Stabilisation de la partie géométrique de la formule des traces tordue

J.-L. Waldspurger

Résumé. We explain what is twisted endoscopy. We give the formulation of the geometric part of the twisted trace formula, following the works of Clozel-Labesse-Langlands and Arthur. We explain his stabilization, which is a work in progress, joint with Moeglin

Mathematics Subject Classification (2010).AMS 11F72, 20G35, 22E30, 22E35 .

Keywords.twisted endoscopy, twisted trace formula

1. Introduction

Langlands a posé des conjectures qui classifient les représentations automorphes d'un groupe réductif connexe défini sur un corps de nombres. La forme fine de ces conjectures requiert l'usage de la théorie de l'endoscopie, elle-aussi imaginée par Langlands. En retour, cette théorie permet d'établir dans certains cas très particuliers l'existence prédite par les conjectures de correspondances entre représentations automorphes sur différents groupes. La méthode passe par la "stabilisation de la formule des traces d'Arthur-Selberg", cette formule étant l'un des outils les plus puissants de la théorie des formes automorphes. Cette stabilisation a été établie par Arthur [1], [2], [3]. Depuis les travaux de Langlands puis d'Arthur et Clozel sur le changement de base ([16], [9]), on sait qu'il est utile d'étendre la formule des traces comme la théorie de l'endoscopie à une situation "tordue", c'est-à-dire où le groupe est muni d'un automorphisme (il revient plus ou moins au même de considérer un groupe non connexe). Arthur a tiré des applications spectaculaires de cette théorie appliquée à un groupe $GL(n)$ tordu par un automorphisme extérieur non trivial, cf. [4]. Dans le cadre tordu, la formule des traces a été établie par Clozel, Labesse et Langlands et développée par Arthur. Kottwitz, Labesse et Shelstad ont élaboré après Langlands la théorie de l'endoscopie tordue. Dans un travail en voie d'achèvement, en collaboration avec Moeglin, nous stabilisons la formule des traces tordue, en suivant la méthode d'Arthur. Dans la section 2, je tente d'expliquer ce qu'est l'endoscopie tordue sur un corps de base local et j'énonce les résultats de stabilisation locaux concernant les intégrales orbitales. Dans la section 3, le corps de base devient un corps de nombres. Je décris la partie géométrique de la formule des traces tordue et j'explique sa stabilisation. Comme je l'ai dit, ce travail n'est pas encore complètement achevé et reste encore soumis à une hypothèse, à savoir la validité du lemme fondamental pour toutes les fonctions de l'algèbre de Hecke. Ngô Bao Chau a démontré ce lemme pour la fonction unité de cette algèbre [17]. Sa généralisation ne fait pas de doute et est certainement incomparablement plus facile que le théorème de Ngô Bao Chau.

2. La théorie locale

Cette section s'appuie sur les articles [11], [13], [14], [18]. On a donné une présentation plus personnelle de la théorie dans [19].

2.1. Espaces tordus. Soient F un corps local de caractéristique nulle et $\bar{F}$ une clôture algébrique de F. On pose $\Gamma_F = Gal(\bar{F}/F)$ et on note W_F le groupe de Weil de F. Soient G un groupe réductif connexe défini sur F et $\tilde{G}$ un espace tordu sous G. Cela signifie que $\tilde{G}$ est une variété algébrique sur F muni de deux actions de G

$$\begin{array}{ccc} G \times \tilde{G} \times G & \to & \tilde{G} \\ (g, \gamma, g') & \mapsto & g\gamma g' \end{array}$$

définies sur F, de sorte que, pour tout $\gamma \in \tilde{G}$, les applications $g \mapsto g\gamma$ et $g' \mapsto \gamma g'$ soient bijectives. Pour $\gamma \in \tilde{G}$, on note ad_γ l'automorphisme de G tel que $\gamma g' = ad_\gamma(g')\gamma$ pour tout $g' \in G$. Notons θ la restriction de ad_γ au centre $Z(G)$ de G. Elle ne dépend pas de l'élément $\gamma \in \tilde{G}$. On impose les deux conditions :

$\tilde{G}(F) \neq \emptyset$ et l'automorphisme θ de $Z(G)$ est d'ordre fini.

Outre les données G et $\tilde{G}$, on fixe un caractère ω de $G(F)$, c'est-à-dire un homomorphisme continu $\omega : G(F) \to \mathbb{C}^\times$.

Pour $\gamma \in \tilde{G}$, on note $Z_G(\gamma)$ l'ensemble de points fixes de ad_γ et G_γ la composante neutre de ce groupe. Une paire de Borel de G est un couple (B, T), où B est un sous-groupe de Borel de G et T est un sous-tore maximal de B (on ne suppose pas B et T définis sur F). Un élément $\gamma \in \tilde{G}$ est dit semi-simple s'il existe une paire de Borel (B, T) de G qui est conservée par ad_γ. Tout élément $\gamma \in \tilde{G}$ s'écrit de façon unique comme produit $\gamma = u\gamma_{ss}$ où γ_{ss} est semi-simple et u est un élément unipotent de $G_{\gamma_{ss}}$. On dit que γ est fortement régulier s'il est semi-simple et si $Z_G(\gamma)$ est commutatif.

On dit que G est quasi-déployé s'il existe une paire de Borel (B, T) définie sur F. On dit que $\tilde{G}$ est à torsion intérieure si ad_γ est un automorphisme intérieur de G pour tout $\gamma \in \tilde{G}$ (ou pour un $\gamma \in \tilde{G}$, c'est équivalent). Un tel espace tordu à torsion intérieure est isomorphe à G sur $\bar{F}$ mais pas forcément sur F. Par exemple, on peut avoir $G = SL(n)$ et $\tilde{G} = \{g \in GL(n); det(g) = d\}$, où d est un élément fixé de $F^\times$. Dans ce cas, $\tilde{G}$ est isomorphe à G sur F si et seulement si d est la puissance n-ième d'un élément de $F^\times$.

2.2. Intégrales orbitales. On note $C_c^\infty(\tilde{G}(F))$ l'espace des fonctions $f : \tilde{G}(F) \to \mathbb{C}$ dont le support est compact et qui sont lisses, c'est-à-dire localement constantes si F est non-archimédien, C^∞ si F est archimédien. Pour tout groupe réductif H défini sur F, on note par la lettre gothique $\mathfrak{h}$ son algèbre de Lie. Soit $\gamma \in \tilde{G}(F)$. Notons γ_{ss} sa partie semi-simple, posons

$$D^{\tilde{G}}(\gamma) = |det(1 - ad_{\gamma_{ss}})_{|\mathfrak{g}/\mathfrak{g}_{\gamma_{ss}}}|_F,$$

où $|.|_F$ est la valeur absolue usuelle de F. Fixons des mesures de Haar sur $G(F)$ et $G_\gamma(F)$. Soit $f \in C_c^\infty(\tilde{G}(F))$. Si ω n'est pas trivial sur $G_\gamma(F)$, on pose $I^{\tilde{G}}(\gamma, \omega, f) = 0$. Si ω est trivial sur $G_\gamma(F)$, on pose

$$I^{\tilde{G}}(\gamma, \omega, f) = D^{\tilde{G}}(\gamma)^{1/2} \int_{G_\gamma(F)\backslash G(F)} \omega(g) f(g^{-1}\gamma g)\, dg.$$

On note $I(\tilde{G}(F), \omega)$ le quotient de $C_c^\infty(\tilde{G}(F))$ par le sous-espace des fonctions f telles que $I^{\tilde{G}}(\gamma, \omega, f) = 0$ pour tout $\gamma \in \tilde{G}(F)$.

Supposons G quasi-déployé, $\tilde{G}$ à torsion intérieure et $\omega = 1$. On supprime ω des notations. Soit γ un élément semi-simple fortement régulier de $\tilde{G}(F)$. La classe de conjugaison stable de γ est l'ensemble des $\gamma' \in \tilde{G}(F)$ tels qu'il existe $g \in G(\bar{F})$ de sorte que $\gamma' = g^{-1}\gamma g$. En général, cette classe est plus grosse que la classe de conjugaison de γ par $G(F)$: l'exemple simple $G = \tilde{G} = SL(2)$ permet de s'en convaincre. Fixons des mesures de Haar sur $G(F)$ et $G_\gamma(F)$. Pour γ' stablement conjugué à γ, les tores G_γ et $G_{\gamma'}$ sont isomorphes et la mesure sur $G_\gamma(F)$ en détermine une sur $G_{\gamma'}(F)$. Pour $f \in C_c^\infty(\tilde{G}(F))$, on pose

$$S^{\tilde{G}}(\gamma, f) = \sum_{\gamma'} I^{\tilde{G}}(\gamma', f),$$

où γ' parcourt un ensemble de représentants des classes de conjugaison par $G(F)$ dans la classe de conjugaison stable de γ. On note $SI(\tilde{G}(F))$ le quotient de $C_c^\infty(\tilde{G}(F))$ par le sous-espace des f telles que $S^{\tilde{G}}(\gamma, f) = 0$ pour tout γ comme ci-dessus. C'est un quotient de $I(\tilde{G}(F))$.

Revenons au cas général. L'analyse harmonique ω-équivariante est l'étude de l'espace $I(\tilde{G}(F), \omega)$. Les travaux de ces dernières décennies sur la formule des traces ont mis en évidence l'importance plus fondamentale des espaces $SI(\tilde{G}(F))$ du cas particulier ci-dessus. La théorie de l'endoscopie tordue affirme en substance qu'étudier l'espace $I(\tilde{G}(F), \omega)$ revient à étudier les espaces $SI(\tilde{G}'_i(F))$, où $(G'_i, \tilde{G}'_i)_{i=1,\ldots,n}$ est une certaine famille finie de couples déduits de $(G, \tilde{G}, \omega)$ et vérifiant les hypothèses plus simples ci-dessus. Nous développerons les constructions de cette théorie dans les paragraphes suivants.

2.3. *L*-groupes. Une paire de Borel épinglée est un triplet $\mathcal{E} = (B, T, (E_\alpha)_{\alpha \in \Delta})$, où (B, T) est une paire de Borel, Δ est l'ensemble des racines simples de T dans l'algèbre de Lie $\mathfrak{u}$ du radical unipotent de B et, pour tout $\alpha \in \Delta$, E_α est un élément non nul de la droite radicielle $\mathfrak{u}_\alpha \subset \mathfrak{u}$ associée à α. Deux paires de Borel (resp. épinglées) de G sont conjuguées par un élément de G. Fixons une paire de Borel (B, T). On définit une action "quasi-déployée" de Γ_F sur T de la façon suivante. Pour tout $\sigma \in \Gamma_F$, fixons $g(\sigma) \in G$ tel que $ad_{g(\sigma)} \circ \sigma(B, T) = (B, T)$ (pour $g \in G$,

ad_g est l'automorphisme $x \mapsto gxg^{-1}$ de G). On note σ_{G^*} l'automorphisme $ad_{g(\sigma)} \circ \sigma$ de T. Il ne dépend pas du choix de $g(\sigma)$ et $\sigma \mapsto \sigma_{G^*}$ est l'action cherchée. Il y a aussi un automorphisme θ de T ainsi défini : on choisit $\gamma \in \tilde{G}$ tel que ad_γ conserve (B, T) (il existe de tels γ) ; alors θ est la restriction de ad_γ à T, laquelle ne dépend pas du choix de γ.

