2)$.

Proposition. *(i) Soient $(\omega_{\star,1}, x_1)$ et $(\omega_{\star,2}, x_2)$ deux éléments de $\underline{Endo}$ et soient $(\mathcal{G}'_1, \tilde{s}_1)$ et $(\mathcal{G}'_2, \tilde{s}_2)$ deux pré-données endoscopiques de $({}^L G, \theta)$. Supposons que, pour $i = 1, 2$, $(\mathcal{G}'_i, \tilde{s}_i)$ soit construite à partir de $(\omega_{\star,i}, x_i)$ comme dans le paragraphe **??**. Alors il existe une bijection entre les ensembles $\hat{G}'_2 \backslash Isom(\tilde{s}_1; \tilde{s}_2)$ et $\Omega_F(x_1; x_2)$, qui se restreint en une bijection entre les ensembles $\hat{G}'_2 \backslash Isom(\mathcal{G}'_1, \tilde{s}_1; \mathcal{G}'_2, \tilde{s}_2)$ et $Isom(\omega_{\star,1}, x_1; \omega_{\star,2}, x_2)$.*

*(ii) Soient $(\omega_\star, x) \in \underline{Endo}$ et $(\mathcal{G}', \tilde{s})$ une pré-donnée endoscopique de $({}^L G, \theta)$ construite à partir de $(\omega_\star, x)$ comme dans le paragraphe **??**. Alors il existe un isomorphisme de groupes de $\hat{G}' \backslash Z_{\hat{G}}(\tilde{s})$ sur $\Omega_F(x)$, qui se restreint en un isomorphisme de $\hat{G}' \backslash Aut(\mathcal{G}', \tilde{s})$ sur $Aut(\omega_\star, x)$.*

Preuve. On se place dans la situation de (i). Pour simplifier la notation, on pose $\boldsymbol{\mathcal{G}}'_i = (\mathcal{G}'_i, \tilde{s}_i)$ et $\mathbf{E}_i = (\omega_{\star,i}, x_i)$ pour $i = 1, 2$. On reprend les notations du paragraphe **??** en y ajoutant des indices i. Notons $W(\tilde{s}_1; \tilde{s}_2)$ l'ensemble des $u \in W^\theta$ tels que $u(s_1) \in s_2((1-\theta)(\hat{T}) \cap \hat{T}^\theta)$. Notons $W(\boldsymbol{\mathcal{G}}'_1; \boldsymbol{\mathcal{G}}'_2)$ l'ensemble des $u \in W(\tilde{s}_1; \tilde{s}_2)$ tels que $uu_1(\sigma)\sigma_G(u)^{-1} \in W^{\hat{G}'_2} u_2(\sigma)$ pour tout $\sigma \in \Gamma_k$. Montrons que

(1) le groupe $W^{\hat{G}'_2}$ agit à gauche sur $W(\tilde{s}_1; \tilde{s}_2)$ en conservant $W(\boldsymbol{\mathcal{G}}'_1; \boldsymbol{\mathcal{G}}'_2)$; cette actions est libre si $W(\tilde{s}_1; \tilde{s}_2)$ n'est pas vide ; il existe une bijection entre les ensembles $W^{\hat{G}'_2} \backslash W(\tilde{s}_1; \tilde{s}_2)$ et $\hat{G}'_2 \backslash Isom(\tilde{s}_1; \tilde{s}_2)$, qui se restreint en une bijection de $W^{\hat{G}'_2} \backslash W(\boldsymbol{\mathcal{G}}'_1; \boldsymbol{\mathcal{G}}'_2)$ sur $\hat{G}'_2 \backslash Isom(\boldsymbol{\mathcal{G}}'_1; \boldsymbol{\mathcal{G}}'_2)$.

Posons $N = Norm_{\hat{G}}(\hat{T}^\theta)$. Puisque $\hat{T}^\theta$ est un sous-tore maximal de $\hat{G}'_i$ pour $i = 1, 2$, on a l'égalité $Isom(\tilde{s}_1; \tilde{s}_2) = \hat{G}'_2(N \cap Isom(\tilde{s}_1; \tilde{s}_2))$. Il en résulte une bijection

$$\hat{G}'_2 \backslash Isom(\tilde{s}_1; \tilde{s}_2) \simeq Norm_{\hat{G}'_2}(\hat{T}^\theta) \backslash (N \cap Isom(\tilde{s}_1; \tilde{s}_2)).$$

Deux éléments de $N \cap Isom(\tilde{s}_1; \tilde{s}_2)$, resp. $Norm_{\hat{G}'_2}(\hat{T}^\theta)$, ont même image dans W^θ si et seulement s'ils diffèrent par multiplication à gauche par un élément de $\hat{T}^\theta$. En notant

$\underline{W}(\tilde{s}_1;\tilde{s}_2)$ l'image de $N\cap Isom(\tilde{s}_1;\tilde{s}_2)$ dans W^θ, on en déduit que $W^{\hat{G}'_2}$ agit à gauche sur $\underline{W}(\tilde{s}_1;\tilde{s}_2)$, que cette action est libre si cet ensemble n'est pas vide et que l'on a une bijection

$$\hat{G}'_2\backslash Isom(\tilde{s}_1;\tilde{s}_2)\simeq W^{\hat{G}'_2}\backslash\underline{W}(\tilde{s}_1;\tilde{s}_2).$$

De même, notons $\underline{W}(\boldsymbol{\mathcal{G}}'_1;\boldsymbol{\mathcal{G}}'_2)$ l'image dans W^θ de $N\cap Isom(\mathcal{G}'_1;\mathcal{G}'_2)$. On a une bijection

$$\hat{G}'_2\backslash Isom(\mathcal{G}'_1,\tilde{s}_1;\mathcal{G}'_2,\tilde{s}_2)\simeq W^{\hat{G}'_2}\backslash\underline{W}(\boldsymbol{\mathcal{G}}'_1,\boldsymbol{\mathcal{G}}'_2).$$

Alors (1) résulte des deux assertions suivantes

(2) on a l'égalité $W(\tilde{s}_1;\tilde{s}_2)=\underline{W}(\tilde{s}_1;\tilde{s}_2)$;

(3) on a l'égalité $W(\boldsymbol{\mathcal{G}}'_1;\boldsymbol{\mathcal{G}}'_2)=\underline{W}(\boldsymbol{\mathcal{G}}'_1;\boldsymbol{\mathcal{G}}'_2)$.

Soit $u\in W^\theta$, relevons u en un élément $n\in Norm_{\hat{G}^\theta}(\hat{T}^\theta)$. On a alors $n\tilde{s}_1n^{-1}=u(s_1)\theta$. L'élément u appartient à $\underline{W}(\tilde{s}_1;\tilde{s}_2)$ si et seulement s'il existe $t\in\hat{T}$ tel que $tn\in Isom(\tilde{s}_1;\tilde{s}_2)$. Cette dernière relation équivaut à $tn\tilde{s}_1n^{-1}t^{-1}=\tilde{s}_2$, ou encore à $u(s_1)t\theta(t)^{-1}=s_2$. Donc u appartient à $\underline{W}(\tilde{s}_1;\tilde{s}_2)$ si et seulement si $u(s_1)\in s_2(1-\theta)(\hat{T})$. Puisque s_2 et $u(s_1)$ appartiennent à $\hat{T}^\theta$, cela équivaut à $u(s_1)\in s_2((1-\theta)(\hat{T})\cap\hat{T}^\theta)$, c'est-à-dire $u\in W(\tilde{s}_1,\tilde{s}_2)$. Cela prouve (2).

Grâce à (2), les deux ensembles $W(\boldsymbol{\mathcal{G}}'_1;\boldsymbol{\mathcal{G}}'_2)$ et $\underline{W}(\boldsymbol{\mathcal{G}}'_1;\boldsymbol{\mathcal{G}}'_2)$ sont en tout cas contenus dans $W(\tilde{s}_1;\tilde{s}_2)$. Pour prouver (3), on peut supposer que $W(\tilde{s}_1;\tilde{s}_2)$ n'est pas vide. Soit $u\in W(\tilde{s}_1;\tilde{s}_2)$. Relevons u en un élément $n\in N\cap Isom(\tilde{s}_1;\tilde{s}_2)$. Alors u appartient à $\underline{W}(\boldsymbol{\mathcal{G}}'_1;\boldsymbol{\mathcal{G}}'_2)$ si et seulement s'il existe $t\in\hat{T}$ tel que, d'une part $tn\in Isom(\tilde{s}_1;\tilde{s}_2)$, d'autre part $tng_1(\sigma)\sigma_G(tn)^{-1}\in\hat{G}'_2g_2(\sigma)$ pour tout $\sigma\in\Gamma_k$. Puisque n lui-même appartient à $Isom(\tilde{s}_1,\tilde{s}_2)$, la première condition équivaut à $t\in\hat{T}^\theta$ et la deuxième condition est insensible à la multiplication par un tel élément. Celle-ci est donc : pour tout $\sigma\in\Gamma_k$, il existe $h(\sigma)\in\hat{G}'_2$ tel que $ng_1(\sigma)\sigma_G(n)^{-1}=h(\sigma)g_2(\sigma)$. Puisque tous ces éléments, excepté peut-être $h(\sigma)$, normalisent $\hat{T}^\theta$, il en est de même de $h(\sigma)$. En projetant dans W^θ, on obtient l'égalité $uu_1(\sigma)\sigma_G(u)^{-1}\in W^{\hat{G}'_2}u_2(\sigma)$. Donc $u\in W(\boldsymbol{\mathcal{G}}'_1;\boldsymbol{\mathcal{G}}'_2)$. Inversement, supposons $u\in W(\boldsymbol{\mathcal{G}}'_1;\boldsymbol{\mathcal{G}}'_2)$. Alors, pour tout $\sigma\in\Gamma_k$, il existe $u'(\sigma)\in Norm_{\hat{G}'_2}(\hat{T}^\theta)$ et $t(\sigma)\in\hat{T}$ de sorte que $ng_1(\sigma)\sigma_G(n)^{-1}=t(\sigma)u'(\sigma)g_2(\sigma)$. La conjugaison par le membre de gauche envoie $\sigma_G(s_2)\theta$ sur $\tilde{s}_2$ et il en est de même de la conjugaison par $u'(\sigma)g_2(\sigma)$. Donc la conjugaison par $t(\sigma)$ fixe $\tilde{s}_2$, donc $t(\sigma)\in\hat{T}^\theta\subset\hat{G}'_2$. Alors $ng_1(\sigma)\sigma_G(n)^{-1}\in\hat{G}'_2g_2(\sigma)$ ce qui entraîne, comme on l'a dit plus haut, que u appartient à $\underline{W}(\boldsymbol{\mathcal{G}}'_1;\boldsymbol{\mathcal{G}}'_2)$. Cela prouve (3), d'où (1).

Notons $\mathbf{W}_F^{aff}(x_1;x_2)$ l'ensemble des $v\in\mathbf{W}_F^{aff}$ tels que $v(x_1)=x_2$ et $\mathbf{W}_F^{aff}(\mathbf{E}_1;\mathbf{E}_2)$ le sous-ensemble des $v\in\mathbf{W}_F^{aff}(x_1;x_2)$ tels que, pour tout $\sigma\in\Gamma_k$, on ait la relation $v\omega_{\star,1}(\sigma)\sigma_G(v)^{-1}\in\mathbf{W}_{F,sc}(x_2)\omega_{\star,2}(\sigma)$. La projection p_{W^θ} est injective sur $\mathbf{W}_F^{aff}(x_1;x_2)$ car le seul élément de R qui fixe un point de $\mathbf{A}_F$ est 0. D'après le lemme **??**, on a l'égalité $p_{W^\theta}(\mathbf{W}_{F,sc}(x_2))=W^{\hat{G}'_2}$. Montrons que

(4) $p_{W^\theta}(\mathbf{W}_F^{aff}(x_1;x_2))=W(\tilde{s}_1;\tilde{s}_2)$, $p_{W^\theta}(\mathbf{W}_F^{aff}(\mathbf{E}_1;\mathbf{E}_2))=W(\boldsymbol{\mathcal{G}}'_1;\boldsymbol{\mathcal{G}}'_2)$.

Puisque $\iota\circ p_{\hat{T}^\theta}(s_i)=p_{\mathbf{A}_F}(x_i)$ pour $i=1,2$, un élément u appartient à $W(\tilde{s}_1;\tilde{s}_2)$ si et seulement si $u(x_1)\in x_2+R$. Cela équivaut à ce que u soit la projection dans W^θ d'un élément de $\mathbf{W}_F^{aff}(x_1;x_2)$. D'où la première égalité de (4). Soit $u\in W(\tilde{s}_1;\tilde{s}_2)$, relevons u en son unique antécédent $v\in\mathbf{W}_F^{aff}(x_1;x_2)$. Si $v\in\mathbf{W}_F^{aff}(\mathbf{E}_1;\mathbf{E}_2)$, on a $v\omega_{\star,1}(\sigma)\sigma_G(v)^{-1}\in\mathbf{W}_{F,sc}(x_2)\omega_{\star,2}(\sigma)$ pour tout $\sigma\in\Gamma_k$. En projetant dans W^θ, on obtient $uu_1(\sigma)\sigma_G(u)^{-1}\in W^{\hat{G}'_2}u_2(\sigma)$, donc u appartient à $W(\boldsymbol{\mathcal{G}}'_1;\boldsymbol{\mathcal{G}}'_2)$. Réciproquement, supposons que $u\in W(\boldsymbol{\mathcal{G}}'_1;\boldsymbol{\mathcal{G}}'_2)$. En relevant dans $\mathbf{W}_F^{aff}$ la relation précédente, on voit qu'il existe $r(\sigma)\in R$ et $v_x(\sigma)\in\mathbf{W}_{F,sc}(x_2)$ de sorte que $v\omega_{\star,1}(\sigma)\sigma_G(v)^{-1}=r(\sigma)v_x(\sigma)\omega_{\star,2}(\sigma)$. Le

membre de gauche envoie $\sigma_G(x_2)$ sur x_2 et il en est de même de $v_x(\sigma)\omega_{\star,2}(\sigma)$. Donc $r(\sigma)$ fixe x_2, d'où $r(\sigma)=0$. Alors v appartient à $\mathbf{W}_F^{aff}(\mathbf{E}_1;\mathbf{E}_2)$, ce qui démontre (4).

Le groupe $\mathbf{W}_{F,sc}(x_2)$ agit à gauche sur $\mathbf{W}_F^{aff}(x_1;x_2)$. Cette action préserve $\mathbf{W}_F^{aff}(\mathbf{E}_1;\mathbf{E}_2)$: l'action $\sigma_{\star,2}$ préservant x_2, elle conserve $\mathbf{W}_{F,sc}(x_2)$. Prouvons que

(5) $\mathbf{W}_{F,sc}(x_2)\backslash\mathbf{W}_F^{aff}(x_1;x_2)\simeq\Omega_F(x_1;x_2)$ et $\mathbf{W}_{F,sc}(x_2)\backslash\mathbf{W}_F^{aff}(\mathbf{E}_1;\mathbf{E}_2)\simeq Isom(\mathbf{E}_1,\mathbf{E}_2)$.

D'après **??**(2), on a $\Omega_F\cap\mathbf{W}_{F,sc}(x_2)=\{1\}$. On voit que $\Omega_F(x_1;x_2)=\Omega_F\cap\mathbf{W}_F^{aff}(x_1;x_2)$ et $Isom(\mathbf{E}_1;\mathbf{E}_2)=\Omega_F\cap\mathbf{W}_F^{aff}(\mathbf{E}_1;\mathbf{E}_2)$. Il suffit alors de prouver que $\mathbf{W}_F^{aff}(x_1;x_2)\subset\mathbf{W}_{F,sc}(x_2)\Omega_F$. Soit $v\in\mathbf{W}_F^{aff}(x_1;x_2)$. Alors v envoie C_F sur une alcôve dont l'adhérence contient x_2. D'après **??**(2), il existe donc $v_x\in\mathbf{W}_{F,sc}(x_2)$ tel que v_xv conserve C_F, c'est-à-dire $v_xv\in\Omega_F$. Cela prouve (5).

Le (i) de l'énoncé résulte de (1), (4) et (5).

Le (ii) est le cas particulier de (i) où $(\omega_{\star,1},x_1)=(\omega_{\star,2},x_2)$ et $(\mathcal{G}'_1,\tilde{s}_1)=(\mathcal{G}'_2,\tilde{s}_2)$. On affirme en plus que les bijections sont des homomorphismes de groupes. Mais c'est clair sur leurs constructions. □

12 La classification des pré-données endoscopiques s-unitaires pour $\hat{G}$ adjoint

Notons $\mathcal{E}ndo_u$ l'ensemble des classes d'équivalence de pré-données endoscopiques s-unitaires et notons $\mathcal{E}ndo_{ell}$ l'ensemble des classes de pré-données endoscopiques elliptiques. On a $\mathcal{E}ndo_{ell}\subset\mathcal{E}ndo_u$ d'après le lemme **??**. Dans le paragraphe **??**, on a associé une pré-donnée endoscopique s-unitaire à tout élément de $\underline{Endo}$. Il résulte du (i) de la proposition **??** que cette construction se descend en une application injective $\delta : Endo\to\mathcal{E}ndo_u$. Par abus de notations, on notera aussi δ l'application composée $\underline{Endo}\to Endo\xrightarrow{\delta}\mathcal{E}ndo_u$.

Théorème. *(i) L'application $\delta : Endo\to\mathcal{E}ndo_u$ est bijective.*
(ii) L'image de $Endo_{ell}$ par δ est égale à $\mathcal{E}ndo_{ell}$.

Preuve. Prouvons la surjectivité de δ. Considérons une pré-donnée endoscopique s-unitaire $(\mathcal{G}',\tilde{s})$. On suppose $\tilde{s}=s\theta$, avec $s\in\hat{T}^\theta$ et on utilise les constructions et notations du paragraphe **??**. Fixons $y\in\mathbf{A}_F$ tel que $p_{\mathbf{A}_F}(y)=\iota\circ p_{\hat{T}^\theta}(s)$. Le sous-groupe de Borel $\hat{B}\cap\hat{G}'$ de $\hat{G}'$ détermine un ensemble de racines positives dans $\Sigma(\hat{G}')$, lequel s'identifie d'après le lemme **??** à un ensemble de racines positives dans $\Sigma(y)$. Comme on l'a expliqué en **??**, cet ensemble détermine une alcôve $C_{F,y}$ de $\mathbf{A}_F$ dont l'adhérence contient y. Soit v l'unique élément de $\mathbf{W}_{F,sc}^{aff}$ tel que $v(C_{F,y})=C_F$, posons $x=v(y)$. On a $x\in\bar{C}_F$. Soit $\sigma\in\Gamma_k$. La relation **??**(2) entraîne que $u(\sigma)\sigma_G(y)\in y+R$. Il existe donc un unique élément $r(\sigma)\in R$ tel que $r(\sigma)u(\sigma)\sigma_G(y)=y$. Rappelons que l'automorphisme $ad_{g(w)}\circ w_G$ conserve $\hat{B}\cap\hat{G}'$ pour tout $w\in W_k$. En reprenant la construction de $C_{F,y}$, on voit que cela entraîne que $r(\sigma)u(\sigma)\sigma_G$ conserve $C_{F,y}$. Posons $\omega_\star(\sigma)=vr(\sigma)u(\sigma)\sigma_G(v)^{-1}$. Alors $\omega_\star(\sigma)\sigma_G(x)=x$ et $\omega_\star(\sigma)\sigma_G$ conserve C_F. Puisque σ_G conserve aussi cette alcôve, $\omega_\star(\sigma)$ la conserve aussi, donc $\omega_\star(\sigma)\in\Omega_F$. Montrons que

(1) le couple $(\omega_\star,x)$ appartient à $\underline{Endo}$.

Puisque l'application $\sigma\mapsto u(\sigma)$ est continue, l'application $\sigma\mapsto r(\sigma)$ déterminée par l'égalité $r(\sigma)u(\sigma)\sigma_G(y)=y$ l'est aussi. Donc l'application $\sigma\mapsto\omega_\star(\sigma)$ l'est également. Il reste à prouver que l'application $\sigma\mapsto\sigma_\star$ est un homomorphisme. Soient $\sigma,\sigma'\in\Gamma_k$. Par construction, on a $u(\sigma)\sigma_Gu(\sigma')\sigma'_G=u(\sigma\sigma')(\sigma\sigma')_G$. Il en résulte qu'il existe

$r_1(\sigma,\sigma') \in R$ de sorte que $r(\sigma)u(\sigma)\sigma_G r(\sigma')u(\sigma')\sigma'_G = r_1(\sigma,\sigma')r(\sigma\sigma')u(\sigma\sigma')(\sigma\sigma')_G$. Mais $r(\sigma)u(\sigma)\sigma_G r(\sigma')u(\sigma')\sigma'_G$ et $r(\sigma\sigma')u(\sigma\sigma')(\sigma\sigma')_G$ fixent y et le seul élément de R qui fixe un point de l'appartement est 0. Donc $r_1(\sigma,\sigma') = 0$ et $r(\sigma)u(\sigma)\sigma_G r(\sigma')u(\sigma')\sigma'_G = r(\sigma\sigma')u(\sigma\sigma')(\sigma\sigma')_G$. En conjuguant par v, on obtient que l'application $\sigma \mapsto \sigma_\star$ est un homomorphisme. Cela prouve (1).

