Sujet AP 2011

13h12

13h13 I.1) Commençons par prouver l'existence de $\tilde{f}$

Soit $x \in E$

- Par densité de A dans E, il existe $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de A tq $a_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} x$

Pour tout $(p,q) \in \mathbb{N}^2$ on a

$$\| f(a_q) - f(a_p) \|_F \leq M \| a_q - a_p \|_E$$

La suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant convergente dans E, elle est de Cauchy dans E, et donc par l'inégalité précédente, $\left(f(a_n)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans F.

Par complétude de F, il existe $l \in F$ tq

$$f(a_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$$

- Vérifions que cette limite dépend uniquement de x et non de la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de A qui intervient pour être construite.

Soit $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de A qui converge aussi vers x. Alors

$$\forall n\in\mathbb{N}, \ \|f(b_n)-f(a_n)\|_F \leq M \underbrace{\|b_n-a_n\|_E}_{\xrightarrow[n\to+\infty]{} 0}$$

Ainsi les limites de $(f(a_n))_{n\in\mathbb{N}}$ et $(f(b_n))_{n\in\mathbb{N}}$ sont les mêmes. On note $\tilde{f}(x)$ cette limite.

On a ainsi construit $\tilde{f} : E \to F$. Vérifions qu'elle satisfait les propriétés requises :

- si $a\in A$, on peut considérer la suite $\forall n\in\mathbb{N}, a_n = a$

qui converge vers a, et donc par construction

$$\tilde{f}(a) = \lim_{n \to +\infty} f(a_n) = f(a).$$

- Soit $(x,y) \in E^2$. Il existe $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}}$
$(b_n)_{n\in\mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}}$

tq $a_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} x$ et $b_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} y$.

On a $\forall n \in \mathbb{N}$, $\|f(b_n) - f(a_n)\|_F \leq M \|b_n - a_n\|_E$

On peut passer à la limite dans cette inégalité et avec continuité des normes et construction de $\tilde{f}$ on obtient $\|\tilde{f}(y) - \tilde{f}(x)\|_F \leq M \|y - x\|_E$

et donc $\tilde{f}$ est M-lipschitzienne.

- Il reste à prouver l'unicité : Soit $\tilde{f}_1, \tilde{f}_2$ deux applications M-lipschitziennes de E vers F qui sont égales à f sur A.

Alors $\forall a \in A$, $\tilde{f}_1(a) = f(a) = \tilde{f}_2(a)$

donc par continuité de $\tilde{f}_1$ et $\tilde{f}_2$ on a

$$\forall x \in E, \ \tilde{f}_1(x) = \tilde{f}_2(x) \quad \text{i.e.} \quad \tilde{f}_1 \equiv \tilde{f}_2.$$

On a donc prouvé qu'il existe une unique application $\tilde{f} : E \to F$ M-lipschitzienne et telle que

$$\forall a \in A, \ \tilde{f}(a) = f(a)$$

I.2.a). γ est positive donc on peut considérer

$$\int_{\mathbb{R}^n} \gamma(u)\,du \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}.$$

. Soit $p \in \mathbb{N}^*$. De même $\int_{\mathbb{R}^n} p^n \gamma(pt_1, \dots pt_n)\,dt$ est définie

dans $\mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$.

. On a $\int_{\mathbb{R}^n} \gamma(u)\,du = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\pi u_1^2} \cdot e^{-\pi u_2^2} \cdots e^{-\pi u_n^2}\, du_1 \dots du_n$

$$= \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-\pi u_1^2}\, du_1\right)\left(\int_{\mathbb{R}} e^{-\pi u_2^2}\, du_2\right) \cdots \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-\pi u_n^2}\, du_n\right)$$

$= 1^n = 1$. En particulier $\int_{\mathbb{R}^n} \gamma(u)\,du < +\infty$ donc γ est intégrable

. Enfin, en effectuant le changement de variable

$$\Phi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$$
$$t \longmapsto (pt_1, \dots, pt_n)$$

de $\mathbb{R}^n$ sur $\mathbb{R}^n$

qui est bien un C^1-difféomorphisme dont le Jacobien

est $\mathrm{Jac}(\phi(t)) = p^n$, on obtient

$$\int_{\mathbb{R}^n} \gamma(\phi(t))\,|\mathrm{Jac}\,\phi(t)|\,dt = \int_{\mathbb{R}^n} \gamma(u)\,du$$

On a montré que $\boxed{\gamma \text{ est intégrable sur } \mathbb{R}^n \text{ et } \forall p \in \mathbb{N}^*, \int_{\mathbb{R}^n} \gamma(u)\,du = \int_{\mathbb{R}^n} p^n \gamma(pt)\,dt}$

I.2.b) Soit $x \in \mathbb{R}^n$ et $p \in \mathbb{N}^*$.

$$\int_{\mathbb{R}^n} p^n \gamma(pt) \, |f(x-t)| \, dt$$

$$\leq \int_{\mathbb{R}^n} p^n \gamma(pt) \left[|f(0)| + M \|x-t\|_1 \right] dt$$

où M est une constante de Lipschitz de f

(on a utilisé $\big||f(x-t)| - |f(0)|\big| \leq |f(x-t) - f(0)| \leq M \|x-t\|_1$)

(Remarque : les normes étant équivalentes sur $\mathbb{R}^n$, on a le droit de choisir la norme 1)

Ainsi $\int p^n \gamma(pt) \, |f(x-t)| \, dt$

$$\leq \int_{\mathbb{R}^n} p^n \gamma(pt) \left(|f(0)| + M \|x\|_1 \right) dt + \int_{\mathbb{R}^n} p^n \gamma(pt) \, M \|t\|_1 \, dt$$

$$\leq |f(0)| + M \|x\|_1 + M \int_{\mathbb{R}^n} \gamma(u) \left\| \frac{u}{p} \right\|_1 du$$

où on a refait le changement de variable précédent.

Or $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} \gamma(u) \|u\|_1 \, du = \int_{\mathbb{R}^n} \prod_{i=1}^n e^{-\pi u_i^2} \left(|u_1| + \dots + |u_n| \right) du$

$$= \sum_{j=1}^{n} \underbrace{\left(\int_{\mathbb{R}} e^{-\pi u_1^2} du_1\right)}_{=1} \cdots \left(\int_{\mathbb{R}} |u_j| e^{-\pi u_j^2} du_j\right) \cdots \underbrace{\left(\int_{\mathbb{R}} e^{-\pi u_n^2} du_n\right)}_{=1}$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \int_{\mathbb{R}} |u_j| e^{-\pi u_j^2} du_j = n \int_{\mathbb{R}} |x| e^{-\pi x^2} dx$$

Or $|x| e^{-\pi x^2} = o\left(\frac{1}{|x|^2}\right)$

donc $x \mapsto |x| e^{-\pi x^2}$ est une fonction continue, intégrable en $+\infty$ et $-\infty$ et donc intégrable sur $\mathbb{R}$.

En conclusion, $\int_{\mathbb{R}^n} p^n \gamma(pt) |f(x-t)| dt < +\infty$

et donc $\boxed{\int_{\mathbb{R}^n} p^n \gamma(tx) f(x-t) dt \text{ est bien définie. } \forall p \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}^n}$

Soit $x \in \mathbb{R}^n$ et $p \in \mathbb{N}^*$

$$|g_p(x) - f(x)| = \left| \int_{\mathbb{R}^n} p^n \gamma(pt) f(x-t) dt - \underbrace{\int_{\mathbb{R}^n} p^n \gamma(pt) dt}\, f(x) \right|$$

$$= \left| \int_{\mathbb{R}^n} p^n \gamma(pt) \left[f(x-t) - f(x) \right] dt \right|$$

$$\leq \int_{\mathbb{R}^n} p^n \gamma(pt) \, | f(x-t) - f(x) | \, dt$$

$$\leq \int_{\mathbb{R}^n} p^n \gamma(pt) \, M \, \| (x-t) - x \|_1 \, dt$$

$$\leq \int_{\mathbb{R}^n} p^n \gamma(pt) \, M \, \|t\|_1 \, dt$$

même changement de variable.

$$\leq \frac{M}{p} \int_{\mathbb{R}^n} \gamma(u) \, \|u\| \, du$$

Comme cette majoration est indépendante de x on a

$$\forall p \in \mathbb{N}^*, \quad \| g_p - f \|_\infty \leq \frac{M}{p} \underbrace{\int_{\mathbb{R}^n} \|u\| \gamma(u) \, du}_{< +\infty}$$

et donc $\boxed{(g_p)_{p \in \mathbb{N}} \text{ tend uniformément vers } f \text{ sur } \mathbb{R}^n}$

I. 2.c) Soit $p \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}^n$.

$$g_p(x) = \int_{\mathbb{R}^n} p^n \gamma(pt) f(x-t)\,dt$$: on pose $v = x - t$ qui est un C^1 difféo de $\mathbb{R}^n$ et donc le Jacobien est $(-1)^n$ donc de valeur absolue 1

$$= \int_{\mathbb{R}^n} p^n \gamma(p(x-v)) f(v)\,dv$$

- pour $v \in \mathbb{R}^n$, la fonction $$x \longmapsto p^n \gamma(p(x-v)) f(v) \text{ est } C^1$$

- pour $x \in \mathbb{R}^n$, la fonction $$v \longmapsto p^n \gamma(p(x-v)) f(v) \text{ est intégrable}$$

- pour $(x, v) \in \mathbb{R}^n$

$$\left| \frac{\partial}{\partial x_i}\left(p^n \gamma(p(x-v)) f(v)\right) \right|$$

$$= \left| p^n \cdot p \cdot \frac{\partial \gamma}{\partial x_i}(p(x-v))\, f(v) \right|$$

$$= \left| p^{n+1} \left(-\pi(2(x_i - v_i))\right) \gamma(p(x-v))\, f(v) \right|$$

$$\leq 2\pi p^{m+1} \left(|x_i|+|v_i|\right)\left|\gamma\left(p(x-v)\right)\right| \, |f(v)|.$$

$$\leq 2\pi p^{m+1}\left(|x_i|+|v_i|\right) \gamma\left(p(x-v)\right)\left(|f(0)|+\|v\|_1\right)$$

On cherche une domination indépendante de x au moins pour x dans un compact de $\mathbb{R}^m$.

