TD 2 - Pivot de Gauss, factorisation LU

Exercice 1. Résoudre par la méthode de Gauss les systèmes linéaires suivants :

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 4 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -6 \end{pmatrix}, \tag{1}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 6 & 2 \\ 8 & 0 & -2 & -2 \\ 2 & 9 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & -3 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ -8 \\ -4 \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Exercice 2. On reprend la matrice du système (1) :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 4 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 5 & 6 \end{pmatrix}.$$

1. Justifier que A peut se factoriser sous la forme $A = LU$, où L est une matrice triangulaire inférieure ayant des 1 sur sa diagonale et U est une matrice triangulaire supérieure.

2. Calculer les matrices L et U.

3. En déduire le déterminant de A.

Exercice 3. On considère le cas général d'un système linéaire de la forme $Ax = b$ où A est une matrice de taille $n \times n$.

1. Écrire un algorithme de résolution de ce système par la méthode de Gauss vue en cours.

2. Calculer la complexité de cet algorithme, notée $\mathcal{C}_G$, et vérifier que par rapport à n cette complexité est de l'ordre :

$$\mathcal{C}_G = O(n^3).$$

Comparer ce résultat à la complexité de la procédure d'élimination, dans le cas où A est triangulaire.

Exercice 4.

1. Montrer que le produit de deux matrices triangulaires supérieures de même taille est une matrice triangulaire supérieure.
2. En utilisant la transposée, en déduire le résultat analogue pour deux matrices triangulaires inférieures.
3. Soit U une matrice triangulaire supérieure et inversible. Montrer que son inverse U^{-1} est également une matrice triangulaire supérieure.
   Indication : En notant en colonnes
   $$U^{-1} = \begin{bmatrix} v^{(1)} & v^{(2)} & \dots & v^{(n)} \end{bmatrix},$$
   écrire la j-ème colonne de U^{-1} comme la solution du système linéaire $Uv^{(j)} = e_j$. En utilisant la formule vue en cours, montrer que les $(j-1)$ dernières composantes de $v^{(j)}$ sont nulles.
4. Soit A une matrice carrée inversible possédant une décomposition LU, avec L une matrice triangulaire inférieure ayant des 1 sur sa diagonale et U une matrice triangulaire supérieure.

   En utilisant les résultats des questions précédentes, montrer qu'une telle factorisation est unique.