Montrons que

(2) la classe d'équivalence de $(\mathcal{G}', \tilde{s})$ est égale à $\delta(\omega_\star, x)$.

Construisons une pré-donnée endoscopique associée à $(\omega_\star, x)$. Puisque la notation $(\mathcal{G}', \tilde{s})$ est déjà utilisée, on note cette pré-donnée $(\mathcal{G}'_\star, \tilde{s}_\star)$ et on affecte d'un indice $\star$ les objets utilisés dans sa construction.

Reprenons les notations de la construction ci-dessus de $(\omega_\star, x)$ et posons $u = p_{W^\theta}(v)$. Par définition, $s_\star$ est un élément de $\hat{T}^\theta_u$ tel que $\iota \circ p_{\hat{T}^\theta}(s_\star) = p_{\mathbf{A}_F}(x)$. On voit que l'on peut choisir $s_\star = u(s)$. Soit $\sigma \in \Gamma_k$. Par définition, $u_\star(\sigma)$ est l'image de $\omega_\star(\sigma)$ par p_{W^θ}. On voit que $u_\star(\sigma) = uu(\sigma)\sigma_G(u)^{-1}$. Relevons u en un élément $n \in Norm_{\hat{G}^\theta}(\hat{T}^\theta)$. Par définition, $n_\star(\sigma)$ est un élément de ce groupe qui relève $u_\star(\sigma)$. On peut choisir $n_\star(\sigma) = nn(\sigma)\sigma_G(n)^{-1}$. Comme on l'a dit au paragraphe **??**, des applications $\sigma \mapsto n_\star(\sigma)$, $\sigma \mapsto t_\star(\sigma)$ etc... se déduisent des applications similaires définies sur W_k. Soit $w \in W_k$. Posons $h_\star(w) = nt(w)n^{-1}t_\star(w)^{-1}$. On a $h_\star(w) \in \hat{T}$. L'égalité $n_\star(w) = nn(w)w_G(n)^{-1}$ équivaut à

$$(3) \qquad h_\star(w)g_\star(w) = ng(w)w_G(n)^{-1}.$$

Remarquons que, puisque $n \in \hat{G}^\theta$, l'égalité $s_\star = u(s)$ équivaut à $\tilde{s}_\star = n\tilde{s}n^{-1}$. Les actions $ad_{g(w)} \circ w_G$, resp. $ad_{g_\star(w)} \circ w_G$, fixent $\tilde{s}$, resp. $\tilde{s}_\star$. Il résulte de (3) que $ad_{h_\star(w)}$ fixe $\tilde{s}_\star$. Puisque $h_\star(w) \in \hat{T}$, cela implique que $h_\star(w) \in \hat{T}^\theta$. A fortiori $h_\star(w) \in \hat{G}'_\star$. L'égalité (3), vraie pour tout w, entraîne que $\mathcal{G}'_\star = n\mathcal{G}'n^{-1}$. Donc n définit une équivalence entre les pré-données $(\mathcal{G}', \tilde{s})$ et $(\mathcal{G}'_\star, \tilde{s}_\star)$. Cela prouve (2).

L'assertion (2) entraîne la surjectivité de δ. Cela achève la preuve du (i) de l'énoncé.

Soit $(\omega_\star, x) \in \underline{Endo}$, construisons une pré-donnée $(\mathcal{G}', \tilde{s})$ qui lui est associée. On utilise les notations du paragrephe **??**. On identifie $X_*(\hat{T}^\theta)$ à $X_*(\mathbf{T}_F)$. On dispose de l'action linéaire $\sigma \mapsto \sigma_{\star,alg}$ de Γ_k sur $X_*(\mathbf{T}_F)$, cf. paragraphe **??**. On dispose d'autre part de l'action $\sigma \mapsto \sigma_{G'}$ de W_k sur $X_*(\hat{T}^\theta) = X_*(\mathbf{T}_F)$. Comparons-les. Il faut prendre garde au fait que les termes $g(\sigma)$, $n(\sigma)$ etc... du paragraphe **??** ne sont pas ceux ainsi notés associés à $(\mathcal{G}', \tilde{s})$ au paragraphe **??**. En effet, l'action de $ad_{g(\sigma)} \circ \sigma_G$ préserve $\hat{G}'$ et $\hat{T}^\theta$ mais pas forcément $\hat{B} \cap \hat{G}'$. Mais, pour tout $\sigma \in \Gamma_k$, on peut choisir un élément $h(\sigma) \in Norm_{\hat{G}'}(\hat{T}^\theta)$ tel que $ad_{h(\sigma)g(\sigma)} \circ \sigma_G$ préserve ce groupe de Borel. En notant $u_h(\sigma)$ la projection de $h(\sigma)$ dans $W^{\hat{G}'}$, il résulte alors des définitions que l'on a l'égalité $\sigma_{G'} = u_h(\sigma)\sigma_{\star,alg}$. Cela entraîne que les deux actions $\sigma \mapsto \sigma_{G'}$ et $\sigma \mapsto \sigma_{\star,alg}$ coïncident sur $X_*(Z(\hat{G}')^0)$. Munissons $X_*(\mathbf{T}_F)$ de la deuxième action. Que $(\mathcal{G}', \tilde{s})$ soit elliptique équivaut à l'égalité $X_*(Z(\hat{G}')^0)^{\Gamma_k} = 0$, ou encore à $X^*(Z(\hat{G}')^0)^{\Gamma_k} = 0$. Le groupe $X_*(Z(\hat{G}')^0)$ est l'annulateur de $\Sigma(\hat{G}')$ dans $X_*(\mathbf{T}_F)$. En vertu de **??**(1) et de **??**(4), c'est aussi l'annulateur de $S(x)$. Pour tout $\mathbb{Z}$-module Y, notons $Y_\mathbb{Q} = Y \otimes_\mathbb{Z} \mathbb{Q}$. Pour tout ensemble fini A, notons $\mathbb{Q}[A]$ le $\mathbb{Q}$-espace vectoriel de base A. Si A est un sous-ensemble linéairement indépendant de Y, on a $\mathbb{Q}[A] \subset Y_\mathbb{Q}$. Le groupe $X^*_\mathbb{Q}(Z(\hat{G}')^0)$ s'identifie à $X^*_\mathbb{Q}(\mathbf{T}_F)/\mathbb{Q}[S(x)]$. Pour tout $\mathrm{j} \in I(\mathbf{G})/\Theta$, on a une surjection naturelle

$$\mathbb{Q}[\Delta_{a,F,\mathrm{j}}] \to X^*_\mathbb{Q}(\mathbf{T}_{F,\mathrm{j}}).$$

Son noyau est la droite portée par l'élément $l_\mathrm{j} = \sum_{\beta \in \Delta_{a,F,\mathrm{j}}} d(\beta)\beta$, cf. **??**(1). En sommant

les applications ci-dessus, on obtient la suite exacte

$$0 \to \oplus_{\mathrm{j}\in I(\mathbf{G})/\Theta}\mathbb{Q}[l_{\mathrm{j}}] \to \mathbb{Q}[\Delta_{a,F}] \to X^*_{\mathbb{Q}}(\mathbf{T}_F) \to 0.$$

L'action $\sigma \mapsto \sigma_{\star,alg}$ permute les éléments de $\Delta_{a,F}$ donc définit une action sur $\mathbb{Q}[\Delta_{a,F}]$. Les homomorphismes de la suite ci-dessus sont équivariants pour les actions galoisiennes. On déduit de la suite ci-dessus une suite

$$0 \to \oplus_{\mathrm{j}\in I(\mathbf{G})/\Theta}\mathbb{Q}[l_{\mathrm{j}}] \to \mathbb{Q}[\Delta_{a,F}]/\mathbb{Q}[S(x)] \to X^*_{\mathbb{Q}}(\mathbf{T}_F)/\mathbb{Q}[S(x)] \to 0.$$

Cette suite reste exacte. En effet, le seul point à vérifier est que le premier homomorphisme est injectif. Décomposons x en $x = \prod_{\mathrm{j}\in I(\mathbf{G})/\Theta} x_{\mathrm{j}}$. On a $S(x) = \sqcup_{\mathrm{j}\in I(\mathbf{G})/\Theta} S(x_{\mathrm{j}})$ et il suffit de vérifier que, pour tout j, l_{j} n'appartient pas à $\mathbb{Q}[S(x_{\mathrm{j}})]$. C'est clair car $\Delta_{a,F,\mathrm{j}} - S(x_{\mathrm{j}})$ n'est pas vide. De la suite précédente se déduit la suite encore exacte

$$0 \to (\oplus_{\mathrm{j}\in I(\mathbf{G})/\Theta}\mathbb{Q}[l_{\mathrm{j}}])^{\Gamma_k} \to (\mathbb{Q}[\Delta_{a,F}]/\mathbb{Q}[S(x)])^{\Gamma_k} \to (X^*_{\mathbb{Q}}(\mathbf{T}_F)/\mathbb{Q}[S(x)])^{\Gamma_k} \to 0.$$

Que $(\mathcal{G}', \tilde{s})$ soit elliptique équivaut à l'égalité $(X^*_{\mathbb{Q}}(\mathbf{T}_F)/\mathbb{Q}[S(x)])^{\Gamma_k} = 0$. Cela équivaut à l'égalité

$$dim((\oplus_{\mathrm{j}\in I(\mathbf{G})/\Theta}\mathbb{Q}[l_{\mathrm{j}}])^{\Gamma_k}) = dim((\mathbb{Q}[\Delta_{a,F}]/\mathbb{Q}[S(x)])^{\Gamma_k}).$$

L'action de Γ_k permute les éléments l_{j} donc la première dimension vaut $i(\mathbf{G}, \theta \times \Gamma_k)$. On a l'égalité $\mathbb{Q}[\Delta_{a,F}]/\mathbb{Q}[S(x)] = \mathbb{Q}[\Delta_{a,F} - S(x)]$ et l'action galoisienne permute les éléments de $\Delta_{a,F} - S(x)$. En notant $i(x)$ le nombre d'orbites de cette action dans $\Delta_{a,F} - S(x)$, on a donc $dim((\mathbb{Q}[\Delta_{a,F}]/\mathbb{Q}[S(x)])^{\Gamma_k}) = i(x)$. Donc $(\mathcal{G}', \tilde{s})$ est elliptique si et seulement si $i(\mathbf{G}, \theta \times \Gamma_k) = i(x)$, autrement dit si et seulement si $(\omega_\star, x)$ est elliptique. Cela prouve le (ii) de l'énoncé. □.

13 Equivalence presque partout

On suppose que k est un corps de nombres. Une pré-donnée endoscopique $(\mathcal{G}', \tilde{s})$ définie sur k se localise pour toute place $v \in V_k$ en une pré-donnée endoscopique $(\mathcal{G}'_v, \tilde{s})$ définie sur k_v. Notons plus précisément $\underline{Endo}_k$ et $\underline{Endo}_{k_v}$ les ensembles notés précédemment $\underline{Endo}$ relatifs au corps k, resp. k_v. Alors un élément $(\omega_\star, x) \in \underline{Endo}_k$ se localise en un élément $(\omega_{\star,v}, x)$ de $\underline{Endo}_{k_v}$.

Rappelons que l'on suppose que $\hat{G}$ est adjoint.

Théorème. *Soit $(\mathcal{G}'_1, \tilde{s}_1)$ et $(\mathcal{G}'_2, \tilde{s}_2)$ deux pré-données endoscopiques s-unitaires définies sur k. Supposons que, pour presque tout $v \in V_k$, les pré-données $(\mathcal{G}'_{1,v}, \tilde{s}_1)$ et $(\mathcal{G}'_{2,v}, \tilde{s}_2)$ soient équivalentes. Alors $(\mathcal{G}'_1, \tilde{s}_1)$ et $(\mathcal{G}'_2, \tilde{s}_2)$ sont équivalentes.*

Preuve. Grâce au (i) du théorème **??**, l'énoncé équivaut à l'assertion suivante :

(1) soient $(\omega_{\star,1}, x_1)$ et $(\omega_{\star,2}, x_2)$ deux éléments de $\underline{Endo}_k$; supposons que, pour presque tout $v \in V_k$, $(\omega_{\star,1,v}, x_1)$ et $(\omega_{\star,2,v}, x_2)$ soient équivalents ; alors $(\omega_{\star,1}, x_1)$ et $(\omega_{\star,2}, x_2)$ sont équivalents.

On va d'abord procéder à trois réductions. On a introduit l'ensemble $I(\mathbf{G})/(\Theta \times \Gamma_k)$ des orbites de l'action de Γ_k dans $I(\mathbf{G})/\Theta$. Pour $J \in I(\mathbf{G})/(\Theta \times \Gamma_k)$, posons $\mathbf{G}_J = \prod_{\mathrm{j}\in J} \mathbf{G}_{\mathrm{j}}$, c'est-à-dire que j parcourt les éléments de $I(\mathbf{G})/\Theta$ dans l'orbite J. Ce groupe est défini sur F et est stable par l'action de Γ_k. On a $\mathbf{G} = \prod_{J\in I(\mathbf{G})/(\Theta\times\Gamma_k)} \mathbf{G}_J$ et tous nos objets se décomposent conformément. Précisons nos notations en notant $\underline{Endo}_k(\mathbf{G})$

l'ensemble noté jusqu'ici $\underline{Endo}_k$. On a alors $\underline{Endo}_k(\mathbf{G}) = \prod_{J\in I(\mathbf{G})/(\Theta\times\Gamma_k)} \underline{Endo}_k(\mathbf{G}_J)$ et on voit qu'il suffit de démontrer l'assertion analogue à (1) pour chaque groupe $\mathbf{G}_J$. Cela nous ramène au cas où l'action de Γ_k dans $I(\mathbf{G})/\Theta$ n'a qu'une seule orbite, ce que l'on suppose désormais.

Fixons un élément $\mathrm{j}_0 \in I(\mathbf{G})/\Theta$ et introduisons l'extension k_0 de k telle que Γ_{k_0} soit le fixateur de j_0 dans Γ_k. L'action de Γ_{k_0} conserve $\mathbf{G}_{\mathrm{j}_0}$ et on peut définir les ensembles $\underline{Endo}_{k_0}(\mathbf{G}_{\mathrm{j}_0})$ et $Endo_{k_0}(\mathbf{G}_{\mathrm{j}_0})$. On a les égalités $\bar{C}_F = \prod_{jjinI(\mathbf{G})/\Theta} \bar{C}_{F,\mathrm{j}}$ et $\Omega_F = \prod_{\mathrm{j}\in I(\mathbf{G})/\Theta} \Omega_{F,\mathrm{j}}$. Soit $(\omega_\star, x) \in \underline{Endo}_k(\mathbf{G})$. Posons $x = \prod_{\mathrm{j}\in I(\mathbf{G})/\Theta} x_{\mathrm{j}}$ et, pour tout $\sigma \in \Gamma_k$, $\omega_\star(\sigma) = \prod_{\mathrm{j}\in I(\mathbf{G})/\Theta} \omega_{\star,\mathrm{j}}(\sigma)$. Notons $\omega_{\star,\mathrm{j}_0,k_0}$ la restriction de $\omega_{\star,\mathrm{j}_0}$ à Γ_{k_0}. Alors le couple $(\omega_{\star,\mathrm{j}_0,k_0}, x_{\mathrm{j}_0})$ appartient à $\underline{Endo}_{k_0}(\mathbf{G}_{\mathrm{j}_0})$. On a ainsi défini une application $\underline{Endo}_k(\mathbf{G}) \to \underline{Endo}_{k_0}(\mathbf{G}_{\mathrm{j}_0})$. Montrons que

(2) cette application se quotiente en une bijection $Endo_k(\mathbf{G}) \to Endo_{k_0}(\mathbf{G}_{\mathrm{j}_0})$.

Il s'agit d'un cas d'isomorphisme de Shapiro. Nous nous contenterons de donner la construction de l'application en sens opposé $\underline{Endo}_{k_0}(\mathbf{G}_{\mathrm{j}_0}) \to \underline{Endo}_k(\mathbf{G})$, en laissant le lecteur prouver que les deux applications se descendent en des isomorphismes réciproques entre $Endo_k(\mathbf{G})$ et $Endo_{k_0}(\mathbf{G}_{\mathrm{j}_0})$. Soit $(\omega_{\star,\mathrm{j}_0,k_0}, x_{\mathrm{j}_0}) \in \underline{Endo}_{k_0}(\mathbf{G}_{\mathrm{j}_0})$. Puisque $I(\mathbf{G})/\Theta$ forme une unique orbite sous l'action de Γ_k, on peut fixer pour tout $\mathrm{j} \in I(\mathbf{G})/\Theta$ un élément $\sigma_{\mathrm{j}} \in \Gamma_k$ tel que $\sigma_{\mathrm{j}}(\mathrm{j}_0) = \mathrm{j}$. Alors $\sigma_{\mathrm{j},G}$ transporte $\mathbf{G}_{\mathrm{j}_0}$ et tous les objets qui lui sont associés sur $\mathbf{G}_{\mathrm{j}}$ et tous les mêmes objets qui lui sont associés. L'ensemble $\{\sigma_{\mathrm{j}}; \mathrm{j} \in I(\mathbf{G})/\Theta\}$ est un ensemble de représentants du quotient Γ_k/Γ_{k_0}. Pour tout j, posons $x_{\mathrm{j}} = \sigma_{\mathrm{j},G}(x_{\mathrm{j}_0})$. Posons $x = \prod_{\mathrm{j}\in I(\mathbf{G})/\Theta} x_{\mathrm{j}}$. Soient $\sigma \in \Gamma_k$ et $\mathrm{j} \in I(\mathbf{G})/\Theta$. Il existe d'uniques $\mathrm{j}' \in I(\mathbf{G})/\Theta$ et $\sigma' \in \Gamma_{k_0}$ tels que $\sigma\sigma_{\mathrm{j}'} = \sigma_{\mathrm{j}}\sigma'$. Posons $\omega_{\star,\mathrm{j}}(\sigma) = \sigma_{\mathrm{j},G}(\omega_{\star,\mathrm{j}_0,k_0}(\sigma'))$. C'est un élément de $\Omega_{F,\mathrm{j}}$. Posons $\omega_\star(\sigma) = \prod_{\mathrm{j}\in I(\mathbf{G})/\Theta} \omega_{\star,\mathrm{j}}(\sigma)$. On vérifie que le couple $(\omega_\star, x)$ appartient à $\underline{Endo}_k(\mathbf{G})$. Cela définit l'application cherchée $\underline{Endo}_{k_0}(\mathbf{G}_{\mathrm{j}_0}) \to \underline{Endo}_k(\mathbf{G})$. Comme on l'a dit, on laisse le lecteur achever la preuve de (2).

Soit $v_0 \in V_{k_0}$ et notons v la restriction de v_0 à k. On a encore une application $\underline{Endo}_{k_v}(\mathbf{G}) \to \underline{Endo}_{k_{0,v_0}}(\mathbf{G}_{\mathrm{j}_0})$ qui s'inscrit dans le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \underline{Endo}_k(\mathbf{G}) & \to & \underline{Endo}_{k_0}(\mathbf{G}_{\mathrm{j}_0}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \underline{Endo}_{k_v}(\mathbf{G}) & \to & \underline{Endo}_{k_{0,v_0}}(\mathbf{G}_{\mathrm{j}_0}) \end{array}$$

L'application $\underline{Endo}_{k_v}(\mathbf{G}) \to \underline{Endo}_{k_{0,v_0}}(\mathbf{G}_{\mathrm{j}_0})$ ne vérifie pas forcément l'analogue de (2) car $I(\mathbf{G})/\Theta$ n'est pas forcément une unique orbite sous Γ_{k_v}. Il est toutefois clair que cette application se quotiente en une application $Endo_{k_v}(\mathbf{G}) \to Endo_{k_{0,v_0}}(\mathbf{G}_{\mathrm{j}_0})$. Dans la situation de (1), ces considérations impliquent que les images de $(\omega_{\star,1}, x_1)$ et $(\omega_{\star,2}, x_2)$ par l'application $\underline{Endo}_k(\mathbf{G}) \to \underline{Endo}_{k_0}(\mathbf{G}_{\mathrm{j}_0})$ sont encore localement équivalentes presque partout. Si nous supposons démontrée l'assertion (1) pour l'ensemble $\underline{Endo}_{k_0}(\mathbf{G}_{\mathrm{j}_0})$, ces images sont équivalentes et l'assertion (2) nous dit que les données initiales $(\omega_{\star,1}, x_1)$ et $(\omega_{\star,2}, x_2)$ le sont aussi. On est ramené à démontrer (1) dans le cas où $I(\mathbf{G})/\Theta$ est réduit à un unique élément, ce que nous supposons désormais.