On suppose donc $x \in [-A,A]^m$ pour $A \in \mathbb{R}_+$:

on a $\left|\dfrac{\partial}{\partial x_i}\left(p^m \gamma(p(x-v)) f(v)\right)\right|$

$$\leq 2\pi p^{m+1}\left(A+|v_i|\right)\left(|f(0)|+\|v\|_1\right)\prod_{i=1}^{m} e^{-\pi p (x_i-v_i)^2}$$

14h08 : pause 55 min de composition.

18h07 : Reprise.

$$e^{-\pi p (x_i-v_i)^2} = e^{-\pi p (x_i^2 - 2x_iv_i + v_i^2)}$$

$$= \underbrace{e^{-\pi p x_i^2}}_{\leq 1} \underbrace{e^{+2x_i\pi p v_i}}_{\leq e^{2\pi p A|v_i|}} \cdot e^{-\pi p v_i^2}$$

donc on a une domination par

$$v \mapsto 2\pi p^{n+1}\left(A+|v_i|\right)\left(|f(0)|+\|v\|_1\right) e^{2\pi p A \|v\|_1 - \pi p \sum_{i=1}^{n} v_i^2}$$

qui est intégrable sur $\mathbb{R}^n$.

Par le théorème de dérivabilité des intégrales à paramètres, on en déduit que g_p est de classe C^1 sur $[-A, A]^n$ et ce pour tout $A \in \mathbb{R}_+$, et donc

$$\boxed{g_p \text{ est de classe } C^1 \text{ sur } \mathbb{R}^n}$$

I. 2. d) Comme $n = \dim E \in \mathbb{N}^*$, on peut trouver $(e_1, \dots, e_n)$ base de E et via cette base on a un isomorphisme entre E et $\mathbb{R}^n$.

On peut ainsi considérer (en travaillant en coordonnées) que $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$. On définit g_p comme en I.2.a. $\forall p \in \mathbb{N}^*$

Alors $g_p(0) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} p^n \gamma(pt) f(-t)\, dt \xrightarrow[p \to +\infty]{} f(0) = 0$

On pose donc $h_p = g_p - g_p(0)$ $\forall p \in \mathbb{N}^*$. Alors $\forall p \in \mathbb{N}^*$,
h_p est C^1, $h_p(0) = 0$, et $h_p \xrightarrow[p \to +\infty]{\|\cdot\|_\infty} f - f(0) = f$.

Il reste à calculer $\|h_p\|_L$ pour $p \in \mathbb{N}^*$.

$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^n$,

$$|h_p(y) - h_p(x)| = \left| \int_{\mathbb{R}^n} p^n \gamma(pt) \left[f(y-t) - f(x-t) \right] dt \right|$$

$$\leq \int p^n \gamma(pt) \, |f(y-t) - f(x-t)| \, dt$$

$$\leq \int p^n \gamma(pt) \, \|f\|_L \, \|(y-t) - (x-t)\| \, dt$$

$$\leq \|f\|_L \underbrace{\int_{\mathbb{R}^n} p^n \gamma(pt)\, dt}_{} \, . \, \|x - y\|$$

$= 1$

Ainsi $\forall p \in \mathbb{N}^*, \ \|h_p\| \leq \|f\|$.

On a montré
$$\boxed{\begin{array}{l} \forall f \in Lip_0(E), \ \exists (h_p)_{p\geq 1} \in \left(C^1(E,\mathbb{R}) \cap Lip_0\right)^{\mathbb{N}} \\ \text{tq} \ \begin{cases} h_p \xrightarrow{\|\cdot\|_\infty} f \\ \forall p, \ \|h_p\|_L \leq \|f\|_L \end{cases} \end{array}}$$

18h24 : 1h15 sur la partie I.

Bilan : I.1) est une reproduction dans un cas particulier du th de prolongement des applis uniformément continues. Il faut bien tout détailler, surtout comprendre la partie où on montre que la limite ne dépend pas de la suite choisie.

I.2) Ce § est lié à la convolution et l'approximation et régularisation par convolution. En l'occurrence

$\left(t \mapsto p^n \gamma(pt)\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une identité approchée.

Les notations sont un peu déroutantes.

I.2.a) pas trop dur

I.2.b). La preuve du fait que g_p est bien défini n'est pas simple. L'utilisation (un peu astucieuse) de la norme $\|.\|_1$ (suggérée par l'énoncé) permet de se ramener à des fonctions "à variables séparées" pour éviter d'être amené à prouver une intégrabilité sur $\mathbb{R}^n$ (mais c'est aussi possible ainsi)

On utilise un résultat facile (mais il faut y penser) sur les fonctions lipschitziennes, à savoir qu'elles sont "sous-linéaire" $\left(|f(x)| \leq |f(0)| + M\|x\|, \forall x\right)$

. La preuve de $g_p \xrightarrow{\|.\|_\infty} f$ est classique : si on se souvient de l'"astuce" (écrire $f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \rho^n \gamma(\rho t) f(x) dt$)

c'est du même acabit que la preuve que g_ρ est bien défini.

I.2.c) est plutôt difficile, la domination demande du travail.

I.2.d) Il ne faut pas passer à côté de $h_\rho(0) = 0$. (j'avais oublié au début).

18h34.

II.1)

- f est une isométrie :

$\forall (t_1, t_2) \in \mathbb{R}$, $\| f(t_2) - f(t_1) \|_\infty$

$$= \max \{ | t_2 - t_1 |, | \sin t_2 - \sin t_1 | \}$$

Or $|\sin'| = |\cos| \leq 1$ donc $\sin$ est 1-lipschitzienne, i.e. $\forall (t_1,t_2)\in\mathbb{R}^2,\ |\sin t_2 - \sin t_1| \leq |t_2 - t_1|$

Ainsi $\max\{|t_2-t_1|, |\sin t_2 - \sin t_1|\} = |t_2 - t_1|$

et $\boxed{f \text{ est une isométrie}}$

- f est non linéaire :

$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \left(\frac{\pi}{2}, 1\right)$ et $f(\pi) = (\pi, 0)$

donc on a $\quad 2f\left(\frac{\pi}{2}\right) \neq f(\pi)$

donc $\boxed{f \text{ est non linéaire}}$

II. 2. a) On élève au carré :

$$\|x\|_2^2 = \|y\|_2^2 = \|tx + (1-t)y\|_2^2$$

or $\|tx + (1-t)y\|_2^2 = t^2\|x\|_2^2 + (1-t)^2\|y\|_2^2$

$$+ 2t(1-t)\langle x, y\rangle$$

où $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est le produit scalaire dont est issue $\|\cdot\|_2$.

Ainsi par Cauchy-Schwarz, $\langle x,y\rangle \leq |\langle x,y\rangle| \leq \|x\|_2\|y\|_2$

$$\|tx+(1-t)y\|_2^2 \leq t^2\|x\|_2^2+(1-t)^2\|y\|_2^2+2t(1-t)\|x\|_2.\|y\|_2$$

$$\leq \left(t\|x\|_2+(1-t)\|y\|_2\right)^2 = \left(t\|x\|_2+(1-t)\|x\|_2\right)^2$$

$$= \|x\|_2^2.$$

Par suite la première de ces inégalités est une égalité,

i.e. $2t(1-t)\langle x,y\rangle = 2t(1-t)\|x\|.\|y\|$

Comme $t\notin\{0,1\}$, on en déduit $\langle x,y\rangle = \|x\|.\|y\|$

Par le résultat de cours sur le cas d'égalité dans Cauchy Schwarz, on sait que x et y sont colinéaires, c'est-à-dire qu'il existe $\alpha\in\mathbb{R}$ tq $x=\alpha y$ ou $y=\alpha x$.

Supposons par exemple $x=\alpha y$.

L'égalité $\|x\|_2=\|y\|_2$ donne $\alpha\in\{-1,1\}$

et le fait $\langle x,y\rangle = \|x\|_2.\|y\|_2 \geq 0$ donne $\alpha=1$ (et alors $x=y$)

ou $x=0$ (et alors $x=y$)

Le cas $y = \alpha x$ se traite de façon similaire.

On a ainsi montré

$$\boxed{\left.\begin{array}{l} \|x\|_2 = \|y\|_2 = \|tx+(1-t)y\|_2 \\ t \in]0,1[\end{array}\right\} \Rightarrow x = y}$$

II.2.b) On suppose $x_1 = x_2 + x_3$
et $\|x_1\|_2 = \|x_2\|_2 + \|x_3\|_2$.

- si $x_1 = 0$ alors $\|x_2\|_2 + \|x_3\|_2 = 0$ donc $x_2 = x_3 = 0$
  et donc $\lambda = 17$ donne $x_2 = \lambda x_1$.
- si $x_2 = 0$ alors on peut prendre $\lambda = 0$ et alors $x_2 = \lambda x_1$
- si $x_3 = 0$ alors $x_1 = x_2$ et on peut prendre $\lambda = 1$.
- On suppose donc finalement $x_1 \neq 0$, $x_2 \neq 0$ et $x_3 \neq 0$.

On pose $\forall i \in [\![1,3]\!]$, $y_i = \dfrac{x_i}{\|x_i\|_2}$ qui est bien défini et de norme 1.

$$\frac{x_1}{\|x_1\|_2} = \frac{x_2 + x_3}{\|x_2\|_2 + \|x_3\|_2} = \frac{\|x_2\|_2}{\|x_2\|_2 + \|x_3\|_2} \cdot \frac{x_2}{\|x_2\|_2} + \frac{\|x_3\|_2}{\|x_2\|_2 + \|x_3\|_2} \cdot \frac{x_3}{\|x_3\|_2}$$

i.e. $y_1 = \frac{\|x_2\|}{\|x_2\|+\|x_3\|_2} \cdot y_2 + \frac{\|x_3\|}{\|x_2\|_2+\|x_3\|_2} \cdot y_3 \cdot$ (*)

On pose $t = \frac{\|x_2\|}{\|x_2\|+\|x_3\|} \in]0,1[$ car $x_2 \neq 0$ et $x_3 \neq 0$.

