

UNIVERSITÉ SORBONNE PARIS NORD

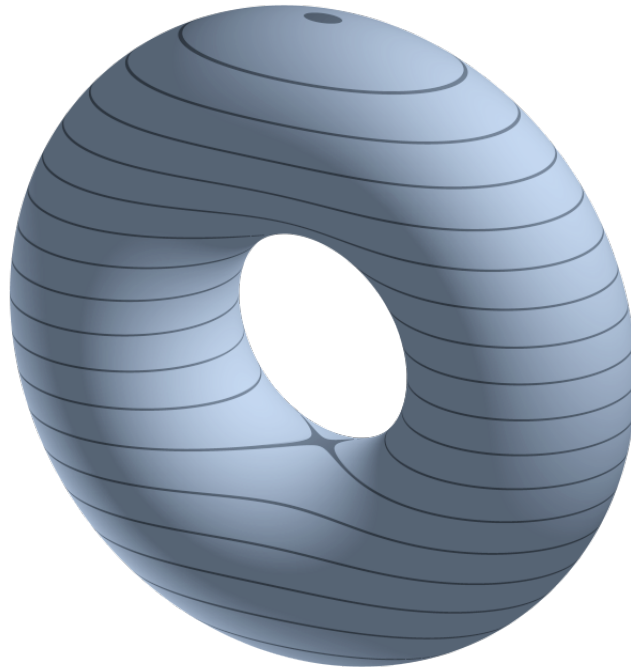
TRAVAIL ENCADRÉ DE RECHERCHE

**Classification des surfaces fermées orientables
via la Théorie de Morse**

JUAN RAMÓN GÓMEZ GARCÍA

sous la direction de

FRANÇOIS BÉGUIN



M1 MATHÉMATIQUES FONDAMENTALES ET APPLICATIONS

ANNÉE UNIVERSITAIRE 2020 - 2021

Table des matières

1	Introduction	4
2	Variétés différentielles et espace tangent : une révision	10
2.1	Variétés différentielles	10
2.2	L'espace tangent	14
2.3	La différentielle : valeurs critiques et valeurs régulières	19
2.4	Fonctions plateaux et partitions de l'unité	20
2.5	Variétés à bord	24
2.6	Orientation	27
3	Théorème de Sard	29
3.1	Mesure nulle en variétés	29
3.2	Preuve du théorème de Sard	33
4	Théorie de Morse	36
4.1	Fonctions de Morse	39
4.1.1	Quelques définitions	39
4.1.2	Lemme de Morse	40
4.1.3	Existence de fonctions de Morse	42
4.2	Topologie des sous-niveaux d'une fonction de Morse	46
4.2.1	Pseudo-gradients	46
4.2.2	Flot d'un champ de vecteurs	48
4.2.3	Évolution de la topologie des sous-niveaux	51
5	Classification des surfaces fermées orientables	55
5.1	Recollement de variétés à bord	55
5.2	Somme connexe de variétés	59
5.3	La surface de genre g	62
5.4	Théorie de Morse en surfaces compactes	63
5.5	Classifications de surfaces fermées orientables	66
A	Théorème de Seifert-Van Kampen	69
	Bibliographie	71

Le long de ce mémoire, on supposera connus les résultats d'Algèbre Linéaire, d'Analyse, de Topologie et de Calcul Différentiel classiques de licence.

1 Introduction

L'un des principaux objectifs de ce travail est de prouver le théorème de classification pour les surfaces fermées, connexes et orientables : toute surface de ce type est homéomorphe à une sphère ou à la somme connexe d'un certain nombre de tores.

Plusieurs points nécessitent une explication dans le paragraphe ci-dessus. Pour commencer, il est nécessaire de préciser ce que nous entendons par surface. Grossièrement, une surface topologique est un espace topologique qui localement ressemble à un plan. Lorsqu'on marche sur la surface de la Terre, nous ne pouvons pas distinguer, en regardant simplement autour de nous, si on est sur un plan, sur un cylindre... Ce n'est que lorsqu'on regarde « au-delà » que l'on réalise qu'en fait, la surface de la Terre est une sphère. De nombreux exemples de surfaces viennent rapidement à l'esprit : la sphère, le plan, la surface d'un cylindre, la surface d'un tore... Pourtant, il faut remarquer que la classification que l'on va donner concerne également les surfaces abstraites, qui ne sont pas nécessairement plongées dans \mathbb{R}^3 .

Parmi toutes, nous nous limiterons à celles qui remplissent trois conditions : elles sont connexes, fermées et orientables. La notion de connexité est celle des espaces topologique et on dit qu'une surface est *fermée* si elle est compacte et n'a pas de « bord ». Ainsi, la sphère et le tore sont fermées mais le cylindre ou le plan ne le sont pas. Définir l'orientation est plus compliqué, mais pour l'instant on dira qu'une surface est *orientable* s'il est possible de définir « droite » et « gauche » quand on se déplace sur elle. Formellement, ceci reviendra à choisir une certaine classe de bases pour les *espaces tangents* à la surface, qu'on étudiera en détail. L'exemple typique d'une surface non orientable est le ruban de Möbius, qui est obtenu en tordant une bande rectangulaire et en collant les bords ensemble.

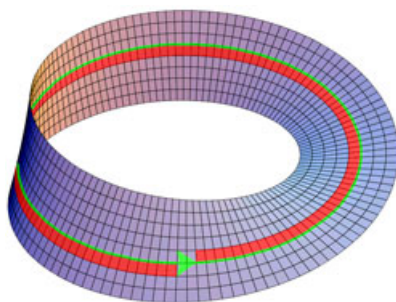


FIGURE 1 – Ruban de Möbius.

Pour visualiser pourquoi il n'est pas possible de définir « gauche » et « droite », imaginons que nous avons un carré sur la surface dont le bord gauche est coloré en rouge et le bord droit est coloré en bleu. Si nous faisons maintenant glisser le carré le long de la surface pour le ramener à sa position initiale, la partie bleue s'est déplacée vers la droite et la partie rouge vers la gauche, ce qui rend les notions de gauche et de droite dénuées de sens (une histoire très amusante sur les carrés, les mondes plats et l'orientabilité est *Flatland, romance of many dimensions*, d'Edwin Abbott Abbott).

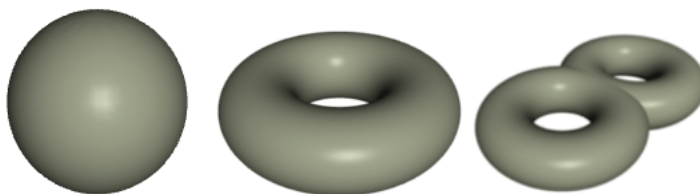


FIGURE 2 – Exemples de surfaces connexes, fermées et orientables.

La somme connexe, d'autre part, est un procédé qui permet d'obtenir une surface à partir de deux autres surfaces données. Pour ce faire, on ouvre un petit trou dans chacune des surfaces et les recolle ensemble le long du bord obtenu.

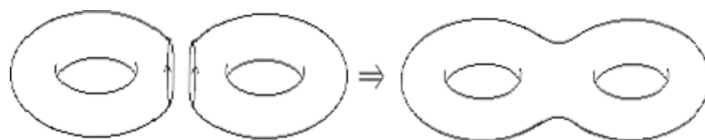


FIGURE 3 – Somme connexe de deux tores.

Le problème de classification consiste donc à trouver une liste de surfaces, sans les répéter, telle que toute autre surface est homéomorphe à une surface de la liste. Ce problème a été largement abordé au cours des deux derniers siècles, ce qui coïncide avec la consolidation de la Topologie comme une discipline indépendante au sein des Mathématiques. Les premiers énoncés du théorème de classification sont le résultat des travaux de Möbius et Jordan, à la fin du XIXe siècle, alors que très peu de concepts topologiques avaient été développés.

Möbius semble être le premier mathématicien à s'être intéressé au problème. Son travail est particulièrement intéressant car il utilise des techniques qui pourraient être considérées comme des précurseurs de la Théorie de Morse, qui sera au centre d'une grande partie de notre exposition. Dans son ouvrage, le mathématicien allemand introduit pour la première fois une notion d'équivalence entre surfaces à travers de ce qu'il définit comme une « relation élémentaire » : l'idée est que deux surfaces sont équivalentes si elles peuvent être décomposées en un nombre infini de « petits morceaux », de sorte que les morceaux contigus d'une surface correspondent aux morceaux contigus de l'autre.

À partir de la notion de relation élémentaire, Möbius établit un résultat de classification des surfaces plongées dans \mathbb{R}^3 sans auto-intersections, en classant géométriquement les points d'une fonction « hauteur » en points elliptiques et hyperboliques. Il démontre que chaque surface S peut être construite à partir de deux autres surfaces S_1 et S_2 équivalentes, avec n composantes de bord chacune et collées le long de leurs frontières. Il a appelé le nombre n de composantes des bords la *classe*, et a montré qu'il s'agit d'un invariant topologique.

Jordan a classé les surfaces compactes, les surfaces à bord y comprises, indépendamment de Möbius. Pour ce faire, il a compté le nombre maximal k de courbes fermées, sans intersection entre elles, qui peuvent être tracées sur une surface sans la déconnecter, et a prouvé que la paire (k, m) , où m est le nombre de composantes de bord de la surface, est un invariant de classification.

L'idée principale pour la classification des surfaces remonte à Riemann : couper la surface le long de courbes ou d'arcs fermés entre deux points de la frontière jusqu'à ce qu'aucune autre coupure ne soit possible sans déconnecter la surface. Riemann a prouvé que tout ensemble maximal de courbes de cette forme a le même cardinal p . La *connectivité* est alors définie comme $p + 1$: par exemple, une sphère a connectivité 1 (elle est *simplement connexe*) et une couronne a connectivité 2. Cette notion coïncide essentiellement avec la notion de genre d'une surface, que nous aborderons plus tard. Dans sa preuve, cependant, Riemann a omis un détail essentiel : il est nécessaire de prouver que la connectivité de toute surface est effectivement finie.

Les résultats de Möbius et Jordan manquent de la rigueur nécessaire du point de vue actuel, car ils ne disposaient pas des outils nécessaires : la notion de surface topologique n'était même pas établie. D'autres versions du théorème ont été présentées, par exemple, par von Dyck en 1888 ou par Dehn et Heegaard en 1907, mais il a fallu attendre presque 60 ans pour la première version rigoureuse et complète du théorème, trouvée par H.R. Brauer en 1921.

La preuve du théorème de classification des surfaces orientables compactes que l'on présente en détail dans la dernière section du texte est basée sur un outil puissant de la topologie différentielle, la *Théorie de Morse*, qui englobe un ensemble de techniques et de méthodes développées principalement au cours du XXe siècle pour l'étude de la topologie d'une variété différentielle à partir des lignes de niveau et des sous-niveaux d'une classe de fonctions spécifique : les fonctions de Morse. Certaines idées de la Théorie de Morse étaient déjà présentes dans des travaux de Cayley et de Maxwell sur la topographie, ainsi que dans la preuve du théorème de classification proposée par Möbius, dont on a parlé précédemment. Dans son cinquième complément à l'*Analysis Situs*, Poincaré présente de même une esquisse de démonstration du théorème de classification en utilisant des idées propres de la Théorie de Morse.