Fixons $i_0 \in I(\mathbf{G})$. Soit n le plus petit entier strictement positif tel que $\theta^n(i_0) = i_0$. C'est un diviseur de l'ordre e de θ. Posons $e_0 = \frac{e}{n}$. L'automorphisme θ^n conserve $\mathbf{G}_{i_0}$ et on note θ_{i_0} sa restriction à ce groupe. L'automorphisme θ_{i_0} est d'ordre e_0. Notons F_0 le sous-corps de E fixé par γ^n. L'action de Γ_{F_0} conserve $\mathbf{G}_{i_0}$ et γ^n agit sur $X_*(\mathbf{T}_{i_0})$ comme θ_{i_0}. L'appartement $\mathbf{A}_F$ s'identifie à l'appartement similaire relatif au groupe $\mathbf{G}_{i_0}$ muni de son action de Γ_{F_0}. Puisque $I(\mathbf{G})/\Theta$ est réduit à un unique élément, on a $I(\mathbf{G}) = \{\theta^m(i_0); m = 0, ..., n-1\}$. Puisque l'action de Γ_k commute à θ, il existe un homo-

morphisme $a : \Gamma_k \to \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ tel que $\sigma_G(i_0) = \theta^{a(\sigma)}(i_0)$ pour tout $\sigma \in \Gamma_k$. L'automorphisme $\sigma_G\theta^{-a(\sigma)}$ conserve $\mathbf{G}_{i_0}$. On note $\sigma_{G_{i_0}}$ sa restriction à $\mathbf{G}_{i_0}$. Alors l'application $\sigma \mapsto \sigma_{G_{i_0}}$ munit $\mathbf{G}_{i_0}$ d'une action de Γ_k qui commute à θ_{i_0}. Les ensembles $\underline{Endo}_k(\mathbf{G}_{i_0})$ et $Endo_k(\mathbf{G}_{i_0})$ sont bien définis et il est immédiat qu'ils sont égaux à $\underline{Endo}_k(\mathbf{G})$ et $Endo_k(\mathbf{G})$. Remarquons qu'ici, contrairement à la deuxième réduction ci-dessus, ces égalités persistent quand on remplace k par un localisé k_v puisque c'est le corps F qui a changé, pas le corps k. Il nous suffit donc de démontrer l'assertion (1) pour le groupe $\mathbf{G}_{i_0}$. Cela nous ramène au cas où $\mathbf{G}$ est absolument simple, ce que l'on suppose désormais.

Dans le cas où $\theta = 1$, l'assertion (1) résulte de [**?**] propositions 1.6 et 2.2. Nous ne traitons ici que le cas $\theta \neq 1$. Le groupe Γ_k agit sur $\mathbf{G}$ par des automorphismes qui préservent $\boldsymbol{\mathcal{E}}$ et commutent à θ. Parce que $\theta \neq 1$ un tel automorphisme est une puissance de θ. En conséquence, l'action de Γ_k est triviale sur tout objet fixé par θ, en particulier l'action $\sigma \mapsto \sigma_G$ est triviale sur $\mathbf{A}_F$. Il en résulte que l'ensemble $Isom(\omega_{\star,1}, x_1; \omega_{\star,2}, x_2)$ défini au paragraphe **??** est celui des $\omega \in \Omega_F(x_1; x_2)$ tels que $\omega\omega_{\star,1}(\sigma)\omega^{-1} = \omega_{\star,2}(\sigma)$ pour tout $\sigma \in \Gamma_k$. Mais Ω_F est commutatif (il a au plus deux éléments sous notre hypothèse $\theta \neq 1$). L'équivalence de $(\omega_{\star,1}, x_1)$ et $(\omega_{\star,2}, x_2)$ équivaut donc à la réunion des conditions suivantes

(3) $\Omega_F(x_1, x_2) \neq \emptyset$;

(4) $\omega_{\star,1}(\sigma) = \omega_{\star,2}(\sigma)$ pour tout $\sigma \in \Gamma_k$.

De même, pour $v \in V_k$, l'équivalence de $(\omega_{\star,1,v}, x_1)$ et $(\omega_{\star,2,v}, x_2)$ équivaut à la réunion de (3) et de

(4)(v) $\omega_{\star,1,v}(\sigma) = \omega_{\star,2,v}(\sigma)$ pour tout $\sigma \in \Gamma_{k_v}$.

Puisque $\sigma \mapsto \omega_{\star,i}(\sigma)$ est un homomorphisme continu pour $i = 1, 2$, le théorème de Cebotarev implique que (4) est vérifié si et seulement si (4)(v) l'est pour presque tout v. Cela prouve (1) et le théorème. □

14 Equivalence faible

Le corps k est de nouveau un corps local de caractéristique nulle ou un corps de nombres. On a défini au paragraphe **??** la notion d'équivalence faible entre prédonnées endoscopiques. On note $\mathcal{E}ndo_{u,\flat}$ l'ensemble des classes d'équivalence faible de pré-données endoscopiques s-unitaires. C'est un quotient de $\mathcal{E}ndo_u$.

Pour $x \in \mathbf{A}_F$, on a défini l'ensemble $\Sigma^{aff}(x)$ au paragraphe **??**. Soient $(\omega_{\star,1}, x_1)$ et $(\omega_{\star,2}, x_2)$ deux éléments de $\underline{Endo}$. On dit qu'ils sont faiblement équivalents s'il existe $v \in \mathbf{W}_F^{aff}$ tel que

(1) $v(\Sigma^{aff}(x_2)) = \Sigma^{aff}(x_1)$;

(2) $v\omega_{\star,2}(\sigma)\sigma_G(v)^{-1} = \omega_{\star,1}(\sigma)$ pour tout $\sigma \in \Gamma_k$.

Remarque. La relation d'équivalence faible est moins fine que la relation d'équivalence. En effet, si $(\omega_{\star,1}, x_1)$ et $(\omega_{\star,2}, x_2)$ sont équivalents, il existe $\omega \in \Omega_F$ tel que $\omega(x_2) = x_1$ et $\omega\sigma_{\star,2}\omega^{-1} = \sigma_{\star,1}$ pour tout $\sigma \in \Gamma_k$. Ces deux relations impliquent respectivement les relations (1) et (2) pour $v = \omega$.

On note $Endo_\flat$ l'ensemble des classes d'équivalence faible dans dans $\underline{Endo}$. C'est un quotient de $Endo$.

Théorème. *La bijection $\delta : Endo \to \mathcal{E}ndo_u$ du théorème **??** se quotiente en une bijection $\delta_\flat : Endo_\flat \to \mathcal{E}ndo_{u,\flat}$.*

Preuve. Soient $(\omega_{\star,1}, x_1)$ et $(\omega_{\star,2}, x_2)$ deux éléments faiblement équivalents de $\underline{Endo}$. On effectue comme au paragraphe **??** la construction d'une pré-donnée endoscopique

$(\mathcal{G}'_1, \tilde{s}_1)$ associée à $(\omega_{\star,1}, x_1)$. On affecte les objets de la construction d'un indice 1. On va construire une pre-donnée $(\mathcal{G}'_2, \tilde{s}_2)$ associée à $(\omega_{\star,2}, x_2)$, dont on affecte les objets d'un indice 2. Rappelons que l'on a posé $\Sigma(x_1) = p_{\Sigma_{res}}(\Sigma^{aff}(x_1))$. Notons Y_* le sous-module des éléments $x_* \in X_*(\mathbf{T}_F)$ vérifiant les conditions :

$\beta(x_*) = 0$ pour tout $\beta \in \Sigma(x_1)$;

$\sigma_{\star,1,alg}(x_*) = x_*$ pour tout $\sigma \in \Gamma_k$.

Fixons $v \in \mathbf{W}_F^{aff}$ vérifiant (1) et (2), notons $u = p_{W^\theta}(v)$ son image dans W^θ et posons $y = v(x_2)$. Notons z l'élément de l'espace vectoriel $X_*(\mathbf{T}_F) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$ tel que $y = x_1 + z$. Pour $\beta[\lambda] \in \Sigma^{aff}(x_1)$, on a $\beta[\lambda](x_1) = 0$ et, d'après (1), $\beta[\lambda](y) = 0$. Donc $\beta(z) = 0$ pour tout $\beta \in \Sigma(x_1)$. De même, la propriété (2) entraîne que $\sigma_{\star,1,alg}(z) = 0$ pour tout $\sigma \in \Gamma_k$. Donc z appartient à $Y_* \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$. On a expliqué dans la preuve du (ii) du théorème **??** que Y_* s'identifiait à $X_*(Z(\hat{G}'_1)^0)^{\Gamma_k}$. De l'homomorphisme $t \mapsto e^{2\pi i t}$ se déduit un homomorphisme $Y_* \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R} \to Z(\hat{G}'_1)_u^{\Gamma_k,0}$. Notons ζ l'image de z. Alors $\iota \circ p_{\hat{T}^\theta}(\zeta s_1) = p_{\mathbf{A}_F}(y)$. Posons $s_2 = u^{-1}(\zeta s_1)$ et $\tilde{s}_2 = s_2\theta$. Alors s_2 vérifie la propriété $\iota \circ p_{\hat{T}^\theta}(s_2) = p_{\mathbf{A}_F}(x_2)$ requise dans la construction de la donnée $(\mathcal{G}'_2, \tilde{s}_2)$. Fixons $n \in Norm_{\hat{G}^\theta}(\hat{T}^\theta)$ relevant u. Alors $\tilde{s}_2 = n^{-1}\zeta\tilde{s}_1 n$. Soit $\sigma \in \Gamma_k$, posons $u_2(\sigma) = u^{-1}u_1(\sigma)\sigma_G(u)$. D'après (2), on a la propriété requise $u_2(\sigma) = p_{W^\theta}(\omega_{\star,2}(\sigma))$. Posons $n_2(\sigma) = n^{-1}n_1(\sigma)\sigma_G(n)$. C'est un relèvement de $u_2(\sigma)$ dans $Norm_{\hat{G}^\theta}(\hat{T}^\theta)$. Par définition, on a $n_1(\sigma)\sigma_G(s_1)n_1(\sigma)^{-1} = s_1t_1(\sigma)^{-1}\theta(t_1(\sigma))$. Puisque $\zeta \in Z(\hat{G}'_1)^{G_k,0}$, on a $n_1(\sigma)\sigma_G(\zeta)n_1(\sigma)^{-1} = \zeta$ donc aussi $n_1(\sigma)\sigma_G(\zeta s_1)n_1(\sigma)^{-1} = \zeta s_1 t_1(\sigma)^{-1}\theta(t_1(\sigma))$. Posons $t_2(\sigma) = n^{-1}t_1(\sigma)n$. Par un calcul simple, on voit que $n_2(\sigma)\sigma_G(s_2)n_2(\sigma)^{-1} = s_2t_2(\sigma)^{-1}\theta(t_2(\sigma))$. On a ainsi défini toutes les données de la construction de $(\mathcal{G}'_2, \tilde{s}_2)$. On a $n\tilde{s}_2n^{-1} = \zeta\tilde{s}_1$. Donc $n\hat{G}'_2n^{-1} = Z_{\hat{G}}(\zeta\tilde{s}_1)^0$. D'après le lemme **??**, l'ensemble de racines de $Z_{\hat{G}}(\zeta\tilde{s}_1)^0$ est $\Sigma(y)$. Mais $\Sigma(y) = \Sigma(x_1)$ d'après (1). En utilisant encore une fois le lemme **??**, on obtient l'égalité $Z_{\hat{G}}(\zeta\tilde{s}_1)^0 = \hat{G}'_1$. On a aussi $ng_2(\sigma)\sigma_G(n)^{-1} = g_1(\sigma)$ pour tout $\sigma \in \Gamma_k$. Alors n définit une équivalence faible entre les pré-données $(\mathcal{G}'_2, \tilde{s}_2)$ et $(\mathcal{G}'_1, \tilde{s}_1)$.

Inversement, soient $(\mathcal{G}'_1, \tilde{s}_1)$ et $(\mathcal{G}'_2, \tilde{s}_2)$ deux pré-données s-unitaires faiblement équivalentes. On suppose $\tilde{s}_i = s_i\theta$ pour $i = 1, 2$ avec $s_i \in \hat{T}^\theta$. Fixons $x \in \hat{G}$ tel que $x\tilde{s}_1x^{-1} \in \tilde{s}_2Z(\hat{G}'_2)^{\Gamma_k,0}$ et $x\mathcal{G}'_1x^{-1} = \mathcal{G}'_2$. On pose $\mathcal{G}'_3 = \mathcal{G}'_2$ et $\tilde{s}_3 = x\tilde{s}_1x^{-1}$. Pour $i = 1, 2, 3$, il correspond à la pré-donnée $(\mathcal{G}'_i, \tilde{s}_i)$ un couple $(\omega_{\star,i}, x_i) \in \underline{Endo}$. Les pré-données $(\mathcal{G}'_1, \tilde{s}_1)$ et $(\mathcal{G}'_3, \tilde{s}_3)$ sont équivalentes. Ainsi qu'on l'a déjà prouvé, les couples $(\omega_{\star,1}, x_1)$ et $(\omega_{\star,3}, x_3)$ sont équivalents. Il suffit donc de prouver que les couples $(\omega_{\star,3}, x_3)$ et $(\omega_{\star,2}, x_2)$ sont faiblement équivalents. Quitte à remplacer $(\mathcal{G}'_1, \tilde{s}_1)$ par $(\mathcal{G}'_3, \tilde{s}_3)$, on est ramené au cas où $\mathcal{G}'_1 = \mathcal{G}'_2$ et $\tilde{s}_1 \in \tilde{s}_2Z(\hat{G}'_2)^{\Gamma_k,0} = \tilde{s}_2Z(\hat{G}'_1)^{\Gamma_k,0}$. On suppose ces conditions vérifiées. On construit un couple $(\omega_{\star,1}, x_1)$ associé à $(\mathcal{G}'_1, \tilde{s}_1)$ comme dans la preuve du théorème **??**. On note y_1, v_1 et $r_1(\sigma)$ les objets utilisés dans cette construction. On va construire un couple $(\omega_{\star,2}, x_2)$ associé à $(\mathcal{G}'_2, \tilde{s}_2)$ et on notera par des indices 2 les objets utilisés dans cette construction.

Soit $\zeta \in Z(\hat{G}'_1)^{\Gamma_k,0}$ tel que $\tilde{s}_2 = \zeta\tilde{s}_1$. Puisque nos deux données pré-endoscopiques sont s-unitaires, ζ l'est aussi, c'est-à-dire $\zeta \in Z(\hat{G}'_1)_u^{\Gamma_k,0}$. Le groupe $X_*(Z(\hat{G}'_1)^0)$ s'identifie à celui des $x_* \in X_*(\mathbf{T}_F)$ tels que $\beta(x_*) = 0$ pour tout $\beta \in \Sigma(y_1)$. Le groupe $X_*(Z(\hat{G}'_1)^{\Gamma_k,0})$ s'identifie au groupe Y_* des $x_* \in X_*(\mathbf{T}_F)$ vérifiant la condition précédente et de plus $u_1(\sigma)\sigma_G(x_*) = x_*$ pour tout $\sigma \in \Gamma_k$. Comme plus haut, il y a un homomorphisme surjectif $Y_* \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R} \to Z(\hat{G}'_1)_u^{\Gamma_k,0}$. On fixe $z \in Y_* \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$ dont l'image par cet homomorphisme est ζ. On pose $y_2 = y_1 + z$. On a bien $p_{\mathbf{A}_F}(y_2) = \iota \circ p_{\hat{T}^\theta}(s_2)$. Le lemme **??** et l'égalité $\hat{G}'_1 = \hat{G}'_2$ impliquent que $\Sigma(y_2) = \Sigma(y_1)$. Pour β dans cet ensemble de racines et $\lambda \in \Lambda(\beta)$, on a $\beta[\lambda](y_1) = \beta[\lambda](y_2)$ puisque z est annulé par β. Donc $\Sigma^{aff}(y_1) = \Sigma^{aff}(y_2)$.

Soit $v_2 \in \mathbf{W}^{aff}_{F,sc}$ tel que $v_2(C_{F,y_2}) = C_F$. On pose $x_2 = v_2(y_2)$. Soit $\sigma \in \Gamma_k$. On sait que $r_1(\sigma)u_1(\sigma)\sigma_G(y_1) = y_1$. On a $u_1(\sigma) = u_2(\sigma)$ puisque $\mathcal{G}'_1 = \mathcal{G}'_2$. Puisque z est fixé par $u_1(\sigma)\sigma_G$, on en déduit $r_1(\sigma)u_2(\sigma)\sigma_G(y_2) = y_2$. Autrement dit, l'élément $r_2(\sigma)$ de la construction de $(\omega_{\star,2}, x_2)$ est égal à $r_1(\sigma)$. On a $\omega_{\star,2}(\sigma) = v_2 r_2(\sigma)u_2(\sigma)\sigma_G(v_2)^{-1}$. Cela achève la construction du couple $(\omega_{\star,2}, x_2)$. Posons $v = v_1 v_2^{-1}$. Il est clair que $v\omega_{\star,2}(\sigma)\sigma_G(v)^{-1} = \omega_{\star,1}(\sigma)$. On a aussi $v(\Sigma^{aff}(x_2)) = v_1(\Sigma^{aff}(y_2)) = v_1(\Sigma^{aff}(y_1)) = \Sigma^{aff}(x_1)$. Donc v définit une équivalence faible entre les couples $(\omega_{\star,1}, x_1)$ et $(\omega_{\star,2}, x_2)$. Cela achève la démonstration. □

15 Equivalence faible presque partout

On suppose que k est un corps de nombres. Rappelons que $\hat{G}$ est supposé adjoint.

Théorème. *Soit $(\mathcal{G}'_1, \tilde{s}_1)$ et $(\mathcal{G}'_2, \tilde{s}_2)$ deux pré-données endoscopiques s-unitaires de $({}^L G, \theta)$ définies sur k. Supposons que, pour presque tout $v \in V_k$, les pré-données $(\mathcal{G}'_{1,v}, \tilde{s}_1)$ et $(\mathcal{G}'_{2,v}, \tilde{s}_2)$ soient faiblement équivalentes. Alors les pré-données $(\mathcal{G}'_1, \tilde{s}_1)$ et $(\mathcal{G}'_2, \tilde{s}_2)$ sont faiblement équivalentes.*

Preuve. Grâce au théorème **??**, l'énoncé équivaut à l'assertion suivante :

(1) soient $(\omega_{\star,1}, x_1)$ et $(\omega_{\star,2}, x_2)$ deux éléments de $\underline{Endo}_k$; supposons que, pour presque tout $v \in V_k$, $(\omega_{\star,1,v}, x_1)$ et $(\omega_{\star,2,v}, x_2)$ soient faiblement équivalents ; alors $(\omega_{\star,1}, x_1)$ et $(\omega_{\star,2}, x_2)$ sont faiblement équivalents.

Une première partie de la preuve consiste à se ramener au cas où le groupe $\mathbf{G}$ est absolument simple. Elle est analogue à la réduction de la preuve du théorème **??** et nous laissons au lecteur le soin de vérifier que cette réduction vaut aussi pour l'équivalence faible. On suppose donc que $\mathbf{G}$ est absolument simple.

Le groupe Γ_k agit sur $\mathbf{T}_F$. On note k' l'extension de k telle que $\Gamma_{k'}$ soit le noyau de cette action. Si $\theta = 1$, c'est le noyau de l'action de Γ_k sur $\mathbf{G}$. Mais, supposons $\theta \neq 1$. Comme on l'a expliqué à la fin du paragraphe **??**, l'action de Γ_k sur $\mathbf{T}_F$ est triviale. On a donc $k' = k$ dans ce cas. Pour $i = 1, 2$, notons k_i l'extension de k telle que Γ_{k_i} soit le noyau de l'action $\sigma \mapsto \sigma_{\star,i}$. On a

(2) $k' \subset k_i$.

C'est trivial si $\theta \neq 1$ puisqu'alors $k' = k$. Si $\theta = 1$, on a $\sigma_{\star,i} = \omega_{\star,i}(\sigma)\sigma_G$. Mais σ_G est un automorphisme qui préserve $\boldsymbol{\mathcal{E}}$ tandis que $\omega_{\star,i}(\sigma)$ est l'action d'un élément du groupe de Weyl. Le produit de deux tels isomorphismes n'est l'identité que si tous deux sont l'identité. La condition $\sigma_{\star,i} = 1$ implique donc $\sigma_G = 1$, d'où (2).

On a aussi

(3) $k_1 = k_2$.

En effet, si $k_1 \neq k_2$, on peut supposer, quitte à permuter les indices, que $k_1 \not\subset k_2$. On peut alors trouver une place v de k dont le groupe de décomposition Γ_{k_v} est inclus dans Γ_{k_2} mais pas dans Γ_{k_1}. Alors l'action $\sigma_{\star,2}$ est triviale sur Γ_{k_v} mais l'action $\sigma_{\star,1}$ ne l'est pas. Les éléments $(\omega_{\star,1,v}, x_1)$ et $(\omega_{\star,2,v}, x_2)$ ne peuvent pas être faiblement équivalents, contrairement à notre hypothèse.

