TP 3 : Normes matricielles, conditionnement

1) *Système mal conditionné : sensibilité aux données initiales.* On considère dans cet exercice la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 7 & 8 & 7 \\ 7 & 5 & 6 & 5 \\ 8 & 6 & 10 & 9 \\ 7 & 5 & 9 & 10 \end{pmatrix}.$$

a) Vérifier, à l'aide de `Scilab`, que A est inversible et que

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 25 & -41 & 10 & -6 \\ -41 & 68 & -17 & 10 \\ 10 & -17 & 5 & -3 \\ -6 & 10 & -3 & 2 \end{pmatrix}.$$

On calculera ensuite le *conditionnement* de A, défini par $cond(A) := |||A|||\ |||A^{-1}|||$. On pourra utiliser la commande `norm`, ou directement `cond`.

b) Résoudre, à l'aide de la commande `A\b`, le système linéaire

$$Ax = b, \text{ où } b = \begin{pmatrix} 32 \\ 23 \\ 33 \\ 31 \end{pmatrix}.$$

c) Résoudre à présent le système $A\tilde{x} = \tilde{b}$, où ici $\tilde{b}$ est une version légèrement perturbée de b. On construira ce vecteur sous la forme $\tilde{b} = b + \epsilon$, avec ϵ un “petit” vecteur aléatoire. Pour générer ϵ on pourra utiliser la commande `c*rand(4,1)` où `rand(4,1)` génère un vecteur aléatoire[1] de taille 4×1 et `c` est un petit nombre réel à choisir.

1. Comparer la solution approchée $\tilde{x}$ à la solution exacte x.
2. Calculer l'erreur relative sur le second membre $\frac{\|\tilde{b}-b\|}{\|b\|}$, et la comparer avec l'erreur obtenue sur le résultat $\frac{\|\tilde{x}-x\|}{\|x\|}$. Observer l'écart en ordre de grandeur.
3. Un résultat classique énonce que l'on a toujours $\frac{\|\tilde{x}-x\|}{\|x\|} \leq cond(A)\frac{\|\tilde{b}-b\|}{\|b\|}$. Le vérifier numériquement sur cet exemple.

d) Reprendre la question c) et l'adapter en résolvant cette fois-ci le système $\tilde{A}\tilde{x} = b$, où $\tilde{A}$ correspond à la matrice A légèrement perturbée.

1. Tiré d'après la loi uniforme sur $[0, 1]$. On peut également obtenir un tirage suivant la loi normale centrée réduite (donc prenant ses valeurs sur $\mathbb{R}$) en ajoutant l'option `"normal"`

2) *Matrices très mal conditionnées.* Pour tout entier naturel n, on définit la matrice de Hilbert H_n d'ordre n, dont le coefficient sur la $i$ème ligne et la $j$ème colonne est $1/(i+j-1)$:

$$H_n = \left(\frac{1}{i+j-1} \right)_{1 \le i,j \le n}.$$

a) Écrire une fonction `[H] = Hilbert(n)` permettant de construire H_n en fonction de n.
b) Calculer les conditionnements $Cond(H_n)$ des $p = 12$ premières matrices de Hilbert et les ranger dans un vecteur `listcond`.
c) Tracer sur un graphique le logarithme de ces conditionnements en fonction de n et comparer[2] avec la fonction $3.5n$. On aura besoin de la commande `log` ; de la commande `plot` qui peut s'utiliser de la façon suivante
`plot(vect-abscisse,[vect-ordonnee1,vect-ordonnee2, ... ]);`
où les vecteurs en jeu ici doivent être en *colonne* ; et on rappelle qu'un vecteur ligne `[1, 2, 3, ... , n]` se définit avec `[1:n]`.

3) Pour une matrice $A = (a_{i,j})_{1 \le i,j \le n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ générée aléatoirement, calculer $\|A\|_1$, $\|A\|_2$, $\|A\|_\infty$ et $\|A\|_F$, et comparer ces normes à $\max_{i,j} |a_{i,j}|$.

Que constate-t-on lorsque $n \to +\infty$?

4) Soit A une matrice quelconque dans $M_n(\mathbb{R})$.
a) Calculer le rayon spectral $\rho(A)$ de cette matrice[3]. On pourra utiliser les commandes `abs` et `spec`. Que renvoie `norm(A)` ? Appeler `help norm` pour comprendre la différence avec ces deux quantités.
b) Écrire une fonction permettant de calculer la quantité $\|A^k\|_2^{1/k}$ étant donné une matrice A et un entier naturel k.
c) Calculer ainsi $\|A^k\|^{1/k}$ pour des valeurs de k de plus en plus grandes (par exemple, $k = 1, 2, 3, ..., 15$; puis $k = 10, 20, ..., 150$) et comparer avec le rayon spectral $\rho(A)$.
d) Reprendre les questions b) et c) pour d'autres normes (par exemple $\|\cdot\|_p$, où $p = 1$, $p = \infty$).

2. On peut montrer que le conditionnement de H_n est de l'ordre de $e^{3.5n}$ lorsque n est grand.
3. On rappelle que le rayon spectral est le maximum du module des valeurs propres complexes.