Ainsi $1 = \|y_2\|_2 = \|y_3\|_2 = \|y_1\|_2 = \|t\, y_2 + (1-t)\, y_3\|_2$

donc par la question II.2.a, $y_2 = y_3$.

Par suite en reprenant (*) on obtient $y_1 = y_2 = y_3$.

D'où $\quad x_2 = \frac{\|x_2\|}{\|x_1\|} \cdot x_1$ et on peut poser $\lambda = \frac{\|x_2\|}{\|x_1\|} \geq 0$.

On a donc montré, par distinction des 2 cas, que

$$\boxed{\left.\begin{array}{l} x_1 = x_2 + x_3 \\ \|x_1\| = \|x_2\| + \|x_3\| \end{array}\right\} \Longrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}_+,\ x_2 = \lambda x_1}$$

II. 2.c) On a

$$\|\varphi(t_2) - \varphi(t_1)\|_2 = |t_2 - t_1| \cdot \forall (t_1, t_2) \in \mathbb{R}^2.$$

$$\|\varphi(t) - \varphi(0)\|_2 = |t| \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

$\underbrace{\quad}_{=0}$

En particulier $\|\varphi(1)\|_2 = 1$

Soit $(t_1, t_2) \in \mathbb{R}^2$

$$\underbrace{\varphi(t_2)}_{x_1} = \underbrace{\varphi(t_2) - \varphi(t_1)}_{x_3} + \underbrace{\varphi(t_1)}_{x_2}$$

$\|x_1\|_2 = |t_2|$, $\|x_3\|_2 = |t_2 - t_1|$, $\|x_2\|_2 = |t_1|$

si $t_2 > t_1 \geq 0$ alors

$\|x_1\|_2 = \|x_2\|_2 + \|x_3\|_2$ donc par II.2.b,

il existe $\lambda \geq 0$ tq $\varphi(t_1) = \lambda\,\varphi(t_2)$

et du fait de $\|\varphi(t_1)\| = t_1$ et $\|\varphi(t_2)\| = t_2$

donc si $t_2 > 0$, on a $\lambda = \dfrac{t_1}{t_2}$

On a montré $\forall t_2 > t_1 \geq 0$, $\varphi(t_1) = \dfrac{t_1}{t_2}\varphi(t_2)$.

Soit $t \in \mathbb{R}_+$: si $t \geq 1$

on applique ce qui précède à $t_1 = 1$ et $t_2 = t$

et alors $\varphi(t) = t\,\varphi(1)$

. si $t \in]0, 1]$

on applique ce qui précède à $t_1 = t$ et $t_2 = 1$

et alors $\varphi(t) = t\,\varphi(1)$

. si $t = 0$ alors $\varphi(0) = 0 = 0.\varphi(1)$

On a donc prouvé $\boxed{\forall t \in \mathbb{R}_+, \ \varphi(t) = t\,\varphi(1)}$

II. 2. d) Soit $(x, y) \in Y$. Supposons $y \neq 0$

On pose $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathcal{H}$

$$t \longmapsto \frac{\phi(x + ty) - \phi(x)}{\|y\|}.$$

$\varphi(0) = 0$ et

φ est isométrique car $\forall (t_1, t_2) \in \mathbb{R}^2$,

$$\|\varphi(t_2) - \varphi(t_1)\| = \|\phi(x + t_2 y) - \phi(x + t_1 y)\| \times \frac{1}{\|y\|}$$

$$= \|(x + t_2 y) - (x + t_1 y)\| \times \frac{1}{\|y\|}$$

$$= |t_2 - t_1|.$$

donc par la question précédente, $\forall t \geq 0, \varphi(t) = t\varphi(1)$

i.e. $$\frac{\phi(x+ty)-\phi(x)}{\|y\|} = \frac{\phi(x+y)-\phi(x)}{\|y\|} \times t.$$

i.e. $$\phi(x+ty) = t\big(\phi(x+y)-\phi(x)\big)+\phi(x)$$
$$= (1-t)\,\phi(x) + t\,\phi(x+y)$$

Si par contre $y=0$, le résultat demandé revient

à $(1-t)\,\phi(x)+t\phi(x) = \phi(x) \quad \forall t \geq 0.$

On a donc montré

$$\boxed{\forall (x,y)\in Y^2,\ \forall t\geq 0,\ \phi(x+ty) = (1-t)\,\phi(x)+t\,\phi(x+y)}$$

II.2.e). Avec $x=0$ on a

$$\forall y \in Y, \forall t \in \mathbb{R}_+,\ \phi(ty) = \underbrace{(1-t)\,\phi(0)}_{=0} + t\,\phi(y)$$
$$= t\,\phi(y). \qquad (1)$$

• $\forall (x,y) \in Y^2, \forall t > 0,$

$$\phi(x+y) = \frac{\phi(x+ty) - (1-t)\phi(x)}{t}$$ avec (1)

$$= \phi\left(\frac{x}{t}+y\right) + \left(1-\frac{1}{t}\right)\phi(x)$$

et on fait tendre t vers $+\infty$. par continuité de ϕ (car ϕ est isométrique donc continue)

et obtient $\forall (x,y) \in Y^2, \quad \phi(x+y) = \phi(x) + \phi(y)$ (2)

- Ainsi $0 = \phi(0) = \phi(x-x) = \phi(x) + \phi(-x) \; \forall x \in Y$,

ce qui donne $\forall x \in Y, \; \phi(-x) = -\phi(x)$.

Les propriétés (1), (2), (3) donnent bien la linéarité de ϕ.

19h53 : + 1h20 de composition : Total 2h35.

Bilan partie II.

II.1) n'est pas dur, mais il faut justifier proprement la non-linéarité.

II.2) est globalement assez élémentaire (à part une bonne connaissance des normes préhilbertiennes et de l'inégalité de Cauchy-Schwarz) mais assez astucieuse. Chaque question découle de la précédente, et il faut bien s'y prendre.

II.2.a) (Une norme qui satisfait cette propriété est dite strictement convexe. Ici on montre qu'une norme issue du produit scalaire est strictement convexe.)

Il faut bien connaître le cas d'égalité dans Cauchy-Schwarz. Ici on a égalité dans

$$\langle x, y \rangle = \|x\| \cdot \|y\|$$ ce qui est plus

fort que l'égalité dans Cauchy-Schwarz

(qui dit seulement $|\langle x,y\rangle| = \|x\|.\|y\|$)

II.2.b) • Bien faire les cas (faciles) $x_1 = 0$

ou $x_2 = 0$

ou $x_3 = 0$

• pour le dernier cas, il faut se ramener astucieusement à II.2.a).

II.2.c) C'est la question qui m'a posé le plus de difficulté. Même si j'ai assez vite vu de quoi il retournait, la formulation $\forall t_2 \geq t_1 \geq 0, \exists \lambda \geq 0, \varphi(t_1) = \lambda \varphi(t_2)$ était difficile à trouver car plus complexe que le résultat attendu.

Une fois trouvé cette formulation, pas de difficulté à conclure.

II.2.d) ne m'a pas posé de problème.

J'ai été troublé 1 min de ne pas utiliser $\phi(0) = 0$

mais j'ai compris assez vite que ça servait seulement dans la question suivante.

II.2.e). J'ai trouvé (1) tout de suite.

. J'ai mis un peu de temps à trouver (2) car j'hésitais à savoir s'il fallait trouver (2) ou (3) d'abord. Après plusieurs essai, j'ai trouvé l'astuce $t \to +\infty$.

. (3) découle classiquement de (2).

17^h03

III.1) Soit $h_1 \in H$ et $h_2 \in H$. Alors $h_1 - h_2 \in H$ et par linéarité,

$$
\begin{aligned}
\langle h^*, h_1 \rangle - \langle h^*, h_2 \rangle &= \langle h^*, h_1 - h_2 \rangle \\
&\leq |\langle h^*, h_1 - h_2 \rangle| \\
&\leq \underbrace{\|h^*\|_{H^*}} \cdot \|h_1 - h_2\| \\
&\leq 1 . \|h_1 - u + u - h_2\| \\
&\leq \|h_1 - u\| + \|u - h_2\| \text{ par l'inégalité triangulaire.}
\end{aligned}
$$

Ainsi

$$\langle h^*, h_1 \rangle - \|h_1 - u\| \leq \langle h^*, h_2 \rangle + \|u - h_2\|.$$

Ceci étant valable pour tout $h_1 \in H$ on peut dire que

$$\sup_{h_1 \in H} \{ \langle h^*, h_1 \rangle - \|h_1 - u\| \} \leq \langle h^*, h_2 \rangle + \|u - h_2\|$$

et ceci étant valable pour tout $h_2 \in H$, on en conclut

$$\boxed{\sup_{h_1 \in H} \{ \langle h^*, h_1 \rangle - \|h_1 - u\| \} \leq \inf_{h_2 \in H} \{ \langle h^*, h_2 \rangle + \|u - h_2\| \}}$$

III. 2.a) Comme $u \in X \setminus H$, $\{ h + tu, h \in H, t \in \mathbb{R} \} = X$.
donc x^* est définie sur X

→ Soit $(h_1, t_1), (h_2, t_2) \in H \times \mathbb{R}$. et $\lambda \in \mathbb{R}$

Alors

$$\langle x^*, \lambda(h_1 + t_1 u) + (h_2 + t_2 u) \rangle$$

$$= \langle x^*, (\lambda h_1 + h_2) + (\lambda t_1 + t_2) u \rangle$$

$$= \langle h^*, \lambda h_1 + h_2 \rangle + (\lambda t_1 + t_2) a \quad \text{par définition de } x^*.$$

$$= \lambda (\langle h^*, h_1 \rangle + t_1 a) + (\langle h^*, h_2 \rangle + t_2 a)$$

$= \lambda \langle x^*, h_1 + t_1 u\rangle + \langle x^*, h_2 + t_2 u\rangle$

et donc x^* est linéaire.