On pose simplement $K = k_1 = k_2$. On considère désormais que les actions de Γ_k sont définies sur $\Gamma_{K/k}$. Pour une place v de k, on note Γ_v son groupe de décomposition dans $\Gamma_{K/k}$. Montrons que

(4) on a l'égalité $\omega_{\star,1}(\sigma) = \omega_{\star,2}(\sigma)$ pour tout $\sigma \in \Gamma_{K/k'}$.

Soit $\sigma \in \Gamma_{K/k'}$. On peut fixer une place v tel que Γ_v soit le sous-groupe de $\Gamma_{K/k}$ engendré par σ. Puisque $(\omega_{\star,1,v}, x_1)$ et $(\omega_{\star,2,v}, x_2)$ sont faiblement équivalents, il existe

$w \in \mathbf{W}_F^{aff}$ tel que $w\omega_{\star,2}(\sigma)w^{-1} = \omega_{\star,1}(\sigma)$. On projette cette égalité dans Ω_F selon la décomposition $\mathbf{W}_F^{aff} = \mathbf{W}_{F,sc}^{aff} \rtimes \Omega_F$. En se rappelant que Ω_F est commutatif , on obtient l'égalité (4).

On pose simplement $\omega_\star(\sigma) = \omega_{\star,1}(\sigma) = \omega_{\star,2}(\sigma)$ pour $\sigma \in \Gamma_{K/k'}$.

Montrons que

(5) si l'extension galoisienne K/k est cyclique, (1) est vérifiée.

Si K/k est cyclique, on peut fixer une place v telle que $\Gamma_v = \Gamma_{K/k}$. Il suffit d'appliquer la définition de l'équivalence faible pour voir que $(\omega_{\star,1}, x_1)$ et $(\omega_{\star,2}, x_2)$ sont faiblement équivalents si et seulement si $(\omega_{\star,1,v}, x_1)$ et $(\omega_{\star,2,v}, x_2)$ le sont. D'où (5).

Pour $i = 1, 2$, l'application $\sigma \mapsto \omega_{\star,i}(\sigma)\sigma_G$ est un homomorphisme injectif de $\Gamma_{K/k}$ dans le groupe des automorphismes de $\mathbf{A}_F$ qui préservent C_F, c'est-à-dire dans le groupe $Aut(\mathcal{D}_{a,F})$ des automorphismes du diagramme $\mathcal{D}_{a,F}$, cf. **??**. Quand ce groupe est cyclique, l'extension K/k l'est aussi. Si $\theta \neq 1$, $Aut(\mathcal{D}_{a,F})$ est cyclique : il a au plus deux éléments. Supposons $\theta = 1$. Les seuls cas où $Aut(\mathcal{D}_{a,F})$ n'est pas cyclique sont les suivants :

$\mathbf{G}$ est de type A_{n-1} avec $n \geq 3$ (on préfère le choix de l'indice $n-1$ car il simplifiera les notations du paragraphe **??**) ;

$\mathbf{G}$ est de type D_n avec $n \geq 4$;

$\mathbf{G}$ est de type E_6.

On suppose l'une de ces hypothèses vérifiée. Sauf dans le cas où $\mathbf{G}$ est de type D_4, on a $[k' : k] \leq 2$. Montrons que

(6) si $[k' : k] \leq 2$, on peut supposer que $\sigma_{\star,1} = \sigma_{\star,2}$ pour tout $\sigma \in \Gamma_{K/k}$.

Cela résulte de (4) si $k' = k$. Supposons $k' \neq k$, donc k'/k quadratique. Fixons un élément $\sigma' \in \Gamma_{K/k} - \Gamma_{K/k'}$ et une place v de k telle que Γ_v contienne σ'. Puisque $(\omega_{\star,1,v}, x_1)$ et $(\omega_{\star,2,v}, x_2)$ sont faiblement équivalents, il existe $w \in \mathbf{W}_F^{aff}$ tel que $w\sigma'_{\star,2}w^{-1} = \sigma'_{\star,1}$. Ecrivons $w = w'\omega$, avec $w' \in \mathbf{W}_{F,sc}^{aff}$ et $\omega \in \Omega_F$. L'action σ'_G est un automorphisme de $\mathbf{G}$ conservant l'épinglage $\boldsymbol{\mathcal{E}}$. Il conserve $\mathbf{W}_{F,sc}^{aff}$ et Ω_F. Alors $\omega\sigma'_{\star,2}\omega^{-1}$ est de la forme $\omega'_{\star,2}(\sigma')\sigma'_G$, avec $\omega'_{\star,2}(\sigma') \in \Omega_F$ et $w\sigma'_{\star,2}w^{-1}$ est de la forme $w''\omega'_{\star,2}(\sigma')\sigma'_G$ avec $w'' \in \mathbf{W}_{F,sc}^{aff}$. L'égalité $w\sigma'_{\star,2}w^{-1} = \sigma'_{\star,1}$ équivaut à $w''\omega'_{\star,2}(\sigma')\sigma'_G = \omega_{\star,1}(\sigma')\sigma'_G$ et cette dernière implique $w'' = 1$ et $\omega'_{\star,2}(\sigma') = \omega_{\star,1}(\sigma')$. Mais l'énoncé du théorème est insensible au remplacement du couple $(\omega_{\star,2}, x_2)$ par un couple équivalent. On peut donc remplacer ce couple par son conjugué par ω. Les égalités précédentes montrent qu'alors, $\sigma'_{\star,2} = \sigma'_{\star,1}$. Puisque σ' et $\Gamma_{K/k'}$ engendrent $\Gamma_{K/k}$, l'assertion (4) entraîne que $\sigma_{\star,1} = \sigma_{\star,2}$ pour tout $\sigma \in \Gamma_{K/k}$. Cela prouve (6).

Sous l'hypothèse de (6), on supposera vérifiée la conclusion de cette assertion et on supprimera les indices $i = 1, 2$ dans les notations $\omega_{\star,i}$ et $\sigma_{\star,i}$. Dans les paragraphes suivants, on traitera séparément les trois cas possibles pour $\mathbf{G}$ (quatre en fait, car on traitera séparément le cas où $\mathbf{G}$ est de type D_4 et $[k' : k] \geq 3$).

16 Cas où G est de type A_{n-1}

Pour tout ensemble J, pour tout $y = (y_j)_{j\in J} \in \mathbb{R}^J$ et tout $r \in \mathbb{R}$, on pose $r + y = (r + y_j)_{j\in J}$. Cela définit une action "diagonale" de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}^J$. Posons $\epsilon = 0$ si n est pair et $\epsilon = \frac{1}{2}$ si n est impair. Posons $\mathbb{Z}_\epsilon = \epsilon + \mathbb{Z}$. Notons $\tilde{\mathbf{A}}_F$ l'ensemble des éléments $\tilde{y} = (y_j)_{j\in\mathbb{Z}_\epsilon} \in \mathbb{R}^{\mathbb{Z}_\epsilon}$ tels que $y_{j+n} = y_j - 1$ pour tout $j \in \mathbb{Z}_\epsilon$. L'appartement $\mathbf{A}_F$ s'identifie au quotient $\tilde{\mathbf{A}}_F/\mathbb{R}$ de $\tilde{\mathbf{A}}_F$ par l'action diagonale de $\mathbb{R}$. Les racines affines s'identifient aux applications $\tilde{y} = (y_j)_{j\in\mathbb{Z}_\epsilon} \mapsto \beta_{j,k}(\tilde{y}) = y_j - y_k$ pour les couples $(j, k) \in \mathbb{Z}_\epsilon$ tels que $k \notin j + n\mathbb{Z}$. Evidemment, $\beta_{j+an,k+bn} = \beta_{j,k} + b - a$ pour $a, b \in \mathbb{Z}$. Notons $\tilde{\mathbf{W}}_F^{aff}$ le groupe

des permutations w de $\mathbb{Z}_\epsilon$ telles que $w(j+n) = w(j) + n$ pour tout $i \in \mathbb{Z}_\epsilon$. Il agit sur $\tilde{\mathbf{A}}_F$ par $(w, (y_j)_{j\in\mathbb{Z}_\epsilon}) \mapsto (y'_j)_{j\in\mathbb{Z}_\epsilon}$ où $y'_j = y_{w^{-1}(j)}$. Notons $\tilde{\omega}$ l'élément de $\tilde{\mathbf{W}}_F^{aff}$ défini par $\tilde{\omega}(j) = j+1$ pour tout $i \in \mathbb{Z}_\epsilon$. L'action de $\tilde{\omega}^n$ sur $\tilde{\mathbf{A}}_F$ n'est autre que l'action diagonale de l'élément $1 \in \mathbb{R}$. Le groupe $\tilde{\omega}^{n\mathbb{Z}}$ engendré par $\tilde{\omega}^n$ est donc un sous-groupe distingué de $\tilde{\mathbf{W}}_F^{aff}$ isomorphe à $\mathbb{Z}$. Le groupe $\mathbf{W}_F^{aff}$ s'identifie au quotient $\tilde{\mathbf{W}}_F^{aff}/\tilde{\omega}^{n\mathbb{Z}}$. Notons $\tilde{C}_F$ le sous-ensemble des $(y_j)_{j\in\mathbb{Z}_\epsilon} \in \tilde{\mathbf{A}}_F$ tels que $y_j > y_{j+1}$ pour tout $j \in \mathbb{Z}_\epsilon$. Alors C_F s'identifie à l'image de $\tilde{C}_F$ dans $\mathbf{A}_F$. Notons ω l'image de $\tilde{\omega}$ dans $\mathbf{W}_F^{aff}$. Le groupe Ω_F s'identifie au groupe cyclique d'ordre n engendré par ω. Notons $\tilde{\tau}$ l'automorphisme de $\tilde{\mathbf{A}}_F$ défini par $\tilde{\tau}((y_j)_{j\in\mathbb{Z}_\epsilon}) = (y'_j)_{j\in\mathbb{Z}_\epsilon}$ avec $y'_j = -y_{-j}$ pour tout $i \in \mathbb{Z}_\epsilon$. Cet automorphisme $\tilde{\tau}$ se quotiente en un automorphisme τ de $\mathbf{A}_F$. On a $Out(\mathbf{G}) = \{1, \tau\}$ c'est-à-dire que l'unique élément non trivial de $Out(\mathbf{G})$ agit sur $\mathbf{A}_F$ par τ. On a l'égalité $\tau\omega = \omega^{-1}\tau$. On peut supposer $k' \neq k$ d'après **??**(5), donc k' est une extension quadratique de k. On a alors $\sigma_G = 1$ pour $\sigma \in \Gamma_{K/k'}$ et $\sigma_G = \tau$ pour $\sigma \in \Gamma_{K/k} - \Gamma_{K/k'}$. Si $K = k'$, K/k est cyclique et le théorème est démontré. On suppose que $K \neq k'$. Alors $\sigma \mapsto \omega_\star(\sigma)$ identifie $\Gamma_{K/k'}$ à un sous-groupe cyclique non trivial de Ω_F. On note m l'entier strictement positif divisant n tel que l'image de $\Gamma_{K/k'}$ soit engendrée par ω^m. On a $m < n$ et on pose $d = n/m$. On fixe un élément $\sigma' \in \Gamma_{K/k} - \Gamma_{K/k'}$ et on note σ'' l'élément de $\Gamma_{K/k'}$ tel que $\omega_\star(\sigma'') = \omega^m$. Les éléments σ' et σ'' engendrent $\Gamma_{K/k}$. On fixe des places v' et v'' de sorte que $\Gamma_{v'}$ contienne σ' et que $\Gamma_{v''}$ contienne σ'' (quitte à conjuguer ces groupes de décomposition).

Montrons que

(1) on peut supposer que $\omega_\star(\sigma'') = \omega^m$ et que, pour $i = 1, 2$, $\omega_\star(\sigma') = \omega^e$, où $e = 0$ si n est impair, $e \in \{0, 1\}$ si n est pair.

On a en tout cas $\omega_\star(\sigma') = \omega^e$ pour un entier e. L'énoncé du théorème est insensible au remplacement des couples $(\omega_{\star,i}, x_i)$, pour $i = 1, 2$, par des couples équivalents. Conjuguons ces deux couples par ω^a, avec $a \in \mathbb{Z}$. Cela ne change pas $\omega_\star(\sigma'')$ puisque $\omega^a\omega^m\omega^{-a} = \omega^m$. Cela remplace $\sigma'_\star$ par $\omega^a\sigma'_\star\omega^{-a} = \omega^{2a}\omega^e\sigma'_G$, autrement dit cela remplace e par $2a + e$. En choisissant convenablement a, on peut supposer la conclusion de (1) vérifiée.

On suppose désormais vérifiées les conditions de (1), on pose $\tilde{\tau}' = \tilde{\omega}^e\tilde{\tau}$ et $\tau' = \omega^e\tau$. On a donc $\sigma'_\star = \tau'$.

Pour $i = 1, 2$, relevons x_i en un élément $\tilde{x}_i = (x_{i,j})_{j\in\mathbb{Z}_\epsilon} \in \bar{\tilde{C}}_F$. L'élément x_i est fixé par $\omega_\star(\sigma'') = \omega^m$. Donc il existe $r \in \mathbb{R}$ tel que $\tilde{\omega}^m(\tilde{x}_i) = r + \tilde{x}_i$. Puisque $\tilde{\omega}^n(\tilde{x}_i) = 1 + \tilde{x}_i$, on a $r = \frac{1}{d}$, c'est-à-dire

(2) $\tilde{x}_{i,j+m} = \tilde{x}_{k,j} - \frac{1}{d}$ pour tout $j \in \mathbb{Z}_\epsilon$.

L'élément x_i est aussi fixé par τ'. Donc il existe $r \in \mathbb{R}$ tel que $\tilde{\tau}'(\tilde{x}_i) = r + \tilde{x}_i$, ou encore

(3) $\tilde{x}_{i,e-j} = -\tilde{x}_{i,j} + r$ pour tout $j \in \mathbb{Z}_\epsilon$.

Disons que deux éléments $j, k \in \mathbb{Z}_\epsilon$ sont i-équivalents si $\tilde{x}_{i,j} = \tilde{x}_{i,k}$. Parce que $\tilde{x}_i$ appartient à $\bar{\tilde{C}}_F$, c'est-à-dire $\tilde{x}_{i,j} \geq \tilde{x}_{i,j+1}$ pour tout $j \in \mathbb{Z}_\epsilon$, les classes de i-équivalence sont des intervalles, c'est-à-dire de la forme $\{j, j+1, ..., j+a\}$. D'après (2), ces intervalles sont de longueur inférieure ou égale à m. L'ensemble $\Sigma^{aff}(x_i)$ est celui des racines $\beta_{j,k}$ pour deux éléments i-équivalents distincts j et k. On note $\mathcal{I}_i$ l'ensemble des classes de i-équivalence.

Soit $\tilde{w} \in \tilde{\mathbf{W}}_F^{aff}$, notons w son image dans $\mathbf{W}_F^{aff}$. D'après ce que l'on vient de dire, on a

(4) $w(\Sigma^{aff}(x_2)) = \Sigma^{aff}(x_1)$ si et seulement si, pour tout sous-ensemble Δ de $\mathbb{Z}_\epsilon$, on a $\Delta \in \mathcal{I}_2$ si et seulement si $\tilde{w}(\Delta) \in \mathcal{I}_1$.

S'll en est ainsi, on note encore $\tilde{w} : \mathcal{I}_2 \to \mathcal{I}_1$ la bijection déduite de $\tilde{w}$.

Des calculs simples prouvent que

(5) on a l'égalité $w\omega_\star(\sigma'')\sigma''(w)^{-1} = \omega_\star(\sigma'')$ si et seulement si $\tilde{w}(j+m) = \tilde{w}(j) + m$ pour tout $j \in \mathbb{Z}_\epsilon$;

(6) on a l'égalité $w\sigma'_\star w^{-1} = \sigma'_\star$ si et seulement s'il existe $a \in \mathbb{Z}$ tel que $\tilde{w}(e-j) = e - \tilde{w}(j) + an$ pour tout $j \in \mathbb{Z}_\epsilon$.

L'hypothèse que nos couples sont faiblement équivalents en v'', resp. v', signifie qu'il existe $\tilde{w}$ vérifiant (4) et (5), resp. (4) et (6). Le théorème **??** sera prouvé si l'on montre qu'il existe $\tilde{w}$ vérifiant les trois conditions.

Soit $h \in \{1, ..., m\}$. Un intervalle Δ de $\mathbb{Z}_\epsilon$ de longueur h s'écrit $\{j, j+1, .., j+h-1\}$ pour un $j \in \mathbb{Z}_\epsilon$. Appelons centre de Δ et notons $c(\Delta)$ le nombre $j + \frac{h-1}{2}$. C'est un élément de $\frac{1}{2}\mathbb{Z}$. On a $c(a+\Delta) = a + c(\Delta)$ pour tout $a \in \mathbb{Z}$ et $c(\tilde{\tau}'(\Delta)) = e - c(\Delta)$. On a les équivalences

$$(7) \qquad \tilde{\tau}'(\Delta) = a + \Delta \iff c(\tilde{\tau}'(\Delta)) = c(a+\Delta) \iff c(\Delta) = \frac{a-e}{2}.$$

On utilisera plusieurs fois l'assertion évidente

(8) $\tilde{\tau}'(a+\Delta) = -a + \tilde{\tau}'(\Delta)$ pour tout $a \in \mathbb{Z}$.

Soit $i \in \{1, 2\}$. Pour $c \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}$, il y a au plus un élément de $\mathcal{I}_i$ de centre c. Pour $h \in \{1, ..., m\}$, notons $\mathcal{I}_i[h]$ l'ensemble des $\Delta \in \mathcal{I}_i$ de longueur h. Dans la suite, on définira divers sous-ensembles ou ensembles de sous-ensembles de $\mathcal{I}_i$. On ajoutera $[h]$ dans la notation pour désigner leurs variantes où l'on remplace $\mathcal{I}_i$ par $\mathcal{I}_i[h]$ dans les définitions. Notons K_i l'ensemble des $\Delta \in \mathcal{I}_i$ tels que $\tilde{\tau}'(\Delta) \in n\mathbb{Z} + \Delta$. Cet ensemble est stable par l'application $\Delta \mapsto n + \Delta$ d'après (8). Notons $\mathcal{K}_i$ l'ensemble des sous-ensembles de $\mathcal{I}_i$ de la forme $\mathbf{\Delta}^K = \{na + \Delta; a \in \mathbb{Z}\}$ où $\Delta \in K_i$. L'ensemble $\mathcal{K}_i$ a au plus deux éléments : si $\Delta \in K_i$, il existe $\Delta' \in n\mathbb{Z} + \Delta$ tel que $\tilde{\tau}'(\Delta') = \Delta'$ ou $\tilde{\tau}'(\Delta') = n + \Delta'$ et, d'après (7), chacune de ces égalités n'est vérifiée que pour au plus un élément de $\mathcal{I}_i$. Un élément $\tilde{w}$ vérifiant les conditions (4) et (6) détermine une bijection de K_2 sur K_1 qui se descend en une bijection de $\mathcal{K}_2$ sur $\mathcal{K}_1$ qui préserve les longueurs. On veut dire par là que pour tout $h \in \{1, ..., m\}$, elle se restreint en une bijection de $\mathcal{K}_2[h]$ sur $\mathcal{K}_1[h]$.

D'après (2), l'ensemble $\mathcal{I}_i$ est stable par l'application $\Delta \mapsto m + \Delta$. Notons $\mathcal{J}_i$ l'ensemble des sous-ensembles de $\mathcal{I}_i$ de la forme $\mathbf{\Delta} = \{ma + \Delta; a \in \mathbb{Z}\}$ où $\Delta \in \mathcal{I}_i$. C'est un ensemble fini. Un élément $\tilde{w}$ vérifiant les conditions (4) et (5) détermine une bijection de $\mathcal{J}_2$ sur $\mathcal{J}_1$ qui préserve les longueurs au même sens que ci-dessus.

D'après (3), l'ensemble $\mathcal{I}_i$ est stable par l'application $\tilde{\tau}'$. De cette application se déduit d'après (8) une permutation de $\mathcal{J}_i$ encore notée $\tilde{\tau}'$, qui préserve les longueurs. Notons $\mathcal{J}_{i,0}$ le sous-ensemble des $\mathbf{\Delta} \in \mathcal{J}_i$ qui contiennent un élément $\Delta \in K_i$. Il y a une application naturelle de $\mathcal{K}_i$ dans $\mathcal{J}_{i,0}$ qui, à $\mathbf{\Delta}^K = \{na + \Delta; a \in \mathbb{Z}\} \in \mathcal{K}_i$, associe l'ensemble $\mathbf{\Delta} = \{ma + \Delta; a \in \mathbb{Z}\} \in \mathcal{J}_{i,0}$. Cette application est surjective par définition et préserve les longueurs. Montrons que

(9) cette application est bijective si d est impair ;

(10) si d est pair, on a ou bien $\sharp\mathcal{K}_i = 2$ et $\sharp\mathcal{J}_{i,0} = 1$, ou bien $\sharp\mathcal{K}_i = \sharp\mathcal{J}_{i,0} = 0$; si $\sharp\mathcal{J}_{i,0} = 1$, l'unique élément de $\mathcal{J}_{i,0}$ contient un élément $\Delta \in \mathcal{I}_i$ tel que $\tilde{\tau}'(\Delta) = \Delta$.

