Université Paris 6 Vendredi 3 Mai 1996
Licence de Mathématiques
Filière B

Examen partiel de Topologie

Durée 3 heures – sans document

On note $\mathbb{S}$ l'ensemble des nombres complexes de module 1. Pour tout nombre complexe $z = x + iy$, on note $\mathrm{e}^z = \mathrm{e}^x(\cos y + i \sin y)$.

I

Soit f une fonction de $\mathbb{S}$ dans $\mathbb{C}$. Montrer que f est continue si et seulement si la fonction $t \mapsto f(\mathrm{e}^{it})$ est continue de $[0, 2\pi]$ dans $\mathbb{C}$. Montrer inversement que si g est une fonction continue de $[0, 2\pi]$ dans $\mathbb{C}$ telle que $g(0) = g(2\pi)$, il existe une fonction continue f de $\mathbb{S}$ dans $\mathbb{C}$ telle que $g(t) = f(\mathrm{e}^{it})$.

II

Soit f une fonction continue de $[0, 2\pi]$ dans $\mathbb{C}$. On suppose que, pour tout entier $k \in \mathbb{Z}$

$$\int_0^{2\pi} f(t)\mathrm{e}^{ikt}\, dt = 0$$

1) Montrer qu'il existe une suite (P_n) de polynômes trigonométriques – c'est-à-dire de combinaisons linéaires des fonctions (e^{ikt}) –, qui converge uniformément sur $[0, 2\pi]$ vers la fonction

$$t \mapsto \sin \frac{t}{2}.\bar{f}(t) \quad .$$

2) Montrer qu'alors on a

$$\int_0^{2\pi} \sin \frac{t}{2}.\left|f(t)\right|^2\, dt = 0$$

et en déduire que f est identiquement nulle.

III

Soient E l'espace de Banach $\mathscr{C}([0, 1], \mathbb{R})$, muni de la norme de la convergence uniforme, et V un sous-espace vectoriel fermé de E. On suppose que tout élément de V est de classe $\mathscr{C}^1$.

1) Montrer que si $0 \leq x < y \leq 1$, l'application $\varphi_{x,y}$ de E dans $\mathbb{R}$ définie par

$$\forall v \in E \qquad \varphi_{x,y}(v) = \frac{v(y) - v(x)}{y - x}$$

est une forme linéaire continue sur E, puis que, pour tout v de classe $\mathscr{C}^1$

$$\sup_{0 \leq x < y \leq 1} |\varphi_{x,y}(v)| < +\infty$$

2) En déduire qu'il existe une constante $M < +\infty$ telle que

$$\forall v \in V \qquad \sup_{0 \leq x < y \leq 1} |\varphi_{x,y}(v)| \leq M. \|v\|$$

(on pourra appliquer à V le théorème de Banach-Steinhaus.)

3) On note B la boule unité de V (c'est-à-dire $B = \{v \in V : \|v\| \leq 1\}$). Montrer que B est fermée dans E et que

$$\forall v \in B \quad \forall x, y \in [0,1] \qquad |v(y) - v(x)| \leq M\,|y - x|$$

En déduire que B est compacte dans E.

4) Déduire de ce qui précède que V est de dimension finie.

IV

On notera ici φ l'application $z \mapsto \mathrm{e}^z$ de $\mathbb{C}$ sur $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

1) Soit R le rectangle

$$R = \{z = x + iy : -1 \leq x \leq 1 \quad , \quad -\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}\}$$

Montrer que φ est injective de R dans $\mathbb{C}^*$ et en déduire que φ est un homéomorphisme de R sur $\varphi(R)$, puis qu'il existe une fonction continue ψ définie sur le disque $D(1, 1/2)$ de centre 1 et de rayon $1/2$ à valeurs dans R telle que $\varphi \circ \psi(w) = w$ pour tout $w \in D(1, 1/2)$.

2) Soient K un espace topologique compact et h une application continue de $K \times [0,1]$ dans $\mathbb{C}^*$. Pour $t \in [0,1]$ on pose

$$h_t : x \mapsto h_t(x) = h(x,t)$$

Montrer que l'application $t \mapsto h_t$ est continue de $[0,1]$ dans $\mathscr{C}(K, \mathbb{C}^*)$ (on pourra utiliser la continuité uniforme de h).

3) Soit K un espace topologique compact. On note $\mathbb{1}$ la fonction constante sur K valant partout 1, et Γ_0 l'ensemble

$$\Gamma_0 = \{f \in \mathscr{C}(K, \mathbb{C}^*) : \exists g \in \mathscr{C}(K, \mathbb{C}) \quad f = \varphi \circ g\}$$

Montrer que Γ_0 est connexe par arcs : pour $f = \varphi \circ g \in \Gamma_0$, on pourra poser

$$h(w,t) = \varphi(t.g(w))$$

et remarquer que $h_0 = \mathbb{1}$.

4) Soit $f \in \Gamma_0$. Montrer qu'il existe un $\alpha > 0$ tel que $|f(x)| \geq \alpha$ pour tout x de K, puis que $f_1 \in \Gamma_0$ si $\|f - f_1\| < \dfrac{\alpha}{2}$ (considérer $\psi \circ \dfrac{f_1}{f}$). En déduire que Γ_0 est ouvert dans $\mathscr{C}(K, \mathbb{C}^*)$. Montrer de même que Γ_0 est fermé dans $\mathscr{C}(K, \mathbb{C}^*)$ (si $f \in \overline{\Gamma_0}$ et $f_1 \in \Gamma_0$ avec $\|f - f_1\| < \dfrac{\alpha}{2}$ considérer $-\psi \circ \dfrac{f_1}{f}$).

En déduire que Γ_0 est la composante connexe de $\mathbb{1}$ dans $\mathscr{C}(K, \mathbb{C}^*)$.

5) Soient $f \in \mathscr{C}(K, \mathbb{C}^*)$ et Γ la composante connexe de f dans $\mathscr{C}(K, \mathbb{C}^*)$. Montrer que $f.\Gamma_0 = \{f.f_1 : f_1 \in \Gamma_0\}$ est connexe et contient f, puis que $\dfrac{1}{f}.\Gamma$ est connexe et contient $\mathbb{1}$. En déduire que $\Gamma = f.\Gamma_0$.

6) On prend $K = [0, 1]$. Soit $f \in \mathscr{C}(K, \mathbb{C}^*)$. On choisit un $w \in \mathbb{C}$ tel que $\mathrm{e}^w = f(0)$, et on pose $h(x, t) = f(tx).\varphi((t-1)w)$. Montrer que h est continue, et en déduire que l'ensemble des $h_t : x \mapsto h(x, t)$ est connexe, puis que $f \in \Gamma_0$.

7) On prend maintenant $K = \mathbb{S}$. Soit $f \in \mathscr{C}(K, \mathbb{C}^*)$. En utilisant la question précédente, montrer qu'il existe une fonction continue $g^* : [0, 1] \to \mathbb{C}$ telle que $f(\mathrm{e}^{2i\pi t}) = \varphi \circ g^*(t)$, puis qu'il existe un entier $k \in \mathbb{Z}$ tel que $g^*(1) - g^*(0) = 2ik\pi$. On appelle k le *degré* de f.

Montrer que f est de degré 0 si et seulement si $f \in \Gamma_0$, puis que, pour $k \in \mathbb{Z}$, f est de degré k si et seulement si

$$z \mapsto z^{-k}.f(z)$$

est dans Γ_0.