TD 4 : Décomposition de Cholesky

Exercice 1. On pose

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 10 & 7 \\ 2 & 7 & 21 \end{pmatrix}$$

1) Montrer que A est symétrique définie positive.
2) Calculer la factorisation de Cholesky de A.
3) Résoudre le système

$$AX = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 96 \end{pmatrix}$$

d'inconnue $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, en utilisant le résultat de la question précédente.

Exercice 2. Effectuer la factorisation de Cholesky de

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 1 & 10 \\ 3 & 1 & 35 & 5 \\ 4 & 10 & 5 & 45 \end{pmatrix}.$$

Exercice 3. On considère la matrice symétrique

$$M = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix},$$

où α est un paramètre réel.

1. Déterminer l'ensemble des valeurs de α pour lesquelles la matrice M est définie positive.
2. On suppose que $\alpha = 0$. On veut résoudre un système de la forme $Mx = b$ par une méthode directe. Quelle factorisation de la matrice M peut-on envisager dans ce cas ?
3. On suppose maintenant que $\alpha = 2$.
   a. Vérifier que la matrice M est définie positive et calculer sa factorisation de Cholesky.
   b. En supposant que $b = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^T$, utiliser la décomposition précédente pour résoudre le système $Mx = b$.