Exercices de révision sur les matrices

Rappels et notations. Dans tous les énoncés suivants, les vecteurs sont dans $\mathbb{R}^n$ (notés en colonnes) et les matrices sont dans $\mathbb{R}^{n\times n}$ (matrices carrées de taille $n \times n$).

Étant donnée une matrice $M = (m_{i,j})_{1\leq i\leq n, 1\leq j\leq p}$ de taille $n \times p$, on note M^T sa transposée, c'est-à-dire la matrice de taille $p \times n$ définie par

$$(M^T)_{i,j} = m_{j,i} \quad \text{pour tout } 1 \leq i \leq p,\ 1 \leq j \leq n\,.$$

On rappelle qu'une matrice carrée A est symétrique si $A^T = A$.

On note $(\cdot,\cdot)$ le produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$, défini par

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \quad (x,y) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

ou en notation matricielle, $(x,y) = x^T y$.

Une matrice symétrique A est dite définie positive si

$$(Ax, x) > 0 \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}\,.$$

Exercice 1.

1. Vérifier que la j-ième colonne d'une matrice carrée A s'obtient en effectuant le produit Ae_j où e_j désigne le j-ème vecteur de la base canonique de $\mathbb{R}^n$.
2. Qu'obtient-on en calculant (Ae_j, e_i) ? En déduire que les coefficients diagonaux d'une matrice symétrique définie positive sont strictement positifs.

Exercice 2. Démontrer que pour toute matrice carrée A,

$$(Ax, y) = (x, A^T y) \quad \text{pour tout } x, y \in \mathbb{R}^n$$

où A^T est la matrice transposée de A.

Exercice 3.

1. Montrer qu'une matrice carrée est inversible si et seulement si 0 n'est pas une de ses valeurs propres.
2. On rappelle que le déterminant d'une matrice diagonale est égal au produit des coefficients diagonaux. Montrer que le déterminant d'une matrice diagonalisable est égal au produit de ses valeurs propres (comptées avec leur multiplicité).
3. On rappelle que la trace d'une matrice carrée est égale à la somme des coefficients diagonaux. Montrer que si A, B sont deux matrices carrées de taille $n \times n$, alors

$$\mathrm{trace}(AB) = \mathrm{trace}(BA).$$

En déduire que la trace d'une matrice diagonalisable est égale à la somme des ses valeurs propres (comptées avec leur multiplicité).

Exercice 4. On rappelle le critère de Sylvester : une matrice symétrique $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ est définie positive si et seulement si les n sous-matrices $A_p = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq p}$, $p = 1, \dots, n$ ont chacune un déterminant strictement positif.

On considère la matrice symétrique

$$A = \begin{pmatrix} x & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

En utilisant le critère de Sylvester, déterminer pour quelles valeurs de x la matrice A est définie positive.