Un groupe dual de G est un groupe réductif connexe $\hat{G}$ sur $\mathbb{C}$, muni d'une paire de Borel épinglée $\hat{\mathcal{E}} = (\hat{B}, \hat{T}, (\hat{E}_{\hat{\alpha}})_{\hat{\alpha} \in \hat{\Delta}})$ et d'une action algébrique de Γ_F satisfaisant aux conditions suivantes. L'action de Γ_F conserve $\hat{\mathcal{E}}$. C'est-à-dire que, pour $\sigma \in \Gamma_F$, on a $\sigma(\hat{B}, \hat{T}) = (\hat{B}, \hat{T})$ et σ agit par une permutation $\hat{\alpha} \mapsto \sigma(\hat{\alpha})$ sur $\hat{\Delta}$ de sorte que $\sigma(\hat{E}_{\hat{\alpha}}) = \hat{E}_{\sigma(\hat{\alpha})}$. Pour toute paire de Borel (B, T) de G, on se donne des isomorphismes en dualité $X_*(T) \simeq X^*(\hat{T})$, $X^*(T) \simeq X_*(\hat{T})$ (avec la notation habituelle pour ces groupes de caractères et de cocaractères), qui échangent ensembles de racines et de coracines, qui respectent les ordres sur ces ensembles définis par B et $\hat{B}$ et qui sont équivariants pour les actions de Γ_F, le tore T étant muni de l'action quasi-déployée associée à (B, T). On demande que si on remplace (B, T) par $ad_g(B, T)$, pour $g \in G$, les isomorphismes relatifs à $ad_g(B, T)$ se déduisent de ceux relatifs à (B, T) par composition avec les isomorphismes déduits de ad_g. On fixe un tel groupe dual et on pose ${}^L G = \hat{G} \rtimes W_F$, où W_F agit sur $\hat{G}$ via l'homomorphisme naturel $W_F \to \Gamma_F$. Pour une paire de Borel (B, T), l'automorphisme θ de T se transporte en un automorphisme $\hat{\theta}$ de $\hat{T}$: si $x_* \in X_*(T)$ correspond à $\hat{x}^* \in X^*(\hat{T})$, $\theta \circ x_*$ correspond à $\hat{x}^* \circ \hat{\theta}$. Cet automorphisme ne dépend pas du choix de (B, T) et se prolonge en un automorphisme $\hat{\theta}$ de $\hat{G}$ qui conserve $\hat{\mathcal{E}}$ et commute à l'action galoisienne. On peut considérer l'ensemble $\hat{G}\hat{\theta}$ comme un espace tordu sous $\hat{G}$.

On a fixé en 2.1 un caractère ω de $G(F)$. Il convient de modifier cette donnée en fixant plutôt un élément $\mathbf{a}$ du groupe de cohomologie $H^1(W_F; Z(\hat{G}))$. Selon une construction de Langlands, cet élément détermine un caractère ω de $G(F)$. Si F est non-archimédien, la correspondance $\mathbf{a} \mapsto \omega$ est bijective. Mais, si F est archimédien, elle est seulement surjective et fixer $\mathbf{a}$ est plus précis que fixer ω.

2.4. Données endoscopiques. Une donnée endoscopique pour $(G, \tilde{G}, \mathbf{a})$ est un triplet $\mathbf{G}' = (G', \mathcal{G}', \tilde{s})$, où G' est un groupe réductif connexe quasi-déployé sur F, $\mathcal{G}'$ est un sous-groupe de ${}^L G$ et $\tilde{s}$ est un élément semi-simple de l'espace tordu $\hat{G}\hat{\theta}$, ces données vérifiant les conditions qui suivent. Notons $\hat{G}_{\tilde{s}}$ la composante neutre du commutant de $\tilde{s}$ dans $\hat{G}$. On suppose qu'il y a une suite exacte

$$1 \to \hat{G}_{\tilde{s}} \to \mathcal{G}' \to W_F \to 1$$

et que cette suite est scindée, c'est-à-dire qu'il y a un homomorphisme continu $W_F \to \mathcal{G}'$ qui est une section de la deuxième flèche. Fixons une paire de Borel épinglée de $\hat{G}_{\tilde{s}}$. Pour tout $w \in W_F$, fixons $g_w = (g(w), w) \in \mathcal{G}'$ tel que $ad_{g(w)} \circ w$ la conserve. Alors l'application qui, à w, associe l'automorphisme $ad_{g(w)} \circ w$ de $\hat{G}_{\tilde{s}}$ se quotiente ou s'étend (selon que F est archimédien ou non) en une action de Γ_F sur $\hat{G}_{\tilde{s}}$. On suppose que, muni de cette action, $\hat{G}_{\tilde{s}}$ est un groupe dual de G'. Cela nous autorise à noter $\hat{G}'$ ce groupe $\hat{G}_{\tilde{s}}$. On suppose enfin qu'il existe un cocycle

$a : W_F \to Z(\hat{G})$, dont la classe est $\mathbf{a}$, de sorte que, pour tout $(g,w) \in \mathcal{G}'$, on ait l'égalité $s\hat{\theta}(g)w(s)^{-1} = a(w)g$, où on a écrit $\tilde{s} = s\hat{\theta}$ avec $s \in \hat{G}$.

Deux données endoscopiques $\mathbf{G}'_1 = (G'_1, \mathcal{G}'_1, \tilde{s}_1)$ et $\mathbf{G}'_2 = (G'_2, \mathcal{G}'_2, \tilde{s}_2)$ sont dites équivalentes s'il existe $x \in \hat{G}$ tel que $x\mathcal{G}'_1x^{-1} = \mathcal{G}'_2$ et $x\tilde{s}_1x^{-1} \in Z(\hat{G})\tilde{s}_2$. On peut toujours remplacer une donnée endoscopique par une donnée équivalente $\mathbf{G}' = (G', \mathcal{G}', \tilde{s})$ de sorte que les conditions suivantes soient vérifiées : $\tilde{s} = s\hat{\theta}$, avec $s \in \hat{T}$; l'action galoisienne sur $\hat{G}'$ conserve une paire de Borel épinglée dont la paire de Borel $(\hat{B}', \hat{T}')$ sous-jacente est $(\hat{B} \cap \hat{G}', \hat{T}^{\hat{\theta},0})$, le deuxième groupe désignant la composante neutre du sous-groupe des points fixes de $\hat{\theta}$ agissant dans $\hat{T}$. Dans la suite, on ne considère que de telles données. Soient (B,T), resp. (B',T'), une paire de Borel de G, resp. G'. Des homomorphismes

$$X_*(T) \simeq X^*(\hat{T}) \stackrel{restriction}{\to} X^*(\hat{T}^{\hat{\theta},0}) = X^*(\hat{T}') \simeq X_*(T')$$

se déduit un homomorphisme $\xi : T \to T'$. Il se quotiente en un isomorphisme $T/(1-\theta)(T) \simeq T'$, où $1-\theta$ est l'homomorphisme $t \mapsto t\theta(t)^{-1}$ de T dans lui-même. On montre que ξ se restreint en un homomorphisme $\xi : Z(G) \to Z(G')$ qui ne dépend pas des choix de paires de Borel.

On dit que la donnée $\mathbf{G}' = (G', \mathcal{G}', \tilde{s})$ est elliptique si $Z(\hat{G}')^{\Gamma_F,0} = Z(\hat{G})^{\Gamma_F,\hat{\theta},0}$, avec une notation similaire à celle ci-dessus.

2.5. L'espace endoscopique. Pour une paire de Borel épinglée $\mathcal{E}$ de G, notons $Z(\tilde{G}, \mathcal{E})$ l'ensemble des $\gamma \in \tilde{G}$ tels que ad_γ conserve $\mathcal{E}$. Notons $\mathcal{Z}(\tilde{G}, \mathcal{E})$ le quotient de $Z(\tilde{G}, \mathcal{E})$ par l'action par conjugaison de $Z(G)$. Si $\mathcal{E}'$ est une autre paire de Borel épinglée, on choisit $g \in G$ tel que $ad_g(\mathcal{E}) = \mathcal{E}'$. Alors ad_g définit un isomorphisme de $\mathcal{Z}(\tilde{G}, \mathcal{E})$ sur $\mathcal{Z}(\tilde{G}, \mathcal{E}')$ qui ne dépend pas du choix de g. On note $\mathcal{Z}(\tilde{G})$ la limite inductive des $\mathcal{Z}(\tilde{G}, \mathcal{E})$, la limite étant prise sur les paires de Borel épinglées $\mathcal{E}$ de G, les applications de transition étant les isomorphismes canoniques que l'on vient de définir. Cet objet $\mathcal{Z}(\tilde{G})$ étant canonique, il récupère une action de Γ_F. C'est un espace tordu sous $\mathcal{Z}(G) := Z(G)/(1-\theta)(Z(G))$.

Soit $\mathbf{G}' = (G', \mathcal{G}', \tilde{s})$ une donnée endoscopique pour $(G, \tilde{G}, \mathbf{a})$. On définit l'espace endoscopique $\tilde{G}'$ comme le quotient de $G' \times \mathcal{Z}(\tilde{G})$ par la relation d'équivalence $(g'\xi(z), \tilde{z}) \equiv (g', z\tilde{z})$ pour tout $z \in Z(G)$. L'action galoisienne sur $G' \times \mathcal{Z}(\tilde{G})$ se descend en une action galoisienne sur $\tilde{G}'$. On a des actions à droite et à gauche de G' sur $\tilde{G}'$ qui proviennent des multiplications sur la première composante de $G' \times \mathcal{Z}(\tilde{G})$. Ainsi $\tilde{G}'$ est un espace tordu sous G' qui est à torsion intérieure. Remarquons que $\tilde{G}'(F)$ peut être vide. La construction fournit une application naturelle $\mathcal{Z}(\tilde{G}) \to \mathcal{Z}(\tilde{G}')$. Ce dernier ensemble est celui des $\delta \in \tilde{G}'$ tels que ad_δ soit l'identité.

2.6. Correspondance endoscopique. Soit $\mathbf{G}' = (G', \mathcal{G}', \tilde{s})$ une donnée endoscopique pour $(G, \tilde{G}, \mathbf{a})$. Appelons diagramme un sextuplet $(\epsilon, B', T', B, T, \eta)$, où $\epsilon \in \tilde{G}'(F)$, $\eta \in \tilde{G}(F)$, (B', T'), resp. (B,T), est une paire de Borel de G', resp. G, vérifiant les conditions suivantes. Les automorphismes ad_ϵ et ad_η conservent respectivement (B',T') et (B,T) (les éléments ϵ et η sont donc semi-simples). Les tores T et T' sont définis sur F, ainsi que l'homomorphisme $\xi : T \to T'$ associé aux paires de Borel. Etendons les deux paires de Borel en des paires de Borel épinglées

$\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}'$. On peut écrire $\eta = te$, avec $t \in T$ et $e \in Z(\tilde{G}, \mathcal{E})$. L'élément e a une image naturelle e' dans $\mathcal{Z}(\tilde{G}') = Z(\tilde{G}', \mathcal{E}')$. On impose que $\epsilon = \xi(t)e'$. Cela ne dépend pas des choix d'épinglages.

Pour des éléments $\epsilon \in \tilde{G}'(F)$ et $\eta \in \tilde{G}(F)$, on dit que ces éléments se correspondent s'il existe un diagramme les joignant. On dit que $\mathbf{G}'$ est relevant s'il existe un diagramme.

Pour un élément semi-simple $\eta \in \tilde{G}$, on introduit le groupe $I_\eta = G_\eta Z(G)^\theta$. Soient $\eta, \eta' \in \tilde{G}(F)$ deux éléments semi-simples. On dit qu'ils sont stablement conjugués s'il existe $y \in G$ tel que $y^{-1}\eta y = \eta'$ et $y\sigma(y)^{-1} \in I_\eta$ pour tout $\sigma \in \Gamma_F$. Cette définition généralise celle posée en 2.2. La classe de conjugaison stable de η est l'ensemble des éléments stablement conjugués à η. Soient $\mathcal{O}'$, resp. $\mathcal{O}$, une classe de conjugaison stable d'éléments semi-simples dans $\tilde{G}'(F)$, resp. $\tilde{G}(F)$. On dit qu'elles se correspondent s'il existe $\epsilon \in \mathcal{O}'$ et $\eta \in \mathcal{O}$ qui se correspondent (si $\mathcal{O}$ est formé d'éléments fortement réguliers, c'est équivalent à ce que ϵ et η se correspondent pour tous $\epsilon \in \mathcal{O}'$ et $\eta \in \mathcal{O}$). On montre qu'à une classe $\mathcal{O}'$ correspond au plus une classe $\mathcal{O}$ et qu'inversement, l'ensemble des classes $\mathcal{O}'$ qui correspondent à une classe $\mathcal{O}$ est fini (éventuellement vide).