$\rightarrow \forall (h, t) \in H \times \mathbb{R}$,

$$|\langle x^*, h + tu\rangle| = |\langle h^*, h\rangle + t\,a|$$

- si $t = 0$ on a $|\langle x^*, h + tu\rangle| = |\langle h^*, h\rangle|$
$\leq \|h^*\| . \|h\| = \|h + tu\|$

- si $t > 0$, dans avec $h_2 = -\frac{h}{t}$ on a

$$a \leq \langle h^*, -\frac{h}{t}\rangle + \|-\frac{h}{t} - u\|$$

i.e. $ta + \langle h^*, h\rangle \leq \|h + tu\|$ $(*)$

et avec $h_1 = -\frac{h}{t}$ on a

$$a \geq \langle h^*, -\frac{h}{t}\rangle - \|-\frac{h}{t} - u\|$$

i.e. $ta + \langle h^*, h\rangle \geq -\|h + tu\|$ $(**)$

$(*)$ et $(**)$ donnent $|ta + \langle h^*, h\rangle| \leq \|h + tu\|$.

d'où $|\langle x^*, h+tu\rangle| \leq \|h+tu\|$

- si $t<0$, avec $h_2 = \frac{-h}{t}$ et $h_1 = \frac{-h}{t}$ on obtient

$$\langle h^*, -\frac{h}{t}\rangle - \|-\frac{h}{t} - u\| \leq a \leq \langle h^*, \frac{-h}{t}\rangle + \|\frac{-h}{t} - u\|$$

ce qui donne

$$\underbrace{t\left\|\frac{h}{t}+u\right\|}_{=-\|h+tu\|} \leq ta + \langle h^*, h\rangle \leq \underbrace{-t\left\|\frac{h}{t}+u\right\|}_{=\|h+tu\|}$$

et donc comme précédement on obtient

$$|\langle x^*, h+tu\rangle| \leq \|h+tu\|.$$

Dans tous les cas on a donc $|\langle x^*, h+tu\rangle| \leq \|h+tu\|$

et donc $\|x^*\| \leq 1$.

→ Avec $t=0$ on a $\forall h \in H$, $\langle x^*, h\rangle = \langle h^*, h\rangle$

$$\text{donc } \|x^*\| = \sup_{(h,t)\in H\times\mathbb{R}} \frac{|\langle x^*, h+tu\rangle|}{\|h+tu\|}$$

$$\geq \sup \frac{|\langle h^*, h\rangle|}{\|h\|} = \|h^*\| = 1$$

$h \in H \quad \|h\|$

Au final on a montré que $\boxed{x^* \in X^* \text{ et } \|x^*\| = 1}$

III-2-b) Soit $x^* \in F^*$.

Si $x^* = 0$ il suffit de considérer $y^* = x^* = 0$.

Supposons donc que x^* est non nulle, i.e. $\|x^*\| \neq 0$.

On pose alors $\tilde{x}^* = \dfrac{x^*}{\|x^*\|}$ qui est telle que $\|\tilde{x}^*\| = 1$.

Nous allons construire $\tilde{y}^* \in E^*$

tq $\tilde{y}^* = \tilde{x}^*$ sur F et $\|\tilde{y}^*\| = 1$.

→ si $F = E$, il n'y a rien à faire.

→ sinon par le th de la base adaptée, il existe

$(e_1 \dots e_n)$ base de E telle que

$(e_1 \dots e_p)$ est base de F, avec $p = \dim F < n$.

Alors $H = \mathrm{Vect}\{e_1 \dots e_p\}$ est un hyperplan de

$$H_{p+1} = \mathrm{Vect}\{e_1 \dots e_p, e_{p+1}\}$$

donc en appliquant ce qui précède avec $u = e_{p+1} \in H_{p+1} \setminus H_p$,

il existe $\tilde{y}^*_{p+1} \in H^*_{p+1}$ tq $\begin{cases} \tilde{y}^*_{p+1} = \tilde{x}^* \text{ sur } H_p \\ \|\tilde{y}^*_{p+1}\| = 1. \end{cases}$

→ si $H_{p+1} = E$ on pose $\tilde{y}^* = \tilde{y}^*_{p+1}$

sinon on reproduit l'étape précédente pour construire

$\tilde{y}^*_{p+2} \in H^*_{p+2}$ tq $\tilde{y}^*_{p+2} = \tilde{y}^*_{p+1}$ sur H_{p+1}

(donc en particulier $\tilde{y}^*_{p+2} = \tilde{x}^*$ sur H_p)

et $\|\tilde{y}^*_{p+2}\| = 1$

où $H_{p+2} = \mathrm{Vect}\{e_1 \dots e_{p+2}\}$.

→ On poursuit par construction récurrente, et comme $\dim E < +\infty$, en un nombre fini d'étape (égal à $n-p$) on aura construit $\tilde{y}^*_n \in H^*_n$ tq $\begin{cases} \tilde{y}^*_n = \tilde{x}^* \text{ sur } H_p \\ \|\tilde{y}^*_n\| = 1 \end{cases}$

où $H_m = \text{Vect}\{e_1 \dots e_m\} = E$.

Ainsi on peut poser $\tilde{y}^* = \tilde{y}_m^*$.

→ Enfin on pose $y^* = \|x^*\| . \tilde{y}^*$

qui est bien dans E^*, telle que $\|y^*\| = \|x^*\|$

et tel que $y^* = \|x^*\| \tilde{x} = x$ sur F.

On a donc montré que

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{si } \dim E < +\infty \text{ et } F \text{ est un s.e.v de } E, \\ \text{et si } x^* \in F^*, \text{ alors il existe } y^* \in E^* \text{ tq} \\ \|y^*\| = \|x^*\| \text{ et } \forall x \in F, \ \langle y^*, x\rangle = \langle x^*, x\rangle\end{array}}$$

III.3. a) On pose $E_0 = \text{Vect } x$

et $\forall k \geq 1$, $E_k = \text{Vect}\{x, x_1, \dots, x_k\}$

Alors, $\forall k \in \mathbb{N}$, E_k est engendré par $k+1$ éléments donc $\dim E_k \leq k+1 < +\infty$

et, comme $V = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} E_k \supset \{x_n, n\in\mathbb{N}\}$

V est dense dans X.

et enfin. $\forall k\in\mathbb{N}$, $E_k \subset E_{k+1}$

On a montré $\boxed{\text{qu'il existe } (E_k)_{k\in\mathbb{N}} \text{ suite croissante de s.e.v de } X \text{ tq } x\in E_0 \text{ et } \bigcup_{k\in\mathbb{N}} E_k = X}$

III.3.b) On suppose $x \neq 0$.

- Considérons

$$x^*: E_0 \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$tx \longmapsto t\|x\|$$

Alors $\begin{cases} \langle x^*, x\rangle = \|x\| \\ \text{et} \\ \|x^*\| = \sup\limits_{y\in E_0\setminus\{0\}} \dfrac{\langle x^*, y\rangle}{\|y\|} \end{cases}$

$$= \sup_{t\in\mathbb{R}^*} \frac{\langle x^*, tx\rangle}{\|tx\|}$$

$$= \sup_{t\neq 0} \frac{t\|x\|}{|t|.\|x\|}$$

$$= \sup \operatorname{signe} t = 1$$

$t \neq 0$

- par III.2.b, comme E_0 est un s.e.v de E_1,

  il existe $y_1^* \in E_1^*$ tq $\|y_1^*\| = 1$

  et $y_1^* = x^*$ sur E_0

  d'où en particulier $\langle y_1^*, x\rangle = \langle x^*, x\rangle = \|x\|$.

- On fait une construction récurrence pour obtenir l'existence, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, de $y_k^* \in E_k^*$ tq

  $\|y_k^*\| = 1$ et $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $y_k^* = y_{k-1}^*$ sur E_{k-1}.

- On peut alors définir $v^* \in V^*$ par

  $\forall k \in \mathbb{N}$, $\forall z \in E_k$, $\langle v^*, z\rangle = \langle y_k^*, z\rangle$

  Cette définition est légitime car si $z \in E_i \cap E_j$

  avec $i < j$, alors $\langle y_j^*, z\rangle = \langle y_i^*, z\rangle$.

- v^* est linéaire sur V car elle l'est sur chaque E_k

pour $k \in \mathbb{N}$, et de plus

$$\forall z \in V, \quad |\langle v^*, z \rangle| = |\langle y_k^*, z \rangle| \text{ où } k \text{ est tel que } z \in E_k$$

$$\leq \|y_k^*\| \cdot \|z\| \leq \|z\|$$

et donc $\|v^*\| \leq 1$.

- De plus, $\langle v^*, x \rangle = \langle x^*, x \rangle = \|x\|$

ce qui prouve que $\|v^*\| = 1$.

- Il reste à traiter le cas $x = 0$.

Dans ce cas, tout élément $v^* \in V^*$ convient à condition que $\|v^*\| = 1$ (or une telle forme linéaire existe puisque $\dim V \neq 0$: il suffit de considérer $u \in V \setminus \{0\}$ et de définir

$$v^* : \begin{array}{ccc} H \oplus \mathbb{R}u & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ h + tu & \longmapsto & t\|u\| \end{array}$$ où H est supplémentaire de $\mathrm{Vect}(u)$.)

Dans tous les cas, on a montré

qu' $\boxed{\text{il existe } v^* \in V^* \text{ tq } \|v^*\| = 1 \text{ et } \langle v^*, v \rangle = \|x\|}$

III.3.c) • On applique la question I.1

à la fonction v^* qui est 1-lipschitzienne

sur $A = V$ qui est dense dans $E = X$

ce qui est légitime car $F = \mathbb{R}$ est complet.

Ainsi il existe $x^* \in X^*$ 1-lipschitzienne (i.e. $\|x^*\| \leq 1$)

telle que $x^* = v^*$ sur V^*.

• En particulier $\langle x^*, x \rangle = \langle v^*, x \rangle = \|x\|$

• Enfin, $\|x^*\| = \sup\limits_{z \in X \setminus \{0\}} \dfrac{\langle x^*, z \rangle}{\|z\|} \geq \sup\limits_{z \in V \setminus \{0\}} \dfrac{\langle v^*, z \rangle}{\|z\|} = \|v^*\| = 1$

donc $\|x^*\| \geq 1$.

On a donc montré qu' $\boxed{\text{il existe } x^* \in X^* \text{ tq } \|x^*\| = 1 \text{ et } \langle x^*, x \rangle = \|x\|}$

III.4). Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, $(x_1, x_2) \in X^2$.