Supposons que d est impair. L'assertion (9) est claire si $\sharp\mathcal{K}_i \leq 1$. Supposons $\sharp\mathcal{K}_i = 2$. Les deux éléments de $\mathcal{K}_i$ contiennent l'un un élément Δ tel que $\tilde{\tau}'(\Delta) = \Delta$, l'autre un élément Δ' tel que $\tilde{\tau}'(\Delta') = n + \Delta'$. Il s'agit de prouver que $\Delta' \notin m\mathbb{Z} + \Delta$. Si $\Delta' = ma + \Delta$ avec $a \in \mathbb{Z}$, on a $\tilde{\tau}'(\Delta') = -ma + \Delta = -2ma + \Delta'$. Mais $n \neq -2ma$ puisque d est impair. Cela prouve (9). Supposons d pair. Le même argument montre que

l'existence d'un élément Δ tel que $\tilde{\tau}'(\Delta) = \Delta$ équivaut à celle d'un élément Δ' tel que $\tilde{\tau}'(\Delta') = n + \Delta'$ et que, quand ces deux éléments existent, on a $\Delta' \in m\mathbb{Z} + \Delta$. Cela prouve (10).

D'après (9) et (10), l'existence d'une bijection de $\mathcal{K}_2$ sur $\mathcal{K}_1$ qui préserve les longueurs entraîne celle d'une bijection de $\mathcal{J}_{2,0}$ sur $\mathcal{J}_{1,0}$ qui préserve les longueurs. Notons

$\mathcal{J}_{i,1}$ le sous-ensemble des $\mathbf{\Delta} \in \mathcal{J}_i$ tels que $\tilde{\tau}'(\mathbf{\Delta}) = \mathbf{\Delta}$ mais $\mathbf{\Delta} \notin \mathcal{J}_{i,0}$;

$\mathcal{J}_{i,2}$ le sous-ensemble des $\mathbf{\Delta} \in \mathcal{J}_i$ tels que $\tilde{\tau}'(\mathbf{\Delta}) \neq \mathbf{\Delta}$.

Prouvons que

(11) $\mathcal{J}_{i,1} = \emptyset$ si d est impair ;

(12) $\sharp\mathcal{J}_{i,1} \leq 1$ si d est pair ; si $\sharp\mathcal{J}_{i,1} = 1$, l'unique élément de $\mathcal{J}_{i,1}$ contient un intervalle Δ tel que $\tilde{\tau}'(\Delta) = m + \Delta$;

(13) pour $k = 1, 2$, il existe une bijection de $\mathcal{J}_{2,k}$ sur $\mathcal{J}_{1,k}$ qui préserve les longueurs.

Grâce à (8), un élément $\mathbf{\Delta} \in \mathcal{J}_i$ tel que $\tilde{\tau}'(\mathbf{\Delta}) = \mathbf{\Delta}$ contient un intervalle Δ tel que $\tilde{\tau}'(\Delta) = \Delta$ ou $\tilde{\tau}'(\Delta) = m + \Delta$. Dans le premier cas, $\mathbf{\Delta} \in \mathcal{J}_{i,0}$. Cela suffit à impliquer (12). Si d est impair et si $\tilde{\tau}'(\Delta) = m + \Delta$, l'intervalle $\Delta' = \frac{1-d}{2}m + \Delta$ vérifie $\tilde{\tau}'(\Delta') = n + \Delta'$ donc encore $\mathbf{\Delta} \in \mathcal{J}_{i,0}$. Cela prouve (11). Soit $h \in \{1, ..., m\}$. L'existence d'une bijection de $\mathcal{J}_2$ sur $\mathcal{J}_1$ qui préserve les longueurs implique l'égalité

$$(14) \qquad \sharp\mathcal{J}_{2,0}[h] + \sharp\mathcal{J}_{2,1}[h] + \sharp\mathcal{J}_{2,2}[h] = \sharp\mathcal{J}_{1,0}[h] + \sharp\mathcal{J}_{1,1}[h] + \sharp\mathcal{J}_{1,2}[h].$$

On a déjà prouvé que $\sharp\mathcal{J}_{2,0}[h] = \sharp\mathcal{J}_{1,0}[h]$. Pour $i = 1, 2$, le nombre d'éléments de $\mathcal{J}_{i,2}[h]$ est pair puisque les éléments de $\mathcal{J}_{i,2}[h]$ se regroupent en sous-ensembles à deux éléments $\{\mathbf{\Delta}, \tilde{\tau}'(\mathbf{\Delta})\}$. Puisque $\mathcal{J}_{2,1}[h]$ et $\mathcal{J}_{1,1}[h]$ ont au plus un élément, l'assertion (13) résulte de l'égalité (14).

Pour $i = 1, 2$, notons $2l$ le nombre d'éléments de $\mathcal{J}_{i,2}$ (ce nombre ne dépendant pas de i). Fixons une famille d'intervalles $(\Delta_{i,2,s})_{s=1,...,l}$ de sorte que les chaînes d'intervalles $\{m\mathbb{Z} + \Delta_{i,2,s}; s = 1, ..., l\}$ et $\{m\mathbb{Z} + \tilde{\tau}'(\Delta_{i,2,s}); s = 1, ..., l\}$ soient toutes distinctes et qu'elles soient exactement les éléments de $\mathcal{J}_{i,2}$. D'après (13), on peut supposer que, pour tout $s = 1, ..., l$, $\Delta_{2,2,s}$ et $\Delta_{1,2,s}$ ont même longueur.

Pour $i = 1, 2$, à un élément $\mathbf{\Delta} \in \mathcal{J}_i$, associons le sous-ensemble $\underline{\mathbf{\Delta}}$ de $\mathbb{Z}_\epsilon$ réunion des intervalles contenus dans $\mathbf{\Delta}$. Pour $k = 0, 1, 2$, on note $J_{i,k}$ la réunion des $\underline{\mathbf{\Delta}}$ pour $\mathbf{\Delta} \in \mathcal{J}_{i,k}$. Nous allons maintenant définir un élément $\tilde{w} \in \tilde{\mathbf{W}}_F^{aff}$ vérifiant (4), (5) et (6).

Supposons d'abord d impair. Fixons un élément $\tilde{w}_0 \in \tilde{\mathbf{W}}_F^{aff}$ vérifiant (4) et (6) et notons a l'entier intervenant dans (6). Fixons une famille d'intervalles $(\Delta_{2,0,t})_{t=1,...,k}$ appartenant à K_2 de sorte que $\mathcal{K}_2$ soit la réunion disjointe des $\{nb + \Delta_{2,0,t}; b \in \mathbb{Z}\}$ quand t décrit $\{1, ..., k\}$ (on a $k \in \{0, 1, 2\}$). Pour $t = 1, ..., k$, posons $\Delta_{1,0,t} = \tilde{w}_0(\Delta_{2,0,t})$. Alors $\mathcal{K}_1$ est la réunion disjointe des $\{nb + \Delta_{1,0,t}; b \in \mathbb{Z}\}$ quand t décrit $\{1, ..., k\}$. Pour $i = 1, 2$, on a $J_{i,0} = \cup_{t=1,...,k} \cup_{b\in\mathbb{Z}} \{bm + j; j \in \Delta_{i,0,t}\}$, ces sous-ensembles étant disjoints. Pour $j \in J_{2,0}$, écrivons $j = bm + j'$, avec $b \in \mathbb{Z}$ et $j' \in \Delta_{2,0,t}$ pour un $t = 1, ..., k$. Posons $\tilde{w}(j) = bm + \tilde{w}_0(j')$. Pour $s = 1, ..., l$, on fixe arbitrairement une bijection $\tilde{w}$ de $\Delta_{2,2,s}$ sur $\Delta_{1,2,s}$. Pour $j \in J_{2,2}$, ou bien j s'écrit $bm + j'$ pour d'uniques éléments $b \in \mathbb{Z}$, $j' \in \cup_{s=1,...,l}\Delta_{2,2,s}$, ou bien j s'écrit $\tilde{\tau}'(bm + j')$ pour d'uniques tels éléments b et j'. Dans le premier cas, on pose $\tilde{w}(j) = bm + \tilde{w}(j')$. Dans le second cas, on pose $\tilde{w}(j) = \tilde{\tau}'\tilde{w}(bm + j') + an$. On vérifie aisément que $\tilde{w}$ vérifie (4), (5) et (6).

Supposons maintenant d pair. Si $\mathcal{J}_{2,0}$ et $\mathcal{J}_{1,0}$ ont tous deux un élément, on note, pour $i = 1, 2$, $\Delta_{i,0}$ l'unique élément de $\mathcal{I}_i$ tel que $\tilde{\tau}'(\Delta_{i,0}) = \Delta_{i,0}$. Les intervalles $\Delta_{2,0}$ et $\Delta_{1,0}$ ont même longueur et même centre donc sont égaux. On définit $\tilde{w} : \Delta_{2,0} \to \Delta_{1,0}$ comme l'identité. Pour $j \in J_{2,0}$, j s'écrit de façon unique $j = bm + j'$ avec $b \in \mathbb{Z}$ et $j' \in \Delta_{2,0}$ et on pose $\tilde{w}(j) = j = bm + \tilde{w}(j')$. Si $\mathcal{J}_{2,1}$ et $\mathcal{J}_{1,1}$ ont tous deux un élément, on note,

pour $i = 1, 2$, $\Delta_{i,1}$ l'unique élément de $\mathcal{I}_i$ tel que $\tilde{\tau}'(\Delta_{i,1}) = m + \Delta_{i,1}$. Comme ci-dessus, les intervalles $\Delta_{2,1}$ et $\Delta_{1,1}$ sont égaux. Ils sont stables par l'application $j \mapsto e - m - j$. On définit $\tilde{w} : \Delta_{2,1} \to \Delta_{1,1}$ comme l'identité. Pour $j \in J_{2,1}$, j s'écrit de façon unique $j = bm + j'$ avec $b \in \mathbb{Z}$ et $j' \in \Delta_{2,1}$ et on pose $\tilde{w}(j) = j = bm + \tilde{w}(j')$. Pour $s = 1, ..., l$, on fixe arbitrairement une bijection $\tilde{w}$ de $\Delta_{2,2,s}$ sur $\Delta_{1,2,s}$. Pour $j \in J_{2,2}$, ou bien j s'écrit $bm + j'$ pour d'uniques éléments $b \in \mathbb{Z}$, $j' \in \cup_{s=1,...,l} \Delta_{2,2,s}$, ou bien j s'écrit $\tilde{\tau}'(bm + j')$ pour d'uniques tels éléments b et j'. Dans le premier cas, on pose $\tilde{w}(j) = bm + \tilde{w}(j')$. Dans le second cas, on pose $\tilde{w}(j) = \tilde{\tau}'\tilde{w}(bm + j')$. On vérifie aisément que $\tilde{w}$ vérifie (4), (5) et (6), avec $a = 0$ dans la relation (6).

Comme on l'a dit, l'existence d'un tel $\tilde{w}$ prouve le théorème **??** dans le cas où $\mathbf{G}$ est de type A_{n-1}.

17 Cas où G est de type D_n avec $n \geq 4$ et $[k' : k] \leq 2$

On peut identifier :

l'appartement $\mathbf{A}_F$ à $\mathbb{R}^n$; pour $y \in \mathbb{R}^n$, on note y_j ses coordonnées pour $j = 1, ..., n$;

l'ensemble de racines Σ aux formes linéaires $y \mapsto \epsilon_j y_j + \epsilon_k y_k$ où $j, k \in \{1, ..., n\}$, $j \neq k$ et $\epsilon_j, \epsilon_k \in \{\pm 1\}$;

l'ensemble Δ des racines simples à $\{\beta_j; j = 1, ..., n\}$, où $\beta_j(y) = y_j - y_{j+1}$ pour $j = 1, ..., n-1$ et $\beta_n(y) = y_{n-1} + y_n$;

l'ensemble des racines affines aux applications $\beta[\lambda]$, où $\beta \in \Sigma$ et $\lambda \in \mathbb{Z}$;

l'ensemble Δ_a à $\{\beta_j^{aff}; j = 0, ..., n\}$ où $\beta_j^{aff} = \beta_j$ pour $j = 1, ..., n$, $\beta_0 \in \Sigma$ est définie par $\beta_0(y) = -y_1 - y_2$ et $\beta_0^{aff} = \beta_0[1]$;

l'alcôve C_F au sous-ensemble des $y \in \mathbf{A}_F$ tels que $\beta_j^{aff}(y) > 0$ pour tout $j = 0, ..., n$.

Notons $\mathfrak{S}_n$ le groupe des permutations de $\{1, ..., n\}$, E le groupe des $(\epsilon_j)_{j=1,...,n} \in \{\pm 1\}^n$ tels que $\prod_{j=1,...,n} \epsilon_j = 1$, et R le groupe des $(r_j)_{j=1,...,n} \in (\frac{1}{2}\mathbb{Z})^n$ tels que $r_j - r_k \in \mathbb{Z}$ pour tous j, k. Pour $u \in \mathfrak{S}_n$, $(\epsilon_j)_{i=1,...,n} \in E$ et $(r_j)_{j=1,...,n} \in R$, on définit une transformation w de $\mathbf{A}_F$ par

(1) $w(y)_j = \epsilon_j y_{u^{-1}(j)} + r_j$ pour tout $j = 1, ..., n$.

Le groupe $\mathbf{W}_F^{aff}$ est formé des transformations ainsi obtenues.

Notons ω l'élément de $\mathbf{W}_F^{aff}$ défini par $\omega(y)_j = y_j$ pour $j = 2, ..., n-1$, $\omega(y)_1 = -y_1 + 1$, $\omega(y)_n = -y_n$. Notons ω_0 l'automorphisme de $\mathbf{A}_F$ défini par $\omega_0(y)_j = -y_{n+1-j} + \frac{1}{2}$ pour $j = 1, ..., n$. Si n est pair, c'est un élément de $\mathbf{W}_F^{aff}$ et on pose $\omega' = \omega_0$. Si n est impair, on note ω' l'élément de $\mathbf{W}_F^{aff}$ défini par $\omega'(y)_j = -y_{n+1-j} + \frac{1}{2}$ pour $j = 1, ..., n-1$, $\omega'(y)_n = y_1 - \frac{1}{2}$.

Posons $\omega'' = \omega'\omega$. On a l'égalité $\Omega_F = \{1, \omega, \omega', \omega''\}$. Ce groupe est isomorphe à $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$ si n est pair, à $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ si n est impair (dans ce dernier cas, $\omega = \omega'^2$ et $\omega'' = \omega'^3 = \omega'^{-1}$). L'élément ω permute les racines affines β_0^{aff} et β_1^{aff}, β_{n-1}^{aff} et β_n^{aff} et fixe β_j^{aff} pour $j = 2, ..., n-2$. Si n est pair, l'élément ω' permute les racines affines β_j^{aff} et β_{n-j}^{aff} pour tout $j = 0, ..., n$. Si n est impair, on a $\beta_j^{aff}(\omega'(y)) = \beta_{n-j}^{aff}(y)$ pour $j = 0, ..., n-2$, $\beta_{n-1}^{aff}(\omega'(y)) = \beta_0^{aff}(y)$ et $\beta_n^{aff}(\omega'(y)) = \beta_1^{aff}(y)$.

Notons τ l'automorphisme de $\mathbf{A}_F$ défini par $\tau(y)_j = y_j$ pour $j = 1, ..., n-1$ et $\tau(y)_n = -y_n$. C'est l'action d'un élément de $Out(\mathbf{G})$ (l'unique élément non trivial si $n \neq 4$). Si $[k' : k] = 2$, on peut supposer qu'un élément $\sigma \in \Gamma_k - \Gamma_{k'}$ agit par $\sigma_G = \tau$. L'automorphisme τ commute à ω tandis que $\omega'\tau = \tau\omega''$. Sous notre hypothèse $[k' : k] \leq 2$, on peut supposer que l'homomorphisme $\sigma \mapsto \sigma_\star$ prend ses valeurs dans le sous-groupe $\Omega_F \rtimes \{1, \tau\}$ de $Aut(\mathcal{D}_{a,F})$ (c'est le groupe $Aut(\mathcal{D}_{a,F})$ tout entier si $n \neq 4$). Notons $\Gamma_\star$

son image. On peut supposer que $\Gamma_\star$ n'est pas cyclique, cf. **??**(5). Alors $\Gamma_\star$ est l'un des groupes suivants :

$\Omega_F \rtimes \{1, \tau\}$ tout entier ;

$\{1, \omega, \tau, \omega\tau\}$;

Ω_F si n est pair ;

$\{1, \omega, \omega'\tau, \omega''\tau\}$ si n est impair.

Remarquons que ω appartient toujours à $\Gamma_\star$. Soit $i = 1, 2$. L'élément x_i appartient à $\bar{C}_F$. Puisque $\omega \in \Gamma_\star$, on a $\omega(x_i) = x_i$, donc $\beta_0^{aff}(x_i) = \beta_1^{aff}(x_i)$ et $\beta_{n-1}^{aff}(x_i) = \beta_n^{aff}(x_i)$. Remarquons que cela entraîne que $\tau(x_i) = x_i$. Appelons i-intervalle un intervalle $\{j, j+1, ..., k\} \subset \{1, ..., n\}$ de longueur $k - j + 1 \geq 2$, tel que $x_{i,j} = x_{i,j+1} = ... = x_{i,k}$ et maximal pour ces propriétés. Remarquons que l'ensemble $\{1, ..., n\}$ tout entier n'est pas un i-intervalle. En effet, si c'en était un, $x_{i,j}$ serait indépendant de j. On aurait en particulier $\beta_1^{aff}(x_i) = \beta_{n-1}^{aff}(x_i) = 0$. Donc aussi $\beta_0^{aff}(x_i) = \beta_n^{aff}(x_i) = 0$, ce qui implique $x_{i,1} + x_{i,2} = 1$ et $x_{i,n-1} + x_{i,n} = 0$. Mais cela contredit la constance des coefficients $x_{i,j}$. S'il existe un i-intervalle contenant 1, resp. n, on le note J_i^-, resp. J_i^+. D'après la remarque précédente, si ces deux intervalles existent, on a $J_i^- \neq J_i^+$. On note $\mathcal{I}_i$ l'ensemble des i-intervalles ne contenant ni 1, ni n et on note ces intervalles dans l'ordre croissant $I_{i,1}, ..., I_{i,d_i}$. L'ensemble $\Sigma^{aff}(x_i)$ des racines affines s'annulant en x_i est formé des racines affines suivantes :

les racines $y \mapsto y_j - y_k$, pour j, k deux éléments distincts d'un même i-intervalle $I_{i,h}$;

si J_i^- existe, les racines affines $y \mapsto \epsilon_j(y_j - \frac{1}{2}) + \epsilon_k(y_k - \frac{1}{2})$ pour deux éléments distincts j, k de J_i^-, où $\epsilon_j, \epsilon_k \in \{\pm 1\}$;

si J_i^+ existe, les racines affines $y \mapsto \epsilon_j y_j + \epsilon_k y_k$ pour deux éléments distincts j, k de J_i^+, où $\epsilon_j, \epsilon_k \in \{\pm 1\}$.

Soit $w \in \mathbf{W}_F^{aff}$ que l'on écrit sous la forme (1). On vérifie que

(2) $w(\Sigma^{aff}(x_2)) = \Sigma^{aff}(x_1)$ si et seulement si les conditions suivantes sont vérifiées :

$d_1 = d_2$; u induit une bijection encore notée u de $\mathcal{I}_2$ sur $\mathcal{I}_1$; pour $I \in \mathcal{I}_1$, les fonctions $j \mapsto \epsilon_j$ et $j \mapsto r_j$ sont constantes sur I ;

u induit une bijection encore notée u de $\{J_2^-, J_2^+\}$ sur $\{J_1^-, J_1^+\}$; si $u(J_2^-) = J_1^-$, on a $r_j = \frac{1-\epsilon_j}{2}$ pour tout $j \in J_1^-$; si $u(J_2^+) = J_1^+$, on a $r_j = 0$ pour tout $j \in J_1^+$; si $u(J_2^-) = J_1^+$, on a $r_j = -\frac{1}{2}\epsilon_j$ pour tout $j \in J_1^+$; si $u(J_2^+) = J_1^-$, on a $r_j = \frac{1}{2}$ pour tout $j \in J_1^-$.

Remarque. Comme on l'a dit, les intervalles J_2^+ etc... peuvent ne pas exister. Les ensembles notés ci-dessus $\{J_2^-, J_2^+\}$ etc... ont pour éléments ceux de ces intervalles qui existent, ils ont au plus deux éléments mais peuvent en avoir moins.