Les idées de base de la Théorie de Morse peuvent être rapidement comprises à partir de l'exemple suivant, sur lequel nous reviendrons plus tard. Considérons un tore comme celui de la figure 4, sur lequel on définit une fonction h qui associe à chaque point sa « hauteur ». Cette fonction a quatre points critiques : un maximum, un minimum et deux points col.

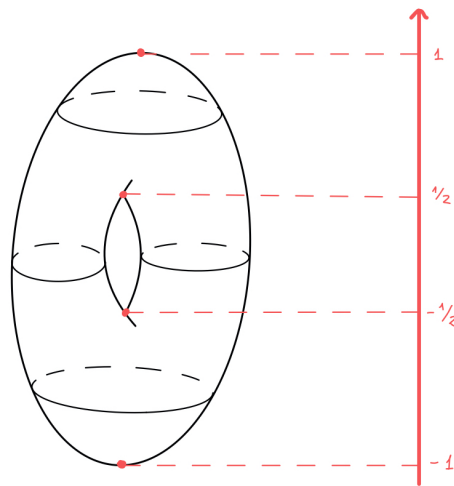


FIGURE 4 – Fonction hauteur sur le tore.

Un sous-niveau de hauteur z , est l'ensemble des points du tore situés à une hauteur inférieure ou égale à z . Ces sous-niveaux ont la forme suivante : si z est inférieure à -1 , le sous-niveau est vide ; entre -1 et $-1/2$, il est homéomorphe à un disque ; entre $-1/2$ et $1/2$, c'est un cylindre ; entre $1/2$ et 1 , un tore avec un trou ; et, à partir de 1 , c'est le tore tout entier.

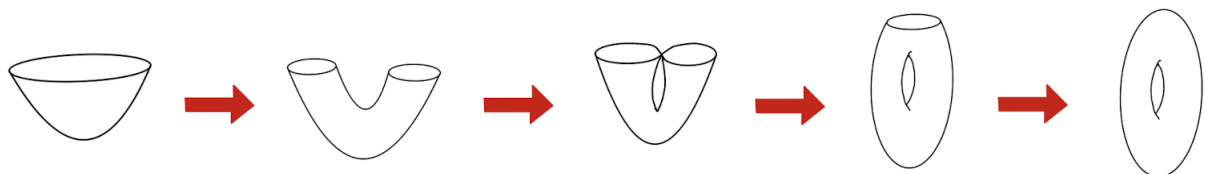


FIGURE 5 – Évolution de la topologie des sous-niveaux du tore.

En particulier, la topologie des sous-niveaux ne change pas tant que l'on ne traverse pas une valeur critique. Lorsque on traverse un maximum ou un minimum, le changement consiste à ajouter un disque, et lorsque nous passons par un point de selle, on recolle ensemble, en quelque sorte, deux régions du bord de la surface. En étudiant ces changements, nous verrons que toute surface fermée peut être composée en collant des morceaux comme ceux de la figure ci-dessous, obtenant ainsi une classification complète.

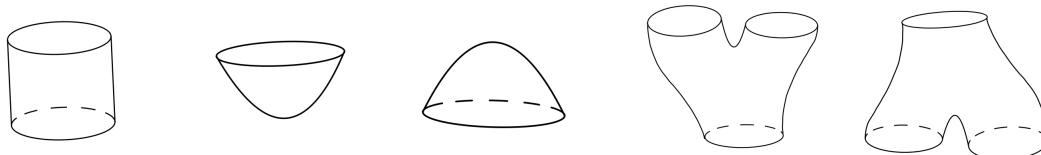


FIGURE 6 – Pièces élémentaires pour le construction des surfaces fermées orientables.

Il faut souligner que les applications de cette théorie vont au-delà de la classification des surfaces compactes. Un exemple est celui des *inégalités de Morse*, qui fournissent une estimation du nombre de points critiques des fonctions de Morse sur une variété. Cette estimation est indépendante de la fonction choisie, et ne dépend que de la topologie de la variété à travers son homologie.

Malgré la simplicité de son énoncé, le théorème de classification des surfaces compactes est un cas extrêmement rare. Le problème en dimension 3 est actuellement ouvert ; la preuve de la conjecture de Poincaré par Grigori Perelman en 2003 a apporté un nouvel espoir de progrès dans sa résolution. D'ailleurs, même dans le cas orientable, le résultat est loin d'être une évidence a priori. En premier lieu, parce que nous considérons des variétés abstraites, pas nécessairement plongées dans \mathbb{R}^3 . Mais, même en sachant que toute variété orientable peut être plongée dans \mathbb{R}^3 , le résultat ne saute pas directement aux yeux. Il suffit d'observer les surfaces suivantes pour s'en convaincre : à la somme connexe de combien de tores sont-elles homéomorphes ?

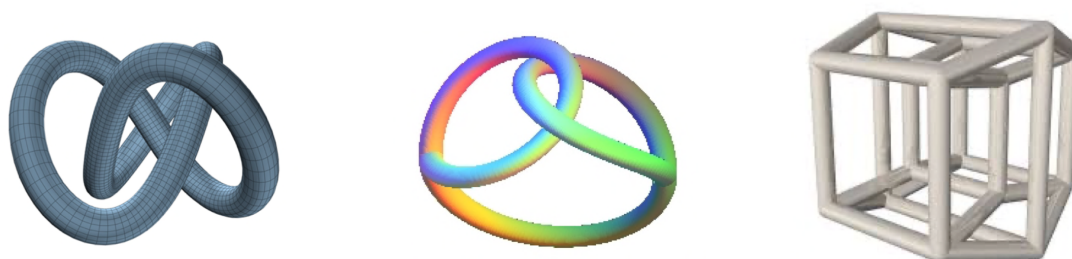


FIGURE 7 – Trois surfaces plongées dans \mathbb{R}^3 .

Pour répondre à cette question, il est pratique d'introduire le *genre*. Intuitivement, le genre est souvent décrit comme le nombre de « trous » que la surface possède. Avec cette description, il est clair que le genre de la sphère est 0 et que le tore a genre 1, mais... quel est le genre des surfaces de la figure ci-dessus ?

Plus rigoureusement, le genre g d'une surface est le nombre maximum de courbes simples fermées sans points communs que l'on peut retirer de la surface sans la déconnecter. Cette quantité est un invariant topologique. Selon cette définition, la première surface de la figure est de genre 1 (on peut enlever une courbe sans déconnecter, mais pas deux) ; la deuxième est de genre 2 (si on enlève deux courbes dans chacune des parties de la boucle, la surface reste connexe, mais on ne peut pas enlever une troisième) ; et la troisième est de genre 17 (étant l'épaississement du squelette d'un hypercube, il y a 16 sommets et 32 arêtes, donc on peut « couper » 17 arêtes sans déconnecter la surface). Ce n'est pas difficile de se convaincre que la somme connexe de n tores est une surface de genre n et, puisque c'est un invariant topologique, les surfaces de la figure sont donc trois surfaces homéomorphes au tore, à la somme connexe de deux tores et à la somme connexe de 17 tores, respectivement.

La preuve du théorème de classification que l'on présente dans ce travail, pourtant, n'est ni la seule ni la plus courante. Dans des nombreux textes en topologie, la classification des surfaces compactes est effectuée à travers des *triangulations*. Une triangulation d'une surface compacte S

est une partition $S = \bigcup_{i=1}^n T_i$, où chaque T_i est homéomorphe à un triangle de \mathbb{R}^2 , telle que :

1. Deux triangles sont soit disjoints, soit ils ont un sommet en commun, soit ils partagent une arête.
2. Chaque arête appartient à exactement deux triangles.

La première preuve de l'existence de triangulations pour les surfaces compactes est due à T. Radó en 1925, en utilisant le théorème de la courbe de Jordan.

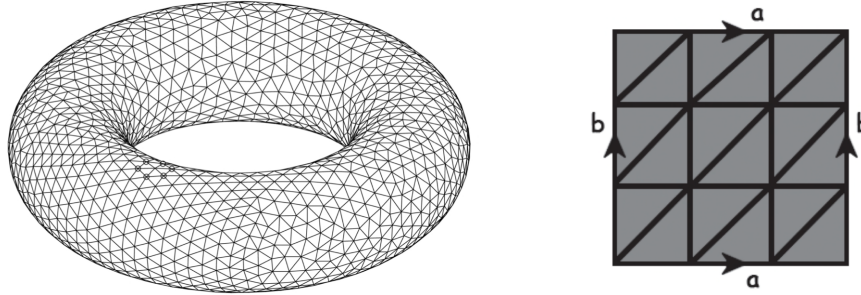


FIGURE 8 – Une triangulation et une représentation polygonale du tore.

Les triangulations nous permettent alors de construire un « modèle » de la surface dans \mathbb{R}^2 . En effet, pour construire ce modèle, on peut commencer par un triangle T_1 de la triangulation et ajouter un des triangles avec lequel il partage une arête, que l'on appelle T_2 . Par récurrence, pour chaque i , on peut compléter la famille $\{T_1, \dots, T_i\}$ en ajoutant un triangle T_{i+1} adjacent à T_i . Comme la surface est connexe, le processus épuise tous les triangles de la triangulation et nous donne comme résultat un polygone de \mathbb{R}^2 dont ses côtés sont identifiés deux par deux. Chaque polygone ainsi construit peut être identifié par un mot comme ci-dessous :

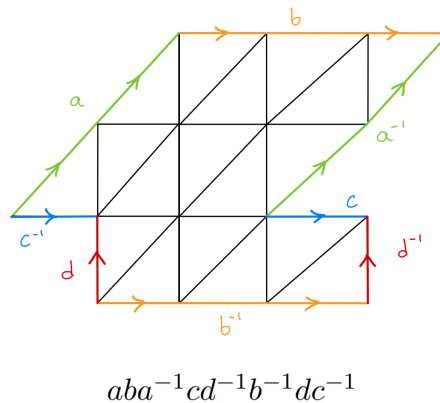


FIGURE 9 – Une représentation polygonale du tore.

La partie principale de la preuve consiste à démontrer, au moyen d'un processus algorithmique, que toute surface admet une *représentation normale*, c'est-à-dire, une représentation par un mot de l'une des formes suivantes :

$$aa^{-1}, \tag{I}$$

$$a_1b_1a_1^{-1}b_1^{-1} \dots a_nb_na_n^{-1}b_n^{-1}, \quad n \geq 1. \tag{II}$$

La première de ces représentations correspond à la sphère ; la deuxième, à la somme connexe de n tores.

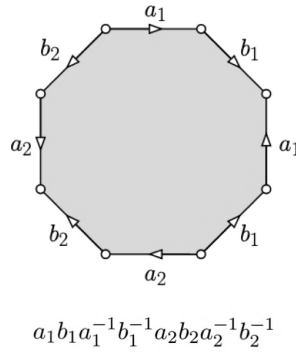


FIGURE 10 – Représentation polygonale en forme normale.