Alors $\forall x^* \in X^*$,

$$\langle J_X(\lambda x_1 + x_2), x^* \rangle = \langle x^*, \lambda x_1 + x_2 \rangle$$

$$= \lambda \langle x^*, x_1 \rangle + \langle x^*, x_2 \rangle$$

$$= \lambda \langle J_X(x_1), x^* \rangle + \langle J_X(x_2), x^* \rangle$$

d'où $J_X(\lambda x_1 + x_2) = \lambda J_X(x_1) + J_X(x_2)$,

i.e. J_X est linéaire.

- Soit $x \in X$.

$$\| J_X(x) \|_{X^{**}} = \sup_{x^* \in X^* \setminus \{0\}} \frac{|\langle J_X(x), x^* \rangle|}{\|x^*\|}$$

$$= \sup_{x^* \in X^* \setminus \{0\}} \frac{|\langle x^*, x \rangle|}{\|x^*\|}$$ or $|\langle x^*, x \rangle| \leq \|x^*\| \cdot \|x\|$

$$\leq \|x\|$$

Mais par III. 3.c, il existe $x^* \in X^*$ tq $\|x^*\| = 1$ et $\langle x^*, x\rangle = \|x\|$

donc $\|J_X(x)\|_{X^{**}} \geq |\langle x^*, x\rangle| \geq \langle x^*, x\rangle = \|x\|$

i.e. finalement $\|J_X(x)\| = \|x\|$

On a prouvé que $\boxed{J_X \text{ est une isométrie linéaire}}$

III. 5. a) On utilise le procédé d'extraction diagonale :

- pour $k = 1$, la suite réelle

$\left(\langle x_n^*, x_1\rangle\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée car $\forall n \in \mathbb{N}$, $|\langle x_n^*, x_1\rangle| \leq \|x_n^*\| . \|x_1\| \leq \|x_1\|$

donc par le th. de Bolzano-Weierstrass,

il existe $\varphi_1 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante (i.e. une extraction) tq

$$\lim_{n\to+\infty} \langle x^*_{\varphi_1(n)}, x_1\rangle \text{ existe.}$$

. On considère $k=2$ et on regarde la suite réelle

$$\left(\langle x^*_{\varphi_1(n)}, x_2 \rangle\right)_{n\in\mathbb{N}}$$ qui est aussi bornée.

donc par Bolzano Weierstrass, il existe φ_2 extraction

telle que $\left(\langle x^*_{\varphi_1(\varphi_2(n))}, x_2 \rangle\right)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite.

. On fait ainsi une construction récurrente pour

montrer l'existence de $(\varphi_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ telle que

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \lim_{n\to+\infty} \langle x^*_{\varphi_1\circ\cdots\circ\varphi_k(n)}, x_k \rangle \text{ existe.}$$

On pose alors $\forall n\in\mathbb{N}^*, \ \phi(n) = \underbrace{\varphi_1\circ\cdots\circ\varphi_n}_{n \text{ extractions.}}(n)$

. On sait (procédé d'extraction diagonale) que ϕ est une fonction

strictement croissante et que

$\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\langle x^*_{\phi(n)}, x_k \rangle$ admet une limite.

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{On a donc montré qu'il existe une suite} \\ \text{extraite } \left(x^*_{\phi(n)}\right)_{n \in \mathbb{N}^*} \text{ telle que} \\ \qquad \forall k \in \mathbb{N}^*, \ \lim_{n \to +\infty} \langle x^*_{\phi(n)}, x_k \rangle \text{ existe}\end{array}}$$

III.5.b) Soit $z \in X$. Soit $\varepsilon > 0$.

Par densité de $(x_k)_{k \geq 1}$ dans X, il existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tq

$$\| x_{k_0} - z \| \leq \varepsilon.$$

Alors $\forall (p, q) \in \mathbb{N}^2$,

$$\left| \langle x^*_{\phi(q)}, z \rangle - \langle x^*_{\phi(p)}, z \rangle \right|$$

$$= \left| \langle x^*_{\phi(q)} - x^*_{\phi(p)}, z \rangle \right|$$

$$\leq \left| \langle x^*_{\phi(q)} - x^*_{\phi(p)}, x_{k_0} \rangle \right| + \underbrace{\left| \langle x^*_{\phi(q)} - x^*_{\phi(p)}, z - x_{k_0} \rangle \right|}_{\leq \left(\|x^*_{\phi(q)}\| + \|x^*_{\phi(p)}\| \right) \|z - x_{k_0}\| \leq 2\varepsilon}$$

Or $\left(\langle x^*_{\phi(n)}, x_{k_0} \rangle \right)$ étant convergente,

elle est de Cauchy donc il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tq

$$\forall p, q \geq n_0, \quad \left| \langle x^*_{\phi(q)}, x_{k_0} \rangle - \langle x^*_{\phi(p)}, x_{k_0} \rangle \right| \leq \varepsilon$$

Au final $\forall p, q \geq n_0, \left| \langle x^*_{\phi(q)}, z \rangle - \langle x^*_{\phi(p)}, z \rangle \right| \leq 3\varepsilon$

Ainsi $\left(\langle x^*_{\phi(n)}, z \rangle \right)_{n \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy donc

par complétude de $\mathbb{R}$

$$\boxed{\lim_{n \in \mathbb{N}} \langle x^*_{\phi(n)}, z \rangle \text{ existe pour tout } z \in X}$$

III.5.c) • Soit $(\lambda, z_1, z_2) \in \mathbb{R}\times X \times X$.

$\forall n \in \mathbb{N}^*, \ \langle x^*_{\phi(n)}, \lambda z_1 + z_2 \rangle$

$$= \lambda \langle x^*_{\phi(n)}, z_1 \rangle + \langle x^*_{\phi(n)}, z_2 \rangle$$

donc avec $n \to +\infty$ on obtient

$$\langle x^*, \lambda z_1 + z_2 \rangle = \lambda \langle x^*, z_1 \rangle + \langle x^*, z_2 \rangle$$

i.e. x^* est linéaire.

• $\forall z \in X, \ \forall n \in \mathbb{N}, \ |\langle x^*_{\phi(n)}, z \rangle| \leq \|x^*_{\phi(n)}\| . \|z\|$

$$\leq \|z\|$$

donc avec $n \to +\infty$, on obtient

$$\forall z \in X, \ |\langle x^*, z \rangle| \leq \|z\|.$$

Ainsi $\boxed{x^* \text{ est une forme linéaire telle que } \|x^*\| \leq 1}$

18^h34 : pause $+ 1^h30 \simeq 3^h05$ de composition.

16^h39.

III. 6. a) $j(h) - j(-h) \in X$ et comme j est isométrique,

$$\|j(h) - j(-h)\| = |h - (-h)| = 2h \quad (h \geq 0)$$

Par la question III. 3. c) avec $x = j(h) - j(-h)$

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{il existe } x_h^* \in X^* \text{ tq } \|x_h^*\| = 1 \\ \text{et } \langle x_h^*, j(h) - j(-h) \rangle = \|j(h) - j(-h)\| = 2h \end{array}}$$

III. 6. b) • Remarquons que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \ \|j(t)\| = \|j(t) - j(0)\| = |t|$$

• Comme x_h^* est de norme 1 on a

$$|\langle x_h^*, j(t) \rangle| \leq \|x_h^*\| . \|j(t)\| \leq |t|$$

donc $\langle x_h^*, j(t) \rangle \in [-t, t]$.

• On $\begin{cases} \langle x_h^*, j(h)\rangle - \langle x_h^*, j(-h)\rangle = 2h. \\ \text{et } \langle x_h^*, j(h)\rangle \leq h \\ \langle x_h^*, j(-h)\rangle \geq -h \text{ i.e. } -\langle x_h^*, j(-h)\rangle \leq h \end{cases}$

donc nécessairement (on utilise $\left.\begin{matrix} a \leq b \\ c \leq d \\ a+c = b+d \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{matrix} a = b \\ c = d \end{matrix}$)

$\langle x_h^*, j(h)\rangle = h$

$\langle x_h^*, j(-h)\rangle = -h.$

• Par l'absurde, supposons qu'il existe $t_0 \in [0, h]$ tq $\langle x_h^*, j(t_0)\rangle < t_0$

alors $\to$ $t_0 < h$

$\to \langle x_h^*, j(h)\rangle = \langle x_h^*, j(h) - j(t_0)\rangle + \langle x_h^*, j(t_0)\rangle$

$\leq \|x_h^*\| . |h - t_0| + \langle x_h^*, j(t_0)\rangle$

$< (h - t_0) + t_0 = h$

ce qui est une contradiction

- De même, si par l'absurde il existe $t_1 \in [-h, 0]$

tq $\langle x_h^*, j(t_1) \rangle > t_1$

alors $\langle x_h^*, j(-h) \rangle = \langle x_h^*, j(-h) - j(t_1) \rangle + \langle x_h^*, j(t_1) \rangle$

$$> -|-h - t_1| + t_1$$

$$> -h - t_1 + t_1 = -h$$

ce qui est une contradiction.

En conclusion $\boxed{\forall t \in [-h, h], \langle x_h^*, j(t) \rangle = t}$

III.6.c) - On a

$\forall h \in \mathbb{N}, \|x_h^*\| = 1$

donc par III.5) il existe ϕ extraction et $x^* \in X^*$

tq $\|x^*\| \leq 1$ et $\forall z \in X, \lim\limits_{n \to +\infty} \langle x_{\phi(n)}^*, z \rangle = \langle x^*, z \rangle$

- Soit $t \in \mathbb{R}$

Alors $\forall n \in \mathbb{N}$ tq $t \in [-\phi(n), \phi(n)]$ on a

$$\langle x^*_{\phi(n)}, j(t) \rangle = t \quad (*)$$

Or la condition $t \in [-\phi(n), \phi(n)]$ est vraie à partir d'un certain rang n_0 (qui dépend de t)

donc on peut faire tendre $n \to +\infty$ dans $(*)$

et on obtient $\langle x^*, j(t) \rangle = t$

et ce pour tout $t \in \mathbb{R}$.

