TD 5 : Décomposition en valeurs singulières

Exercice 1. Trouver une décomposition en valeurs singulières $A = U\Sigma V^T$ des matrices suivantes :

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad A_2 = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 3\sqrt{3} & -12 & 3 \\ 4\sqrt{3} & 9 & 4 \end{bmatrix},$$
$$A_3 = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1 & 1 \\ -1/\sqrt{2} & 1 & 1 \\ 0 & -3/\sqrt{2} & 3/\sqrt{2} \end{bmatrix}.$$

Exercice 2. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice inversible. On note $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$ ses valeurs singulières, par ordre décroissant. Montrer que le conditionnement $\kappa_2(A)$ de A pour la norme $\|\cdot\|_2$ vérifie

$$\kappa_2(A) = \frac{\sigma_1}{\sigma_n}.$$

Exercice 3. Soit $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ de valeurs singulières $\sigma_1, \ldots, \sigma_k$ (avec $k \leq \min\{m, n\}$). Montrer que sa norme de Frobenius $\|A\|_F$ vérifie la relation

$$\|A\|_F = \sqrt{\sum_{i=1}^{k} \sigma_i^2}.$$

Exercice 4. Trouver un example de matrice symétrique $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ pour laquelle l'ensemble de ses valeurs propres ne coïncide pas avec l'ensemble de ses valeurs singulières.

Exercice 5. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ quelconque, dont la décomposition en valeurs singulières s'écrit $A = U\Sigma V^T$, avec $\Sigma = Diag(\sigma_i)$ où $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$ désigne ses valeurs singulières, par ordre décroissant. On définit la *pseudo-inverse* de A par

$$A^+ := V\Sigma^+ U^T, \text{ avec } \Sigma^+ = Diag(\sigma_i^+) \text{ où } \sigma_i^+ := \begin{cases} 0 & \text{si } \sigma_i = 0, \\ \sigma_i^{-1} & \text{si } \sigma_i > 0. \end{cases}$$

1. Calculer la pseudo-inverse des matrices $\begin{bmatrix} 10^{-2} & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ et $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$.
2. Montrer que si A est inversible alors $A^{-1} = A^+$. Trouver un exemple de matrice non inversible pour laquelle $AA^+ \neq Id$.
3. Montrer les propriétés suivantes : $AA^+A = A$, $A^+AA^+ = A^+$, $A^TAA^+ = A^T$.
4. Montrer que $\|A^+\|_2 = \frac{1}{\sigma}$, où σ est la plus petite valeur singulière non nulle de A.

5. Question subsidiaire : vérifier que tous ces résultats restent vrais lorsque la matrice n'est pas carrée mais dans $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$

Exercice 6. Étant donné une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ quelconque, on définit son conditionnement par $\kappa_2(A) := \|A\|_2 \|A^+\|_2$.

1. Soit $b \in \mathbb{R}^n$, et $x := A^+ b$. Montrer que x vérifie ce qu'on appelle l'équation normale $A^T A x = A^T b$. Montrer de plus que $Ax = b$ si et seulement si $b \in \text{Im }(A)$.
2. Soient $b \in \text{Im }(A)$ et $\hat{b} \in \mathbb{R}^n$ une perturbation de b. Soient $x := A^+ b$ et $\hat{x} := A^+ \hat{b}$. Montrer que
$$\frac{\|x - \hat{x}\|}{\|x\|} \leq \kappa_2(A) \frac{\|b - \hat{b}\|}{\|b\|}.$$
3. Calculer le conditionnement des matrices de la question 5.1. Comparer avec la distance séparant ces deux matrices.

Exercice 7. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Vérifier que $\text{Ker}(A) = \text{Ker}(A^T A)$.
2. Soient $\sigma_1, \ldots, \sigma_r$ les valeurs singulières non nulles de A. Montrer que $r = \text{rang}(A)$.

Exercice 8. Soit $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$, $\sigma_1, \ldots, \sigma_r$ ses valeurs singulières, et $p \in [1, +\infty]$. On définit la p-norme de Schatten comme suit :

$$\|A\|_{\sigma_p} := \|(\sigma_1, \cdots, \sigma_r)\|_p = \left(\sum_{i=1}^{r} |\sigma_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \text{ si } p < +\infty, \quad \max_i \sigma_i \text{ si } p = +\infty.$$

1. Vérifier que $\|A\|_{\sigma_p} = 0$ si et seulement si $A = 0$.
2. Vérifier que $\| \cdot \|_{\sigma_p}$ est positivement homogène.
3. Montrer que lorsque $p = +\infty$, $\|A\|_{\sigma_\infty} = \|A\|_2$.
4. Montrer que lorsque $p = 2$, $\|A\|_{\sigma_2} = \|A\|_F$. On rappelle que $\|A\|_F = \sqrt{\text{trace}(A^T A)}$.

Par la suite on admettra l'inégalité de Hölder pour les normes de Schatten :

$$(\forall p, q \in [1, +\infty])(\forall A, B \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})) \quad \langle A, B \rangle := \text{trace}(A^T B) \leq \|A\|_{\sigma_p} \|B\|_{\sigma_q} \text{ si } \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

5. Montrer que lorsque[1] $p = 1$, $\|A\|_{\sigma_1} = \sup_{\|B\|_2 \leq 1} |\text{trace}(A^T B)|$.

1. La 1-norme de Schatten est usuellement connue sous le nom de *norme nucléaire*, ou *norme de trace*, et notée $\| \cdot \|_*$