Chaque surface compacte orientable est ainsi homéomorphe à une sphère ou à la somme connexe de n tores. La classification, cependant, n'est pas encore complète : une classification doit consister en une liste de surfaces deux par deux distinctes (non homéomorphes) telle que toute autre surface est homomorphe à une surface de la liste. La question se pose alors de savoir si les surfaces énumérées précédemment sont distinctes deux par deux. La réponse est oui.

Une solution serait d'utiliser le genre qu'on a défini précédemment. Il y aussi un autre invariant, lié au genre, qui nous permet de faire cela ; voyons-le. Commençons par remarquer que les triangulations que nous avons introduites précédemment ne sont pas uniques : par exemple, en divisant chaque triangle d'une triangulation donnée en deux, on obtient une nouvelle triangulation. Cependant, il existe une quantité associée qui ne dépend que de la surface étudiée et non de la triangulation choisie, c'est à dire, un invariant topologique. Cette quantité, qui trouve son origine dans la formule d'Euler pour les polyèdres, est ce que l'on appelle la *caractéristique d'Euler*, donnée par la formule suivante :

$$\chi(S) = S - A + F,$$

où S est le nombre de sommets, A est le nombre d'arêtes et F est le nombre de faces de la triangulation. Un simple calcul à partir de la figure 11 nous permet d'obtenir que la caractéristique d'Euler de la sphère est 2 et celle du tore est 0.

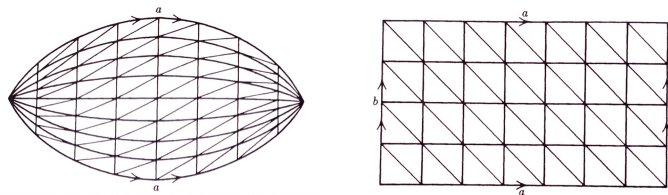


FIGURE 11 – Calcul de la caractéristique d'Euler de la sphère et du tore.

De même, il est facile de montrer que la caractéristique d'Euler de la somme connexe $S_1 \# S_2$ de deux surfaces compactes est

$$\chi(S_1 \# S_2) = \chi(S_1) + \chi(S_2) - 2.$$

En effet, il suffit de retirer un triangle de chacune des surfaces, de les recoller le long des bords et de recompter. Par récurrence, nous pouvons alors calculer la caractéristique d'Euler des surfaces énumérées ci-dessus, ce qui complète la classification :

$$\begin{aligned} \text{Sphère} &\rightsquigarrow \chi = 2 \\ \text{Somme connexe de } n \text{ tores} &\rightsquigarrow \chi = 2 - 2n \end{aligned}$$

2 Variétés différentielles et espace tangent : une révision

2.1 Variétés différentielles

L'environnement sur lequel on va travailler dans la plupart de ce travail sont les variétés. On pourrait dire, en simplifiant beaucoup le concept, qu'une variété est un espace qui ressemble localement à un espace \mathbb{R}^m , c'est-à-dire, si on le regarde « dès très près », on peut observer les mêmes propriétés que si on regarde \mathbb{R}^m de la même façon.



FIGURE 12 – Variété 1-dimensionnel : quand on regarde « dès très près » on observe les propriétés d'un ouvert de \mathbb{R} .

Pour les construire, on « recolle » ensemble des ouverts de \mathbb{R}^m , qu'on a préalablement déformés. La façon dont on les déforme déterminera la classe de la variété. Chacune des « pièces » qui composent la variété est ce qu'on appellera une *carte*.

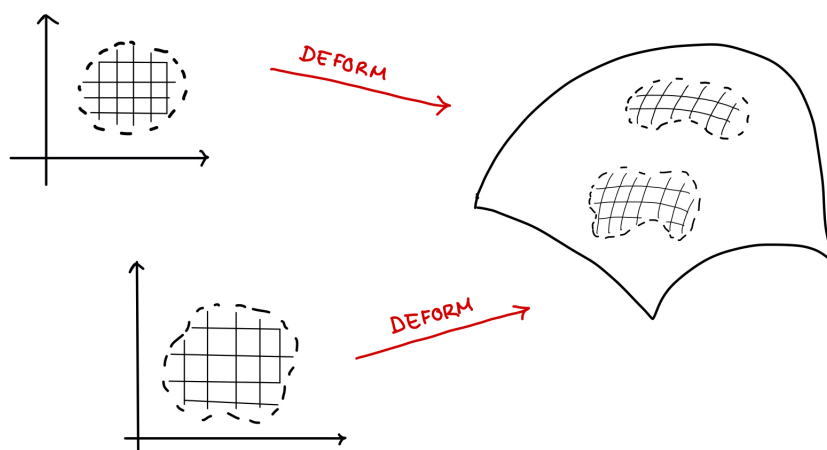


FIGURE 13 – Variété 2-dimensionnel : on les construit en déformant et recollant des ouverts de \mathbb{R}^2 .

Le cas le plus simple de variété est celui des variétés topologiques, qui gardent les propriétés topologiques locales des espaces euclidiens.

Définition 2.1.1. Une *variété topologique de dimension m* est un espace topologique M de Hausdorff et à base dénombrable localement homéomorphe à \mathbb{R}^m , i.e., pour chaque $p \in M$, il existe un voisinage U de p et un homéomorphisme $\varphi : U \rightarrow V$ sur un ouvert V de \mathbb{R}^m .

Si M est une variété topologique et $\varphi : U \rightarrow V$ est un homéomorphisme d'un ouvert $U \subset M$ sur l'ouvert $V \subset \mathbb{R}^n$, on dira que (φ, U) est une *carte*. Une collection de cartes $\mathcal{A} = \{(\varphi_\alpha, U_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ telle que $M = \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$ s'appelle *atlas*. Dans la plupart des cas, on ne mentionnera plus explicitement le domaine U , et on écrira simplement φ pour faire référence à la carte.

Deux cartes $\varphi_\alpha, \varphi_\beta$ telles que $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ étant données, on peut définir l'application $\varphi_{\alpha\beta} := \varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1} : \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \rightarrow \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$ que l'on appellera *application de changement de cartes*.

Il existe beaucoup d'exemples de variétés topologiques. Les plus familiales sont les variétés plongées dans l'espace euclidien : les graphes des fonction continues, les sphères, le tore... Pourtant, il y a d'autres exemples qui sont moins intuitives à cause de l'absence d'un espace ambiant : c'est le cas des espaces projectifs.

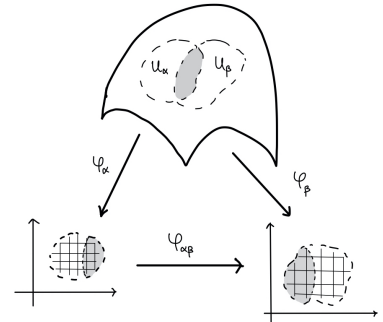


FIGURE 14 – Changement de cartes

Exemple 2.1.2 (Graphe d'une fonction continue). Soient $U \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert et $f : U \rightarrow \mathbb{R}^k$ une application continue. Le *graphe de f* est le sous-ensemble de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k$ défini par

$$\Gamma(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k : x \in U \text{ et } y = f(x)\},$$

avec la topologie de sous-espace. Soit $\pi_1 : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$ la projection sur la première coordonnée et posons $\varphi := \pi_1|_{\Gamma(f)}$. L'application φ est continue, car elle est la restriction d'une application continue, et son inverse est donnée par $\varphi^{-1}(x) = (x, f(x))$, d'où $\Gamma(f)$ est une variété topologique de dimension n . En fait, $\Gamma(f)$ est homéomorphe à U .

Exemple 2.1.3 (Les sphères). Un exemple de variété plongée dans \mathbb{R}^n mais qui n'admet pas de carte globale sont les sphères. En effet, pour chaque $n \geq 2$, on note $\mathbb{S}^{n-1} = \{(x_1, \dots, x_n) : x_1^2 + \dots + x_n^2 = 1\}$. Posons $U_i^+ = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{S}^{n-1} : x_i > 0\}$ et $U_i^- = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{S}^{n-1} : x_i < 0\}$, pour chaque $i : 1, \dots, n$. De même, soit $\varphi_i^\pm : U_i^\pm \rightarrow \mathbb{B}^{n-1}$, où \mathbb{B}^{n-1} est la boule unitaire de \mathbb{R}^{n-1} , l'application définie par

$$\varphi_i^\pm(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n),$$

pour chaque $i = 1, \dots, n$. Cette application est un homéomorphisme d'inverse

$$(\varphi_i^\pm)^{-1}(u_1, \dots, u_{n-1}) = \left(u_1, \dots, u_{i-1}, \pm \sqrt{1 - u_1^2 - \dots - u_{n-1}^2}, u_i, \dots, u_{n-1}\right).$$

Puisque les U_i^\pm recouvrent \mathbb{S}^{n-1} , on obtient que \mathbb{S}^{n-1} est bien une variété topologique.

Exemple 2.1.4 (Les espaces projectifs). L'*espace projective n -dimensionnel*, noté $\mathbb{R}\mathbb{P}^n$, est l'ensemble des droites vectorielles de \mathbb{R}^{n+1} avec la topologie quotient induite par la projection canonique $\pi : \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}\mathbb{P}^n$ qui à chaque point $x \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ associe la droite $[x]$ qu'il engendre.

Pour chaque $i = 1, \dots, n+1$, on considère l'ensemble $\tilde{U}_i = \{(x_1, \dots, x_{n+1}) : x_i \neq 0\} \subseteq \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$, et on pose $U_i = \pi(\tilde{U}_i) \subseteq \mathbb{R}\mathbb{P}^n$. Puisque \tilde{U}_i est un ouvert saturé, U_i est ouvert et l'application $\pi|_{\tilde{U}_i} : \tilde{U}_i \rightarrow U_i$ est une application quotient. On définit l'application $\varphi_i : U_i \rightarrow \mathbb{R}^n$ par

$$\varphi_i[x_1, \dots, x_{n+1}] = \left(\frac{x_1}{x_i}, \dots, \frac{x_{i-1}}{x_i}, \frac{x_{i+1}}{x_i}, \dots, \frac{x_{n+1}}{x_i}\right).$$

Cette application est bien définie car sa valeur reste constante quand on multiplie x par une constante non nulle. Puisque $\varphi_i \circ \pi$ est continue, φ_i est continue par la propriété universelle des quotients. D'ailleurs, φ_i est un homéomorphisme, car son inverse, donnée par

$$\varphi_i^{-1}(u_1, \dots, u_n) = [u_1, \dots, u_{i-1}, 1, u_i, \dots, u_n]$$

est aussi continue. Puisque les U_1, \dots, U_{n+1} recouvrent $\mathbb{R}\mathbb{P}^n$, cela montre que les espaces projectifs sont localement homéomorphes à \mathbb{R}^n . D'ailleurs, ils sont des espaces de Hausdorff, car on peut toujours séparer deux droites de \mathbb{R}^{n+1} en prenant deux cônes disjoints ; et ils sont à base dénombrable, car ils sont des quotients d'un espace topologique à base dénombrable.