- Par l'absurde, supposons $\|x^*\| < 1$

Alors $|\langle x^*, j(t) \rangle| \leq \|x^*\| \cdot \|j(t)\|$

$$\leq \|x^*\| \cdot |t| < |t| \text{ si } t \neq 0$$

ce qui est une contradiction.

et donc on a montré $\boxed{\text{qu'il existe } x^* \in X^* \text{ tq } \|x^*\| = 1 \text{ et } \forall t \in \mathbb{R}, \langle x^*, j(t) \rangle = t}$

17^h09 : + 30 min ; 3^h35 de composition

Bilan <u>III</u> : • partie très abstraite

• des notations qui prêtent à confusion (mais qui sont classiques)

<u>III</u>.1) <u>Il</u> faut savoir réexprimer la question sans sup/inf

Une fois que ceci est fait, ce n'est pas trop dur.

<u>III</u>.2.a) <u>Il</u> ne faut pas se précipiter dans les calculs

et bien se concentrer sur l'information qu'on a sur le nombre a

Il faut aussi bien distinguer les cas.

<u>III</u>.2.b) question assez difficile car il faut comprendre que

{ <u>III</u>.1 / <u>III</u>.2.a signifie qu'on peut étendre "d'une dimension"

(et donc qu'on itère cette idée)

(Rq : • le résultat de <u>III</u>.2.b) est un corollaire (version dimension finie) des th. de Hahn-Banach.

• <u>III</u>.3) est la version "dimension infinie dénombrable" d'un autre corollaire des th. de Hahn-Banach.)

III. 3.a) Pas grand chose à dire : remarquer qu'on ne demande pas $E_k \neq E_{k+1}$

III.3.b) Difficile car

→ il faut introduire la bonne forme linéaire sur E_0

→ il faut faire une construction récurrente

et voir que définir une forme linéaire sur V revient à le faire "de façon croissante" sur les $(E_k)_k$.

III.3.c) Il faut penser à appliquer I.1)

Pas trop de difficulté si on est rigoureux ici.

III.4) La difficulté est liée à l'abstraction de X^{**}

Mais sinon c'est une application directe des définitions et de la question précédente.

III.5) est ce qu'on appelle le th de Banach-Alaoglu (version dual d'un espace séparable)

III.5-a) est le cœur de la question et nécessite de connaître la notion d'extraction diagonale.

III.5.b) Il faut penser à la complétude pour montrer la convergence. Ensuite c'est une application des définitions.

III.5.c) Pas de difficulté.

(Rq III.5 est proche de la preuve du th d'Ascoli, voir Th $\left\{\begin{array}{l}3.16\\3.17\end{array}\right.$ du Chap III dans mon poly à ce propos)

III.6.a) n'est pas difficile

III.6.b) n'est pas facile, à mon avis (mais élémentaire)

III.6.c) Il faut penser à III.5.

18h16.

IV.1.a)

Il existe $t \in]0,1[$ tel que

$$b = ta + (1-t)c, \text{ à savoir } t = \frac{b-c}{a-c} = \frac{c-b}{c-a}$$

Par convexité de f,

$$f(b) = f(ta+(1-t)c) \leq t f(a) + (1-t) f(c)$$

- d'où

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leq \frac{1}{b-a}\left[(t-1)f(a) + (1-t)f(c)\right]$$

$$\leq \frac{1-t}{b-a}\left(f(c)-f(a)\right)$$

avec $\displaystyle \frac{1-t}{b-a} = \frac{\frac{c-a-(c-b)}{c-a}}{b-a} = \frac{\frac{b-a}{c-a}}{b-a} = \frac{1}{c-a}$

d'où l'inégalité de gauche.

- d'où aussi

$$\frac{f(c)-f(b)}{c-b} \geq \frac{\cancel{f(c)} - t f(a) - (\cancel{1}-t) f(c)}{c-b}$$

$$\geq \frac{t}{c-b}\left(f(c)-f(a)\right) \text{ avec } \frac{t}{c-b} = \frac{\frac{c-b}{c-a}}{c-b} = \frac{1}{c-a}$$

Finalement on a montré

$$\boxed{\forall\, a<b<c, \quad \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leq \frac{f(c)-f(a)}{c-a} \leq \frac{f(c)-f(b)}{c-b}}$$

IV.1.b) Soit $x \in \mathbb{R}$.

- Avec IV. 1-a) on a

$$\forall\, (b,c) \text{ tq } c>b>x, \quad \frac{f(b)-f(x)}{b-x} \leq \frac{f(c)-f(x)}{c-x}$$

donc l'application $y \in]x,+\infty[\longmapsto \dfrac{f(y)-f(x)}{y-x}$

est croissante donc elle admet bien une limite quand $y \longrightarrow x^+$, ie. f admet une dérivée à droite en x.

- De même

$$\forall (a,b) \text{ tq } a<b<x, \quad \frac{f(a)-f(x)}{a-x} = \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

$$\leq \frac{f(x)-f(b)}{x-b} = \frac{f(b)-f(x)}{b-x}$$

donc $y \in]-\infty, x[\mapsto \dfrac{f(y)-f(x)}{y-x}$ est croissante

donc admet une limite quand $y \to x^-$, i.e.

f admet une dérivée à gauche en x.

- On a

$\forall (a,c)$ tq $a < x < c$,

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \leq \frac{f(c)-f(x)}{c-x}$$

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \frac{f(a)-f(x)}{a-x}$$

On fait $a \to x^-$ et $c \to x^+$ et on obtient

$$f_g'(x) \leq f_d'(x)$$

Soit $x_1 < x_2$. On a déjà montré

$$f_g'(x_1) \leq f_d'(x_1)$$

Il reste à montrer $f_d'(x_1) \leq f_g'(x_2)$.

$\forall y \in]x_1, x_2[$ on a

$$\frac{f(y)-f(x_1)}{y-x_1} \leq \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \leq \frac{f(x_2)-f(y)}{x_2-y}$$

$y \to x_2^-$ donne $\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \leq f_g'(x_2)$

$y \to x_1^+$ donne $f_d'(x_1) \leq \dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$

On a donc montré que

$$\boxed{\begin{array}{l} f \text{ admet des dérivées à gauche et à droite en tout } x \in \mathbb{R} \\ \text{avec } \forall x \in \mathbb{R},\ f_g'(x) \leq f_d'(x) \end{array}}$$

$$\boxed{\text{et } \forall x_1 < x_2,\ f_g'(x_1) \leq f_d'(x_1) \leq f_g'(x_2)}$$

IV.1.c)

On a le résultat

"f dérivable à droite en $x \Rightarrow f$ continue à droite en x"

En effet si $x_0 \in \mathbb{R}$, on a $\forall x > x_0$

$$f(x) - f(x_0) = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \cdot (x - x_0)$$

donc en faisant $x \to x_0^+$, $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ admet une limite réelle et $x - x_0 \longrightarrow 0$ donc $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$.

Le même résultat est aussi valable à gauche.

Ainsi f est continue à gauche et à droite donc continue en tout point $x \in \mathbb{R}$.

Par définition on a

$$\mathcal{S} = \{x \in \mathbb{R},\ f_g'(x) \neq f_d'(x)\}.$$

$$= \{x \in \mathbb{R},\ f_g'(x) < f_d'(x)\} \text{ puisque}$$

$$f_g'(x) \leq f_d'(x)$$

Si $x \in \mathcal{S}$, par densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$, il existe

$$\psi(x) \in \left]f_g'(x), f_d'(x)\right[\cap \mathbb{Q}$$

La fonction $\psi : \mathcal{S} \to \mathbb{Q}$ ainsi définie est strictement croissante car si $x_1 < x_2$ sont dans $\mathcal{S}$,

$$\psi(x_1) < f_d'(x_1) \leq f_g'(x_2) < \psi(x_2)$$

et donc ψ est injective, donc $\mathbb{Q}$ étant dénombrable, $\mathcal{S}$ aussi.

On a montré que f est continue sur $\mathbb{R}$

et l'ensemble S des points où f n'est pas dérivable est dénombrable

IV.1.d) • $\mathbb{R}^*$ est symétrique par rapport à 0

et

$$\forall t \in \mathbb{R}^*, \ \tau(-t) = \frac{f(x-t)+f(x+t)-2f(x)}{-t}$$

$$= -\tau(t) \text{ donc } \tau \text{ est impaire.}$$

• Soit $t_1 \leq t_2$ dans $\mathbb{R}^*$.

On a

$$\tau(t_1) = \frac{f(x+t_1)+f(x-t_1)-2f(x)}{t_1}$$

$$= \frac{f(x+t_1)-f(x)}{t_1} + \frac{f(x-t_1)-f(x)}{t_1}$$

$$\leq \frac{f(x+t_2)-f(x)}{t_2} + \frac{f(x-t_2)-f(x)}{t_2}$$

où on a appliqué IV.1.a avec

$a = x, \quad b = x + t_1, \quad c = x + t_2$:

qui donne $\frac{f(x+t_1) - f(x)}{t_1} \leq \frac{f(x+t_2) - f(x)}{t_2}$

puis avec

$a = x - t_2, \quad b = x - t_1, \quad c = x$

qui donne $\frac{f(x) - f(x-t_2)}{t_2} \leq \frac{f(x) - f(x-t_1)}{t_1}$

i.e. $\frac{f(x-t_1) - f(x)}{t_1} \leq \frac{f(x-t_2) - f(x)}{t_2}$.

Ainsi $\tau(t_1) \leq \tau(t_2)$ et τ est croissante sur $\mathbb{R}^*$.

- On a $\forall t \in \mathbb{R}^*$.

$$\tau(t) = \frac{f(x+t) - f(x)}{t} - \frac{f(x-t) - f(x)}{-t}$$

donc avec $t \to 0^+$ on obtient,

$$\lim_{t \to 0^+} \tau(t) = f_d'(x) - f_g'(x)$$

et donc f dérivable en $x \iff f_d'(x) = f_g'(x)$

$$\iff \lim_{0^+} \tau = 0$$

On a montré que $\boxed{\begin{array}{l} \tau \text{ est impaire et croissante sur } \mathbb{R}^* \\ \text{et} \\ f \text{ est dérivable en } x \iff \lim_{0^+} \tau = 0 \end{array}}$

IV. 2) • On a $F \leq |F|$

donc $\sup_{x \in C} F(x) \leq \sup_{x \in C} |F(x)|$

• Soit $x \in C$: comme $-x \in C$ et F est convexe

$$F(0) = F\left(\frac{x - x}{2}\right) \leq \frac{1}{2} F(x) + \frac{1}{2} F(-x)$$

donc $F(x) + F(-x) \geq 0$.