Supposons d'abord que $\Gamma_\star \neq \{1, \omega, \tau, \omega\tau\}$. Alors $\Gamma_\star$ contient un élément δ de l'ensemble $\{\omega', \omega'', \omega'\tau, \omega''\tau\}$. Un tel élément est le produit d'un élément de $\{1, \omega, \tau, \omega\tau\}$ et de l'automorphisme ω_0. On choisit un élément $\sigma \in \Gamma_{K/k}$ tel que $\sigma_\star = \delta$. Pour $i = 1, 2$, on a $\sigma_\star(x_i) = x_i$. Puisque x_i est aussi fixé par ω et τ, il est fixé par ω_0. On voit que cela entraîne que l'ensemble des i-intervalles est conservé par la permutation $j \mapsto n+1-j$ de $\{1, ..., n\}$. Donc J_i^- existe si et seulement si J_i^+ existe et, si c'est le cas, ces deux intervalles ont même nombre d'éléments. Soit v une place de k telle que Γ_v contienne σ. Puisque les couples $(\omega_{\star,1,v}, x_1)$ et $(\omega_{\star,2,v}, x_2)$ sont faiblement équivalents, on peut fixer $w' \in \mathbf{W}_F^{aff}$ tel que $w'(\Sigma^{aff}(x_2)) = \Sigma^{aff}(x_1)$ et w' commute à δ. Ecrivons w' sous la forme (1), en ajoutant des $'$ aux différents termes. Supposons d'abord que J_2^- existe. D'après (2) et ce que l'on vient de dire, J_2^+, J_1^- et J_1^+ existent aussi et tous ces intervalles ont même nombres d'éléments. Notons l ce nombre commun. On a $J_2^- \cup J_2^+ = \{1, ..., l\} \cup \{n - l + 1, ..., n\} = J_1^- \cup J_1^+$. D'après (2), u' conserve $\{1, ..., l\} \cup \{n - l + 1, ..., n\}$ donc aussi $\{l + 1, ..., n - l\}$. No-

tons u l'élément de $\mathfrak{S}_n$ qui coïncide avec u' sur $\{l+1,...,n-l\}$ et avec l'identité sur $\{1,...,l\}\cup\{n-l+1,...,n\}$. Notons w l'élément de $\mathbf{W}_F^{aff}$ associé par (1) à u et aux données $\epsilon_j=1$ et $r_j=0$ pour tout $j=1,...,n$. D'après (2), on a encore $w(\Sigma^{aff}(x_2))=\Sigma^{aff}(x_1)$. On voit que, parce que w' commute à δ, w commute aussi à δ. Parce que u fixe 1 et n, l'élément w commute à ω et τ. Donc il commute à $\Omega_F\rtimes\{1,\tau\}$ tout entier, a fortiori à $\Gamma_\star$. Alors w définit une équivalence faible entre les couples $(\omega_{\star,2},x_2)$ et $(\omega_{\star,1},x_1)$. Supposons maintenant que J_2^- n'existe pas. Les intervalles J_2^+, J_1^- et J_1^+ n'existent pas non plus. Donc 1 et n n'appartiennent à aucun i-intervalle, pour $i=1,2$. On voit que, puisque w' commute à δ, on a l'égalité $u'(n+1-j)=n+1-u'(j)$ pour tout $j\in\{1,...,n\}$. Supposons d'abord que u' conserve l'ensemble $\{1,n\}$. On construit w comme dans le cas précédent, en posant $l=1$. La même conclusion s'ensuit. Supposons que u' ne conserve pas l'ensemble $\{1,n\}$. Posons $u'(1)=j_{1,1}$, $u'(n)=j_{1,n}$, $u'^{-1}(1)=j_{2,1}$, $u'^{-1}(n)=j_{2,n}$. Pour $i=1,2$, les éléments $j_{i,1}$ et $j_{i,n}$ sont distincts et vérifient $j_{i,n}=n+1-j_{i,1}$. La permutation u' envoie $\{1,...,,n\}-\{1,j_{2,1},j_{2,n},n\}$ sur $\{1,...,,n\}-\{1,j_{1,1},j_{1,n},n\}$. Soit u la permutation de $\{1,...,n\}$ qui coïncide avec u' sur $\{1,...,,n\}-\{1,j_{2,1},j_{2,n},n\}$ et telle que $u(1)=1$, $u(j_{2,1})=j_{1,1}$, $u(j_{2,n})=j_{1,n}$, $u(n)=n$. On associe à u un élément w comme précédemment et on voit que la même conclusion s'ensuit.

Supposons maintenant que $\Gamma_\star=\{1,\omega,\tau,\omega\tau\}$. On fixe $\sigma'\in\Gamma_{K/k}$ tel que $\sigma'_\star=\tau$. Soit v une place de k telle que Γ_v contienne σ'. Puisque les couples $(\omega_{\star,1,v},x_1)$ et $(\omega_{\star,2,v},x_2)$ sont faiblement équivalents, on peut fixer $w'\in\mathbf{W}_F^{aff}$ tel que $w'(\Sigma^{aff}(x_2))=\Sigma^{aff}(x_1)$ et w' commute à τ. Ecrivons w' sous la forme (1), en ajoutant des $'$ aux différents termes. Parce que w' commute à τ on a $u'(n)=n$. Cela entraîne que la bijection de $\{J_2^-,J_2^+\}$ sur $\{J_1^-,J_1^+\}$ envoie J_2^- sur J_1^- et J_2^+ sur J_1^+, si tant est que ces intervalles existent. Supposons que J_2^- existe, notons l son nombre d'éléments. Alors $J_2^-=J_1^-=\{1,...,l\}$. La permutation u' conserve $\{1,...,l\}$ donc aussi $\{l+1,...,n\}$. Notons u l'élément de $\mathfrak{S}_n$ qui coïncide avec u' sur $\{l+1,...,n\}$ et avec l'identité sur $\{1,...,l\}$. Notons w l'élément de $\mathbf{W}_F^{aff}$ associé par (1) à u et aux données $\epsilon_j=1$ et $r_j=0$ pour tout $j=1,...,n$. D'après (2), on a encore $w(\Sigma^{aff}(x_2))=\Sigma^{aff}(x_1)$. Parce que $u(1)=1$ et $u(n)=u'(n)=n$, w commute à ω et τ. Donc il commute à $\Gamma_\star$. Alors w définit une équivalence faible entre les couples $(\omega_{\star,2},x_2)$ et $(\omega_{\star,1},x_1)$. Comme dans le cas où $\Gamma_\star\neq\{1,\omega,\tau,\omega\tau\}$, cette construction s'adapte au cas où J_2^- n'existe pas. Cela démontre le théorème **??** dans le cas où $\mathbf{G}$ est de type D_n et $[k':k]\leq 2$.

18 Cas où G est de type D_4 et $[k':k]\geq 3$

L'appartement $\mathbf{A}_F$, les ensembles de racines et de racines affines, les groupes $\mathbf{W}_F^{aff}$ et Ω_F se décrivent comme dans le paragraphe précédent. Le groupe $Out(\mathbf{G})$ des automorphismes de $\mathbf{G}$ préservant l'épinglage $\boldsymbol{\mathcal{E}}$ est maintenant isomorphe à $\mathfrak{S}_3$. En identifiant ce groupe à un groupe d'automorphismes de $\mathbf{A}_F$, il est engendré par l'élément τ défini au paragraphe **??** et par un élément τ_3. Ce dernier est défini par les égalités

$$\beta_3^{aff}(\tau_3(y))=\beta_1^{aff}(y),\ \beta_4^{aff}(\tau_3(y))=\beta_3^{aff}(y),\ \beta_1^{aff}(\tau_3(y))=\beta_4^{aff}(y),$$

$$\beta_2^{aff}(\tau_3(y))=\beta_2^{aff}(y),\ \beta_0^{aff}(\tau_3(y))=\beta_0^{aff}(y)$$

pour tout $y\in\mathbf{A}_F$. Cet élément τ_3 engendre un groupe cyclique d'ordre 3 et on a $\tau\tau_3=\tau_3^2\tau$. On a aussi

$$(1)\qquad \tau_3\omega=\omega''\tau_3,\ \tau_3\omega'=\omega\tau_3,\ \tau_3\omega''=\omega'\tau_3.$$

L'hypothèse $[k' : k] \geq 3$ implique soit que $\Gamma_{k'/k}$ est isomorphe à $\mathfrak{S}_3$ et que l'action $\sigma \mapsto \sigma_G$ identifie $\Gamma_{k'/k}$ au groupe $Out(\mathbf{G})$, soit que $\Gamma_{k'/k}$ est isomorphe à $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ et que l'action $\sigma \mapsto \sigma_G$ identifie $\Gamma_{k'/k}$ au sous-groupe de $Out(\mathbf{G})$ engendré par τ_3. En tout cas, on note k'' le corps tel que $k \subset k'' \subset k'$ tel que $\Gamma_{k'/k''}$ s'identifie au sous-groupe de $Out(\mathbf{G})$ engendré par τ_3. On a $[k'' : k] \leq 2$. Montrons que

(2) on peut supposer que $\sigma_{\star,1} = \sigma_{\star,2}$ pour tout $\sigma \in \Gamma_{K/k}$ et qu'il existe $\sigma'' \in \Gamma_{K/k''} - \Gamma_{K/k'}$ tel que $\sigma''_{\star,1} = \sigma''_{\star,2} = \tau_3$; si $K = k'$ et $k'' \neq k$, on peut supposer qu'il existe un élément $\sigma' \in \Gamma_{k'/k} - \Gamma_{k'/k''}$ tel que $\sigma'_{\star,1} = \sigma'_{\star,2} = \tau$.

La même preuve qu'en **??**(6) montre que l'on peut supposer que $\sigma_{\star,1} = \sigma_{\star,2}$ pour tout $\sigma \in \Gamma_{K/k''}$. Fixons $\sigma'' \in \Gamma_{K/k''} - \Gamma_{K/k'}$ tel que $\sigma''_G = \tau_3$. Posons $\omega_\star(\sigma'') = \omega_{\star,1}(\sigma'') = \omega_{\star,2}(\sigma'')$. On a les égalités $\sigma''_{\star,1} = \sigma''_{\star,2} = \omega_\star(\sigma'')\tau_3$. D'après (1), il existe $\omega_0 \in \Omega_F$ tel que $\omega_0\omega_\star(\sigma'')\tau_3\omega_0^{-1} = \tau_3$. En conjuguant les deux couples $(\omega_{\star,i}, x_i)$ pour $i = 1, 2$ par ω_0, les nouveaux couples vérifient $\sigma''_{\star,i} = \tau_3$. Cela prouve la deuxième assertion de (2). Supposons $k'' \neq k$ et fixons un élément $\sigma' \in \Gamma_{K/k} - \Gamma_{K/k''}$ tel que $\sigma'_G = \tau$. On a $\sigma'\sigma''\sigma'^{-1} \in \Gamma_{K/k''}$, donc $\omega_{\star,1}(\sigma'\sigma''\sigma'^{-1}) = \omega_{\star,2}(\sigma'\sigma''\sigma'^{-1})$. Puisque $\sigma''_{\star,i} = \tau_3$ pour $i = 1, 2$, on calcule $\omega_{\star,i}(\sigma'\sigma''\sigma'^{-1}) = \omega_{\star,i}(\sigma')\tau_3^{-1}\omega_{\star,i}(\sigma')^{-1}\tau_3$. Ce terme ne dépend pas de i. Mais l'application $\omega_0 \mapsto \omega_0\tau_3^{-1}\omega_0^{-1}\tau_3$ est injective sur Ω_F. Il en résulte que $\omega_{\star,1}(\sigma') = \omega_{\star,2}(\sigma')$. Cela achève la preuve de la première assertion de (2). Supposons $K = k'$ et $k'' \neq k$. On reprend le calcul précédent. Les hypothèses entraînent que $\sigma'\sigma''\sigma'^{-1} = \sigma''^{-1}$ donc $\omega_{\star,1}(\sigma'\sigma''\sigma'^{-1}) = \omega_{\star,2}(\sigma'\sigma''\sigma'^{-1}) = 1$. La même injectivité entraîne alors $\omega_{\star,1}(\sigma') = \omega_{\star,2}(\sigma') = 1$. Cela prouve la dernière assertion de (2).

On suppose vérifiées les propriétés de (2) et on supprime les indices $i = 1, 2$ dans $\sigma_{\star,i}$ et $\omega_{\star,i}$. On note $\Gamma_\star$ l'image de l'homomorphisme $\sigma \mapsto \sigma_\star$.

Supposons d'abord que $K \neq k'$. Alors l'image de $\Gamma_{K/k'}$ par l'homomorphisme $\sigma \mapsto \sigma_\star$ est un sous-groupe non trivial de Ω_F. Pour $i = 1, 2$, x_i est fixé par cet élément et par $\tau_3 = \sigma''_\star$. Cela entraîne les égalités

$$\beta_0^{aff}(x_i) = \beta_1^{aff}(x_i) = \beta_3^{aff}(x_i) = \beta_4^{aff}(x_i).$$

Il n'y a donc que trois possibilités pour l'ensemble $S^{aff}(x_i)$, à savoir

$$\emptyset,\ \{\beta_i^{aff}; i = 0, 1, 3, 4\},\ \{\beta_2^{aff}\}.$$

L'ensemble $\Sigma^{aff}(x_i)$ s'identifie à un système de racines dont $S^{aff}(x_i)$ est un ensemble de racines simples, cf. **??** (3). Le fait qu'en au moins une place v, les couples $(\omega_{\star,1,v}, x_1)$ et $(\omega_{\star,2,v}, x_2)$ sont faiblement équivalents entraîne que les ensembles $\Sigma^{aff}(x_1)$ et $\Sigma^{aff}(x_2)$ sont isomorphes. Cela implique que les ensembles $S^{aff}(x_1)$ et $S^{aff}(x_2)$ ont même nombre d'éléments. Ces ensembles étant l'un des trois ci-dessus, on a $S^{aff}(x_1) = S^{aff}(x_2)$. D'où aussi $\Sigma^{aff}(x_1) = \Sigma^{aff}(x_2)$. Alors $w = 1$ définit une équivalence faible entre les couples $(\omega_{\star,1}, x_1)$ et $(\omega_{\star,2}, x_2)$.

Supposons maintenant $K = k'$. Si $k'' = k$, $\Gamma_\star$ cyclique et on conclut grâce à **??** (5). Supposons $k'' \neq k$. Fixons une place v de k telle que Γ_v contienne σ''. Puisque les couples $(\omega_{\star,1,v}, x_1)$ et $(\omega_{\star,2,v}, x_2)$ sont faiblement équivalents, on peut fixer $w \in \mathbf{W}_F^{aff}$ tel que $w(\Sigma^{aff}(x_2)) = \Sigma^{aff}(x_1)$ et w commute à τ_3. On va montrer que

(3) tout élément de $\mathbf{W}_F^{aff}$ qui commute à τ_3 commute aussi à τ.

En utilisant cette propriété et (2), l'élément w précédent vérifie $w\sigma_{\star,2}w^{-1} = \sigma_{\star,1}$ pour tout $\sigma \in \Gamma_{K/k}$, donc définit une équivalence faible entre les couples $(\omega_{\star,1}, x_1)$ et $(\omega_{\star,2}, x_2)$.

Il reste à prouver (3). On se rappelle la décomposition en produit semi-direct $\mathbf{W}_F^{aff} = R \rtimes W$. Elle est conservée par $Out(\mathbf{G})$, on a donc $\mathbf{W}_F^{aff,\tau_3} = R^{\tau_3} \rtimes W^{\tau_3}$, les exposants

τ_3 indiquant comme c'est l'usage les sous-ensembles d'invariants par τ_3. Le groupe W^{τ_3} s'identifie au groupe de Weyl de $\mathbf{G}^{\tau_3,0}$ qui est de type G_2. Il est engendré par les symétries associées aux deux racines simples suivantes, qui sont des caractères de $\mathbf{T}^{\tau_3}$: la racine β_2 et la restriction commune de β_1, β_3, β_4. Ces racines sont fixées par τ. Il en résulte que τ agit trivialement sur W^{τ_3}. On a $R^{\tau_3} = \mathbf{A}_F^{\tau_3} \cap R$. En introduisant l'ensemble de coracines simples $\{\check{\beta}_i); i = 1, ..., 4\}$ associé à Δ, $\mathbf{A}_F^{\tau_3}$ est engendré par $\check{\beta}_2$ et $\check{\beta}_1 + \check{\beta}_3 + \check{\beta}_4$. Alors τ agit trivialement sur $\mathbf{A}_F^{\tau_3}$ et aussi sur R^{τ_3}. Donc τ agit trivialement sur $\mathbf{W}_F^{aff,\tau_3}$, ce qui démontre (3) et le théorème **??** dans le cas où $\mathbf{G}$ est de type D_4 et où $[k' : k] \geq 3$.

19 Le cas où G est de type E_6 et où $[k' : k] = 2$

L'appartement $\mathbf{A}_F$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de dimension 6. On numérote $\Delta = \{\beta_j; j = 1, ..., 6\}$ comme dans [**?**]. On note β_0 l'opposée de la plus grande racine de Σ. On a $\Delta_{a,F} = \{\beta_j^{aff}; j = 0, ..., 6\}$ où $\beta_0^{aff} = \beta_0[1]$ et $\beta_j^{aff} = \beta_j$ pour $j = 1, ..., 6$. Le groupe Ω_F est cyclique d'ordre 3. Il est engendré par l'élément ω tel que, pour tout $y \in \mathbf{A}_F$,

$$\beta_1^{aff}(\omega(y)) = \beta_0^{aff}(y),\ \beta_6^{aff}(\omega(y)) = \beta_1^{aff}(y),\ \beta_0^{aff}(\omega(y)) = \beta_6^{aff}(y),$$

$$\beta_3^{aff}(\omega(y)) = \beta_2^{aff}(y),\ \beta_5^{aff}(\omega(y)) = \beta_3^{aff}(y),\ \beta_2^{aff}(\omega(y)) = \beta_5^{aff}(y),$$

$$\beta_4^{aff}(\omega(y)) = \beta_4^{aff}(y).$$

Le groupe $Out(\mathbf{G})$ a deux éléments. L'élément non trivial agit sur $\mathbf{A}_F$ par l'automorphisme τ qui échange β_1^{aff} et β_6^{aff}, β_3^{aff} et β_5^{aff} et fixe β_0^{aff}, β_2^{aff} et β_4^{aff}. On a $\tau\omega = \omega^2\tau$ et $Aut(\mathcal{D}_{a,F}) = \Omega_F \rtimes \{1, \tau\}$. En supposant $\Gamma_{K/k}$ non cyclique, l'homomorphisme $\sigma \mapsto \sigma_\star$ identifie $\Gamma_{K/k}$ à $Aut(\mathcal{D}_{a,F})$.

Pour $i = 1, 2$, x_i est fixé par ω. Donc $\beta_0^{aff}(x_i) = \beta_1^{aff}(x_i) = \beta_6(x_i)$ et $\beta_2^{aff}(x_i) = \beta_3^{aff}(x_i) = \beta_5(x_i)$. Il n'y a donc que six possibilités pour l'ensemble $S^{aff}(x_i)$, à savoir

$$\emptyset,\ \{\beta_4^{aff}\},\ \{\beta_0^{aff}, \beta_1^{aff}, \beta_6^{aff}\},\ \{\beta_2^{aff}, \beta_3^{aff}, \beta_5^{aff}\},\ \{\beta_4^{aff}, \beta_0^{aff}, \beta_1^{aff}, \beta_6^{aff}\},$$

$$\{\beta_4^{aff}, \beta_2^{aff}, \beta_3^{aff}, \beta_5^{aff}\}, \{\beta_0^{aff}, \beta_1^{aff}, \beta_6^{aff}, \beta_2^{aff}, \beta_3^{aff}, \beta_5^{aff}\}.$$

Comme dans le paragraphe précédent, les ensembles $\Sigma^{aff}(x_1)$ et $\Sigma^{aff}(x_2)$ sont isomorphes. Cela entraîne que, non seulement, leurs sous-ensembles de "racines simples" $S^{aff}(x_1)$ et $S^{aff}(x_2)$ ont même nombre d'éléments, mais aussi que les diagrammes de Dynkin associés à ces ensembles sont les mêmes (c'est-à-dire que les produits scalaires entre les racines sont les mêmes). En examinant les possibilités ci-dessus, on voit que, ou bien $S^{aff}(x_1) = S^{aff}(x_2)$, ou bien, quitte à permuter les indices 1 et 2, on a

$$(1) \qquad S^{aff}(x_1) = \{\beta_0^{aff}, \beta_1^{aff}, \beta_6^{aff}\},\ S^{aff}(x_2) = \{\beta_2^{aff}, \beta_3^{aff}, \beta_5^{aff}\}.$$

Si $S^{aff}(x_1) = S^{aff}(x_2)$, on a aussi $\Sigma^{aff}(x_1) = \Sigma^{aff}(x_2)$ et $w = 1$ définit une équivalence faible entre les couples $(\omega_{\star,1}, x_1)$ et $(\omega_{\star,2}, x_2)$. Supposons maintenant (1) vérifiée. Considérons le point $z \in \mathbf{A}_F$ défini par $\beta_i^{aff}(z) = 0$ pour $i \in \{0, ..., 6\} - \{4\}$. Son groupe $\mathbb{G}_z$ (introduit en **??**) a pour groupe adjoint $PGL(3)^3$, les racines simples des trois composantes s'identifiant respectivement à $\{\beta_0^{aff}, \beta_2^{aff}\}$, $\{\beta_1^{aff}, \beta_3^{aff}\}$, $\{\beta_6^{aff}, \beta_5^{aff}\}$. Dans un groupe $PGL(3)$ de racines simples α_1, α_2, il y a un élément du groupe de Weyl qui envoie α_1

sur α_2 et α_2 sur $-\alpha_1-\alpha_2$. Le sous-groupe des éléments de $\mathbf{W}^{aff}_{F,sc}$ qui conservent z s'envoie bijectivement sur le groupe de Weyl de $\mathbb{G}_z$. On en déduit qu'il existe un élément $w\in\mathbf{W}^{aff}_{F,sc}$ tel que, pour tout $y\in\mathbf{A}_F$, on ait

$$\beta_0^{aff}(w(y))=\beta_2^{aff}(y),\ -(\beta_0^{aff}+\beta_2^{aff})(w(y))=\beta_0(y),$$
$$\beta_1^{aff}(w(y))=\beta_3^{aff}(y),\ -(\beta_1^{aff}+\beta_3^{aff})(w(y))=\beta_1(y),$$
$$\beta_6^{aff}(w(y))=\beta_5^{aff}(y),\ -(\beta_6^{aff}+\beta_5^{aff})(w(y))=\beta_6(y).$$

Ces égalités déterminent entièrement w puisque les applications β_j^{aff} pour $j\in\{0,...,6\}-\{4\}$ séparent les éléments de $\mathbf{A}_F$. Il est immédiat que w commute à ω et à τ. D'après (1), on a aussi $w(S^{aff}(x_2))=S^{aff}(x_1)$ donc aussi $w(\Sigma^{aff}(x_2))=\Sigma^{aff}(x_1)$. Alors w définit une équivalence faible entre les couples $(\omega_{\star,2},x_2)$ et $\omega_{\star,1},x_1)$. Cela achève la preuve du théorème **??**.