La définition de variété topologique qu'on a donnée suffit pour étudier les propriétés topologiques, mais elle ne permet pas de généraliser les notions du calcul différentiel en espaces euclidiens au cas plus général des variétés. Considérons une variété topologique M et une fonction $f : M \rightarrow \mathbb{R}$. Puisque M ressemble localement à \mathbb{R}^m et on sait calculer les dérivées des fonctions définies sur \mathbb{R}^m , on pourrait se demander si on peut faire la même chose sur M . Une façon naturel de le faire serait en prenant une carte φ et en calculant les dérivées de $f \circ \varphi^{-1}$, qui est une représentation en \mathbb{R}^m de la fonction f . Cela pose un problème : la dérivabilité n'est pas invariant par changement de carte. Prenons, par exemple, $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in \mathbb{R} \text{ et } y = x^2\}$, qui est le graphe d'une fonction continue. Comme on l'a vu dans l'exemple 2.1.2, il s'agit d'une variété topologique, une carte globale étant donnée par l'application $\varphi(x, y) = x$. Considérons, de même, la fonction $f(x, y) = x$ définie sur M . La fonction $f \circ \varphi^{-1}$ est clairement dérivable. En particulier, elle est dérivable à l'origine. Pourtant, on pourrait avoir également pris la carte $\psi(x, y) = x^3$, définie sur M toute entière, de sorte que $f \circ \psi^{-1}$ n'admet pas de dérivé en $x = 0$. Ceci est dû au fait que le changement de carte $\varphi \circ \psi^{-1}$ n'est pas différentiable à l'origine, donc on perd la dérivabilité au passage d'une carte à l'autre. Ceci justifie les définitions suivantes :

Définition 2.1.5. Un atlas d'une variété topologique M est dit *différentiel* si, pour toutes $\varphi_\alpha, \varphi_\beta \in \mathcal{A}$, le changement de cartes $\varphi_{\alpha\beta}$ est une application de classe C^∞ .

On remarque que, d'après la définition de changement de cartes qu'on a donné,

$$\varphi_{\alpha\alpha} = \text{Id}_{U_\alpha} \quad \text{et} \quad \varphi_{\alpha\beta} \circ \varphi_{\gamma\alpha} = \varphi_{\gamma\beta},$$

d'où $\varphi_{\alpha\beta}^{-1} = \varphi_{\beta\alpha}$ et, par conséquent, les changements de cartes possèdent une inverse différentiable, de sorte qu'ils sont des difféomorphismes. Ceci a une conséquence immédiat très important : la dimension de chaque composante connexe d'une variété différentielle est bien définie. En effet, si on prend deux cartes (U, φ) et (V, ψ) , avec $\varphi(U) \subset \mathbb{R}^m$ et $\psi(V) \subset \mathbb{R}^n$, la différentielle du changement de cartes est un isomorphisme linéaire entre \mathbb{R}^m et \mathbb{R}^n , ce qui implique que $m = n$. Le même résultat est vrai quand l'atlas n'est pas différentiel ; pourtant, la preuve est bien plus compliqué : c'est une conséquence du théorème de l'invariance du domaine.

Si on considère un atlas différentiel \mathcal{A} d'une variété M , l'atlas $\mathcal{M} = \mathcal{M}(\mathcal{A})$ qui contient toutes les cartes dont leur composition avec les cartes de \mathcal{A} est différentiable est aussi un atlas différentiel. Par construction, cet atlas est maximale au sens de la différentiabilité des changements des cartes et on l'appellera *atlas maximal engendré par \mathcal{A}* .

Définition 2.1.6. Une *structure différentielle* d'une variété topologique M est un atlas différentiel maximal \mathcal{A} . La donnée (M, \mathcal{A}) d'une variété topologique M équipée d'un tel atlas est une *variété différentielle*.

Exemple 2.1.7. Des calculs simples démontrent que les cartes définies dans les exemples 2.1.2, 2.1.3 et 2.1.4 munissent le graphe d'une fonction continue, les sphères et les espaces projectifs réels d'une structure différentielle.

Le fait que toute variété est à base dénombrable nous permet toujours de choisir un atlas dénombrable, ce qui sera utile dans la suite :

Proposition 2.1.8. Toute variété différentielle M admet un atlas dénombrable.

Démonstration. Soit $\mathcal{B} = \{V_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ une base dénombrable de voisinages de M , qui existe car M est à base dénombrable. Soit $\{(\varphi_\alpha, U_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ un atlas de M . On pose

$$K = \{n \in \mathbb{N} \mid \exists \alpha \in A, V_n \subset U_\alpha\},$$

qui est dénombrable, et choisissons, pour chaque $k \in K$, un $\alpha_k \in A$ tel que $V_k \subset U_{\alpha_k}$. Soit $x \in M$, alors il existe $\alpha \in A$ tel que $x \in U_\alpha$. D'ailleurs, puisque \mathcal{B} est une base, il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $x \in V_k \subset U_\alpha$. Mais, alors, $x \in U_{\alpha_k}$ et $\{U_{\alpha_k}\}_{k \in K}$ est un recouvrement de M , d'où $\{(\varphi_{\alpha_k}, U_{\alpha_k})\}_{k \in K}$ est un atlas dénombrable de M . ■

Les changements de carte étant différentiables, la notion de différentiabilité peut se généraliser d'une façon consistante au cas des applications entre variétés :

Définition 2.1.9. Une application continue $f : M \rightarrow N$ entre deux variétés différentielles est dite *différentiable en un point* $p \in M$ s'il existe des cartes $\varphi : U \rightarrow V$ de M et $\psi : U' \rightarrow V'$ de N telles que $p \in U$, $f(p) \in U'$ et que $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ est différentiable en $\varphi(p) \in V$. On dira que f est *différentiable* (ou *lisse*) si elle l'est en tout point $p \in M$.

On remarque que, dans la définition précédente, on peut substituer « existe » par « par tout » grâce à la structure différentielle de l'atlas.

Définition 2.1.10. Un *difféomorphisme* est une application différentiable et inversible entre variétés dont l'inverse est aussi différentiable.

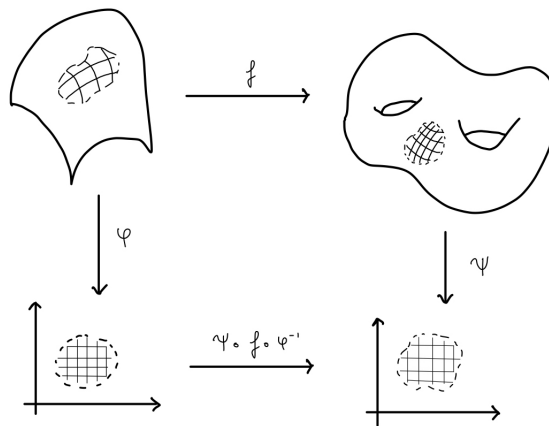


FIGURE 15 – Applications différentiables entre variétés.

Enfin, on introduit la notion de sous-variété : il s'agit des parties d'une variété M qui héritent une structure différentiable de celle de M . Plus précisément :

Définition 2.1.11. Une partie $N \subset M$ d'une variété $(k+n)$ -dimensionnel M s'appelle *sous-variété différentiable de dimension n de M* si, pour tout $p \in N$, il existe une carte $\varphi : U \rightarrow V \subset \mathbb{R}^{n+k} \cong \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k$ tel que $\varphi(U \cap N) = V \cap (\mathbb{R}^n \times \{0\})$. On dit que k est la *codimension* de N .

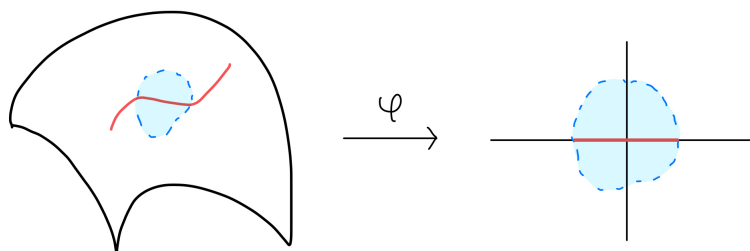


FIGURE 16 – Sous-variété 1-dimensionnelle d'une variété de dimension 2.

2.2 L'espace tangent

L'une des plus importantes techniques du calcul dans les espaces euclidiens est l'approximation linéaire : on peut approximer une fonction à une variable par la droite tangente, une courbe de \mathbb{R}^n par son vecteur vitesse, une surface en \mathbb{R}^3 par son plan tangent... On remarque qu'il y a une notion sous-jacente dans tous ces exemples : l'espace tangent. Afin de doter de consistance le calcul en variétés, on généralise cette notion au cas de variétés abstraites.

On commence par donner une intuition géométrique de l'espace tangent, avant de faire une construction formelle. Le cas le plus simple est celui de \mathbb{R}^n . Pour chaque point $a \in \mathbb{R}^n$, on peut définir l'*espace tangent géométrique* à \mathbb{R}^n en a , qu'on note \mathbb{R}_a^n , comme l'ensemble $\{a\} \times \mathbb{R}^n = \{(a, v) : v \in \mathbb{R}^n\}$. Autrement dit, on associe à chaque point $a \in \mathbb{R}^n$ une copie de l'espace ambiant \mathbb{R}^n . On note v_a l'élément (a, v) pour simplifier et on remarque que cette espace a une structure naturelle d'espace vectorielle, héritée de celle de \mathbb{R}^n :

$$v_a + w_a = (v + w)_a, \quad \lambda \cdot v_a = (\lambda \cdot v)_a.$$

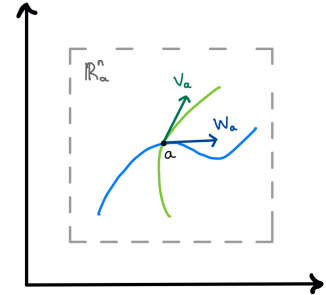


FIGURE 17 – Espace tangent \mathbb{R}_a^n .

De cette façon, on peut imaginer l'espace tangent géométrique à un point $a \in \mathbb{R}^n$ comme l'ensemble de toutes les flèches dont l'origine est le point a . On peut le voir aussi comme l'espace de tous les vecteurs vitesse des courbes qui passent par a en temps $t = 0$.

Considérons maintenant la sphère $\mathbb{S}^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ et un point $p \in \mathbb{S}^{n-1}$. Tant que point de \mathbb{R}^n , on peut associer à p un espace tangent géométrique \mathbb{R}_p^n comme celui qu'on a décrit dans le paragraphe précédent. L'espace tangent à \mathbb{S}^{n-1} est, intuitivement, l'ensemble des flèches de \mathbb{R}_p^n qui sont perpendiculaires à la surface de la sphère. Puisque \mathbb{R}_p^n hérite le produit scalaire de \mathbb{R}^n , on peut décrire alors l'*espace tangent géométrique* à \mathbb{S}^{n-1} comme le sous-espace de \mathbb{R}_p^n orthogonal au vecteur rayon de la sphère par p . Comme précédemment, on peut interpréter ces vecteurs comme les vecteurs vitesse des courbes sur la sphère : de manière intuitive, ces vecteurs indiquent la direction dans laquelle une particule qui se déplace sur la sphère serait jetée si elle l'abandonne subitement. Cette dernière interprétation est également valide pour une variété quelconque plongée dans \mathbb{R}^n , comme la figure suivante évoque.