• pour montrer $\sup_C |F| \leq \sup_C F$

puisque $|F| = \sup\{F, -F\}$, donc on doit montrer

$$-F \leq \sup_C F$$

Soit $x \in C$:

par le point précédent

$$-F(x) \leq F(-x) \leq \sup_C F$$

et donc $\boxed{\sup_C |F| \leq \sup_C F}$

19h18 : pause + 1h02 ≃ 4h40 de composition.

21h40

<u>IV</u>. 3.a)

• Comme $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $\forall \varepsilon \in \{\pm 1\}$,

$$\|\varepsilon \alpha e_i\|_1 = |\varepsilon| \alpha \|e_i\| = \alpha \leq \alpha$$

on a $\max_{\substack{i\in[\![1,n]\!]\\ |\varepsilon|=1}} g(x+\varepsilon\alpha e_i)-g(x) \leq \sup_{\|h\|_1\leq\alpha} g(x+h)-g(x)$

(remarquons que ce terme de gauche est bien un maximum car il s'agit du supremum d'un nombre fini de valeurs, qui est nécessairement atteint)

- Soit h tq $\|h\|_1 \leq \alpha$.

Alors $h = \sum_{j=1}^{n} h_j e_j$ avec $\sum_{j=1}^{n} |h_j| \leq \alpha$;

on pose $\beta = 1 - \frac{\sum_j |h_j|}{\alpha}$

On essaie d'utiliser la convexité sur $x+h$:

$$x+h = \left(\frac{\sum_{j=1}^{n}|h_j|}{\alpha}\right)x + \sum_{j=1}^{n} h_j e_j + \left(1-\frac{\sum|h_j|}{\alpha}\right)x$$

or avec $\varepsilon_j = \text{signe}(h_j)$

on a $h_j = \varepsilon_j |h_j|$

$$= \left(\frac{\sum_j |h_j|}{\alpha}\right)x + \sum_j |h_j|\varepsilon_j e_j + \beta x \quad \left(\text{signe }\beta = \begin{cases} 1 \text{ si } \beta\geq 0 \\ -1 \text{ si } \beta<0 \end{cases}\right)$$

$$= \sum_j \frac{|h_j|}{\alpha} \left(x + \varepsilon_j \alpha e_j\right)$$

$$+ \frac{\beta}{2}\left(x + \alpha e_1\right) + \frac{\beta}{2}\left(x - \alpha e_1\right)$$

Ceci est bien une combinaison convexe de termes de $\mathbb{R}^n$

car $\frac{\beta}{2} \geq 0$, $\frac{|h_j|}{\alpha} \geq 0 \ \forall j$

et $\sum_j \frac{|h_j|}{\alpha} + \frac{\beta}{2} + \frac{\beta}{2} = \frac{\sum_{j=1}^{n} |h_j|}{\alpha} + \beta = 1$

donc par convexité de g,

$$g(x+h) \leq \sum_{j=1}^{n} \frac{|h_j|}{\alpha} g\left(x + \varepsilon_j \alpha e_j\right)$$

$$+ \frac{\beta}{2} g\left(x + \alpha e_1\right) + \frac{\beta}{2} g\left(x - \alpha e_1\right)$$

et donc

$$g(x+h) - g(x) \leq \sum \frac{|h_j|}{\alpha} \left[g\left(x + \varepsilon_j \alpha e_j\right) - g(x) \right]$$

$$+\frac{\beta}{2}\left[g(x+\alpha e_1)-g(x)\right]$$

$$+\frac{\beta}{2}\left[g(x-\alpha e_1)-g(x)\right]$$

$$\leq \underbrace{\left(\sum \frac{|h_j|}{\alpha}+\frac{\beta}{2}+\frac{\beta}{2}\right)}_{=1} \max_{i,\varepsilon}\left[g(x+\varepsilon\alpha e_i)-g(x)\right]$$

On a donc montré

$$\boxed{\sup_{\|h\|_1=1}\left[g(x+h)-g(x)\right]=\max_{\substack{i\in[\![1,n]\!]\\ \varepsilon\in\{\pm1\}}}\left[g(x+\varepsilon\alpha e_i)-g(x)\right]}$$

III.3.b)

Soit $i\in[\![1,n]\!]$

La fonction $t \xmapsto{f_i} g(x+te_i)$

est convexe de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$

(en effet
$g\left(x+\left(\lambda t_1+(1-\lambda)t_2\right)e_i\right)$

$$= g\left(\lambda(x+t_1e_i)+(1-\lambda)(x+t_2e_i)\right)$$

$$\leq \lambda g(x+t_1e_i)+(1-\lambda)\, g(x+t_2e_i)\big)\big)$$

donc par IV.1.c, f_i est continue

d'où $\lim\limits_{t\to 0} f_i(t) = f_i(0) = g(x)$.

Ainsi $\lim\limits_{\alpha\to 0^+} g(x+\alpha e_i)-g(x) = 0$

et $\lim\limits_{\alpha\to 0^+} g(x-\alpha e_i)-g(x) = 0$.

Donc comme il y a un nombre fini de fonctions

on a $\lim\limits_{\alpha\to 0^+} \max\limits_{\substack{1\leq i\leq n\\ \varepsilon\in\{\pm 1\}}} \left[g(x+\alpha\varepsilon e_i)-g(x)\right] = 0$

et donc par la question précédente

$$\lim_{\alpha\to 0^+} \sup_{\|h\|_1\leq\alpha} \left[g(x+h)-g(x)\right] = 0$$

i.e. $\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha_0 > 0, \forall \alpha \leq \alpha_0, \sup_{\|h\|_1 \leq \alpha} \left[g(x+h) - g(x)\right] \leq \varepsilon$

mais comme $\overline{B}(0,\alpha)$ est convexe et symétrique par rapport à 0, et $h \mapsto g(x+h) - g(x)$ est convexe et s'annule en 0

par IV-2, $\sup_{\|h\|_1 \leq \alpha} \left|g(x+h) - g(x)\right| = \sup_{\|h\|_1 \leq \alpha} \left[g(x+h) - g(x)\right] \leq \varepsilon$

Par suite,

$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha_0 > 0, \forall h$ tq $\|h\|_1 \leq \alpha_0, \left|g(x+h) - g(x)\right| \leq \varepsilon$

On a prouvé que $\boxed{g \text{ est continue en tout } x \in \mathbb{R}^n}$

IV.4.a)

Soit $t > 0$.

$$O_{k,i}(t) = \left\{ x \in \mathbb{R}^n, \frac{g(x+te_i) + g(x-te_i) - 2g(x)}{t} < \frac{1}{k} \right\}$$

On pose $\psi(x) = \dfrac{g(x+te_i) + g(x-te_i) - 2g(x)}{t}$

pour $x \in \mathbb{R}^n$.

par continuité de g (prouvée en IV. 3. b)

φ est continue sur $\mathbb{R}^n$

donc $O_{k,i}(t) = \varphi^{-1}\left(\left]-\infty, \frac{1}{k}\right[\right)$

est l'image de l'intervalle ouvert $\left]-\infty, \frac{1}{k}\right[$

par une fonction continue, donc $O_{k,i}(t)$ est ouvert,

et ce pour tout $t > 0$.

Or $V_{k,i} = \bigcup_{t>0} O_{k,i}(t)$, c'est donc une union

d'ouverts, donc un ouvert lui-même.

On a montré que $\boxed{V_{k,i} \text{ est un ouvert}}$

IV. 4. b)

Comme $\dfrac{\partial g}{\partial x_i}(x) = \lim\limits_{t \to 0} \dfrac{g(x + t e_i) - g(x)}{t}$

et que $t \mapsto g(x+te_i)$ est convexe,

par IV.1.d),

$$\frac{\partial g}{\partial x_i}(x) \text{ existe} \iff \lim_{t\to 0^+} \underbrace{\frac{g(x+te_i)+g(x-te_i)-2g(x)}{t}}_{:=\tau_i(t)} = 0$$

$$\iff \forall \varepsilon>0, \exists t_0, \forall t \in]0,t_0], \left|\frac{g(x+te_i)+g(x-te_i)-2g(x)}{t}\right| < \varepsilon.$$

On a vu que τ_i est impaire et croissante

$$\text{et } \lim_{t\to 0^+} \tau_i(t) = f'_d(x) - f'_g(x) \geq 0$$

et donc par croissance de τ, $\forall t>0$, $\tau_i(t) \geq \lim_{0^+} \tau_i \geq 0$

d'où

$$\frac{\partial g}{\partial x_i}(x) \text{ existe} \iff \forall k \in \mathbb{N}^*, \exists t_0, \forall t \in]0,t_0], \tau_i(t) < \frac{1}{k}$$

$$\iff \forall k \in \mathbb{N}^*, \exists t_0, \tau_i(t_0) < \frac{1}{k}$$

cette dernière équivalence vient du fait que τ

est croissante

d'où

$\frac{\partial g}{\partial x_i}(x)$ existe $\Leftrightarrow \forall k \in \mathbb{N}^*, \exists t_0, x \in O_{k,i}(t)$

$\Leftrightarrow \forall k \in \mathbb{N}^*, x \in V_{k,i}$

$\Leftrightarrow x \in \bigcap_{k \in \mathbb{N}^*} V_{k,i} = \Delta_i$.

On a montré $\boxed{\Delta_i = \left\{ x \in \mathbb{R}^n, \frac{\partial g}{\partial x_i}(x) \text{ existe} \right\}}$

IV.4.c) Soit $k \in \mathbb{N}^*$.

$t \overset{f_i}{\mapsto} g(x + t e_i)$ est convexe donc par IV.1.c

f_i est dérivable partout sauf sur un ensemble dénombrable.

