TD 1 : Orthogonalité, normes matricielles

Exercice 1. Montrer que pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, la matrice $B = A^T A$ est symétrique et positive. À quelle condition B est-elle définie positive ?

Exercice 2. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice symétrique *réelle*.

1. Montrer que les valeurs propres de A sont réelles. On les note $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \ldots \leq \lambda_n$.
2. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$,

$$\lambda_1 \leq \frac{(Ax, x)}{\|x\|_2^2} \leq \lambda_n.$$

Exercice 3. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice antisymétrique réelle.

1. Montrer que A est diagonalisable dans $\mathbb{C}$.
2. Montrer que toutes les valeurs propres de A sont imaginaires pures.
3. En déduire que pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, $I + \alpha A$ est inversible.

Exercice 4. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $U \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice unitaire.

1. Montrer que $||Ux||_2 = ||x||_2 \ \forall x \in \mathbb{C}^n$.
2. Montrer que $||UA||_2 = ||AU||_2 = ||A||_2$.
3. Montrer que A est normale si et seulement si

$$||Ax||_2 = ||A^*x||_2 \quad \forall x \in \mathbb{C}^n.$$

Exercice 5.

1. Pour tout $x \in \mathbb{C}^n$, montrer les encadrements suivants :

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_1 \leq n\|x\|_\infty,$$
$$\|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq \sqrt{n}\|x\|_2.$$

2. Démontrer que pour tout $x \in \mathbb{C}^n$,

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \sqrt{n}\|x\|_\infty.$$

3. Généraliser le résultat précédent en remplaçant $\|x\|_2$ par $\|x\|_p$, pour $p > 1$. En déduire que

$$\lim_{p\to\infty} \|x\|_p = \|x\|_\infty.$$

Exercice 6. Soit $||\cdot||$ une norme matricielle sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $||A|| < 1$.

1. Montrer que la série $\sum_{n\geq 1} A^n$ est normalement convergente. En déduire qu'elle est convergente. On note $S = \sum_{n=1}^{\infty} A^n$ sa somme.
2. Montrer que S est inversible et que $S^{-1} = I - A$.
3. En déduire l'inégalité :
$$||(I-A)^{-1}|| \leq \frac{1}{1-||A||}.$$

Exercice 7.

1. Montrer que si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est une matrice symétrique, alors
$$\rho(A) = \|A\|_2.$$
Est-ce encore vrai si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est une matrice hermitienne ?
2. Montrer que l'application qui à une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ associe son rayon spectral n'est pas une norme.

Exercice 8. Soit $\|\cdot\|$ une norme sur $\mathbb{C}^n$ et $\|\cdot\|$ la norme subordonnée associée. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice inversible. On définit son conditionnement relativement à cette norme par
$$\kappa(A) = \|A\|\,\|A^{-1}\|.$$

1. Soit $b \in \mathbb{C}^n$ un vecteur et $\delta b \in \mathbb{C}^n$ une perturbation. On note u la solution du système linéaire
$$Au = b, \tag{1}$$
et $u + \delta u$ la solution du système perturbé
$$A(u + \delta u) = b + \delta b. \tag{2}$$
Montrer que l'erreur relative entre la solution du système perturbé (2) et la solution du système initial (1) vérifie la majoration suivante :
$$\frac{\|\delta u\|}{\|u\|} \leq \kappa(A)\frac{\|\delta b\|}{\|b\|}.$$
2. Dans le cas où la matrice A est perturbée par $\Delta A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, montrer que l'erreur relative associée à la résolution du système
$$(A + \Delta A)(u + \Delta U) = b$$
vérifie
$$\frac{\|\Delta u\|}{\|u + \Delta u\|} \leq \kappa(A)\frac{\|\Delta A\|}{\|A\|}.$$