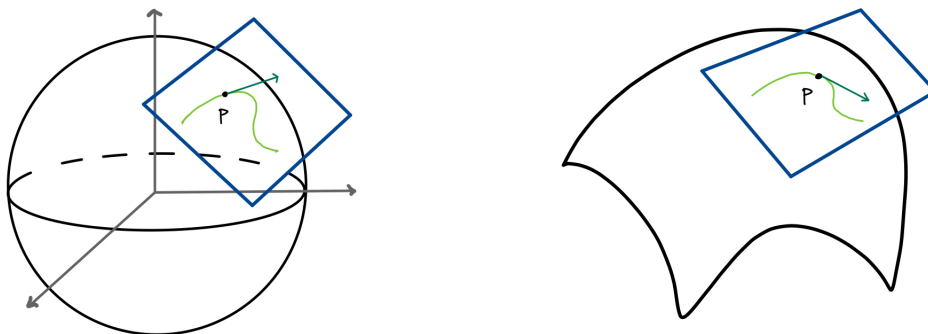


FIGURE 18 – Espace tangent à la sphère et à une variété plongée dans l'espace euclidien.

On déduit de ce qu'on a dit précédemment qu'on peut associer un unique vecteur tangent à chaque courbe qui passe par p en temps $t = 0$: son vecteur vitesse. Pourtant, ce n'est pas possible de construire une correspondance univoque comme celle-ci dans l'autre sens : pour chaque vecteur tangent v_p en p , il existe plusieurs courbes dont la vitesse est v_p . D'abord, on remarque que si deux courbes coïncident autour de p , ils ont le même vecteur vitesse, comme le première dessin de la figure 19 montre. On peut, donc, regrouper les courbes qui coïncident au voisinage de p , car elles

ont le même vecteur tangent associé. Cependant, cela ne suffit pas : on voit dans le deuxième dessin qu'il y a encore des familles différentes de courbes dont le vecteur tangent est le même. On fera appel aux fonctions différentiables pour résoudre cette difficulté.



FIGURE 19 – Correspondance entre les courbes sur une variété et l'espace tangent.

En effet, si $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction différentiable sur une variété plongée dans un espace euclidien, on peut utiliser les vecteurs tangents et les courbes pour calculer ses dérivées directionnelles. Ceci revient à l'idée d'estimation linéaire dont on a parlé au début de la sous-section. Il s'agit d'estimer les variations de f quand « on se déplace » sur la variété dans la direction indiquée par un vecteur v_p . On considère pour cela une courbe $c : I \rightarrow M$ telle que $c(0) = p$. La fonction $f \circ c$ est de variable réelle et à valeurs réelles, donc on peut calculer sa dérivée $(f \circ c)'(0)$. On remarque que deux familles de courbes \bar{c}_1 et \bar{c}_2 ayant comme vitesse le même vecteur tangent donnent la même valeur pour la dérivée précédente pour toute fonction f , même si les deux familles ne coïncident pas au voisinage de p . En les identifiant, on obtient une correspondance biunivoque entre chaque vecteur tangent et une certaine famille de courbes. Puisque on peut considérer des courbes même quand on travaille avec des variétés abstraites, on pourra donner une définition générale d'espace tangent d'une variété en partant de cette idée.

Soient M, N des variétés différentielles et $p \in M$. On considère l'ensemble

$$\{f : U \rightarrow N \mid U \subset M \text{ ouvert, } p \in U\}$$

des fonctions différentielles à valeurs réelles définies au voisinage ouvert de p . Dans cet ensemble, on peut considérer la relation suivante, qui est une relation d'équivalence :

$$f \sim g \Leftrightarrow \text{il existe un voisinage } V \text{ de } p \text{ tel que } f|_V = g|_V.$$

Définition 2.2.1. On appelle *germe* en $p \in M$ d'une application $f : M \rightarrow N$ à chaque classe d'équivalence de la relation précédente.

On note $\bar{f} : (M, p) \rightarrow (N, f(p))$ (ou simplement $f : (M, p) \rightarrow N$) la classe d'équivalence de f et $\mathcal{E}(p)$ l'ensemble de tous les germes en p des fonctions réelles $M \rightarrow \mathbb{R}$, qui a une structure naturelle d'algèbre réelle héritée de celle de \mathbb{R} .

Définition 2.2.2 (Espace tangent). L'*espace tangent* à une variété différentielle M en un point $p \in M$ est l'espace des germes des courbes $\bar{c} : (\mathbb{R}, 0) \rightarrow (M, p)$ quotienté par la relation d'équivalence

$$\bar{c}_1 \sim \bar{c}_2 \Leftrightarrow \text{pour tout } \bar{f} \in \mathcal{E}(p), (\bar{f} \circ \bar{c}_1)'(0) = (\bar{f} \circ \bar{c}_2)'(0).$$

Cette définition formalise les constructions qu'on a introduites précédemment et les généralise au cas général des variétés qui ne sont pas nécessairement plongées dans \mathbb{R}^m . Cependant, la structure d'espace vectorielle de l'espace tangent n'est pas encore évidente. On donne dans la suite une définition équivalente qui éclaire ce point.

On commence par remarquer que, si $f, g : M \rightarrow \mathbb{R}$ sont des fonctions définies sur une variété, la dérivée de la fonction produit fg le long d'une courbe $c : I \rightarrow M$, avec $c(0) = p$, vérifie l'identité

$$(fg \circ c)'(0) = (f \circ c)'(0) \cdot g(p) + f(p) \cdot (g \circ c)'(0).$$

Ceci nous permet d'interpréter les vecteurs tangents comme des objets construits sur une variété qui à chaque fonction différentiable associent une valeur réelle et qui vérifient la formule de Leibniz. Plus précisément, ces objets agissent sur les germes des fonctions différentiables, car si deux fonctions coïncident au voisinage d'un point, elles ont les mêmes dérivées directionnelles. C'est ce qu'on appelle une *dérivation*.

Définition 2.2.3. Une *dérivation* en $\mathcal{E}(p)$ est une application linéaire $X : \mathcal{E}(p) \rightarrow \mathbb{R}$ qui vérifie la règle

$$X(\bar{f}\bar{g}) = \bar{g}(p)X(\bar{f}) + \bar{f}(p)X(\bar{g}).$$

On peut munir l'ensemble des dérivations de $\mathcal{E}(p)$ d'une structure d'espace vectoriel à partir de celle de \mathbb{R} .

Chaque élément de l'espace tangent est ainsi une dérivation en $\mathcal{E}(p)$. On va voir que cette correspondance est bijective et qu'elle nous permet de munir d'une structure d'espace vectoriel l'espace tangent tel qu'on l'a défini. En particulier, cela nous permettra de donner la définition équivalente suivante d'espace tangent :

Définition 2.2.4 (Espace tangent). L'*espace tangent* à un variété différentielle M en $p \in M$ est (isomorphe à) le \mathbb{R} -espace vectoriel T_pM des dérivations de $\mathcal{E}(p)$.

Soient M, N deux variétés différentielles et prenons $p \in M$ et $q \in N$. Chaque germe différentiable $\bar{f} : (M, p) \rightarrow (N, q)$ définit un homomorphisme d'algèbres

$$f^* : \mathcal{E}(q) \rightarrow \mathcal{E}(p) : \bar{g} \mapsto \bar{g} \circ \bar{f}.$$

Cette application est bien définie et nous permet d'obtenir une application linéaire entre les espaces T_pM et T_qN de la façon suivante :

$$\begin{aligned} T_p f : T_p M &\rightarrow T_q N \\ X &\mapsto X \circ f^* \end{aligned} .$$

On appelle $T_p f$ la *différentielle de f en p* .

Notons \mathcal{E}_n l'ensemble des germes $(\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow \mathbb{R}$. Pour chaque carte φ de M en p telle que $\varphi(p) = 0$, l'application $\varphi^* : \mathcal{E}_n \rightarrow \mathcal{E}(p)$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels et, en conséquence, $T_p \varphi : T_p M \rightarrow T_0 \mathbb{R}^n$ l'est aussi. On utilisera ce fait pour montrer que la dimension de $T_p M$ est n .

Parmi les dérivations de \mathcal{E}_n on trouve les dérivées partielles

$$\frac{\partial}{\partial x_k} : \mathcal{E}_n \rightarrow \mathbb{R} : \bar{f} \mapsto \frac{\partial f}{\partial x_k}(0).$$

On remarque que la définition précédente est indépendante du choix de représentant, car les fonctions de la même classe s'identifient au voisinage de 0. On va montrer que, en fait, elles forment une base de $T_0 \mathbb{R}^n$, ce qui montrera que la dimension de $T_p M$ est n , d'après la remarque qui précède.

Lemme 2.2.5. Soient U une partie ouverte et convexe de \mathbb{R}^n qui contient l'origine et $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction différentiable. Alors, il existe $f_1, \dots, f_n : U \rightarrow \mathbb{R}$ différentiables telles que

$$f(x) = f(0) + \sum_{k=1}^n x_k \cdot f_k(x),$$

pour tout $x \in U$.

Démonstration. Le théorème fondamental du calcul et le « chain-rule » nous donnent

$$f(x) - f(0) = \int_0^1 \frac{d}{dt} f(tx) dt = \sum_{k=1}^n x_k \int_0^1 D_k f(tx) dt.$$

■

Corollaire 2.2.6. Les dérivées partielles forment une base de l'espace vectoriel $T_0\mathbb{R}^n$ des dérivations de \mathcal{E}_n .

Démonstration. Soient $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ tels que

$$\sum_{k=1}^n a_k \frac{\partial}{\partial x_k} = 0.$$

En évaluant en chacune des projections \bar{x}_m , on obtient

$$a_m = \sum_{k=1}^n a_k \frac{\partial x_m}{\partial x_k} = 0,$$

pour chaque $m \in \{1, \dots, n\}$, d'où la famille est libre.

Soit maintenant $X \in T_0\mathbb{R}^n$ et posons $a_m := X(\bar{x}_m)$. Par construction, la dérivation

$$Y := X - \sum_{k=1}^n a_k \frac{\partial}{\partial x_k}$$

vérifie $Y(\bar{x}_m) = 0$, pour chaque $1 \leq m \leq n$. D'ailleurs, pour chaque $\bar{f} \in \mathcal{E}_n$ on peut écrire, d'après le lemme précédent,

$$\bar{f} = f(0) + \sum_{k=1}^n \bar{x}_k \cdot \bar{f}_k,$$

de sorte que

$$Y(\bar{f}) = Y(f(0)) + \sum_{k=1}^n Y(\bar{x}_k) \cdot f_k(0) = Y(f(0)).$$

Or, Y est une dérivation, donc

$$Y(1) = Y(1 \cdot 1) = Y(1) + Y(1),$$

c-à-d, $Y(1) = 0$. On en déduit, par linéarité, que $Y(f(0)) = 0$, de sorte que $Y \equiv 0$ et, en conséquence,

$$X = \sum_{k=1}^n a_k \frac{\partial}{\partial x_k},$$

ce qui prouve que la famille est génératrice. ■

Puisque $T_0\mathbb{R}^n$ et $T_p M$ sont isomorphes via l'application $T_0\varphi^{-1}$, une base de $T_p M$ est donnée par l'image par $T_0\varphi^{-1}$ des dérivées partielles. En particulier, pour chaque $\bar{f} : M \rightarrow \mathbb{R}$,

$$T_0\varphi^{-1} \left(\frac{\partial}{\partial x_k} \right) (\bar{f}) = \frac{\partial (f \circ \varphi^{-1})}{\partial x_k} (0).$$

Dorénavant, pour chaque carte (φ, U) et chaque $p \in U$, on notera

$$D_k^\varphi := T_{\varphi(p)}\varphi^{-1} \left(\frac{\partial}{\partial x_k} \right),$$

de sorte que si $\bar{f} : M \rightarrow \mathbb{R}$ est un germe différentiable, on a

$$D_k^{p,\varphi}(\bar{f}) = \frac{\partial(f \circ \varphi^{-1})}{\partial x_k}(\varphi(p)).$$

De même, on pose $D_k^\varphi(\bar{f}) : U \rightarrow \mathbb{R}$ l'application $p \mapsto D_k^{p,\varphi}(\bar{f})$.