En particulier, l'ensemble des points de dérivabilité de f_i est dense dans $\mathbb{R}$, donc il existe $(t_m)_{m \in \mathbb{N}}$ suite qui tend vers 0 tq f_i est dérivable en t_m pourtant

$m \in \mathbb{N}$, i.e. $\dfrac{\partial g}{\partial x_i}$ existe en $x + t_m e_i$ pour tout $m \in \mathbb{N}$.

et donc $\boxed{\Delta_i \text{ est dense dans } \mathbb{R}^n}$

IV.5)

$$\Omega_g = \bigcap_{i=1}^{n} \Delta_i = \bigcap_{i \in [\![1,n]\!]} \bigcap_{k \geq 1} V_{k,i}$$

Comme une union finie d'ensembles dénombrable est dénombrable, Ω_g est une intersection dénombrable d'ouverts (les $V_{k,i}$, voir IV.4.a)

Or $\forall k, i$, $V_{k,i} \supset \Delta_i$ donc $V_{k,i}$ est dense.

L'espace $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_1)$ étant complet, par le lemme de Baire, $\boxed{\Omega_g \text{ est dense dans } \mathbb{R}^n}$

IV.6-a) Si $h=0$, le résultat est clair car $G(x)=0$

Supposons $h \neq 0$.

G est la "différence entre une fonction convexe (g)

et une fonction affine $\left(y \mapsto g(x) + \sum_i (y_i - x_i) \frac{\partial g}{\partial x_i}(x) \right)$

donc G est convexe

par IV.3.a),

$$\sup_{\|v\|_1 \leq \alpha} G(x+v) - \underbrace{G(x)}_{=0} = \max_{i,\varepsilon} G(x + \varepsilon \alpha e_i) - \underbrace{G(x)}_{=0}$$

De plus par IV.2, comme précédemment

on a $\sup_{\|v\|_1 \leq \alpha} G(x+v) = \sup_{\|v\|_1 \leq \alpha} |G(x+v)|$ utilise ($G(x) = 0$)

Avec $\alpha = \|h\|_1$ on obtient

$$G(x+h) \leq \max_{\substack{i \in [\![1,n]\!] \\ \varepsilon \in \{\pm 1\}}} G(x + \varepsilon \|h\|_1 e_i)$$

IV.6.b) Soit $i \in [\![1,n]\!]$ et $\varepsilon \in \{\pm 1\}$

$$G(x + \varepsilon \|h\|_1 e_i) = g(x + \varepsilon \|h\|_1 e_i) - g(x)$$

$$- \varepsilon \|h\|_1 \frac{\partial g}{\partial x_i}(x)$$

Comme $\frac{\partial g}{\partial x_i}(x)$ existe $(x \in \Omega_g)$,

$$\frac{g(x+\varepsilon \|h\|_1 e_i) - g(x)}{\|h\|_1} - \varepsilon \frac{\partial g}{\partial x_i}(x) \xrightarrow[\|h\|_1 \to 0]{} 0$$

Comme il y a un nombre fini de termes (i, ε)

on en déduit

$$\frac{1}{\|h\|_1} \max_{\substack{1 \leq i \leq n \\ \varepsilon \in \{\pm 1\}}} G(x+\varepsilon \|h\|_1 e_i) \xrightarrow[\|h\|_1 \to 0]{} 0$$

donc par IV. 6.a),

$$\frac{|G(x+h)|}{\|h\|_1} \xrightarrow[\|h\|_1 \to 0]{} 0$$

i.e. $$\frac{g(x+h) - g(x) - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial g}{\partial x_i}(x) h_i}{\|h\|_1} \xrightarrow[\|h\|_1 \to 0]{} 0$$

Par définition, comme $h \mapsto \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial g}{\partial x_i}(x) h_i$ est linéaire continue, cela prouve que g est différentiable en x et $dg(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial g}{\partial x_i}(x) h_i$

On a prouvé que $\boxed{\Omega_g \text{ est l'ensemble des points de } \mathbb{R}^n \text{ en lesquels } g \text{ est différentiable}}$

22h57 : ≃ 1h20 ⤳ ≃ 6h de composition.

21h07

IV.7.a)

- Par l'inégalité triangulaire et l'homogénéité de la norme

on a

$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^n, \forall t \in [0,1],$

$$\begin{aligned} \|tx + (1-t)y\| &\leq \|tx\| + \|(1-t)y\| \\ &\leq t\|x\| + (1-t)\|y\| \quad \text{puisque } t \geq 0,\ 1-t \geq 0 \end{aligned}$$

Ainsi $\boxed{\|.\| \text{ est convexe}}$

- Comme $n \geq 1$, il existe $x_0 \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

Alors $\|x_0\| \neq 0$

et $\forall t \in \mathbb{R}, \|t x_0\| = |t|$

Ainsi $\left(\frac{\|t x_0 - 0\|}{t}\right)_{t \neq 0}$ n'a pas de limite pour $t \to 0$

donc $\|.\|$ n'est pas dérivable en 0 dans la direction x_0

donc $\|.\|$ n'est pas différentiable en 0,

i.e. $\boxed{0 \notin \Omega_{\|.\|}}$

- Soit $x \in \Omega_{\|.\|}$ et $t > 0$.

Soit $h \in \mathbb{R}^n$: alors

$$\|t x + h\| = t \left\|x + \frac{h}{t}\right\|$$

$$= t\left(\|x\| + \left\langle \{\nabla \|.\|\}(x), \frac{h}{t}\right\rangle + o\left(\frac{h}{t}\right)\right)$$

$= t\|x\| + \langle \{\nabla \|.\|\}(x), h\rangle + o(h)$

donc $\|.\|$ est différentiable en tx et

$$\langle \{\nabla \|.\|\}(tx), h\rangle = \langle \{\nabla \|.\|\}(x), h\rangle$$

On a donc montré $\boxed{\begin{array}{l}\forall x \in \Omega_{\|.\|}, \forall t>0, \quad tx \in \Omega_{\|.\|} \\ \text{et} \quad \{\nabla \|.\|\}(tx) = \{\nabla \|.\|\}(x)\end{array}}$

IV.7.b) Soit $x \in \Omega_{\|.\|}$: nécessairement $x \neq 0$.

On pose $L = \{\nabla \|.\|\}(x)$:

Soit $h \in \mathbb{R}^n$: $\qquad \|x+th\| = \|x\| + tL(h) + o(t)$

d'où $\qquad L(h) = \lim\limits_{t \to 0} \dfrac{\|x+th\| - \|x\|}{t}$

Or $\forall t>0$, $\qquad \dfrac{\|x+th\| - \|x\|}{t} \leq \dfrac{\|x\| + t\|h\| - \|x\|}{t} = \|h\|$

et $\qquad \dfrac{\|x+th\| - \|x\|}{t} \geq \dfrac{\|x\| - t\|h\| - \|x\|}{t} \geq -\|h\|$

et donc $|L(h)| \leq \|h\| \ \forall h \in \mathbb{R}^n$, i.e. $\|L\| \leq 1$

Avec $h = \dfrac{x}{\|x\|}$ on a

$$\|x + th\| = \left\|\left(1 + \frac{t}{\|x\|}\right) x\right\| = \left(1 + \frac{t}{\|x\|}\right)\|x\|$$

donc
$$\frac{\|x + th\| - \|x\|}{t} \xrightarrow[t \to 0]{} 1$$

donc $L(h) = 1$ et $\|L\| \geq \dfrac{L(h)}{\|h\|} = 1$

On a montré

$$\boxed{\forall x \in \Omega_{\|.\|}, \quad \|\{\nabla \|.\|\}(x)\| = 1 = \left\langle \{\nabla \|.\|\}(x), \frac{x}{\|x\|} \right\rangle}$$

IV. 7. c) On pose $\forall p \geq 1$, $L_p = \{\nabla \|.\|\}(x_p)$.

(Alors $\forall p \geq 1$, $\|x_p + h\| = \|x_p\| + L_p(h) + \underbrace{o(h)}_{\text{dépend de } p.}$)

Par IV. 7. b),

$$L_p\left(\frac{x_p}{\|x_p\|}\right) = 1 \text{ i.e. } L_p(x_p) = \|x_p\|$$

donc $L_p(z) = L_p(z - x_p) + \underbrace{L_p(x_p)}_{\|x_p\|}$

On doit montrer que $L_p(z - x_p) \xrightarrow[p\to 0]{} 0$

or $|L_p(z - x_p)| \leq \underbrace{\|L_p\|}_{=1} \cdot \|z - x_p\| \xrightarrow[p\to+\infty]{} 0$

On a donc montré

$$\lim_{p\to+\infty} \langle \{\nabla \|\cdot\|\}(x_p), z\rangle = \|z\|$$

21h34 : + 30 min $\simeq$ 6h30 de composition

Bilan IV.

IV.1) est un classique d'analyse réelle.

il n'empêche que c'est assez long et fastidieux

IV.1.d) est moins classique mais pas trop dur, je trouve

IV.2) n'est pas très dur mais un peu déroutant.

IV.3.a) est vraiment difficile je trouve : sans indication on avance à l'aveugle : je m'y suis repris à plusieurs fois.

IV.3.b) pas très dur, mais il faut avoir compris l'intérêt de IV.3-a)

IV.4.a) Facile

IV.4.b) Il faut prendre son temps pour être rigoureux et bien penser aux propriétés de τ.

IV.4.c) Un peu perturbant car on pourrait vouloir appliquer Baire, mais en fait il faut le faire à la main.

IV.5) C'est ici que Baire s'applique.
(l'indication prête un peu à confusion je trouve ; il faut être bien précis et la question devient facile).

IV.6.a) il faut bien avoir compris les questions précédentes et savoir les appliquer

IV.6.b) Résultat intéressant disant que pour les fonctions convexes, la différentiabilité équivaut à l'existence des dérivées partielles.

pour la réponse, c'est la même idée que IV.3.b)

IV.7) Les notations ($\mathfrak{z} \nabla \| . \| \mathfrak{z}$) sont un peu pénible (et je trouve qu'on s'y perd) : ne pas hésiter à introduire "localement" une autre notation pour mieux vous y prendre dans les calculs.

Pas de grosse difficulté, bien revenir aux définitions du calcul diff.