20 Généralisation

Revenons au cas général où le corps k est soit un corps de nombres, soit un corps local de caractéristique nulle. Depuis le paragraphe **??**, on a supposé que $\hat{G}$ était adjoint. Levons cette hypothèse. L'automorphisme θ et l'action de Γ_k sur $\hat{G}$ se descendent en un automorphisme de $\hat{G}_{AD}$ et une action de Γ_k sur ce groupe, que l'on note encore θ et $\sigma\mapsto\sigma_G$. On pose ${}^LG_{AD}=\hat{G}_{AD}\rtimes W_k$ (on est conscient que cette notation prête à confusion mais le groupe G a disparu depuis longtemps).

Soit $(\mathcal{G}',\tilde{s})$ une pré-donnée endoscopique pour $({}^LG,\theta)$. En écrivant $\tilde{s}=s\theta$, on pose $\tilde{s}_{ad}=s_{ad}\theta$ et $\mathcal{G}'_{ad}=\{(g_{ad},w);(g,w)\in\mathcal{G}'\}$. Alors $(\mathcal{G}'_{ad},\tilde{s}_{ad})$ est une pré-donnée endoscopique pour $({}^LG_{AD},\theta)$. Il est clair que deux pré-données pour $({}^LG,\theta)$ qui sont équivalentes, resp. faiblement équivalentes, se descendent ainsi en des pré-données pour $({}^LG_{AD},\theta)$ qui sont équivalentes, resp. faiblement équivalentes.

Remarque. Si $\theta=1$, toute pré-donnée endoscopique pour $({}^LG_{AD},\theta)$ provient par ce procédé d'une pré-donnée endoscopique pour $({}^LG,\theta)$. Ce n'est pas vrai si $\theta\neq1$. On donnera un contre-exemple au paragraphe **??**.

Rappelons que $\hat{G}$ est dit presque simple si $\hat{G}$ est semi-simple et que $\hat{G}_{AD}$ est simple. Remarquons que, si $\hat{G}$ est semi-simple, on ne perd rien à remplacer le L-groupe ${}^LG=\hat{G}\rtimes W_k$ par sa version galoisienne $\hat{G}\rtimes\Gamma_k$. En effet, pour toute pré-donnée endoscopique $(\mathcal{G}',\tilde{s})$, la fonction $w\mapsto g(w)$ associée, définie au paragraphe **??**, peut être choisie localement constante et il s'en déduit une fonction définie sur Γ_k.

Théorème. *Supposons que k soit un corps de nombres. Les théorèmes **??** et **??** sont vérifiés sous l'une ou l'autre des hypothèses suivantes :*
(i) $\theta=1$;
(ii) $\hat{G}$ est presque simple.

Remarque. Quand $\theta=1$, le théorème **??** est le résultat principal de [**?**].

Preuve. On va donner la preuve des assertions du théorème **??**. Pour le théorème **??**, la preuve est analogue et nous laissons au lecteur le soin de l'adapter.

Soient $(\mathcal{G}'_1,\tilde{s}_1)$ et $(\mathcal{G}'_2,\tilde{s}_2)$ deux pré-données endoscopiques s-unitaires pour $({}^LG,\theta)$ définies sur k. On suppose que $(\mathcal{G}'_{1,v},\tilde{s}_1)$ et $(\mathcal{G}'_{2,v},\tilde{s}_2)$ sont faiblement équivalentes pour

presque toute place $v \in V_k$. Alors les pré-données $(\mathcal{G}'_{1,ad,v}, \tilde{s}_{1,ad})$ et $(\mathcal{G}'_{2,ad,v}, \tilde{s}_{2,ad})$ sont aussi faiblement équivalentes pour presque tout v. En appliquant le théorème **??**, les pré-données $(\mathcal{G}'_{1,ad}, \tilde{s}_{1,ad})$ et $(\mathcal{G}'_{2,ad}, \tilde{s}_{2,ad})$ sont faiblement équivalentes. Fixons $g \in \hat{G}$ et $\underline{\zeta} \in Z(\hat{G}'_{2,ad})^{\Gamma_k,0}$, tels que g_{ad} conjugue $(\mathcal{G}'_{2,ad}, \tilde{s}_{2,ad}\underline{\zeta})$ en $(\mathcal{G}'_{1,ad}, \tilde{s}_{1,ad})$. L'homomorphisme naturel $Z(\hat{G}'_2)^{\Gamma_k,0} \to Z(\hat{G}'_{2,ad})^{\Gamma_k,0}$ est surjectif. Fixons $\zeta \in Z(\hat{G}'_2)^{\Gamma_k,0}$ tel que $\zeta_{ad} = \underline{\zeta}$. Le couple $(\mathcal{G}'_2, \tilde{s}_2\zeta)$ est une pré-donnée endoscopique qui est faiblement équivalente à $(\mathcal{G}'_2, \tilde{s}_2)$. Son conjugué par g l'est aussi. En remplaçant $(\mathcal{G}'_2, \tilde{s}_2)$ par ce conjugué, on est ramené au cas où la condition suivante est vérifiée :

(1) $(\mathcal{G}'_{2,ad}, \tilde{s}_{2,ad}) = (\mathcal{G}'_{1,ad}, \tilde{s}_{1,ad})$.

Supposons $\theta = 1$. Alors, pour toute pré-donnée endoscopique $(\mathcal{G}', \tilde{s}')$ de $({}^LG, \theta)$, $\hat{G}'$ contient un sous-tore maximal de $\hat{G}$, a fortiori contient $Z(\hat{G})$. Donc $\mathcal{G}'$ est l'image réciproque de $\mathcal{G}'_{ad}$ dans ${}^LG$. Il résulte immédiatement de (1) que les pré-données $(\mathcal{G}'_1, \tilde{s}_1)$ et $(\mathcal{G}'_2, \tilde{s}_2)$ sont équivalentes.

On suppose désormais que $\theta \neq 1$ et que $\hat{G}$ est presque simple. L'hypothèse (1) implique l'égalité $\hat{G}'_1 = \hat{G}'_2$, ces deux groupes étant la composante neutre de l'image réciproque dans $\hat{G}$ de $\hat{G}'_{1,ad} = \hat{G}'_{2,ad}$. On considère que ${}^LG = \hat{G} \rtimes \Gamma_k$. On suppose que $\tilde{s}_1 = s_1\theta$, avec $s_1 \in \hat{T}^{\theta,0}$. Pour toute pré-donnée $(\mathcal{G}', \tilde{s})$ de $({}^LG, \theta)$ et tout $\sigma \in \Gamma_k$, on note $\mathcal{G}'[\sigma]$ la fibre de $\mathcal{G}'$ au-dessus de σ.

Remarque. (2) Cette fibre détermine $\hat{G}'$: ce groupe est la composante neutre du sous-groupe des $g \in \hat{G}$ tels que $g\mathcal{G}'[\sigma] = \mathcal{G}'[\sigma]$.

Notons k_0 l'extension galoisienne de k telle que Γ_{k_0} soit le noyau de l'action de Γ_k sur $\hat{G}$. On a déjà dit que l'hypothèse $\theta \neq 1$ implique que l'action de Γ_k sur $\hat{G}_{AD}$ se fait par des puissances de θ. Puisque $\hat{G}$ est semi-simple, cette propriété se relève à $\hat{G}$. Il en résulte que k_0 est une extension cyclique de k d'ordre divisant celui de θ. Introduisons des objets comme au paragraphe **??** pour la donnée pré-endoscopique $(\mathcal{G}'_1, \tilde{s}_1)$, que l'on affecte d'indices 1 : $g_1(\sigma)$ etc... On a dit que l'hypothèse $\theta \neq 1$ implique que Ω_F est d'ordre au plus 2. Fixons un élément $(\omega_\star, x) \in \underline{Endo}$ tel que la classe de $(\mathcal{G}'_{1,ad}, \tilde{s}_{1,ad})$ soit $\delta(\omega_\star, x)$. Fixons un sous-ensemble Ξ de $\hat{G}$ de sorte que $\{\xi_{ad}; \xi \in \Xi\}$ soit un ensemble de représentants du quotient $\hat{G}'_{1,ad}\backslash Aut(\mathcal{G}'_{1,ad}, \tilde{s}_{1,ad})$. Puisque l'action de Γ_k sur $\mathbf{T}_{F,ad}$ est triviale, on a l'égalité $Aut(\omega_\star, x) = \Omega_F(x)$. La proposition **??** entraîne l'égalité $Z_{\hat{G}_{AD}}(\tilde{s}_{1,ad}) = Aut(\mathcal{G}'_{1,ad}, \tilde{s}_{1,ad})$. Alors $\{\xi_{ad}; \xi \in \Xi\}$ est aussi un ensemble de représentants du quotient $\hat{G}'_{1,ad}\backslash Z_{\hat{G}_{AD}}(\tilde{s}_{1,ad})$ et cet ensemble est en bijection avec $\Omega_F(x)$ qui a au plus deux éléments. Puisque $\tilde{s}_{1,ad} \in \hat{T}^\theta_{ad}\theta$, $\tilde{s}_{1,ad}$ est fixé par l'action $\sigma \mapsto \sigma_G$ de Γ_k. Pour tout $\sigma \in \Gamma_k$, $\tilde{s}_{1,ad}$ est aussi fixé par $ad(g_1(\sigma)_{ad})\sigma_G$. Il en résulte que $g_{1,ad}(\sigma) \in Z_{\hat{G}_{AD}}(\tilde{s}_{1,ad})$. L'application qui, à un élément $\sigma \in \Gamma_k$, associe l'image de $g_{1,ad}(\sigma)$ dans $\hat{G}'_{1,ad}\backslash Z_{\hat{G}_{AD}}(\tilde{s}_{1,ad})$, est un homomorphisme. On note k' l'extension galoisienne de k telle que $\Gamma_{k'}$ soit son noyau. On a $[k' : k] \leq \sharp\Omega_F(x) \leq 2$. Remarquons que $\sigma_{G'_1} = 1$ pour $\sigma \in \Gamma_{k'}$. Pour $\sigma \in \Gamma_{k'}$, on a $g_1(\sigma) \in Z(\hat{G})\hat{G}'_1$. Si $k' \neq k$, pour $\sigma \in \Gamma_k - \Gamma_{k'}$, $g_1(\sigma) \in Z(\hat{G})\hat{G}'_1\xi$, où ξ est l'unique élément non trivial de Ξ. On note K l'extension de k composée de k_0 et de k'.

Montrons que

(3) $\mathcal{G}'_2[\sigma] = \mathcal{G}'_1[\sigma]$ pour $\sigma \in \Gamma_K$.

On a $\mathcal{G}'_1[\sigma] = g_1(\sigma)\hat{G}'_1\sigma$. On peut choisir une place v de k telle que les données $(\mathcal{G}'_{1,v}, \tilde{s}_1)$ et $(\mathcal{G}'_{2,v}, \tilde{s}_2)$ soient faiblement équivalentes et que σ appartienne à Γ_{k_v}. Il existe donc $g \in \hat{G}$ tel que $g\mathcal{G}'_1[\sigma]g^{-1} = \mathcal{G}'_2[\sigma]$. D'après (2), g normalise $\hat{G}'_1$. Puisque $g_1(\sigma) \in Z(\hat{G})\hat{G}'_1$ et que $\sigma_G = 1$ pour $\sigma \in \Gamma_K$, g normalise $\mathcal{G}'_1[\sigma] = g_1(\sigma)\hat{G}'_1\sigma$. Cela implique $\mathcal{G}'_2[\sigma] = \mathcal{G}'_1[\sigma]$, d'où (3).

Prouvons que

(4) si K/k est cyclique, $(\mathcal{G}'_2, \tilde{s}_2)$ est faiblement équivalent à $(\mathcal{G}'_1, \tilde{s}_1)$.

Fixons $\sigma \in \Gamma_k$ dont l'image dans $\Gamma_{K/k}$ engendre ce groupe. On peut choisir une place v de k telle que les données $(\mathcal{G}'_{1,v}, \tilde{s}_1)$ et $(\mathcal{G}'_{2,v}, \tilde{s}_2)$ soient faiblement équivalentes et que σ appartienne à Γ_{k_v}. Il existe donc $g \in \hat{G}$ tel que $g\mathcal{G}'_2[\sigma]g^{-1} = \mathcal{G}'_1[\sigma]$ et $g\tilde{s}_2 g^{-1} \in Z(\hat{G})Z(\hat{G}'_1)^{\Gamma_{k_v},0}\tilde{s}_1$. Comme dans la preuve de (3), la première relation entraîne que g normalise $\hat{G}'_1$ et cela entraîne que g normalise $\mathcal{G}'_1[\sigma'] = \mathcal{G}'_2[\sigma']$ pour tout $\sigma' \in \Gamma_K$. Mais, pour $i = 1, 2$, $\mathcal{G}'_i$ est engendré par $\mathcal{G}'_i[\sigma]$ et ces fibres $\mathcal{G}'_i[\sigma']$ pour $\sigma' \in \Gamma_K$. Donc $g\mathcal{G}'_2 g^{-1} = \mathcal{G}'_1$. D'après le choix de σ, on a $Z(\hat{G}'_1)^{\Gamma_{k_v},0} = Z(\hat{G}'_1)^{\Gamma_k,0}$. Alors g définit une équivalence faible entre les pré-données $(\mathcal{G}'_2, \tilde{s}_2)$ et $(\mathcal{G}'_1, \tilde{s}_1)$. D'où (4).

On suppose désormais que K/k n'est pas cyclique. Cela entraîne que les deux extensions k' et k_0 de k sont non triviales et distinctes. Alors k' est une extension quadratique de k et $\Omega_F(x) = \Omega_F$ a deux éléments. Cela ne se produit que dans les deux cas suivants : $\hat{G}_{AD}$ est de type A_{n-1} avec n pair ou de type D_n avec $n \geq 4$ et θ est d'ordre 2. L'extension k_0 est alors aussi une extension quadratique de k. On se place dans l'un de ces deux cas. On note $\Gamma_{K/k} = \{1, \sigma^*, \sigma', \sigma''\}$ de sorte que $\Gamma_{K/k'} = \{1, \sigma^*\}$, $\Gamma_{K/k_0} = \{1, \sigma'\}$. On peut supposer $1 \in \Xi$ et on note ξ le deuxième élément de Ξ.

Le même raisonnement que dans la preuve de (4) montre qu'il nous suffit de prouver l'existence de $g \in \hat{G}$ vérifiant les trois conditions

(5) $g\mathcal{G}'_2[\sigma']g^{-1} = \mathcal{G}'_1[\sigma']$;

(6) $g\mathcal{G}'_2[\sigma'']g^{-1} = \mathcal{G}'_1[\sigma'']$;

(7) $g\tilde{s}_2 g^{-1} \in Z(\hat{G})Z(\hat{G}'_1)^{\Gamma_k,0}\tilde{s}_1$.

Ces conditions sont insensibles à la multiplication de g par un élément de $\hat{G}'_1$. On peut donc ajouter la condition : g normalise $\hat{T}^{\theta,0}$. Un tel g s'écrit

(8) $g = tn$, avec $t \in \hat{T}$ et $n \in Norm_{\hat{G}^{\theta,0}}(\hat{T}^{\theta,0})$.

L'action $\sigma \mapsto \sigma_{G'_1} = \sigma_{G'_2}$ se factorisant par $\Gamma_{k'/k}$, on a les égalités $Z(\hat{G}'_1)^{\Gamma_k,0} = Z(\hat{G}'_1)^{\sigma'_{G'_1},0} = Z(\hat{G}'_1)^{\sigma''_{G'_1},0}$. Comme dans la preuve de (4), l'hypothèse que les données $(\mathcal{G}'_{1,v}, \tilde{s}_1)$ et $(\mathcal{G}'_{2,v}, \tilde{s}_2)$ sont faiblement équivalentes pour presque toute place $v \in V_k$ implique qu'il existe g vérifiant (5), (7) et (8) et qu'il existe g vérifiant (6), (7) et (8). Montrons que

(9) si g vérifie (5), (7) et (8), resp. (6), (7) et (8), la pré-donnée $(g\mathcal{G}'_2 g^{-1}, \tilde{s}_1)$ est une pré-donnée faiblement équivalente à $(\mathcal{G}'_2, \tilde{s}_2)$ qui vérifie encore la relation (1).

C'est par définition une pré-donnée faiblement équivalente à $(\mathcal{G}'_2, \tilde{s}_2)$. Il faut prouver que $g\mathcal{G}'_{2,ad}g^{-1} = \mathcal{G}'_{1,ad}$, autrement dit que g normalise $\mathcal{G}'_{1,ad}$. Supposons par exemple que g vérifie (5), (7) et (8). Alors g normalise $\mathcal{G}'_{1,ad}[\sigma']$. Comme on l'a déjà dit plusieurs fois, cela entraîne que g normalise $\mathcal{G}'_{1,ad}[\sigma]$ pour tout $\sigma \in \Gamma_K$. Puisque $\mathcal{G}'_{1,ad}$ est engendré par $\mathcal{G}'_{1,ad}[\sigma']$, $\mathcal{G}'_{1,ad}[\sigma'']$ et les $\mathcal{G}'_{1,ad}[\sigma]$ pour tout $\sigma \in \Gamma_K$, il suffit de prouver que g_{ad} normalise $\mathcal{G}'_{1,ad}[\sigma'']$. On a $\mathcal{G}'_{1,ad}[\sigma'] = \hat{G}'_{1,ad}\xi_{ad}\sigma'$ et $\mathcal{G}'_{1,ad}[\sigma''] = \hat{G}'_{1,ad}\xi_{ad}\sigma''$. Puisque $\sigma'_G = 1$, la condition (5) implique l'égalité $g_{ad}\hat{G}'_{1,ad}\xi_{ad}g_{ad}^{-1} = \hat{G}'_{1,ad}\xi_{ad}$. Puisque $\sigma''_G = \theta$, on a $g_{ad}\mathcal{G}'_{1,ad}[\sigma'']g_{ad}^{-1} = g_{ad}\hat{G}'_{1,ad}\xi_{ad}\theta(g_{ad})^{-1}\sigma''$. Pour démontrer que g_{ad} normalise $\mathcal{G}'_{1,ad}[\sigma'']$, il suffit de démontrer que $g_{ad}\hat{G}'_{1,ad}\xi_{ad}\theta(g_{ad})^{-1} = \hat{G}'_{1,ad}\xi_{ad}$. On a $g_{ad}\hat{G}'_{1,ad}\xi_{ad}\theta(g_{ad})^{-1} = g_{ad}\hat{G}'_{1,ad}\xi_{ad}g_{ad}^{-1}g_{ad}\theta(g_{ad})^{-1} = \hat{G}'_{1,ad}\xi_{ad}g_{ad}\theta(g_{ad})^{-1}$. Il suffit donc de démontrer que $g_{ad}\theta(g_{ad})^{-1}$ appartient à $\hat{G}'_{1,ad}$. En écrivant $g = tn$ comme dans (8), on a l'égalité $g_{ad}\tilde{s}_{2,ad}g_{ad}^{-1} = t_{ad}\theta(t_{ad})^{-1}n_{ad}s_{1,ad}n_{ad}^{-1}\theta$. Les éléments $s_{1,ad}$ et $n_{ad}s_{1,ad}n_{ad}^{-1}$ appartiennent à $\hat{T}^{\theta}_{ad}$ et l'image dans $\hat{G}_{AD}$ de $Z(\hat{G})Z(\hat{G}'_1)$ est aussi contenue dans $\hat{T}^{\theta}_{ad}$. La condition (7) implique donc $t_{ad}\theta(t_{ad})^{-1} \in \hat{T}^{\theta}_{ad}$, d'où $g_{ad}\theta(g_{ad})^{-1} \in \hat{T}^{\theta}_{ad} \subset \hat{G}'_{1,ad}$. Cela prouve (9).