Nous sommes déjà prêts à établir une bijection entre l'espace tangent tel qu'on l'a introduit dans la définition 2.2.2 et l'espace $T_p M$ des dérivations de $\mathcal{E}(p)$. On considère l'application $\bar{c} \mapsto X_{\bar{c}}$ qui à chaque germe \bar{c} associe la dérivation $X_{\bar{c}}$ définie par la formule $X_{\bar{c}}(f) := (f \circ \bar{c})'(0)$. Cette application est surjective : une carte de M au voisinage de p étant donné, on peut écrire chaque $Y \in T_p M$ sous la forme

$$Y = \sum_{k=1}^m a_k D_k^{p,\varphi},$$

où $a_1, \dots, a_m \in \mathbb{R}$, de manière que la courbe donnée par l'expression en coordonnées $\varphi \circ c(t) = (ta_1, \dots, ta_m)$ vérifie $X_{\bar{c}} = Y$. D'ailleurs, la correspondance qu'on vient d'établir est constante sur les germes des courbes appartenant au même élément de l'espace tangent (par construction), donc elle induit une bijection entre l'espace tangent et l'espace des dérivations de $\mathcal{E}(p)$. Cette bijection munit elle-même d'une structure d'espace vectoriel l'espace de la définition 2.2.2.

On finit cette sous-section en donnant une expression en coordonnées pour l'application tangent.

Définition 2.2.7. On appelle *matrice jacobienne* de f en p la matrice de l'application $T_p f$ dans deux bases des espaces tangents.

Calculons la matrice jacobienne dans le cas particulier où les bases sont données par les dérivées partielles. Considérons un germe $\bar{f} : (M, p) \rightarrow (N, q)$ et soient (φ, \mathbb{R}^n) et (ψ, \mathbb{R}^m) deux cartes de M et N en p et q , respectivement. Comme précédemment, on suppose $\bar{\varphi}(p) = 0$ et $\bar{\psi}(q) = 0$ pour simplicité. Posons $\bar{F} := \bar{\psi} \circ \bar{f} \circ \bar{\varphi}^{-1}$ l'expression de \bar{f} en coordonnées.

$$\begin{array}{ccc} (M, p) & \xrightarrow{\bar{f}} & (N, q) \\ \downarrow \bar{\varphi} & & \downarrow \bar{\psi} \\ (\mathbb{R}^n, 0) & \xrightarrow{\bar{F}} & (\mathbb{R}^m, 0) \end{array}$$

On note (x_1, \dots, x_n) et (y_1, \dots, y_m) les coordonnées en \mathbb{R}^n et \mathbb{R}^m , respectivement, et on écrit $\bar{F} = (\bar{F}_1, \dots, \bar{F}_m)$. Alors, pour chaque $\bar{g} : (N, q) \rightarrow \mathbb{R}$ on a

$$\begin{aligned} T_p f (D_k^{p,\varphi}) (\bar{g}) &= D_k^{p,\varphi} (\bar{g} \circ \bar{f}) = \frac{\partial(g \circ f \circ \varphi^{-1})}{\partial x_k}(0) \\ &= \frac{\partial(g \circ \psi^{-1} \circ \psi \circ f \circ \varphi^{-1})}{\partial x_k}(0) \\ &= \sum_{j=1}^m \frac{\partial F_j}{\partial x_k}(0) \frac{\partial(g \circ \psi^{-1})}{\partial y_j}(0) = \sum_{j=1}^m \frac{\partial F_j}{\partial x_k}(0) D_j^{q,\psi}(\bar{g}), \end{aligned}$$

d'où

$$T_p (D_k^{p,\varphi}) = \sum_{j=1}^m \frac{\partial F_j}{\partial x_k}(0) D_j^{q,\psi}.$$

Ceci prouve que la matrice jacobienne de f dans les bases des dérivées partielles associées à deux cartes φ et ψ coïncide avec la matrice jacobienne de son expression en coordonnées F .

2.3 La différentielle : valeurs critiques et valeurs régulières

Dans cette sous-section, on continue l'étude de la différentielle. En particulier, on définit les concepts de point critique et de valeurs critiques, qui seront essentiels dans la suite.

Soient M, N, L des variétés différentielles et soient $f : M \rightarrow N$ et $g : N \rightarrow L$ des applications différentiables. Prenons $p \in M$ et posons $q = f(p)$ et $r = g(q)$. Pour chaque dérivation $X \in T_q N$ et chaque germe $\alpha : (L, r) \rightarrow \mathbb{R}$ on a

$$T_q g(X)(\alpha) = (X \circ g^*)(\alpha) = X(\alpha \circ g).$$

Mais alors,

$$T_p(g \circ f)(Y)(\alpha) = Y(\alpha \circ g \circ f) = T_p f(Y)(\alpha \circ g) = (T_q g \circ T_p f)(Y)(\alpha),$$

c-à-d, la différentielle est un foncteur covariant de la catégorie des variétés différentielles avec les germes différentiels en la catégorie des espaces vectoriels et les applications linéaires, ce qui nous permet prouver de façon immédiat le bien connu théorème de la fonction inverse, que l'on énonce de la façon suivante :

Théorème 2.3.1 (d'inversion locale). Un germe différentiable $\bar{f} : (M, p) \rightarrow (N, q)$ est inversible si, et seulement si, sa différentielle est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

Remarque 2.3.2. Un germe $\bar{f} : (M, p) \rightarrow (N, q)$ est inversible s'il existe $\bar{g} : (N, q) \rightarrow (M, p)$ tel que $\bar{f} \circ \bar{g} = \text{id}_N$ et $\bar{g} \circ \bar{f} = \text{id}_M$. Par définition de germe, ceci équivaut à dire qu'il existe des voisinages ouverts U et V de p et q , respectivement, tels que

$$(f \circ g)|_V = \text{id}_N \quad \text{et} \quad (g \circ f)|_U = \text{id}_M,$$

c-à-d, les représentants de las classes d'équivalence sont de difféomorphismes locales.

Remarque 2.3.3. Soient $\bar{f} : (M, p) \rightarrow (N, q)$ un germe différentiable et deux cartes $\varphi : (M, p) \rightarrow (\mathbb{R}^m, 0)$ et $\psi : (N, q) \rightarrow (\mathbb{R}^n, 0)$. La propriété fonctorielle de la différentielle nous permet d'écrire

$$T_0(\psi \circ f \circ \varphi^{-1}) = T_q \psi \circ T_p f \circ T_0 \varphi^{-1}.$$

Or, on a déjà vu que la différentielle d'une carte est un isomorphisme d'espaces vectoriels, d'où $T_0(\psi \circ f \circ \varphi^{-1})$ est un isomorphisme si, et seulement si, $T_0 f$ l'est.

Démonstration (du théorème). La condition nécessaire découle de la propriété fonctorielle que on a remarqué précédemment. Pour démontrer la condition suffisante, on prend deux cartes $\varphi : (M, p) \rightarrow (\mathbb{R}^m, 0)$ et $\psi : (N, q) \rightarrow (\mathbb{R}^n, 0)$ de sorte que \bar{f} induit le germe

$$\bar{g} := \bar{\psi} \circ \bar{f} \circ \bar{\varphi}^{-1} : (\mathbb{R}^m, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^n, 0).$$

D'après la remarque précédente, si $T_p f$ est un isomorphisme, alors $T_0 g$ l'est aussi, donc chaque représentant g de \bar{g} est un difféomorphisme local. On peut appliquer maintenant le théorème d'inversion locale du calcul différentiel pour obtenir que \bar{g} est un germe inversible et, en conséquence, \bar{f} aussi. ■

Définition 2.3.4. On définit le *rang* d'une application différentiable $f : M \rightarrow N$ en $p \in M$ (ou le rang de son germe) comme la valeur $\text{rg}_p f := \text{rg}_p T_p f$.

Définition 2.3.5. Une application différentiable $f : M \rightarrow N$ entre deux variétés s'appelle *submersion* si, pour tout $p \in M$, $\text{rg}_p f = \dim N$ et elle s'appelle *immersion* si, pour tout $p \in M$, $\text{rg}_p f = \dim M$.

Définition 2.3.6. Soient $f : M \rightarrow N$ une application différentiable entre deux variétés, $p \in M$ et $q = f(p)$. On dit que p est un *point régulier* si $T_p f$ est surjective ; dans le cas contraire, on dit que p est un *point critique*. De la même façon, on dira que q est une *valeur régulière* si chaque point de $f^{-1}(q)$ est régulier et on dira que q est une *valeur critique* sinon.

2.4 Fonctions plateaux et partitions de l'unité

On introduit dans cette sous-section les fonctions plateaux et les partitions de l'unité. Ces objets sont d'une grande utilité quand on travaille avec des variétés différentielles, car ils permettent d'étendre des propriétés ou constructions locales à toute la variété. La façon dont on les utilisera souvent consiste à donner ces constructions (fonctions, champs de vecteurs...) localement en utilisant des coordonnées puis utiliser les fonctions plateaux et les partitions de l'unité pour étendre la définition hors du domaine de la carte ou pour faire de recollements différentiables dans les régions d'intersection de deux cartes. On commence par définir ce qui est une fonction plateau :

Définition 2.4.1. On dit qu'une fonction lisse $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ est une *fonction plateau* s'il existe des ouverts non-vides U, V tels que (i) $\overline{U} \subset V$, (ii) $f(x) = 1$ pour tout $x \in U$ et (iii) $\text{supp}(f) \subset V$.

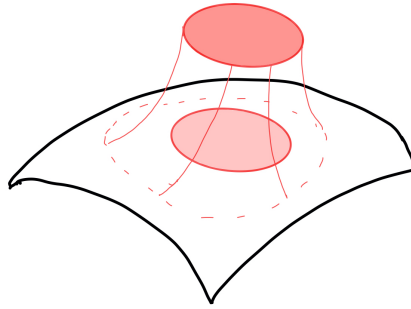


FIGURE 20 – Représentation d'une fonction plateau sur une variété.

Ce n'est pas évident qu'une telle fonction existe toujours sur une variété quelconque. La proposition suivante démontre que c'est le cas quand on travaille avec des boules dans \mathbb{R}^m .