2.7. Transfert. Soit $\mathbf{G}' = (G', \mathcal{G}', \tilde{s})$ une donnée endoscopique relevante de $(G, \tilde{G}, \mathbf{a})$. Considérons une suite exacte

$$1 \to C_1 \to G'_1 \to G' \to 1,$$

où G'_1 est un groupe réductif et quasi-déployé sur F et C_1 est un sous-tore central induit (c'est-à-dire que $X_*(C_1)$ possède une base permutée par l'action galoisienne). Considérons un espace tordu $\tilde{G}'_1$ sous G'_1, à torsion intérieure et tel que $\tilde{G}'_1(F) \neq \emptyset$. Supposons donnée une application $\tilde{G}'_1 \to \tilde{G}'$ compatible avec la projection $G'_1 \to G'$. Supposons donné un plongement $\hat{\xi}_1 : \mathcal{G}' \to {}^L G'_1$ compatible aux projections sur W_F, dont la restriction à $\hat{G}' \subset \mathcal{G}'$ est un homomorphisme $\hat{G}' \to \hat{G}'_1$ dual à la projection $G'_1 \to G'$. De telles données existent, cf. [11] 2.2. Pour $(\delta_1, \gamma) \in \tilde{G}'_1(F) \times \tilde{G}(F)$, on dit que δ_1 et γ se correspondent si δ et γ se correspondent, où δ est l'image de δ_1 dans $\tilde{G}'(F)$. Kottwitz et Shelstad ont défini un facteur de transfert $\Delta_1 : \tilde{G}'_1(F) \times \tilde{G}(F) \to \mathbb{C}$, cf. [11] chapitre 4 et [12]. On a $\Delta_1(\delta_1, \gamma) \neq 0$ si et seulement si δ_1 et γ se correspondent et γ est fortement régulier. Pour de tels éléments, $\Delta_1(\delta_1, \gamma)$ ne dépend que de la classe de conjugaison stable de δ_1 et on a la formule

$$\Delta_1(c_1\delta_1, g^{-1}\gamma g) = \lambda_1(c_1)^{-1}\omega(g)\Delta_1(\delta_1, \gamma)$$

pour tous $c_1 \in C_1(F)$ et $g \in G(F)$, où λ_1 est un caractère de $C_1(F)$ déduit des données.

Notons $C^\infty_{c,\lambda_1}(\tilde{G}'_1(F))$ l'espace des fonctions $f_1 : \tilde{G}'_1(F) \to \mathbb{C}$ qui sont lisses, à support compact modulo $C_1(F)$ et telles que $f_1(c_1\delta_1) = \lambda_1(c_1)^{-1} f_1(\delta_1)$ pour tous $c_1 \in C_1(F)$ et $\delta_1 \in \tilde{G}'_1(F)$. Les définitions du paragraphe 2.2 s'adaptent à cet espace, on ajoute des λ_1 en indices. Pour $f \in C^\infty_c(\tilde{G}(F))$ et $f_1 \in C^\infty_{c,\lambda_1}(\tilde{G}'_1(F))$, on dit que f_1 est un transfert de f si on a l'égalité

$$S_{\lambda_1}^{\tilde{G}'_1}(\delta_1, f_1) = \sum_{\gamma} \Delta_1(\delta_1,\gamma)[Z_G(\gamma;F) : G_\gamma(F)]^{-1} I^{\tilde{G}}(\gamma,\omega,f)$$

pour tout δ_1 dans un ensemble ouvert dense de $\tilde{G}'_1(F)$, où γ parcourt l'ensemble des éléments de $\tilde{G}(F)$ correspondant à δ_1, modulo conjugaison par $G(F)$. Pour donner un sens à cette égalité, il faut fixer des mesures de Haar sur tous les groupes intervenant. Celles sur les tores $G_\gamma(F)$ et $G'_{1,\delta_1}(F)$ doivent être reliées.

Théorème 2.1. *Tout $f \in C_c^\infty(\tilde{G}(F))$ admet un transfert $f_1 \in C_{c,\lambda_1}^\infty(\tilde{G}'_1(F))$.*

Ce théorème résulte de [17] et [20] 1.5 dans le cas non archimédien. Il est dû à Shelstad [18] dans le cas archimédien. On montre que les choix de mesures de Haar disparaissent si l'on introduit pour tout groupe réductif H sur F la droite complexe $Mes(H(F))$ portée par une mesure de Haar sur $H(F)$ et si l'on considère le transfert comme une application linéaire

$$I(\tilde{G}(F),\omega) \otimes Mes(G(F)) \to SI_{\lambda_1}(\tilde{G}'_1(F)) \otimes Mes(G'(F)).$$

Cette application dépend des données G'_1, $\tilde{G}'_1$, C_1, $\hat{\xi}_1$, ainsi que du choix de Δ_1. Ce facteur n'est en effet pas uniquement déterminé, mais seulement à homothétie près. Considérons d'autres données G'_2,...,Δ_2 vérifiant les mêmes hypothèses. Il s'avère que l'on peut définir un isomorphisme canonique

$$C_{c,\lambda_1}^\infty(\tilde{G}'_1(F)) \simeq C_{c,\lambda_2}^\infty(\tilde{G}'_2(F))$$

qui commute au transfert. C'est-à-dire que, pour $f \in C_c^\infty(\tilde{G}(F))$ et $f_1 \in C_{c,\lambda_1}^\infty(\tilde{G}'_1(F))$, f_1 est un transfert de f si et seulement si l'image f_2 de f_1 par l'isomorphisme ci-dessus est un transfert de f. On peut alors définir un espace noté $C_c^\infty(\mathbf{G}')$ qui est la limite inductive des espaces $C_{c,\lambda_1}^\infty(\tilde{G}'_1(F))$, la limite étant prise sur toutes les données auxiliaires G'_1,...,Δ_1, les applications de transition étant les isomorphismes ci-dessus. Cette définition pose un problème logique, les données auxiliaires ne formant pas un ensemble, mais ce problème est facile à résoudre. Une construction analogue permet de définir des espaces $I(\mathbf{G}')$ et $SI(\mathbf{G}')$. L'application de transfert devient une application linéaire canonique

$$\begin{array}{ccc} I(\tilde{G}(F),\omega) \otimes Mes(G(F)) & \to & SI(\mathbf{G}') \otimes Mes(G'(F)) \\ \mathbf{f} & \mapsto & \mathbf{f}^{\mathbf{G}'} \end{array}$$

2.8. Les espaces de distributions. On note $D_{orb}(\tilde{G}(F),\omega)$ l'espace de formes linéaires sur $I(\tilde{G}(F),\omega)$ (que l'on peut relever en des formes linéaires sur $C_c^\infty(\tilde{G}(F))$) engendré par les intégrales orbitales $f \mapsto I^{\tilde{G}}(\gamma,\omega,f)$, cf. 2.2, quand γ décrit $\tilde{G}(F)$. Quand F est non-archimédien, c'est aussi l'espace des formes linéaires qui, relevées en des formes linéaires sur $C_c^\infty(\tilde{G}(F))$, sont supportées par un nombre fini de classes de conjugaison par $G(F)$. Il est plus canonique d'introduire comme en 2.7 la droite complexe $Mes(G(F))$ et sa duale $Mes(G(F))^*$ et de considérer les espaces $I(\tilde{G}(F),\omega)\otimes Mes(G(F))$ et $D_{orb}(\tilde{G}(F),\omega)\otimes Mes(G(F))^*$. Pour $\mathbf{f}\in I(\tilde{G}(F),\omega)\otimes Mes(G(F))$ et $\boldsymbol{\gamma}\in D_{orb}(\tilde{G}(F),\omega)\otimes Mes(G(F))^*$, on note $I^{\tilde{G}}(\boldsymbol{\gamma},\mathbf{f})$ l'évaluation de $\boldsymbol{\gamma}$ sur $\mathbf{f}$. Supposons que G soit quasi-déployé, que $\tilde{G}$ soit à torsion intérieure et que $\mathbf{a}=1$. On note $D^{st}_{orb}(\tilde{G}(F))$ le sous-espace des éléments de $D_{g\acute{e}om}(\tilde{G}(F))$ qui sont stables, c'est-à-dire se quotientent en une forme linéaire sur $SI(\tilde{G}(F))$. Pour $\mathbf{f}\in SI(\tilde{G}(F))\otimes Mes(G(F))$ et $\boldsymbol{\delta}\in D^{st}_{orb}(\tilde{G}(F))\otimes Mes(G(F))^*$, on note $S^{\tilde{G}}(\boldsymbol{\delta},\mathbf{f})$ l'évaluation de $\boldsymbol{\delta}$ sur $\mathbf{f}$.

Soit $\mathbf{G}'=(G',\mathcal{G}',\tilde{s})$ une donnée endoscopique relevante de $(G,\tilde{G},\mathbf{a})$. On a défini l'espace $SI(\mathbf{G}')$ comme limite inductive d'espaces $SI_{\lambda_1}(\tilde{G}'_1(F))$ construits à l'aide de données auxiliaires. Une construction analogue permet de définir un espace $D^{st}_{orb}(\mathbf{G}')$ de formes linéaires sur $SI(\mathbf{G}')$. Supposons F non-archimédien. Dualement à l'application de transfert du paragraphe précédent, on a une application linéaire

$$transfert: D^{st}_{orb}(\mathbf{G}')\otimes Mes(G'(F))^*\to D_{orb}(\tilde{G}(F),\omega)\otimes Mes(G(F))^*.$$

Le cas archimédien est plus compliqué, cf. 2.13.

2.9. Espaces de Levi. Soient P un sous-groupe parabolique de G et M une composante de Levi de P, tous deux définis sur F (on appelle M un Levi de G). Notons $\tilde{M}$ l'ensemble des $\gamma\in\tilde{G}$ tels que ad_γ conserve P et M. Supposons $\tilde{M}$ non vide. On appelle alors $\tilde{M}$ un espace de Levi de $\tilde{G}$. C'est un espace tordu sous M. On peut identifier le groupe dual $\hat{M}$ à un sous-groupe de Levi de $\hat{G}$, que l'on peut supposer standard et invariant par $\hat{\theta}$ comme par l'action galoisienne. L'élément $\mathbf{a}\in H^1(W_F;Z(\hat{G}))$ se pousse en un élément $\mathbf{a}_M\in H^1(W_F;Z(\hat{M}))$. Soit $\mathbf{M}'=(M',\mathcal{M}',\tilde{\zeta})$ une donnée endoscopique elliptique pour $(M,\tilde{M},\mathbf{a}_M)$. Dans la définition de 2.4 intervient un cocycle, ici $a_M:W_F\to Z(\hat{M})$, de classe $\mathbf{a}_M$. On voit que, quitte à remplacer $\mathbf{M}'$ par une donnée équivalente, on peut supposer que ce cocycle est à valeurs dans $Z(\hat{G})$. Sa classe dans $H^1(W_F;Z(\hat{G}))$ est alors $\mathbf{a}$. On suppose qu'il en est ainsi.

Soit $\tilde{s}\in\tilde{\zeta}Z(\hat{M})^{\Gamma_F,\hat{\theta}}/Z(\hat{G})^{\Gamma_F,\hat{\theta}}$. On montre qu'il existe une donnée endoscopique $\mathbf{G}'(\tilde{s})=(G'(\tilde{s}),\mathcal{G}'(\tilde{s}),\tilde{s})$ de $(G,\tilde{G},\mathbf{a})$ caractérisée par les propriétés suivantes : $\hat{G}'(\tilde{s})$ est la composante neutre du commutant de $\tilde{s}$ dans $\hat{G}$; $\mathcal{G}'(\tilde{s})$ est le sous-groupe de ${}^LG$ engendré par $\hat{G}'(\tilde{s})$ et $\mathcal{M}'$ (en fait, c'est simplement le produit $\hat{G}'(\tilde{s})\mathcal{M}'=\mathcal{M}'\hat{G}'(\tilde{s})$). Le groupe M' s'identifie à un Levi de $G'(\tilde{s})$ et $\tilde{M}'$ s'identifie conformément à un espace de Levi de $\tilde{G}'(\tilde{s})$. On définit une constante $i_{\tilde{M}'}(\tilde{G},\tilde{G}'(\tilde{s}))$. Si $\mathbf{G}'(\tilde{s})$ n'est pas elliptique, elle est nulle. Si $\mathbf{G}'(\tilde{s})$ est elliptique, on montre qu'il y a un homomorphisme naturel

$$Z(\hat{M})^{\Gamma_F,\hat{\theta}}/Z(\hat{G})^{\Gamma_F,\hat{\theta}}\to Z(\hat{M}')^{\Gamma_F}/Z(\hat{G}'(\tilde{s}))^{\Gamma_F}.$$

Il est surjectif et de noyau fini. Alors $i_{\tilde{M}'}(\tilde{G},\tilde{G}'(\tilde{s}))$ est l'inverse du nombre d'éléments de ce noyau.