On fixe g vérifiant (5), (7) et (8). On remplace la donnée $(\mathcal{G}'_2, \tilde{s}_2)$ par $(g\mathcal{G}'_2 g^{-1}, \tilde{s}_1)$. Cela nous ramène au cas où la donnée $(\mathcal{G}'_2, \tilde{s}_2)$ vérifie la condition $\mathcal{G}'_2[\sigma'] = \mathcal{G}'_1[\sigma']$. On a

$$\mathcal{G}'_2[\sigma'] = \mathcal{G}'_1[\sigma'] = z'_1\hat{G}'_1\xi\sigma',\ \mathcal{G}'_1[\sigma''] = z''_1\hat{G}'_1\xi\sigma'',\ \mathcal{G}'_2[\sigma''] = zz''_1\hat{G}'_1\xi\sigma'',$$

où z'_1, z''_1, z appartiennent à $Z(\hat{G})$. On peut multiplier z par un élément de $Z(\hat{G}) \cap \hat{T}^{\theta,0}$ donc seule importe l'image de z dans le quotient $Z(\hat{G})/(Z(\hat{G}) \cap \hat{T}^{\theta,0})$. Un élément $g \in Z(\hat{G})$ vérifie les conditions (5) et (7). On a $g\mathcal{G}'_2[\sigma'']g^{-1} = g\theta(g)^{-1}z\mathcal{G}'_1[\sigma'']$. Ainsi, conjuguer $(\mathcal{G}'_2, \tilde{s}_2)$ par un élément de $Z(\hat{G})$ multiplie z par un élément de $(1-\theta)(Z(\hat{G}))$. Donc seule nous importe l'image de z dans $\mathfrak{Z} = Z(\hat{G})/(Z(\hat{G}) \cap \hat{T}^{\theta,0})(1-\theta)(Z(\hat{G}))$. On vérifie que, dans les deux cas qui nous intéressent (θ d'ordre 2, $\hat{G}$ de type A_{n-1} avec n pair ou D_n avec $n \geq 4$), le quotient $\mathfrak{Z}$ a au plus deux éléments. Si l'image de z dans $\mathfrak{Z}$ vaut 1, on a terminé. Supposons que cette image n'est pas égale à 1, donc que $\mathfrak{Z}$ a deux éléments. Considérons l'élément $g = \xi$. Puisque ξ_{ad} est un automorphisme de $(\mathcal{G}'_{1,ad}, \tilde{s}_{1,ad})$, la conjugaison par ξ remplace $(\mathcal{G}'_2, \tilde{s}_2)$ par une pré-donnée qui vérifie encore la relation (1). Puisque $\mathcal{G}'_2[\sigma'] = z'_1\hat{G}'_1\xi\sigma'$ et que $\sigma'_G = 1$, ξ normalise $\mathcal{G}'_2[\sigma']$ et la conjugaison par ξ ne modifie pas la condition $\mathcal{G}'_2[\sigma'] = \mathcal{G}'_1[\sigma']$ que l'on a imposée. Par le même calcul que dans la preuve de (9), cette conjugaison remplace $\mathcal{G}'_2[\sigma'']$ par $zz''_1\hat{G}'_1\xi\xi\theta(\xi)^{-1}\sigma''$. Nous allons prouver

(10) en choisissant convenablement les éléments s_1 et ξ, on peut supposer $\xi\theta(\xi)^{-1} \in \zeta\hat{T}^{\theta,0}$, où $\zeta \in Z(\hat{G})$ est d'image non triviale dans $\mathfrak{Z}$.

En. admettant cette propriété, on a terminé : en remplaçant $(\mathcal{G}'_2, \tilde{s}_2)$ par son conjugué par ξ, on remplace z par $z\zeta$ dont l'image dans $\mathfrak{Z}$ est triviale. Il reste à prouver (10). Notons ω l'unique élément non trivial de Ω_F et $\mathbf{w}$ son image dans W^θ. Il existe une racine $\beta_* \in \Delta_{a,F}$, $\beta_* \neq \beta_0$ de sorte que $\mathbf{w}$ permute les racines β_* et β_0 et $\mathbf{w}$ conserve l'ensemble $\Delta_{a,F} - \{\beta_0, \beta_*\}$. On a $\beta_0^{aff} = \beta_0[\frac{1}{2}]$ et $\beta^{aff} = \beta$ pour tout $\beta \in \Delta_{a,F} - \{\beta_0\}$. On a supposé que $\Omega_F(x)$ avait deux éléments donc $\omega \in \Omega_F(x)$, c'est-à-dire $\omega(x) = x$. On en déduit que $\mathbf{w}(x) = x - r$, où r est l'unique élément de R tel que $-\beta_0(r) = \beta_*(r) = \frac{1}{2}$ et $\beta(r) = 0$ pour tout $\beta \in \Delta_{a,F} - \{\beta_0, \beta_*\}$. On se rappelle l'isomorphisme $\hat{T}^\theta_{ad,u} \simeq \mathbf{A}_F/X_*(\mathbf{T}_{F,ad})$ du paragraphe **??**. On ne perd rien à supposer que $s_{1,ad}$ est l'unique élément de $\hat{T}^\theta_{ad,u}$ dont l'image dans $\mathbf{A}_F/X_*(\mathbf{T}_{F,ad})$ est égale à l'image naturelle de x. Notons τ l'unique élément de $\hat{T}^\theta_{ad,u}$ tel que $\beta_*(\tau) = -1$ et $\beta(\tau) = 1$ pour tout $\beta \in \Delta_{a,F} - \{\beta_0, \beta_*\}$. L'égalité $\mathbf{w}(x) = x - r$ se relève en l'égalité $\mathbf{w}(s_{1,ad}) = s_{1,ad}\tau$. Il résulte des calculs du paragraphe **??** que l'on peut choisir ξ de la forme tn comme en (8), de sorte que l'image de n dans W^θ soit égale à $\mathbf{w}$. La conjugaison par ξ_{ad} fixe $\tilde{s}_1$. Or $\xi_{ad}\tilde{s}_1\xi_{ad}^{-1} = t_{ad}n_{ad}s_{1,ad}n_{ad}^{-1}\theta(t_{ad})^{-1}\theta = t_{ad}\mathbf{w}(s_{1,ad})\theta(t_{ad})^{-1}\theta = t_{ad}\theta(t_{ad})^{-1}\tau s_{1,ad}\theta$. D'où l'égalité

(11) $t_{ad}\theta(t_{ad})^{-1} = \tau$.

Notons $\pi : \hat{G}_{SC} \to \hat{G}$ la projection naturelle et relevons t en un élément $t_{sc} \in \hat{T}_{sc}$.

Supposons que $\hat{G}$ soit de type A_{n-1} avec n pair. On peut supposer $n \geq 4$ car $\mathfrak{Z} = \{1\}$ pour $n = 2$. On identifie $\hat{T}_{sc}$ avec le sous-ensemble des $(t_1, ..., t_n) \in (\mathbb{C}^\times)^n$ tels que $\prod_{i=1,...,n} t_i = 1$ et on écrit $t_{sc} = (t_1, ..., t_n)$. On a $\theta(t_{sc}) = (t_n^{-1}, ..., t_1^{-1})$, donc $t_{sc}\theta(t_{sc})^{-1} = (y_1, ..., y_{n/2}, y_{n/2}, ..., y_1)$, avec $\prod_{i=1,...,n/2} y_i = 1$. La racine β_* est la restriction commune à $\hat{T}^\theta_{sc}$ (qui est connexe) de α_1 et α_{n-1}, avec les numérotations usuelles. La condition (1) et la définition de τ signifient donc que $y_1 = -y_2$ tandis que $y_2 = ... = y_{n/2}$. En notant μ la valeur commune des y_i pour $i \geq 2$, on a $\mu^{n/2} = -1$. Notons ζ_{sc} l'élément central de $\hat{G}_{SC}$ de termes diagonaux μ. La condition $\mu^{n/2} = -1$ entraîne que l'image de ζ_{sc} dans $Z(\hat{G}_{SC})/(1-\theta)(Z(\hat{G}_{SC})) \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ est non triviale. De π se déduit un homomorphisme surjectif $Z(\hat{G}_{SC})/(1-\theta)(Z(\hat{G}_{SC})) \to \mathfrak{Z}$. Sous notre hypothèse que $\mathfrak{Z}$ a deux éléments,

il en résulte que $\pi(\zeta_{sc})$ est l'élément non trivial de $\mathfrak{Z}$. D'autre part, $t_{sc}\theta(t_{sc})^{-1}\zeta_{sc}^{-1}$ est l'élément $(-1,1,...,1,-1)$ qui appartient à $\hat{T}_{sc}^{\theta}$. Puisque $\xi\theta(\xi)^{-1} = \pi(t_{sc}\theta(t_{sc})^{-1})$, on a $\xi\theta(\xi)^{-1} \in \pi(\zeta_{sc})\pi(\hat{T}_{sc}^{\theta})$ et la propriété (10) s'ensuit.

Supposons maintenant que $\hat{G}$ soit de type D_n avec $n \geq 4$. L'automorphisme θ échange les racines α_{n-1} et α_n, on a donc une égalité $t_{sc}\theta(t_{sc})^{-1} = \check{\alpha}_{n-1}(y)\check{\alpha}_n(y)^{-1}$ pour un $y \in \mathbb{C}^{\times}$. La racine β_* est la restriction commune à $\hat{T}_{sc}^{\theta}$ de α_{n-1} et α_n. La condition (1) et la définition de τ signifient donc que $y^2 = -1$, autrement dit $y = i$ pour une racine carrée i de -1. Posons

$$\zeta_{sc} = \begin{cases} \prod_{j=1,...,n} \check{\alpha}_j((-1)^j), & \text{si } n \text{ est pair,} \\ \check{\alpha}_{n-1}(i)\check{\alpha}_n(-i)\prod_{j=1,...,n-2} \check{\alpha}_j((-1)^j), & \text{si } n \text{ est impair;} \end{cases}$$

$$t'_{sc} = \begin{cases} \check{\alpha}_{n-1}(-i)\check{\alpha}_n(-i)\prod_{j=1,...,n-2} \check{\alpha}_j((-1)^j), & \text{si } n \text{ est pair,} \\ \prod_{j=1,...,n-2} \check{\alpha}_j((-1)^j), & \text{si } n \text{ est impair.} \end{cases}$$

On a $t_{sc}\theta(t_{sc})^{-1} = \zeta_{sc}t'_{sc}$, $t'_{sc} \in \hat{T}_{sc}^{\theta}$, $\zeta_{sc} \in Z(\hat{G}_{SC})$ et on vérifie que $\pi(\zeta_{sc})$ est l'élément non trivial de $\mathfrak{Z}$ (sous notre hypothèse que ce groupe est non trivial). Puisque $\xi\theta(\xi)^{-1} = \pi(t_{sc}\theta(t_{sc})^{-1})$, on a $\xi\theta(\xi)^{-1} \in \pi(\zeta_{sc})\pi(\hat{T}_{sc}^{\theta})$ et la propriété (10) s'ensuit. Cela achève la preuve du théorème. □

21 Exemples

Exemple 1.

Considérons le corps $k = \mathbb{Q}_p$ pour un nombre premier $p \geq 3$ tel que -1 ne soit pas un carré dans k. Soit $\hat{G} = SL(4,\mathbb{C})$, muni de l'action triviale de Γ_k. On définit l'automorphisme habituel θ de $\hat{G}$ par $\theta(g) = J{}^t g^{-1} J^{-1}$, où J est la matrice antidiagonale de coefficients alternés 1 et -1 (les coefficients $J_{m,n}$ sont nuls pour $m+n \neq 5$ et valent $(-1)^m$ pour $m+n=5$). Soit s l'élément diagonal dont les coefficients $s_{m,m}$ valent i (la racine carrée de -1 dans $\mathbb{C}$) pour $m = 1,2$ et $-i$ pour $m = 3,4$. Notons u_{ad} l'image dans $\hat{G}_{AD} = PGL(4,\mathbb{C})$ de la symétrie élémentaire $\mathbf{u} \in GL(4,\mathbb{C})$ qui échange les deux vecteurs de base standard centraux : $\mathbf{u}_{m,n} = 1$ si $m = n = 1,4$ ou $(m,n) = (2,3)$ ou $(m,n) = (3,2)$, les autres coefficients sont nuls. Soit k' une extension quadratique ramifiée de k. Posons $\hat{G}' = Z_{\hat{G}}(s\theta)^0$ et notons $\mathcal{G}'_{ad}$ l'ensemble des $(g_{ad}, w) \in {}^L G_{AD}$ tels que $g_{ad} \in \hat{G}'_{ad}$ si $w \in W_{k'}$ et $g_{ad} \in \hat{G}'_{ad}u_{ad}$ si $w \in W_k - W_{k'}$. Le couple $(\mathcal{G}'_{ad}, s_{ad}\theta)$ est une donnée pré-endoscopique pour $({}^L G_{AD}, \theta)$. Montrons que

(1) cette pré-donnée ne se relève pas en une pré-donnée pour $({}^L G, \theta)$.

Le groupe $\hat{T}^{\theta}$ est connexe. On a $Z(\hat{G}) \simeq \mu_4(\mathbb{C})$ et $\hat{T}^{\theta} \cap Z(\hat{G}) \simeq \mu_2(\mathbb{C})$. Posons $\mathfrak{Y} = Z(\hat{G})/(\hat{T}^{\theta} \cap Z(\hat{G}))$. On a $\mathfrak{Y} = \mu_4(\mathbb{C})/\mu_2(\mathbb{C}) \simeq \{\pm 1\}$. Fixons une racine primitive 8-ième de l'unité dans $\mathbb{C}$ que l'on note ρ. Notons u le produit de $\mathbf{u}$ et de la matrice diagonale de coefficients ρ. Alors u est un relèvement de u_{ad} dans $\hat{G}$. Supposons que $(\mathcal{G}'_{ad}, s_{ad}\theta)$ se relève en une pré-donnée $(\mathcal{G}', s\theta)$ de $({}^L G, \theta)$. Alors il existe une application continue $z : W_k \to Z(\hat{G})$ telle que

$$\mathcal{G}' = \{(z(w)h, w); w \in W_{k'}, h \in \hat{G}'\} \cup \{(z(w)hu; w \in W_k - W_{k'}, h \in \hat{G}'\}.$$

Notons ζ l'application composée $W_k \xrightarrow{z} Z(\hat{G}) \to \mathfrak{Y} = \{\pm 1\}$. L'application ζ est bien déterminée. Puisque $\mathcal{G}'$ est un groupe et que u^2 est la matrice diagonale de coefficients ρ^2, laquelle s'envoie sur $-1 \in \mathfrak{Z}$ on doit avoir

(2) $\zeta(ww') = \zeta(w'w) = \zeta(w')\zeta(w)$ pour tous $w \in W_k$ et $w' \in W_{k'}$;

(3) $\zeta(w^2) = -\zeta(w)^2 = -1$ pour tout $w \in W_k - W_{k'}$.

En particulier, la restriction de ζ à $W_{k'}$ est un caractère et la fonction ζ tout entière se factorise par le noyau de celui-ci. Donc ζ se factorise par le groupe de Weyl relatif $W_{k'/k}$. Notons $N_{k'/k} : k'^{\times} \to k^{\times}$ la norme. Fixons un élément $a \in k^{\times} - N_{k'/k}(k'^{\times})$. On sait qu'il y a une suite exacte

$$1 \to k'^{\times} \to W_{k'/k} \to \Gamma_{k'/k} \to 1$$

et que l'on peut relever l'élément non trivial de $\Gamma_{k'/k}$ en un élément $w_0 \in W_{k'/k}$ tel que $w_0^2 = a$. La relation (2) implique non seulement que la restriction de ζ à $k'^{\times}$ est un caractère, mais aussi que celui-ci est invariant par l'action galoisienne de $\Gamma_{k'/k}$. Il se factorise donc par la norme, c'est-à-dire qu'il existe un caractère quadratique χ du groupe $N_{k'/k}(k'^{\times})$ tel que $\zeta(w) = \chi \circ N_{k'/k}(w)$ pour $w \in k'^{\times}$. La relation (3) appliquée à w_0 dit que $\zeta(a) = -1$, donc $\chi(a^2) = \chi \circ N_{k'/k}(a) = -1$. Mais nos hypothèses impliquent que $-1 \notin N_{k'/k}(k'^{\times})$. On peut donc choisir $a = -1$ et on obtient $\chi(1) = -1$, ce qui est impossible. Cela prouve (1).

Exemple 2.

Considérons maintenant le corps $k = \mathbb{Q}$. D'après [**?**] exemple 5.6 page 35, on peut trouver un tore T défini sur k tel que le noyau $ker^1(\Gamma_k, T)$ de l'homomorphisme

$$H^1(\Gamma_k, T) \to \prod_{v \in V_k} H^1(\Gamma_{k_v}, T)$$

ait deux éléments. Notons $\mathbb{A}$ l'anneau des adèles de k. On a la suite exacte

$$T(\mathbb{A}) \to H^0(\mathbb{A}/k, T) \to ker^1(\Gamma_k, T) \to \{1\},$$

avec les notations de [**?**] appendice D.1. Donc $H^0(\mathbb{A}/k, T)/im(T(\mathbb{A}))$ a aussi deux éléments. Il en est de même du noyau de l'homomorphisme

$$Hom_{cont}(H^0(\mathbb{A}/k, T), \mathbb{C}^{\times}) \to Hom_{cont}(T(\mathbb{A}), \mathbb{C}^{\times}).$$

D'après [**?**] lemme D.2.A, cela entraîne que le noyau l'homomorphisme

$$H^1(W_k, \hat{T}) \to \prod_{v \in V_k} H^1(W_{k_v}, \hat{T})$$

a aussi deux éléments. Notons t_1 et t_2 des cocycles représentant les deux éléments du noyau. Munissons $\hat{T}$ de l'automorphisme θ défini par $\theta(t) = t^{-1}$. Posons $\tilde{s} = \theta$ et définissons les deux sous-groupes $\mathcal{G}'_i = \{(t_i(w), w); w \in W_k\}$ de ${}^L T$ pour $i = 1, 2$. On montre aisément que les couples $(\mathcal{G}'_1, \tilde{s})$ et $(\mathcal{G}'_2, \tilde{s})$ sont deux pré-données endoscopiques elliptiques pour $({}^L T, \theta)$ qui sont localement équivalentes en toute place de k mais ne sont pas équivalentes, ni faiblement équivalentes.

Références

[1] N. Bourbaki : *Groupes et algèbres de Lie, chapitres 4, 5 et 6*, Hermann 1968

[2] T. Haines, M. Rapoport : *On parahoric subgroups*, appendice à G.Pappas, M. Rapoport *Twisted loop groups and their affine flag varieties*, Adv. in Math. 219 (2008), p. 118-198

[3] T. Kaletha, G. Prasad : *Bruhat-Tits theory : a new approach*, New Math. Monographs Series 44, Cambridge U. Press (2023)

[4] R. Kottwitz, D. Shelstad : *Fundations of twisted endoscopy*, Astérisque 255 (1999)

[5] R. Langlands : *Stable conjugacy : definitions and lemmas*, Canad. J. Math. 31 (1979), p. 700-725

[6] B. Lemaire, J.-L. Waldspurger : *Sur les données endoscopiques d'un groupe réductif connexe*, Canad. J. Math. 73 (2021), p. 1074-1094

[7] C. Moeglin, J.-L. Waldspurger : *Stabilisation de la formule des traces tordue, volume 1* , ,Progress in Math. 316, Birkhäuser 2016

[8] J.-L. Sansuc : *Groupe de Brauer et arithmétique des groupes algébriques linéaires sur un corps de nombres*, J. für d. reine and ang. Math. 327 (1981), p. 12-80

[9] J. Tits : *Reductive groups over local fields*, in *Automorphic forms, representations and L-functions*, Proc. Symp. in Pure Math. XXXIII, part 1, AMS (1979), p. 29-69

CNRS Institut de Mathématiques de Jussieu-Paris Rive Gauche
jean-loup.waldspurger@imj-prg.fr