TD 6 : Méthodes itératives

Exercice 1. Soit $a \in \mathbf{R}$, on considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & a \\ a & 1 & a \\ a & a & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que A est symétrique définie positive à condition que $a \in]-1/2, 1[$.
2. Écrire la matrice de l'itération de la méthode de Jacobi associée A. Pour quelles valeurs de a la méthode de Jacobi converge-t-elle ?
3. Montrer que pour les valeurs de a calculées à la question précédente, la méthode de Gauss-Seidel converge également.

Exercice 2. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ à coefficients diagonaux non nuls, D une matrice diagonale inversible et $b \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$. On pose $\tilde{A} = DA$ et $\tilde{b} = Db$. Montrer que la méthode de Jacobi de résolution des systèmes

$$Ax = b \qquad \text{et} \qquad \tilde{A}x = \tilde{b}$$

partant d'un même vecteur x_0 donne la même suite d'itérations (x_k).

Exercice 3. Soit $A = I - E - E^*$ une matrice carrée d'ordre d où E est une matrice strictement triangulaire inférieure ($e_{ij} = 0$ si $j \geq i$). Pour résoudre le système $Ax = b$ (où $b \in \mathbb{C}^d$ est un vecteur donné), on choisit $x_0 \in \mathbb{C}^d$ et on propose la méthode itérative définie pour tout $k \in \mathbb{N}$ par

$$(I - E)\, x_{2k+1} = E^*\, x_{2k} + b,$$
$$(I - E^*)\, x_{2k+2} = E\, x_{2k+1} + b.$$

1. Déterminer B et c pour que l'on ait

   $$x_{2k+2} = B\, x_{2k} + c.$$

   Vérifier que $B = M^{-1}N$ et $A = M - N$ où $M = (I - E)(I - E^*)$ et $N = EE^*$.
2. Montrer que $M^* + N$ est hermitienne définie positive. En déduire une condition suffisante pour la convergence de la méthode.

Exercice 4.

1. Soit H une matrice hermitienne définie positive et $r > 0$. Montrer que la matrice $(rI + H)$ est inversible, que $(rI - H)$ et $(rI + H)^{-1}$ commutent et que

   $$\|(rI - H)(rI + H)^{-1}\|_2 < 1.$$

2. Soit H et K des matrices hermitiennes définies positives et $r > 0$. Montrer que

   $$\|(rI - H)(rI + H)^{-1}(rI - K)(rI + K)^{-1}\|_2 < 1,$$

   puis que

   $$\rho\left((rI + K)^{-1}(rI - H)(rI + H)^{-1}(rI - K)\right) < 1.$$

On considère le schéma itératif suivant

$$\begin{aligned}(H + rI)y_k &= (rI - K)x_k + b,\\ (K + rI)x_{k+1} &= (rI - H)y_k + b.\end{aligned}$$

3. Exprimer, pour $k \geq 0$, x_{k+1} sous la forme

$$x_{k+1} = Bx_k + c$$

pour un vecteur c et une matrice B à préciser (en fonction de H, K, r, b).

4. Montrer que le schéma itératif converge, autrement dit que les suites (x_k) et (y_k) convergent quelle que soit la condition initiale x_0.

5. Montrer que leurs limites x et y satisfont

$$\begin{aligned}(H + rI)y &= (rI - K)x + b,\\ (K + rI)x &= (rI - H)y + b.\end{aligned}$$

Puis établir que

$$\begin{aligned}&x = y,\\ &(H + K)x = b.\end{aligned}$$