Soient $\tilde{M}$ un espace de Levi de $\tilde{G}$ et M le Levi de G associé. On note A_M le plus grand sous-tore de $Z(M)$ déployé sur F et $A_{\tilde{M}}$ le plus grand sous-tore de A_M sur lequel ad_γ agit trivialement pour tout $\gamma\in\tilde{M}$ (ou pour un $\gamma\in\tilde{M}$, c'est équivalent). On pose $\mathcal{A}_{\tilde{M}} = X_*(A_{\tilde{M}}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$. On doit fixer pour tout espace de Levi $\tilde{M}$ une mesure de Haar sur $\mathcal{A}_{\tilde{M}}$. De même, pour toute donnée endoscopique $\mathbf{G}' = (G', \mathcal{G}', \tilde{s})$ de $(G, \tilde{G}, \mathbf{a})$ et pour tout espace de Levi $\tilde{M}'$ de $\tilde{G}'$, on doit fixer une mesure de Haar sur $\mathcal{A}_{\tilde{M}'}$. On doit imposer des conditions de compatibilité à ces divers choix. En particulier, si $\mathbf{G}'$ est elliptique, il y a un isomorphisme naturel $\mathcal{A}_{\tilde{G}} \simeq \mathcal{A}_{\tilde{G}'}$ et on impose que les mesures se correspondent par cet isomorphisme.

2.10. Intégrales orbitales pondérées. Les définitions de ce paragraphe sont dues (comme bien d'autres) à Arthur. Considérons un espace de Levi $\tilde{M}$ de $\tilde{G}$. Soient $\gamma \in \tilde{G}(F)$ et $f \in C_c^\infty(\tilde{G}(F))$. Supposons d'abord $M_\gamma = G_\gamma$. Si ω est non trivial sur $M_\gamma(F)$, on pose $J_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\gamma, \omega, f) = 0$. Supposons ω trivial sur $M_\gamma(F)$. On choisit des mesures de Haar sur tous les groupes intervenant et on pose

$$J_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\gamma, \omega, f) = D^{\tilde{G}}(\gamma)^{1/2} \int_{M_\gamma(F)\backslash G(F)} \omega(g) f(g^{-1}\gamma g) v_{\tilde{M}}(g)\, dg$$

où $v_{\tilde{M}}$ est un "poids" défini en [5] paragraphe 1 (à l'aide du choix d'un "bon" sous-groupe compact maximal de $G(F)$).

La définition de $J_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\gamma, \omega, f)$ quand la condition $M_\gamma = G_\gamma$ n'est pas vérifiée est beaucoup plus délicate. Pour $a \in A_{\tilde{M}}(F)$ en position générale, on a $M_{a\gamma} = G_{a\gamma}$ et le terme $J_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(a\gamma, \omega, f)$ est défini. Plus généralement, $J_{\tilde{L}}^{\tilde{G}}(a\gamma, \omega, f)$ est défini pour tout espace de Levi $\tilde{L} \supset \tilde{M}$. Alors $J_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\gamma, \omega, f)$ est défini comme la limite quand a tend vers 1 d'une certaine combinaison linéaire (à coefficients dépendant de a) de ces intégrales $J_{\tilde{L}}^{\tilde{G}}(a\gamma, \omega, f)$.

De nouveau, il est plus canonique de remplacer f par un élément de $C_c^\infty(\tilde{G}(F)) \otimes Mes(G(F))$. On s'aperçoit qu'alors les données de γ et d'une mesure sur $M_\gamma(F)$ suffisent pour définir les termes ci-dessus. Or ces données définissent aussi une intégrale orbitale sur $\tilde{M}(F)$, c'est-à-dire un élément de $D_{orb}(\tilde{M}(F), \omega) \otimes Mes(M(F))^*$. Par linéarité, on peut alors définir $J_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\boldsymbol{\gamma}, \mathbf{f})$ pour $\boldsymbol{\gamma} \in D_{orb}(\tilde{M}(F), \omega) \otimes Mes(M(F))^*$ et $\mathbf{f} \in C_c^\infty(\tilde{G}(F)) \otimes Mes(G(F))$. Hormis le cas $\tilde{M} = \tilde{G}$, les applications linéaires $\mathbf{f} \mapsto J_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\boldsymbol{\gamma}, \mathbf{f})$ ne sont pas ω-équivariantes, c'est-à-dire ne se quotientent pas en des applications linéaires sur $I(\tilde{G}(F), \omega) \otimes Mes(G(F))$. Arthur a défini des avatars ω-équivariants de ces applications, cf. [6] section 2. On n'en donnera pas la définition qui passe par la théorie des représentations (les objets obtenus ne sont plus, en fait, de nature "géométrique"). On note $I_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\boldsymbol{\gamma}, \mathbf{f})$ l'avatar ω-équivariant de $J_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\boldsymbol{\gamma}, \mathbf{f})$. C'est une forme bilinéaire en $\boldsymbol{\gamma} \in D_{orb}(\tilde{M}(F), \omega) \otimes Mes(M(F))^*$ et $\mathbf{f} \in I(\tilde{G}(F), \omega) \otimes Mes(G(F))$. Comme on le verra en 3.3, ces formes bilinéaires sont les objets locaux qui interviennent dans la partie géométrique de la formule des traces.

Variante. Supposons G quasi-déployé, $\tilde{G}$ à torsion intérieure et $\mathbf{a} = 1$. Comme on l'a dit, pour γ tel que $M_\gamma \neq G_\gamma$, les termes $J_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\gamma, f)$ sont définis par un procédé de limite. En fait, il y a plusieurs procédés possibles. Notons η la partie semi-simple de γ et fixons un sous-tore maximal T de G_η. Notons $\Sigma^{G_\eta}(T)$ l'ensemble des racines de T dans l'algèbre de Lie de G_η. A toute fonction $B_\eta : \Sigma^{G_\eta}(T) \to \mathbb{Q}_{>0}$

vérifiant des propriétés très restrictives (par exemple une fonction constante), on peut associer un procédé de passage à la limite. Plus globalement, supposons que, pour tout élément semi-simple $\eta \in \tilde{G}(F)$, on s'est donné une telle fonction B_η, ces fonctions étant reliées elles-mêmes par des conditions de compatibilité. On appelle ces données un système de fonctions B. Alors on peut définir pour tout $\gamma \in \tilde{M}(F)$ un terme $J_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\gamma, B, f)$. Il est égal à $J_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\gamma, f)$ si $M_\gamma = G_\gamma$ mais ne l'est pas, en général, si cette condition n'est pas vérifiée. Comme ci-dessus, on en déduit des avatars invariants $I_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\boldsymbol{\gamma}, B, \mathbf{f})$.

2.11. Intégrales orbitales pondérées stables. Supposons le corps F non-archimédien, G quasi-déployé, $\tilde{G}$ à torsion intérieure et $\mathbf{a} = 1$. On supprime les termes $\mathbf{a}$ et $\hat{\theta}$ des notations. Soit $\tilde{M}$ un espace de Levi de $\tilde{G}$. Le triplet $\mathbf{M} = (M, {}^L M, 1)$ est une donnée endoscopique de $(M, \tilde{M})$ (la donnée "maximale"). Pour $\boldsymbol{\delta} \in D_{orb}^{st}(\tilde{M}(F)) \otimes Mes(M(F))^*$ et $\mathbf{f} \in I(\tilde{G}(F)) \otimes Mes(G(F))$, on définit un terme $S_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\boldsymbol{\delta}, \mathbf{f})$ par la formule

$$S_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\boldsymbol{\delta}, \mathbf{f}) = I_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\boldsymbol{\delta}, \mathbf{f}) - \sum_{s \in Z(\hat{M})^{\Gamma_F}/Z(\hat{G})^{\Gamma_F}, s \neq 1} i_{\tilde{M}}(\tilde{G}, \tilde{G}'(s)) S_{\mathbf{M}}^{\mathbf{G}'(s)}(\boldsymbol{\delta}, \mathbf{f}^{\mathbf{G}'(s)}),$$

cf. [8] section 5. Expliquons cette formule. Le premier terme $I_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\boldsymbol{\delta}, \mathbf{f})$ a déjà été défini. Pour s intervenant dans la somme, l'hypothèse $s \neq 1$ entraîne que $dim(G'(s)_{SC}) < dim(G_{SC})$, où par exemple G_{SC} est le revêtement simplement connexe du groupe dérivé de G. Supposons un instant que, dans les constructions de 2.7, on puisse choisir pour données auxiliaires $G_1'(s) = G'(s)$, $\tilde{G}_1'(s) = \tilde{G}'(s)$. En raisonnant par récurrence sur la dimension de G_{SC}, on peut supposer défini le terme $S_{\tilde{M}}^{\tilde{G}'(s)}(\boldsymbol{\delta}, \boldsymbol{\varphi})$ pour $\boldsymbol{\varphi} \in I(\tilde{G}'(s; F)) \otimes Mes(G'(F))$. Un raisonnement formel permet de s'affranchir de l'hypothèse ci-dessus et de définir en général un terme $S_{\mathbf{M}}^{\mathbf{G}'(s)}(\boldsymbol{\delta}, \boldsymbol{\varphi})$, pour $\boldsymbol{\varphi} \in I(\mathbf{G}'(s)) \otimes Mes(G'(F))$. Comme on va le voir, ce terme est stable en $\boldsymbol{\varphi}$, c'est-à-dire ne dépend que de l'image de $\boldsymbol{\varphi}$ dans $SI(\mathbf{G}'(s)) \otimes Mes(G'(F))$. On note $\mathbf{f}^{\mathbf{G}'(s)}$ le transfert de $\mathbf{f}$. C'est un élément de cet espace. Le terme $S_{\mathbf{M}}^{\mathbf{G}'(\tilde{s})}(\boldsymbol{\delta}, \mathbf{f}^{\mathbf{G}'(\tilde{s})})$ est donc bien défini.

La construction repose donc sur le théorème suivant.

Théorème 2.2. *Pour tout $\boldsymbol{\delta} \in D_{orb}^{st}(\tilde{M}(F)) \otimes Mes(M(F))^*$, la forme linéaire $\mathbf{f} \mapsto S_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\boldsymbol{\delta}, \mathbf{f})$ est stable, c'est-à-dire se descend en une forme linéaire sur $SI(\tilde{G}(F)) \otimes Mes(G(F))$.*

Variante. Supposons donné un système de fonctions B comme en 2.10. Il s'en déduit aisément pour tout s un tel système pour chaque $\tilde{G}'(s)$. On définit alors $S_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\boldsymbol{\delta}, B, \mathbf{f})$ de la même façon que ci-dessus. Pour ce terme, le théorème est encore vérifié.