Proposition 2.4.2. Si U et V sont deux boules de même centre dans \mathbb{R}^m avec $\overline{U} \subset V$, alors il existe une fonction plateau égale à 1 sur U , à support dans V .

Démonstration. On considère la fonction

$$f_a : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ t \mapsto \begin{cases} e^{\frac{1}{t^2 - a^2}}, & \text{si } |t| < a, \\ 0, & \text{si } |t| > a, \end{cases}$$

que l'on peut vérifier aisément que c'est une fonction lisse. On définit

$$g_a : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ t \mapsto \frac{\int_{-\infty}^t f_a(s) ds}{\int_{-\infty}^{+\infty} f_a(s) ds}.$$

Il s'agit d'une fonction différentiable qui vaut 0 si $t \leq -a$ et 1 si $t \geq a$. Enfin, l'application $x \mapsto g_a(b - \|x\|^2)$, avec $b \geq a$, est une fonction lisse, vaut 0 si $\|x\|^2 > a+b$ et vaut 1 si $\|x\|^2 < b-a$. On a construit ainsi une fonction plateau qui vaut 1 sur $B(0, \sqrt{b-a})$ et à support dans $B(0, \sqrt{a+b})$.

En choisissant a et b de manière adéquate et en faisant une translation si nécessaire, on obtient le résultat.

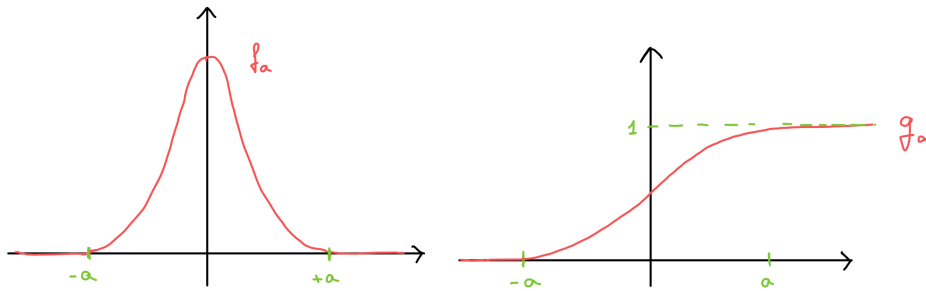


FIGURE 21 – Graphique des fonctions f_a et g_a .

■

En introduisant des cartes, la proposition précédente nous permet de construire des fonctions plateau sur une variété différentielle quelconque :

Corollaire 2.4.3. Soient V un ouvert d'une variété M et $p \in V$. Alors, il existe un ouvert U avec $p \in U$ et $\bar{U} \subset V$ et une fonction plateau égale à 1 sur U et à support dans V .

Démonstration. Soit (W, φ) une carte de M avec $p \in W$, $W \subset V$ et $\varphi(p) = 0$. On peut alors choisir r_1 et r_2 tels que $\overline{B(0, r_1)} \subset B(0, r_2) \subset \overline{B(0, r_2)} \subset \varphi(W)$ et une fonction plateau $g : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ qui vaut 1 sur $\overline{B(0, r_1)}$ et à support dans $B(0, r_2)$. Mais, alors, la fonction $g \circ \varphi : W \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction lisse qui vaut 1 sur $\varphi^{-1}(B(0, r_1))$ et qui est nulle hors du compact $\varphi^{-1}(\overline{B(0, r_2)}) \subset W$. On peut donc la prolonger par 0 sur $M \setminus W$. La fonction différentiable qu'on obtient est la fonction recherchée. ■

Corollaire 2.4.4. Soit K un compact d'une variété M et V un ouvert de M avec $K \subset V$. Alors, il existe une fonction plateau qui vaut 1 sur K , à support dans V .

Démonstration. D'après le corollaire précédent, pour tout point $x \in K$, on a une fonction plateau f_x qui vaut 1 sur un voisinage U_x de x et à support dans V . Puisque K est compact, on peut le recouvrir avec une quantité finie d'ouverts de cette forme, U_{x_1}, \dots, U_{x_n} . Alors, la fonction

$$f = 1 - \prod_{i=1}^n (1 - f_{x_i})$$

vérifie les propriétés de l'énoncé. ■

On étudie maintenant les partitions de l'unité. Il s'agit de construire une collection de fonctions permettant de recoller différentiablement des objets (fonctions, champs de vecteurs...) qui sont définis localement sur les ouverts d'un recouvrement de la variété.

Définition 2.4.5. Soit M un espace topologique et $\mathcal{U} = \{X_\alpha\}_{\alpha \in A}$ un recouvrement par ouverts de M . Une *partition de l'unité subordonnée à \mathcal{U}* est une collection de fonctions $\{\psi_\alpha : M \rightarrow \mathbb{R}\}_{\alpha \in A}$ vérifiant les propriétés suivantes :

1. $0 \leq \psi_\alpha(x) \leq 1$, pour tous $\alpha \in A$ et $x \in M$;
2. $\text{supp}(\psi_\alpha) \subset X_\alpha$;

3. la famille $\{\text{supp}(\psi_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ est localement finie ;
4. $\sum_{\alpha \in A} \psi_\alpha(x) = 1$, pour tout $x \in M$.

Si M est une variété différentielle, on dira qu'une partition de l'unité est *différentiable* si chaque fonction ψ_α l'est.

Une propriété cruciale des variétés pour la construction d'une telle famille de fonctions est la *paracompacité*. Une collection \mathcal{U} de parties d'un espace topologique X quelconque est dite *localement finie* si chaque point de X a un voisinage intersectant au maximum un nombre fini d'éléments de \mathcal{U} . Un recouvrement ouvert \mathcal{U} d'un espace topologique X étant donné, on dit que \mathcal{V} est un *raffinement* de \mathcal{U} si, pour chaque $V \in \mathcal{V}$, il existe un $U \in \mathcal{U}$ tel que $V \subset U$. On dit que X est *paracompact* si chaque recouvrement admet un raffinement localement fini.

Les variétés topologiques et, en particulier, les variétés différentielles, sont paracompactes. Comme on va prouver, cette propriété découle de la compacité locale des variétés et du fait qu'elles sont des espaces topologiques à base dénombrable. En fait, la paracompacité est une des raisons pour lesquelles on inclut cette dernière propriété dans la définition de variété topologique.

Lemme 2.4.6. Toute variété topologique admet un recouvrement dénombrable et localement fini par ouverts précompacts (c'est-à-dire, dont l'adhérence est un compact).

Démonstration. On construit d'abord un recouvrement dénombrable par ouverts précompacts de M . Pour cela, prenons un atlas dénombrable $\mathcal{A} = \{(\varphi_k, U_k)\}_{k \in \mathbb{N}}$ de M . Pour chaque $k \in \mathbb{N}$, on considère la famille \mathcal{B}_k de boules $B(x, r)$ avec r rationnel, x de coordonnées rationnelles et $\overline{B(x, r)} \subset \varphi_k(U_k)$. Les preimages de ces boules par les cartes correspondantes forment le recouvrement recherché, qu'on écrit $\mathcal{B} = \{B_j\}_{j \in \mathbb{N}}$. À partir de ce recouvrement dénombrable, on peut construire un autre, $\{U_j\}_{j \in \mathbb{N}}$, vérifiant les conditions suivantes :

1. U_j est un ouvert précompact de M ;
2. $\overline{U_j} \subset U_{j+1}$, pour $j \geq 2$;
3. $B_j \subset U_j$.

On le fait par récurrence. On suppose construit U_j vérifiant les conditions 1 - 3. Alors, $\overline{U_j}$ est compact, donc on peut le couvrir par un nombre fini d'éléments de \mathcal{B} , disons

$$\overline{U_j} \subset B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_{m_j}$$

Il suffit de prendre $U_{j+1} = B_1 \cup \dots \cup B_{m_j}$ pour obtenir un nouveau ouvert vérifiant les conditions 1 et 2. D'ailleurs, en prenant m_j assez grand, la condition 3 est aussi vérifiée, ce qui garantit que la famille ainsi construite recouvre M , car \mathcal{B} le fait.

Enfin, pour obtenir la famille localement finie, on pose $V_j = U_j \setminus \overline{U_{j-2}}$. Puisque $\overline{U_j}$ est un fermé du compact $\overline{U_j}$, il est compact. En outre, si $p \in M$, alors $p \in V_k$, où $k = \min\{j \in \mathbb{N} : p \in U_j\}$. Puisque V_k intersecte seulement V_{k-1} et V_{k+1} , le recouvrement est localement fini. ■

Si M est une variété différentielle, on dit qu'un recouvrement ouvert $\{W_i\}$ de M est *régulier* si les propriétés suivantes se sont vérifiées :

1. le recouvrement $\{W_i\}$ est localement fini ;
2. chaque W_i est le domaine d'une carte $\varphi_i : W_i \rightarrow \mathbb{R}^m$ dont l'image est $B(0, 3) \subset \mathbb{R}^m$;
3. la famille $\{U_i\}$ recouvre M , où $U_i = \varphi_i^{-1}(B(0, 1))$.

La proposition suivante montre que, en effet, chaque recouvrement ouvert d'une variété admet un raffinement régulier, ce qui implique la paracompacité.

Proposition 2.4.7. Soit M une variété différentielle. Chaque recouvrement ouvert de M admet un raffinement régulier. En particulier, M est paracompacte.

Démonstration. Soient \mathcal{U} un recouvrement ouvert quelconque de M et $\{V_j\}$ un recouvrement dénombrable, localement fini par ouverts précompacts de M , comme celui du lemme précédent. Pour chaque $p \in M$, soit W_p un voisinage de p qui intersecte seulement un nombre fini des V_j . En remplaçant W_p par son intersection avec ces V_j et en réduisant le voisinage résultant si nécessaire, on peut supposer que :

- Si $p \in V_j$, alors $W_p \subset V_j$.
- W_p est contenu dans un des ouverts de \mathcal{U} .
- W_p est le domaine d'une carte $\varphi_p : W_p \rightarrow B(0, 3)$ dont l'image est une boule centrée à l'origine.

On pose $U_p = \varphi_p^{-1}(B(0, 1))$. Pour chaque k , la collection $\{U_p : p \in \bar{V}_k\}$ est un recouvrement ouvert de \bar{V}_k . Par compacité, on peut extraire un sous-recouvrement fini, disons $U_k^1, \dots, U_k^{m_k}$. Soient $(W_k^1, \varphi_k^1), \dots, (W_k^{m_k}, \varphi_k^{m_k})$ les cartes associées. La famille $\{W_k^i\}$ est un raffinement dénombrable de \mathcal{U} qui vérifie les conditions 2 et 3 de la définition de recouvrement régulier. Montrons que, d'ailleurs, c'est localement fini.