2.12. Intégrales orbitales pondérées endoscopiques. Supposons F non-archimédien, mais $(G, \tilde{G}, \mathbf{a})$ quelconque. Considérons une donnée endoscopique $\mathbf{G}' = (G', \mathcal{G}', \tilde{s})$ de $(G, \tilde{G}, \mathbf{a})$. Considérons un diagramme $(\epsilon, B', T', B, T, \eta)$

joignant des éléments semi-simples $\epsilon \in \tilde{G}'(F)$ et $\eta \in \tilde{G}(F)$. Du diagramme se déduit un homomorphisme $\xi : T \to T'$, puis un homomorphisme $\xi : \mathfrak{t} \to \mathfrak{t}'$. Celui-ci se restreint en un isomorphisme $\mathfrak{t}^\theta \to \mathfrak{t}'$ (où $\theta = ad_\eta$). Le tore $T^{\theta,0}$ est un sous-tore maximal de G_η. Notons $\Sigma^{G_\eta}(T^{\theta,0})$ et $\Sigma^{G'_\epsilon}(T')$ les ensembles de racines de $T^{\theta,0}$ dans $\mathfrak{g}_\eta$ et de T' dans $\mathfrak{g}'_\epsilon$. On peut considérer ces racines comme des formes linéaires sur $\mathfrak{t}^\theta$, resp. $\mathfrak{t}'$. Par l'isomorphisme précédent, $\Sigma^{G'_\epsilon}(T')$ ne s'identifie pas à un sous-ensemble de $\Sigma^{G_\eta}(T^{\theta,0})$. Mais il existe une unique fonction $B_\epsilon^{\tilde{G}} : \Sigma^{G'_\epsilon}(T') \to \mathbb{Q}_{>0}$ de sorte que, pour tout $\alpha \in \Sigma^{G'_\epsilon}(T')$, $\alpha/B_\epsilon^{\tilde{G}}(\alpha)$ soit un élément de $\Sigma^{G_\eta}(T^{\theta,0})$. Plus globalement, on peut définir un système de fonctions $B^{\tilde{G}}$ sur $\tilde{G}'$, au sens de 2.10, de sorte que, pour tout diagramme comme ci-dessus, la fonction $B_\epsilon^{\tilde{G}}$ soit celle associée à ce système.

Soient $\tilde{M}$ un espace de Levi de $\tilde{G}$ et $\mathbf{M}' = (M', \mathcal{M}', \tilde{\zeta})$ une donnée endoscopique elliptique et relevante pour $(M, \tilde{M}, \mathbf{a}_M)$. Soient $\boldsymbol{\delta} \in D^{st}_{orb}(\mathbf{M}') \otimes Mes(M'(F))^*$ et $\mathbf{f} \in I(\tilde{G}(F), \omega) \otimes Mes(G(F))$. On pose

$$I_{\tilde{M}}^{\tilde{G},\mathcal{E}}(\mathbf{M}', \boldsymbol{\delta}, \mathbf{f}) = \sum_{\tilde{s} \in \tilde{\zeta} Z(\hat{M})^{\Gamma_F, \hat{\theta}}/Z(\hat{G})^{\Gamma_F, \hat{\theta}}} i_{\tilde{M}'}(\tilde{G}, \tilde{G}(\tilde{s})) S_{\mathbf{M}'}^{\mathbf{G}'(\tilde{s})}(\boldsymbol{\delta}, B^{\tilde{G}}, \mathbf{f}^{\mathbf{G}'(\tilde{s})}),$$

cf. [8] section 5. Le sens de chaque terme s'explique comme dans le paragraphe précédent.

Soit $\boldsymbol{\gamma} \in D_{orb}(\tilde{M}(F), \omega) \otimes Mes(M(F))^*$. On montre qu'il existe une famille finie $(\mathbf{M}'_i)_{i=1,\dots,n}$ de données endoscopiques elliptiques et relevantes de $(M, \tilde{M}, \mathbf{a}_M)$ et, pour chaque i, un élément $\boldsymbol{\delta}_i \in D^{st}_{orb}(\mathbf{M}'_i) \otimes Mes(M'_i(F))^*$, de sorte que

$$\boldsymbol{\gamma} = \sum_{i=1,\dots,n} transfert(\boldsymbol{\delta}_i).$$

Pour $\mathbf{f} \in I(\tilde{G}(F), \omega) \otimes Mes(G(F))$, posons

$$I_{\tilde{M}}^{\tilde{G},\mathcal{E}}(\boldsymbol{\gamma}, \mathbf{f}) = \sum_{i=1,\dots,n} I_{\tilde{M}}^{\tilde{G},\mathcal{E}}(\mathbf{M}'_i, \boldsymbol{\delta}_i, \mathbf{f}).$$

La décomposition ci-dessus de $\boldsymbol{\gamma}$ n'est pas unique mais on montre que $I_{\tilde{M}}^{\tilde{G},\mathcal{E}}(\boldsymbol{\gamma}, \mathbf{f})$ ne dépend pas de ce choix.

Théorème 2.3. *Pour tous $\boldsymbol{\gamma} \in D_{orb}(\tilde{M}(F), \omega) \otimes Mes(M(F))^*$ et $\mathbf{f} \in I(\tilde{G}(F), \omega) \otimes Mes(G(F))$, on a l'égalité*

$$I_{\tilde{M}}^{\tilde{G},\mathcal{E}}(\boldsymbol{\gamma}, \mathbf{f}) = I_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\boldsymbol{\gamma}, \mathbf{f}).$$

2.13. Le cas *F* archimédien. Il y a des complications techniques lorsque F est archimédien. La première est que, pour obtenir des formules d'inversion satisfaisantes entre $\tilde{G}$ et ses données endoscopiques, on est parfois obligé d'adjoindre au couple $(G, \tilde{G})$ d'autres couples $(G_\sharp, \tilde{G}_\sharp)$, où $G_\sharp$ est une forme intérieure de G. On appelle K-espace la réunion disjointe (finie) de ces espaces $\tilde{G}_\sharp$ et, en général, on doit travailler avec de tels K-espaces, cf. [8] section 2. Cela ne modifie guère que les notations et ce n'est d'ailleurs pas utile dans le cas où G est quasi-déployé, $\tilde{G}$ est à torsion intérieure et $\mathbf{a} = 1$. Une difficulté plus sérieuse est que l'espace de distributions $D_{orb}(\tilde{G}(F), \omega) \otimes Mes(G(F))^*$ engendré par les intégrales orbitales se comporte mal par endoscopie. C'est-à-dire, considérons une donnée endoscopique $\mathbf{G}' = (G', \mathcal{G}', \tilde{s})$ de $(G, \tilde{G}, \mathbf{a})$, supposons pour simplifier que le recours à des données auxiliaires ne soit pas nécessaire et que l'on puisse définir un transfert $\mathbf{f} \mapsto \mathbf{f}^{\tilde{G}'}$ de $I(\tilde{G}(F), \omega) \otimes Mes(G(F))$ dans $SI(\tilde{G}'(F)) \otimes Mes(G'(F))$. Soit $\boldsymbol{\delta} \in D^{st}_{orb}(\tilde{G}'(F)) \otimes Mes(G'(F))^*$. Comme le montre un exemple dû à Magdy Assem, que m'a indiqué Kottwitz, il n'est pas vrai en général que l'application $\mathbf{f} \mapsto S^{\tilde{G}}(\boldsymbol{\delta}, \mathbf{f}^{\tilde{G}'})$ soit une combinaison linéaire d'intégrales orbitales. La construction de 2.12 s'évanouit si on se limite aux distributions qui sont des intégrales orbitales. La solution que l'on a retenue est de définir un espace de distributions $D_{tr-orb}(\tilde{G}(F), \omega)$ un peu plus gros que $D_{orb}(\tilde{G}(F), \omega)$, qui vérifie :

- dans la situation (simplifiée) ci-dessus, le transfert envoie $D^{st}_{tr-orb}(\tilde{G}'(F)) \otimes Mes(G'(F))^*$ dans $D_{tr-orb}(\tilde{G}(F), \omega) \otimes Mes(G(F))^*$ (où $D^{st}_{tr-orb}(\tilde{G}'(F))$ est le sous-espace des éléments de $D_{tr-orb}(\tilde{G}'(F))$ qui sont stables) ;

- on peut définir les intégrales $I^{\tilde{G}}_{\tilde{M}}(\boldsymbol{\gamma}, \mathbf{f})$ pour $\boldsymbol{\gamma} \in D_{tr-orb}(\tilde{M}(F), \omega) \otimes Mes(M(F))^*$.

On n'en donne pas la construction. En utilisant cet espace, on peut adapter les définitions de 2.11 et de 2.12. Le théorème 2.11 reste valable. Une forme modifiée du théorème 2.12 aussi.

3. La théorie globale

3.1. Espaces tordus. Soit F un corps de nombres. On note $Val(F)$ l'ensemble des places de F et, pour $v \in Val(F)$, F_v le complété de F en v. On note $\mathbb{A}$ l'anneau des adèles de F. Les définitions de 2.1 et 2.3 valent en remplaçant le corps local de ce paragraphe par le corps de nombres F. La seule différence notable est qu'au lieu de fixer un élément $\mathbf{a} \in H^1(W_F; Z(\hat{G}))$, on fixe seulement un élément $\mathbf{a} \in H^1(W_F; Z(\hat{G}))/ker^1(F; Z(\hat{G}))$, où $ker^1(F; Z(\hat{G}))$ est le noyau fini de l'homomorphisme

$$H^1(W_F; Z(\hat{G})) \to \oplus_{v \in Val(F)} H^1(W_{F_v}; Z(\hat{G})).$$

On fixe des données $(G, \tilde{G}, \mathbf{a})$. De $\mathbf{a}$ se déduit un homomorphisme continu $\omega : G(\mathbb{A}) \to \mathbb{C}^\times$, trivial sur $G(F)$. Pour tout $v \in Val(F)$, les données $(G, \tilde{G}, \mathbf{a})$ se localisent en des données $(G_v, \tilde{G}_v, \mathbf{a}_v)$ sur F_v. On fixe un espace de Levi minimal $\tilde{M}_0$ de $\tilde{G}$. On note $W^{\tilde{G}}$ le quotient du normalisateur de $\tilde{M}_0$ dans $G(F)$ par son sous-groupe $M_0(F)$. Pour tout espace de Levi $\tilde{M}$, on fixe une mesure de Haar sur $\mathcal{A}_{\tilde{M}} = X_*(A_{\tilde{M}}) \otimes \mathbb{R}$ (cf. 2.9), ces mesures étant soumises à certaines conditions de compatibilité.

On fixe un ensemble fini $V_{ram} \subset Val(F)$, contenant les places archimédiennes et tel que, pour $v \in Val(F) - V_{ram}$, les données $(G_v, \tilde{G}_v, \mathbf{a}_v)$ soient "non ramifiées". On ne précisera pas ici le sens de cette expression. Elle entraîne en tout cas que, pour $v \in Val(F)-V_{ram}$, on peut fixer un sous-groupe compact hyperspécial $K_v \subset G(F_v)$ et un espace hyperspécial associé $\tilde{K}_v \subset \tilde{G}(F_v)$. On entend par là que $\tilde{K}_v$ est un sous-ensemble non vide de $\tilde{G}(F_v)$ et que, pour tout $\gamma \in \tilde{K}_v$, on a les égalités $\tilde{K}_v = K_v\gamma = \gamma K_v$. On fixe de tels objets, auxquels on impose les conditions :

- pour tout $v \in Val(F)-V_{ram}$, K_v est en "bonne position" relativement à $\tilde{M}_0$;

- pour tout $\gamma \in \tilde{G}(F)$, γ_v appartient à $\tilde{K}_v$ pour presque tout $v \in Val(F)-V_{ram}$ ("presque tout" signifie "sauf pour un nombre fini").

3.2. Intégrales orbitales pondérées. Soit $V \subset Val(F)$ un ensemble fini de places de F. On pose $F_V = \prod_{v\in V} F_v$. Beaucoup d'objets définis dans le cas local ont des analogues définis sur l'anneau F_V. Ils sont obtenus par produit ou tensorisation des objets sur les corps F_v pour $v \in V$. On adapte la notation en conséquence. Par exemple, $\tilde{G}(F_V) = \prod_{v\in V} \tilde{G}(F_v)$ et $I(\tilde{G}(F_V),\omega) = \otimes_{v\in V} I(\tilde{G}(F_v),\omega_v)$.

Soit $\tilde{M}$ un espace de Levi de $\tilde{G}$. Pour $\boldsymbol{\gamma} \in D_{orb}(\tilde{M}(F_V),\omega)\otimes Mes(M(F_V))^*$ et $\mathbf{f} \in I(\tilde{G}(F_V),\omega)\otimes Mes(G(F_V))$, Arthur a défini l'intégrale pondérée ω-équivariante $I_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\boldsymbol{\gamma},\mathbf{f})$, cf. [6]. La définition ressemble à celle esquissée en 1.8, mais est de nature mi-locale, mi-globale. Elle est locale en ce sens que $\boldsymbol{\gamma}$ et $\mathbf{f}$ sont des produits d'objets locaux. Elle est globale parce que le poids $v_{\tilde{M}}$ et le processus rendant les intégrales ω-équivariantes ne font intervenir que des espaces de Levi définis sur F. Les termes obtenus sont toutefois reliés à ceux de 1.8 par la relation suivante. On suppose $\boldsymbol{\gamma} = \otimes_{v\in V}\boldsymbol{\gamma}_v$, $\mathbf{f} = \otimes_{v\in V}\mathbf{f}_v$. D'après [6] théorème 8.1, on a

$$I_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\boldsymbol{\gamma},\mathbf{f}) = \sum_{\tilde{L}^V\in\mathcal{L}(\tilde{M}_V)} d_{\tilde{M}_V}^{\tilde{G}}(\tilde{M},\tilde{L}^V)\prod_{v\in V} I_{\tilde{M}_v}^{\tilde{L}^v}(\boldsymbol{\gamma}_v,\mathbf{f}_{v,\tilde{L}^v}) \qquad (1)$$

Expliquons cette formule. On a noté $\mathcal{L}(\tilde{M}_V)$ l'ensemble des familles $\tilde{L}^V = (\tilde{L}^v)_{v\in V}$ telles que, pour tout $v \in V$, $\tilde{L}^v$ est un espace de Levi de $\tilde{G}_v$ contenant $\tilde{M}_v$. Pour tout v, $\mathbf{f}_{v,\tilde{L}^v}$ est l'image de $\mathbf{f}_v$ dans $I(\tilde{L}^v(F_v),\omega_v)$ par l'application "terme constant" usuelle dans la théorie de l'induction. Soit $\tilde{L}^V \in \mathcal{L}(\tilde{M}_V)$. On introduit l'espace $\mathcal{A}_{\tilde{M}_V}^{\tilde{G}} = \oplus_{v\in V}(\mathcal{A}_{\tilde{M}_v}/\mathcal{A}_{\tilde{G}})$ et son sous-espace $\mathcal{A}_{\tilde{L}^V} = \oplus_{v\in V}(\mathcal{A}_{\tilde{L}^v}/\mathcal{A}_{\tilde{G}})$. L'espace $\mathcal{A}_{\tilde{M}}^{\tilde{G}} = \mathcal{A}_{\tilde{M}}/\mathcal{A}_{\tilde{G}}$ se plonge diagonalement dans $\mathcal{A}_{\tilde{M}_V}^{\tilde{G}}$, on note $\Delta_V(\mathcal{A}_{\tilde{M}}^{\tilde{G}})$ son image. Le terme $d_{\tilde{M}_V}^{\tilde{G}}(\tilde{M},\tilde{L}^V)$ est nul sauf si

$$\mathcal{A}_{\tilde{M}_V}^{\tilde{G}} = \Delta_V(\mathcal{A}_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}) \oplus \mathcal{A}_{\tilde{L}^V}^{\tilde{G}}.$$

Si cette égalité est vérifiée, $d_{\tilde{M}_V}^{\tilde{G}}(\tilde{M},\tilde{L}^V)$ est le rapport entre les mesures sur le membre de droite et celle sur le membre de gauche (ces mesures ont été fixées en 2.9 et 3.1).

3.3. La partie géométrique de la formule des traces tordue $\boldsymbol{\omega}$-équivariante. Pour tout $v \in Val(F)-V_{ram}$, notons $\mathbf{1}_{\tilde{K}_v}$ la fonction caractéristique de $\tilde{K}_v$. On note $C_c^\infty(\tilde{G}(\mathbb{A}))$ l'espace de fonctions sur $\tilde{G}(\mathbb{A})$ engendré par les fonctions $f = \otimes_{v\in Val(F)} f_v$, où $f_v \in C_c^\infty(\tilde{G}(F_v))$ pour tout v et $f_v = \mathbf{1}_{\tilde{K}_v}$

pour presque tout $v \notin V_{ram}$. Primitivement, la formule des traces tordue est une égalité $J^{\tilde{G}}_{géom}(f,\omega) = J^{\tilde{G}}_{spec}(f,\omega)$ pour $f \in C_c^\infty(\tilde{G}(\mathbb{A}))$, les deux termes dépendant d'une mesure de Haar sur $\tilde{G}(\mathbb{A})$. Elle a été établie dans [10], voir [15] pour une rédaction plus complète. Les normalisations différant selon les auteurs, nous utilisons précisément celle de [7]. On ne considère ici que la partie géométrique de cette formule. Comme toujours, nous préférons supprimer le choix de la mesure de Haar et remplacer f par $\mathbf{f} \in C_c^\infty(\tilde{G}(\mathbb{A})) \otimes Mes(G(\mathbb{A}))$. On obtient une expression $J^{\tilde{G}}_{géom}(\mathbf{f},\omega)$. Comme en 2.10, elle n'est pas ω-équivariante en $\mathbf{f}$. Fixons un ensemble fini $V \subset Val(F)$ contenant V_{ram}. On identifie $C_c^\infty(\tilde{G}(F_V))$ à un sous-espace de $C_c^\infty(\tilde{G}(\mathbb{A}))$ en identifiant $\mathbf{f}_V \in C_c^\infty(\tilde{G}(F_V))$ à $\mathbf{f}_V \otimes (\otimes_{v\notin V}\mathbf{1}_{\tilde{K}_v})$. Pour $v \notin V$, le groupe $G(F_v)$ est muni d'une mesure "canonique" pour laquelle la masse totale de K_v vaut 1. On identifie $Mes(G(F_V))$ à $Mes(G(\mathbb{A}))$ en tensorisant une mesure sur $G(F_V)$ par le produit de ces mesures canoniques pour $v \notin V$. On sait alors définir $J^{\tilde{G}}_{géom}(\mathbf{f}_V,\omega)$ pour $\mathbf{f}_V \in C_c^\infty(\tilde{G}(F_V)) \otimes Mes(G(F_V))$. Arthur a transformé ce terme en une expression $I^{\tilde{G}}_{géom}(\mathbf{f}_V,\omega)$ qui est ω-équivariante, c'est-à-dire qui se descend en une forme linéaire sur $I(\tilde{G}(F_V),\omega) \otimes Mes(G(F_V))$, cf. [7] et [1] paragraphe 2. Décrivons cette expression.

Notons $\tilde{G}_{ss}$ l'ensemble des éléments semi-simples de $\tilde{G}$ et $\tilde{G}_{ss}(F)/conj$ l'ensemble des classes de conjugaison par $G(F)$ dans $\tilde{G}_{ss}(F)$ (une notation analogue sera utilisée plus loin avec F remplacé par F_V). On définit une certaine distribution $A^{\tilde{G}}(V,\mathcal{O},\omega) \in D_{orb}(\tilde{G}(F_V),\omega) \otimes Mes(G(F_V))^*$, qui vérifie les conditions suivantes

(i) c'est une combinaison linéaire finie d'intégrales orbitales associées aux images dans $\tilde{G}(F_V)$ d'éléments $\gamma \in \tilde{G}(F)$ dont la partie semi-simple appartient à $\mathcal{O}$;

(ii) $A^{\tilde{G}}(V,\mathcal{O},\omega) = 0$ sauf si, pour tout $v \notin V$, la classe de conjugaison dans $\tilde{G}(F_v)$ engendrée par $\mathcal{O}$ coupe $\tilde{K}_v$;

(iii) $A^{\tilde{G}}(V,\mathcal{O},\omega) = 0$ sauf si ω est trivial sur $Z(G;\mathbb{A})^\theta$ et sur $Z(G_\gamma;\mathbb{A})$ pour tout $\gamma \in \mathcal{O}$.

On note $\mathcal{L}(\tilde{M}_0)$ l'ensemble des espaces de Levi de $\tilde{G}$ contenant $\tilde{M}_0$. Pour $\mathbf{f}_V \in I(\tilde{G}(F_V),\omega) \otimes Mes(G(F_V))$, on a alors l'égalité

$$I^{\tilde{G}}_{géom}(\mathbf{f}_V,\omega) = \sum_{\tilde{M}\in\mathcal{L}(\tilde{M}_0)} |W^{\tilde{M}}||W^{\tilde{G}}|^{-1} \sum_{\mathcal{O}\in\tilde{M}_{ss}(F)/conj} I^{\tilde{G}}_{\tilde{M}}(A^{\tilde{M}}(V,\mathcal{O},\omega),\mathbf{f}_V) \quad (1)$$

Pour $\mathbf{f}_V$ fixé, il n'y a qu'un nombre fini de termes non nuls. Soulignons que $I^{\tilde{G}}_{géom}(\mathbf{f}_V,\omega)$ et les distributions $A^{\tilde{M}}(V,\mathcal{O},\omega)$ dépendent des espaces $\tilde{K}_v$ pour $v \notin V$, bien que ceux-ci ne figurent pas dans la notation.

Donnons quelques précisions sur la distribution $A^{\tilde{G}}(V,\mathcal{O},\omega)$. Elle dépend de $\mathcal{O} \in \tilde{G}_{ss}(F)/conj$ et de l'ensemble fini $V \supset V_{ram}$. Pour $\mathcal{O}$ fixé, on peut faire varier V. Pour $V \subset V'$, $A^{\tilde{G}}(V,\mathcal{O},\omega)$ et $A^{\tilde{G}}(V',\mathcal{O},\omega)$ sont reliés par une formule qui fait intervenir les intégrales orbitales pondérées (non ω-équivariantes) des fonctions $\mathbf{1}_{\tilde{K}_v}$ pour $v \in V' - V$. Considérons le cas particulier d'une classe $\mathcal{O}$ formée d'éléments fortement réguliers et elliptiques (c'est-à-dire que $\mathcal{O} \cap \tilde{M} = \emptyset$ pour tout espace de Levi $\tilde{M} \subsetneq \tilde{G}$). Supposons que cette classe vérifie les conditions (ii) et (iii). Fixons $\gamma \in \mathcal{O}$. Pour $v \notin V$, on peut d'après (ii) fixer $x_v \in G(F_v)$ tel que $x_v^{-1}\gamma x_v \in \tilde{K}_v$. On voit que l'on peut supposer $x_v = 1$ pour presque tout v. Notons x l'élement de $G(\mathbb{A})$ dont les composantes dans $G(F_v)$ sont x_v si $v \notin V$ et 1 si $v \in V$. Fixons aussi une mesure de Haar sur $G_\gamma(\mathbb{A})$. Par un procédé habituel, on définit un sous-groupe $\mathfrak{A}_{\tilde{G}} \subset A_{\tilde{G}}(\mathbb{A})$ isomorphe à $\mathcal{A}_{\tilde{G}}$ (si $F = \mathbb{Q}$, $\mathfrak{A}_{\tilde{G}}$ est la composante neutre de $A_{\tilde{G}}(\mathbb{R})$ pour la topologie réelle). Supposons V "assez grand", cette condition dépendant de $\mathcal{O}$. De même que ci-dessus, la mesure sur $G_\gamma(\mathbb{A})$ s'identifie à une mesure sur $G_\gamma(F_V)$. Soit dg une mesure de Haar sur $G(F_V)$ et $f_V \in C_c^\infty(\tilde{G}(F_V))$. Pour V assez grand, on a l'égalité

$$I^{\tilde{G}}(A^{\tilde{G}}(V,\mathcal{O},\omega), f_V \otimes dg) = [Z_G(\gamma;F) : G_\gamma(F)]^{-1}\omega(x)mes(\mathfrak{A}_{\tilde{G}}G_\gamma(F)\backslash G_\gamma(\mathbb{A}))$$

$$\int_{G_\gamma(F_V)\backslash G(F_V)} \omega(y) f_V(y^{-1}\gamma y)\, dy,$$

où dy se déduit des deux mesures fixées.

On a une application naturelle $\tilde{G}_{ss}(F)/conj \to \tilde{G}_{ss}(F_V)/conj$. Pour $\mathcal{O}_V \in \tilde{G}_{ss}(F_V)/conj$, posons

$$A^{\tilde{G}}(\mathcal{O}_V,\omega) = \sum_{\mathcal{O}\in\tilde{G}_{ss}(F)/conj, \mathcal{O}\mapsto\mathcal{O}_V} A^{\tilde{G}}(V,\mathcal{O},\omega).$$

On peut reformuler l'égalité (1) en

$$I^{\tilde{G}}_{g\acute{e}om}(\mathbf{f}_V,\omega) = \sum_{\tilde{M}\in\mathcal{L}(\tilde{M}_0)} |W^{\tilde{M}}||W^{\tilde{G}}|^{-1} \sum_{\mathcal{O}_V\in\tilde{M}_{ss}(F_V)/conj} I^{\tilde{G}}_{\tilde{M}}(A^{\tilde{M}}(\mathcal{O}_V,\omega),\mathbf{f}_V).$$

3.4. Endoscopie. La notion de donnée endoscopique pour $(G,\tilde{G},\mathbf{a})$ se définit comme en 2.4. La seule différence est que l'on impose que le cocycle a de ce paragraphe a pour image la classe $\mathbf{a}$ dans $H^1(W_F;Z(\hat{G}))/ker^1(F;Z(\hat{G}))$. Soit $\mathbf{G}' = (G',\mathcal{G}',\tilde{s})$ une telle donnée endoscopique. On dit encore qu'elle est elliptique si $Z(\hat{G}')^{\Gamma_F,0} = Z(\hat{G})^{\Gamma_F,\hat{\theta},0}$. Il est associé à $\mathbf{G}'$ un espace tordu $\tilde{G}'$ comme en 2.5. On définit une constante $i(\tilde{G},\tilde{G}')$ de la façon suivante. Elle est nulle si $\mathbf{G}'$ n'est pas elliptique. Supposons $\mathbf{G}'$ elliptique. Notons $Aut(\mathbf{G}')$ le groupe des $x \in \hat{G}$ tels que $x\mathcal{G}'x^{-1} = \mathcal{G}'$ et $x\tilde{s}x^{-1} \in Z(\hat{G})\tilde{s}$. Notons

$$\tau(G) = |\pi_0(Z(\hat{G})^{\Gamma_F})||ker^1(F;Z(\hat{G}))|^{-1},$$

où π_0 désigne le groupe des composantes connexes. On pose

$$i(\tilde{G},\tilde{G}') = |det((1-\theta)_{|\mathcal{A}_G/\mathcal{A}_{\tilde{G}}})|^{-1}|\pi_0(Aut(\mathbf{G}'))|^{-1}\tau(G)\tau(G')^{-1}$$

$$|\pi_0(Z(\hat{G})^{\Gamma_F,0}\cap Z(\hat{G}'))|.$$

Pour tout $v \in Val(F)$, la donnée se localise en une donnée $\mathbf{G}'_v = (G'_v,\mathcal{G}'_v,\tilde{s})$ de $(G_v,\tilde{G}_v,\mathbf{a}_v)$, où $\mathbf{a}_v$ est l'image de $\mathbf{a}$ dans $H^1(W_{F_v};Z(\hat{G}))$. On dit que $\mathbf{G}'$ est relevante si $\tilde{G}'(F) \neq \emptyset$ et si, pour toute place $v \in Val(F)$, $\mathbf{G}'_v$ est relevante. Soit V un ensemble fini de places de F contenant V_{ram}. On dit que $\mathbf{G}'$ est non ramifiée hors de V si le sous-groupe d'inertie $I_v \subset W_{F_v}$ (qui est un sous-groupe de ${}^LG_v$) est contenu dans $\mathcal{G}'_v$. Si $\mathbf{G}'$ est non ramifiée hors de V, on montre que les conditions imposées à V_{ram} (que l'on n'a pas explicitées) valent aussi pour l'ensemble de places V et pour le couple $(G', \tilde{G}')$ (ou, si l'on préfère, pour le triplet obtenu en complétant ce couple par le cocycle $\mathbf{a}'$ trivial). Pour $v \in Val(F) - V$, le choix que l'on a fait de l'espace hyperspécial $\tilde{K}_v$ détermine un espace hyperspécial $\tilde{K}'_v \subset \tilde{G}'(F_v)$. Plus exactement, cet espace n'est déterminé qu'à conjugaison près par $G'_{AD}(F_v)$, où G'_{AD} est le groupe adjoint de G' mais les constructions ultérieures seront insensibles à une telle conjugaison. On fixe ainsi une famille $(\tilde{K}'_v)_{v \notin V}$, à laquelle on impose, comme il est loisible, la même condition de compatibilité globale qu'en 3.1.

Considérons une donnée endoscopique $\mathbf{G}' = (G', \mathcal{G}', \tilde{s})$ relevante et non ramifiée hors de V. On fixe des données auxiliaires G'_1, $\tilde{G}'_1$, C_1 et $\hat{\xi}_1$ comme en 2.7, ces données étant maintenant définies sur F. On leur impose, comme il est loisible, certaines conditions de non ramification hors de V. Ces conditions impliquent que l'on peut fixer pour tout $v \notin V$ un espace hyperspécial $\tilde{K}'_{1,v} \subset \tilde{G}'_1(F_v)$ qui se projette sur $\tilde{K}'_v$. On impose à ces données la même condition de compatibilité globale qu'en 3.1. En tensorisant les constructions de 2.7 sur les places $v \in V$, on définit des espaces $C^\infty_{c,\lambda_1}(\tilde{G}'_1(F_V))$, $I_{\lambda_1}(\tilde{G}'_1(F_V))$ etc..., ainsi que leurs avatars canoniques $C^\infty_c(\mathbf{G}'_V)$, $I(\mathbf{G}'_V)$ etc... Pour identifier par exemple $C^\infty_{c,\lambda_1}(\tilde{G}'_1(F_V))$ à $C^\infty_c(\mathbf{G}'_V)$, on doit choisir pour tout $v \in V$ un facteur de transfert $\Delta_{1,v}$. En fait, l'identification ne dépend que du produit $\Delta_{1,V} = \otimes_{v \in V} \Delta_{1,v}$. Un point important est que le choix que l'on vient de faire des espaces $\tilde{K}'_{1,v}$ pour $v \notin V$ détermine un tel facteur $\Delta_{1,V}$. En effet, pour tout $v \notin V$, le choix de $\tilde{K}'_{1,v}$ détermine un facteur de transfert $\Delta_{1,v}$. D'autre part, on peut définir canoniquement un facteur de transfert global, cf. [11] lemme 7.3A, [14] paragraphe IV.2. C'est-à-dire, considérons des éléments $\delta_1 = (\delta_{1,v})_{v \in Val(F)} \in \tilde{G}'_1(\mathbb{A})$ et $\gamma = (\gamma_v)_{v \in Val(F)} \in \tilde{G}(\mathbb{A})$. Supposons que, pour tout v, γ_v soit fortement régulier et que $\delta_{1,v}$ et γ_v se correspondent. Imposons de plus à δ et γ une certaine condition de non ramification (impliquant que $\Delta_{1,v}(\delta_{1,v}, \gamma_v) = 1$ pour presque tout $v \notin V$). Alors on peut définir un facteur global $\Delta_1(\delta_1, \gamma)$. On normalise le facteur $\Delta_{1,V}$ de sorte que, pour de tels δ_1 et γ, on ait l'égalité

$$\Delta_1(\delta_1, \gamma) = \Delta_{1,V}(\delta_{1,V}, \gamma_V) \prod_{v \notin V} \Delta_{1,v}(\delta_{1,v}, \gamma_v),$$

où $\delta_{1,V} = (\delta_{1,v})_{v \in V}$ et $\gamma_V = (\gamma_v)_{v \in V}$. Soit $\mathcal{O}'_V \in \tilde{G}'_{ss}(F_V)/conj$. Les constructions de 3.3 s'adaptent et on définit un élément $A^{\tilde{G}'_1}_{\lambda_1}(\mathcal{O}'_V)$. C'est une combinaison linéaire d'intégrales orbitales vues comme des formes linéaires sur $I_{\lambda_1}(\tilde{G}'_1(F_V)) \otimes Mes(G'(F_V))$. A l'aide du facteur $\Delta_{1,V}$ ci-dessus, on l'identifie à un élément $A^{\mathbf{G}'}(\mathcal{O}'_V) \in D_{orb}(\mathbf{G}') \otimes Mes(G'(F))^*$. Le terme $A^{\tilde{G}'_1}_{\lambda_1}(\mathcal{O}'_V)$ dépend des choix des $\tilde{K}'_{1,v}$ mais le facteur $\Delta_{1,V}$ aussi. On voit alors que $A^{\mathbf{G}'}(\mathcal{O}'_V)$ ne dépend plus que des $\tilde{K}'_v$. On montre qu'il ne dépend pas du choix des données auxiliaires G'_1,...,$\hat{\xi}_1$.

L'ensemble des classes d'équivalence de données endoscopiques elliptiques, relevantes et non ramifiées hors de V est fini, on en fixe un ensemble de représentants $\mathcal{E}(\tilde{G},\mathbf{a},V)$.

3.5. Intégrales orbitales pondérées stables. On suppose G quasi-déployé, $\tilde{G}$ à torsion intérieure et $\mathbf{a}=1$. Soient $\tilde{M}$ un espace de Levi de $\tilde{G}$ et V un ensemble fini de places de F contenant V_{ram}. Pour une place archimédienne v de F, on introduit les espaces $D_{tr-orb}(\tilde{M}(F_v))$ et $D^{st}_{tr-orb}(\tilde{M}(F_v))$ évoqués en 2.13. Pour une place v non-archimédienne, on définit ces espaces comme étant simplement égaux à $D_{orb}(\tilde{M}(F_v))$, resp. $D^{st}_{orb}(\tilde{M}(F_v))$. On définit les produits tensoriels de ces espaces sur les places $v\in V$, que l'on note $D_{tr-orb}(\tilde{M}(F_V))$ et $D^{st}_{tr-orb}(\tilde{M}(F_V))$. La définition des intégrales orbitales pondérées invariantes $I^{\tilde{G}}_{\tilde{M}}(\boldsymbol{\gamma}_V,\mathbf{f}_V)$ de 3.2 s'étend au cas où $\boldsymbol{\gamma}_V$ appartient à $D_{tr-orb}(\tilde{M}(F_V))\otimes Mes(M(F_V))^*$. Cela étant, pour $\boldsymbol{\delta}_V\in D^{st}_{tr-orb}(\tilde{M}(F_V))\otimes Mes(M(F_V))^*$ et $\mathbf{f}_V\in I(\tilde{G}(F_V))\otimes Mes(G(F_V))$, on définit l'intégrale orbitale pondérée stable par la même formule qu'en 2.11 :

$$S^{\tilde{G}}_{\tilde{M}}(\boldsymbol{\delta}_V,\mathbf{f}_V)=I^{\tilde{G}}_{\tilde{M}}(\boldsymbol{\delta}_V,\mathbf{f}_V)-\sum_{s\in Z(\hat{M})^{\Gamma_F}/Z(\hat{G})^{\Gamma_F},s\neq 1} i_{\tilde{M}}(\tilde{G},\tilde{G}'(s))S^{\mathbf{G}'(s)}_{\mathbf{M}}(\boldsymbol{\delta}_V,\mathbf{f}^{\mathbf{G}'(s)}_V).$$

Comme dans ce paragraphe, cette définition n'est légitime que grâce au résultat suivant.

Proposition 3.1. *Pour tout $\boldsymbol{\delta}_V\in D^{st}_{tr-orb}(\tilde{M}(F_V))\otimes Mes(M(F_V))^*$, la forme linéaire $\mathbf{f}_V\mapsto S^{\tilde{G}}_{\tilde{M}}(\boldsymbol{\delta}_V,\mathbf{f}_V)$ est stable, c'est-à-dire se descend en une forme linéaire sur $SI(\tilde{G}(F_V))\otimes Mes(G(F_V))$.*

Cela se déduit du théorème 2.11 car on montre que les intégrales $S^{\tilde{G}}_{\tilde{M}}(\boldsymbol{\delta}_V,\mathbf{f}_V)$ s'expriment à l'aide des intégrales locales de ce paragraphe par une formule parallèle à 3.2(1).

3.6. Coefficients stables. On suppose G quasi-déployé, $\tilde{G}$ à torsion intérieure et $\mathbf{a}=1$. Soit V un ensemble fini de places de F contenant V_{ram}. Pour $\mathcal{O}_V\in\tilde{G}_{ss}(F_V)/conj$, on a défini en 3.3 la distribution $A^{\tilde{G}}(\mathcal{O}_V)\in D_{orb}(\tilde{G}(F_V))\otimes Mes(G(F_V))^*$. Pour une réunion finie $\mathcal{O}_V=\sqcup_{i=1,\dots,n}\mathcal{O}_{V,i}$ de telles classes, on pose $A^{\tilde{G}}(\mathcal{O}_V)=\sum_{i=1,\dots,n}A^{\tilde{G}}(\mathcal{O}_{V,i})$. Notons $\tilde{G}_{ss}(F_V)/st-conj$ l'ensemble des classes de conjugaison stable dans $\tilde{G}_{ss}(F_V)$. Pour un élément $\mathcal{O}_V$ de cet ensemble, ou pour une réunion finie de telles classes, on définit un élément $SA^{\tilde{G}}(\mathcal{O}_V)\in D_{tr-orb}(\tilde{G}(F_V))\otimes Mes(G(F_V))^*$ par la formule de récurrence

$$SA^{\tilde{G}}(\mathcal{O}_V)=A^{\tilde{G}}(\mathcal{O}_V)-\sum_{\mathbf{G}'\in\mathcal{E}(\tilde{G},\mathbf{a},V),G'\neq G} i(\tilde{G},\tilde{G}')transfert(SA^{\mathbf{G}'}(\mathcal{O}^{\tilde{G}'}_V)).$$

Expliquons cette formule. Pour $\mathbf{G}'\in\mathcal{E}(\tilde{G},\mathbf{a},V)$, on note $\mathcal{O}^{\tilde{G}'}_V$ la réunion des classes de conjugaison stable dans $\tilde{G}'_{ss}(F_V)$ correspondant à une classe de conjugaison stable dans $\tilde{G}(F_V)$ contenue dans $\mathcal{O}_V$. Cette réunion est finie. Si $G'\neq G$, fixons des données auxiliaires G'_1,...,$(\tilde{K}'_{1,v})_{v\not\in V}$ comme en 3.4. On peut supposer par récurrence sur $dim(G_{SC})$ que l'on a défini la variante $SA^{\tilde{G}'_1}_{\lambda_1}(\mathcal{O}^{\tilde{G}'}_V)$ de notre distribution. Par le même procédé qu'en 3.4, elle s'identifie à un élément $SA^{\mathbf{G}'}(\mathcal{O}^{\tilde{G}'}_V) \in D_{tr-orb}(\mathbf{G}'_V) \otimes Mes(G'(F_V))^*$. On montre que cette distribution ne dépend plus des choix des espaces $\tilde{K}'_v$ pour $v \not\in V$, mais seulement des $\tilde{K}_v$, lesquels sont fixés une fois pour toutes. Le théorème suivant montre que ces distributions sont stables, on peut donc les transférer.

Théorème 3.2. *Pour tout $\mathcal{O}_V \in \tilde{G}_{ss}(F_V)/st-conj$, la distribution $SA^{\tilde{G}}(\mathcal{O}_V)$ est stable.*

On voit par récurrence que la distribution $SA^{\tilde{G}}(\mathcal{O}_V)$ est supportée par les éléments de $\tilde{G}(F_V)$ dont la partie semi-simple appartient à $\mathcal{O}_V$.

3.7. La formule stable. On suppose G quasi-déployé, $\tilde{G}$ à torsion intérieure et $\mathbf{a} = 1$. Soit V un ensemble fini de places de F contenant V_{ram}. Pour $\mathbf{f}_V \in SI(\tilde{G}(F_V)) \otimes Mes(G(F_V))$, on pose

$$S^{\tilde{G}}_{g\acute{e}om}(\mathbf{f}_V) = \sum_{\tilde{M}\in\mathcal{L}(\tilde{M}_0)} |W^{\tilde{M}}||W^{\tilde{G}}|^{-1} \sum_{\mathcal{O}_V\in\tilde{M}_{ss}(F_V)/st-conj} S^{\tilde{G}}_{\tilde{M}}(SA^{\tilde{M}}(\mathcal{O}_V), \mathbf{f}_V).$$

On montre que, pour $\mathbf{f}_V$ fixé, il n'y a dans cette somme qu'un nombre fini de termes non nuls.

3.8. Le théorème principal. Le triplet $(G, \tilde{G}, \mathbf{a})$ est ici quelconque. Soit V un ensemble fini de places contenant V_{ram}.

Théorème 3.3. *Pour tout $\mathbf{f}_V \in I(\tilde{G}(F_V), \omega) \otimes Mes(G(F_V))$, on a l'égalité*

$$I_{g\acute{e}om}(\mathbf{f}_V, \omega) = \sum_{\mathbf{G}'\in\mathcal{E}(\tilde{G},\mathbf{a},V)} i(\tilde{G}, \tilde{G}') S^{\mathbf{G}'}_{g\acute{e}om}(\mathbf{f}^{\mathbf{G}'}_V).$$

La démonstration de ce théorème est très longue. En particulier, on doit utiliser la partie spectrale de la formule des traces, dont on n'a pas du tout parlé ici.

3.9. Endoscopie non standard. A plusieurs reprises, on utilise dans les preuves la méthode de descente d'Harish-Chandra. Dans le cas tordu, cette méthode appliquée à l'endoscopie fait apparaître des "triplets endoscopiques non standard". Plusieurs de nos assertions ont des contreparties pour de tels triplets. Indiquons-en une. Considérons deux groupes réductifs connexes G_1 et G_2 définis et quasi-déployés sur F. On les suppose simplement connexes. Pour $i = 1, 2$, on fixe une paire de Borel (B_i, T_i) de G_i définie sur F, on note $\Sigma(T_i)$ l'ensemble des racines de T_i dans $\mathfrak{g}_i$ et $\check{\Sigma}(T_i)$ l'ensemble des coracines. On suppose donnés un isomorphisme $j : \mathfrak{t}_1 \to \mathfrak{t}_2$ et une bijection $\tau : \Sigma(T_2) \to \Sigma(T_1)$ équivariants pour les actions galoisiennes. Il se déduit de τ une bijection $\check{\tau} : \check{\Sigma}(T_1) \to \check{\Sigma}(T_2)$ entre ensembles de coracines. On suppose que, pour tout $\check{\alpha} \in \check{\Sigma}(T_1)$, $j(\check{\alpha})$ est un multiple rationnel positif de $\check{\tau}(\check{\alpha})$ et que, pour tout $\alpha \in \Sigma(T_2)$, l'application duale j^* envoie α

sur un multiple rationnel positif de $\tau(\alpha)$. L'exemple le plus frappant est le cas où $G_1 = Sp(2n)$, $G_2 = Spin(2n+1)$ et j envoie une coracine courte sur une coracine longue et une coracine longue sur deux fois une coracine courte .

Soit $v \in Val(F)$. L'isomorphisme j permet de définir une correspondance bijective entre classes de conjugaison stable semi-simples dans les algèbres de Lie $\mathfrak{g}_1(F_v)$ et $\mathfrak{g}_2(F_v)$. On peut alors définir un transfert similaire à celui de 2.7, mais au niveau des algèbres de Lie. L'analogue du "facteur de transfert" vaut 1 sur deux éléments qui se correspondent. Par l'exponentielle, on peut remonter le transfert aux groupes si on se limite à des fonctions ou des distributions à support assez proche de l'élément neutre. Pour $i = 1, 2$, on s'intéresse particulièrement à l'espace des distributions stables sur $\tilde{G}_i(F_v)$ qui sont à support unipotent. On le note $D^{st}_{unip}(\tilde{G}_i(F_v))$. Pour tout ensemble fini V de places de F, le transfert se restreint en un isomorphisme

$$D^{st}_{unip}(\tilde{G}_1(F_V)) \otimes Mes(G_1(F_V))^* \simeq D^{st}_{unip}(\tilde{G}_2(F_V)) \otimes Mes(G_2(F_V))^* \qquad (2)$$

Soit V un ensemble fini de places de $Val(F)$, contenant les places archimédiennes et assez grand pour que, pour $v \notin V$, le triplet localisé $(G_{1,v}, G_{2,v}, j)$ vérifie une certaine condition de non ramification. Pour $i = 1, 2$, on applique les définitions des paragraphes précédents en prenant $G = G_i$, $\tilde{G} = G_i$ et $\mathbf{a} = 1$. Ainsi, pour $\mathcal{O}_V \in G_{i,ss}(F_V)/st - conj$, on dispose d'une distribution $SA^{G_i}(\mathcal{O}_V)$. Il s'avère qu'elle ne dépend pas des choix des sous-groupes hyperspéciaux hors de V (ni des espaces hyperspéciaux, qui, ici, sont forcément égaux à ces groupes). Pour $\mathcal{O}_V = \{1\}$, on note plutôt $SA^{G_i}_{unip}(V)$ cette distribution. C'est un élément de $D^{st}_{unip}(\tilde{G}_i(F_V)) \otimes Mes(G_i(F_V))^*$.

Théorème 3.4. *Les éléments $SA^{G_1}_{unip}(V)$ et $SA^{G_2}_{unip}(V)$ se correspondent par l'isomorphisme (2).*

Références

[1] Arthur, J., A stable trace formula I. General expansions, *Journal of the Inst. of Math. Jussieu* **1** (2002), 175-277

[2] Arthur, J., A stable trace formula II. Global descent, *Inventiones math.* **143** (2001), 157-220

[3] Arthur, J., A stable trace formula III. Proof of the main theorems, *Annals of Math.* **158** (2003), 769-873

[4] Arthur, J., The endoscopic classification of representations ; orthogonal and symplectic groups, *AMS Colloquium Publ.***61** (2013)

[5] Arthur, J., The local behaviour of weighted orbital integrals, *Duke Math. J.* **56** (1988), 223- 293

[6] Arthur, J., The invariant trace formula I. Local theory, *Journal of the AMS* **1** (1988), 323-283

[7] Arthur, J. The invariant trace formula II. Global theory, *Journal of the AMS* **1** (1988), 501- 554

[8] Arthur, J., On the transfer of distributions : weighted orbital integrals, *Duke Math. J.* **99** (1999), 209-283

[9] Arthur, J., Clozel, L., Simple algebras, base change, and the advanced theory of the trace formula, *Annals of Math. Studies* **120** (1989)

[10] Clozel, L., Labesse, J.-P., Langlands, R. P., Friday morning seminar on the trace formula, *Institute for Advanced Study* (1984)

[11] Kottwitz, R., Shelstad, D., Foundations of twisted endoscopy, *Astérisque* **255** (1999)

[12] Kottwitz, R. Shelstad, D., On splitting invariants and sign conventions in endoscopic transfer, preprint (2012)

[13] Labesse, J.-P., Cohomologie, stabilisation et changement de base, *Astérisque* **257** (1999)

[14] Labesse, J.-P., Stable twisted trace formula : elliptic terms, *Journal of the Inst. of Math. Jussieu* **3** (2004), 473-530

[15] Labesse, J.-P., Waldspurger, J.-L., La formule des traces tordue d'après le Friday Morning Seminar, *CRM Monograph Series* **31** (2013)

[16] Langlands, R.P., Base change for $GL(2)$, *Annals of Math Studies* **96** (1980)

[17] Ngô Bao Chau, Le lemme fondamental pour les algèbres de Lie, *Publ. Math. IHES* **111** (2010), 1-269

[18] Shelstad, D., On geometric transfer in real twisted endoscopy, *Annals of Math.* **176** (2012), 1919-1985

[19] Waldspurger, J.-L., Stabilisation de la formule des traces tordue I : endoscopie tordue sur un corps local, prépublication (2014)

[20] Waldspurger, J.-L., L'endoscopie tordue n'est pas si tordue, *Memoirs of the AMS* **908** (2008)

Institut de mathématiques de Jussieu, 2 place Jussieu, 75005 Paris
E-mail: waldspur@math.jussieu.fr