Pour chaque k , le sous-ensemble W_k^i est contenu, par construction, dans un V_j qui vérifie, alors, $\bar{V}_k \cap V_j \neq \emptyset$. Puisque \bar{V}_k est compact, on peut le couvrir par une quantité finie de ces V_j , qui s'intersectent, au maximum, en un nombre fini. Or, pour chaque k , la collection des W_k^i est finie. Il s'en suit que le recouvrement qu'on a construit est localement fini. ■

On est déjà prêts pour prouver que chaque recouvrement d'une variété différentielle admet une partition de l'unité subordonnée :

Proposition 2.4.8 (Existence de partitions de l'unité). Si M est une variété différentielle et $\mathcal{U} = \{X_\alpha\}_{\alpha \in A}$ est un recouvrement par ouverts de M , alors il existe une partition différentiable de l'unité subordonnée à \mathcal{U} .

Démonstration. Soit $\{W_i\}$ un raffinement régulier de \mathcal{U} . Pour chaque i , soit $\varphi_i : W_i \rightarrow B(0, 3)$ la carte correspondante et soient

$$\begin{aligned} U_i &= \varphi_i^{-1}(B(0, 1)), \\ V_i &= \varphi_i^{-1}(B(0, 2)). \end{aligned}$$

Soit h une fonction plateau qui vaut 1 sur $B(0, 1)$ et à support dans $B(0, 2)$, dont l'existence est garantie par la proposition 2.4.2. Pour chaque i , on définit $f_i : M \rightarrow \mathbb{R}$ par

$$f_i = \begin{cases} h \circ \varphi_i & \text{sur } W_i, \\ 0, & \text{sur } M \setminus \bar{V}_i. \end{cases}$$

Cette fonction est bien définie, car les deux définitions s'annulent sur la région d'intersection des deux domaines. D'ailleurs, elle est différentiable et $\text{supp}(f_i) \subset W_i$.

On définit maintenant des fonctions $g_i : M \rightarrow \mathbb{R}$ par

$$g_i(x) = \frac{f_i(x)}{\sum_j f_j(x)}.$$

Puisque le recouvrement $\{W_i\}$ est localement fini, la somme du dénominateur définit une fonction différentiable, et, puisque $f_i \equiv 1$ sur U_i et chaque point de M est contenu dans un U_i , elle est toujours positive, donc g_i est une fonction différentiable sur M . De plus, il est immédiat que $0 \leq g_i \leq 1$ et que $\sum_i g_i \equiv 1$.

Il reste seulement à adapter les indices pour qu'ils prennent des valeurs sur l'ensemble A . Puisque $\{W_i\}$ est un raffinement de \mathcal{U} , pour chaque i on peut choisir un indice $a(i) \in A$ tel que $W_i \subset X_{a(i)}$. Pour chaque $\alpha \in A$, on définit alors $\psi_\alpha : M \rightarrow \mathbb{R}$ par

$$\psi_\alpha = \sum_{i:a(i)=\alpha} g_i.$$

S'il n'y a pas d'indice i tel que $a(i) = \alpha$, alors on prend $\psi_\alpha \equiv 0$. On a trouvé la famille de fonctions recherchée. ■

Une autre conséquence de la paracompacité, qu'on ne démontrera pas, est que les variétés différentielles sont métrisables.

2.5 Variétés à bord

Dans plusieurs applications des variétés, il est nécessaire de travailler avec des objets qui leur ressemblent, sauf pour le fait qu'elles possèdent, dans un certain sens, un bord. C'est le cas, par exemple, des boules fermées en \mathbb{R}^n ou les hémisphères fermés de S^n . On doit reformuler la définition de variété pour accueillir ces objets.

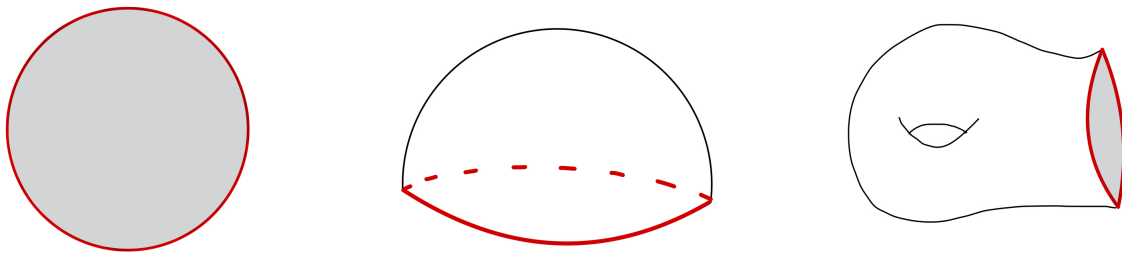


FIGURE 22 – Exemples de variétés à bord dans \mathbb{R}^n .

Dorénavant, on notera

$$\begin{aligned} \mathbb{H}^m &= \{(x_1, \dots, x_m) : x_m \geq 0\}, \\ \text{Int } \mathbb{H}^m &= \{(x_1, \dots, x_m) : x_m > 0\}, \\ \partial\mathbb{H}^m &= \{(x_1, \dots, x_m) : x_m = 0\}, \end{aligned}$$

pour chaque $m > 0$. Dans le cas où $m = 0$, on pose $\mathbb{H}^0 = \mathbb{R}^0 = \{0\}$, de sorte que $\text{Int } \mathbb{H}^0 = \mathbb{R}^0$ et $\partial\mathbb{H}^0 = \emptyset$.

Définition 2.5.1. Une *variété topologique à bord* est un espace topologique M de Hausdorff et à base dénombrable localement homéomorphe à \mathbb{H}^m .

On remarque que cette définition contient, comme cas particulier, les variétés topologiques, car chaque ouvert de \mathbb{R}^m est homéomorphe à un ouvert de \mathbb{H}^m .

Comme précédemment, la donnée (φ, U) d'un ouvert $U \subset \mathbb{H}^m$ et d'un homomorphisme $\varphi : U \rightarrow \varphi(U)$ sur un ouvert de \mathbb{H}^m s'appelle *carte* de M . On dira que la carte est *intérieure* si $\varphi(U) \subset \text{Int } \mathbb{H}^m$ et qu'elle est *de bord* si $\varphi(U) \cap \partial\mathbb{H}^m \neq \emptyset$. De même, un point $p \in M$ sera *intérieur* s'il est dans le domaine d'une carte intérieure et il sera un *point de bord* s'il est dans le domaine d'une carte de bord φ telle que $\varphi(p) \in \partial\mathbb{H}^m$.

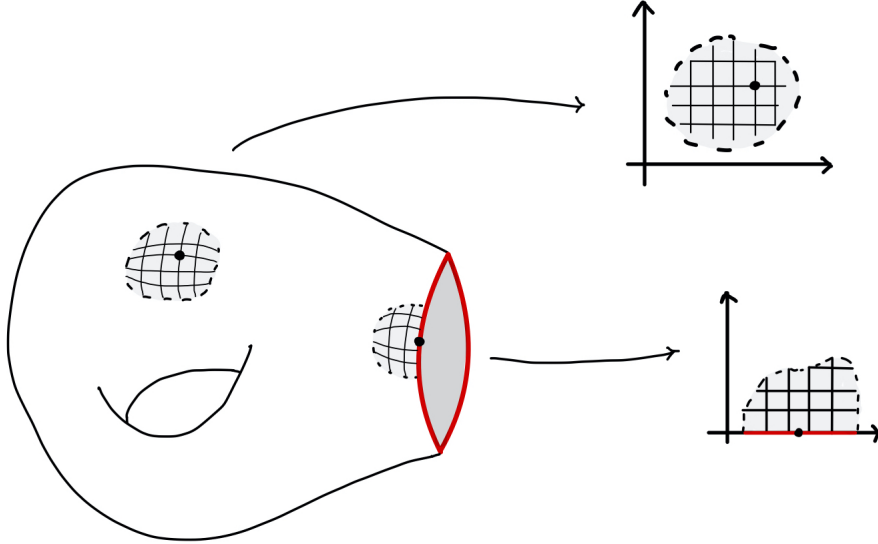


FIGURE 23 – Cartes et pointes intérieurs et de bord.

Il s'en suit que chaque point $p \in M$ est soit un point intérieur soit un point de bord : en effet, si p n'est pas un point de bord, alors il appartient au domaine d'une carte intérieure ou au domaine d'une carte de bord φ telle que $\varphi(p) \notin \partial\mathbb{H}^m$, auquel cas la restriction de φ à $U \cap \varphi^{-1}(\text{Int } \mathbb{H}^m)$ est une carte intérieure contenant p . Il reste à vérifier, pour que la définition de point de bord et point intérieur soit intéressante, qu'elle ne dépend pas du choix de carte, autrement dit, qu'un point ne peut pas être au même temps un point intérieur et un point de bord. Ceci n'est pas évident dans le cas des variétés topologiques, mais c'est facile à prouver dès que l'on introduit une structure différentielle, comme on verra ci-dessous.

Pour introduire une telle structure on commence par rappeler qu'une fonction $F : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ définie sur une partie arbitraire A de \mathbb{R}^n est différentiable si elle admet, au voisinage de chaque point de A , une extension en une fonction différentiable définie sur un ouvert de \mathbb{R}^n . En particulier, si $A \subset \mathbb{H}^n$, F est différentiable si, pour chaque $x \in A$, il existe un ouvert U de \mathbb{R}^n contenant x et une fonction différentiable $\tilde{F} : U \rightarrow \mathbb{R}^k$ telle que $\tilde{F}|_{U \cap \mathbb{H}^n} = F$. Par continuité, toutes les dérivées partielles de F en $A \cap \partial\mathbb{H}^n$ sont déterminées par leurs valeurs dans $\text{Int } \mathbb{H}^n$ et, par conséquent, indépendantes du choix de l'extension.

On dira alors qu'un atlas d'une variété à bord est *différentiable* si les changements de cartes sont des applications différentiables.

Définition 2.5.2. Une *variété différentiable à bord* est une variété topologique à bord équipée d'un atlas différentiel maximal.

On peut maintenant démontrer aisément que les points intérieurs et les points de bord sont bien définis :

Théorème 2.5.3 (de l'invariance du bord). Soient M une variété différentiable à bord et $p \in M$. Si p est un point de bord pour une carte (φ, U) , alors il est aussi un point de bord pour chaque carte de M dont le domaine contient p .

Démonstration. Soient (U, φ) et (V, ψ) deux cartes de M et supposons que $\varphi(p) \notin \partial\mathbb{H}^m$. Alors, il existe un ouvert $\tilde{U} \subset \varphi(U) \cap \text{Int } \mathbb{H}^m$ tel que $p \in \tilde{U}$ et $\psi \circ \varphi^{-1}$ est définie sur \tilde{U} . Par le théorème d'inversion locale appliquée à cette dernière fonction, il existe un ouvert \tilde{V} de \mathbb{R}^m tel que $\psi(q) \in \tilde{V} \subset \mathbb{H}^m$, d'où résultat. ■

Le bord étant bien défini, on peut prouver que c'est une variété de dimension $m - 1$:

Proposition 2.5.4. Le bord ∂M d'une variété différentielle M de dimension m est une variété différentielle (sans bord) de dimension $m - 1$.

Démonstration. Pour chaque point $p \in \partial M$, il existe une carte (U, φ) de M telle que $\varphi(U \cap \partial M)$ est un voisinage ouvert de 0 en $\mathbb{R}^{m-1} \times \{0\}$. En enlevant la dernière coordonnée, on obtient une carte de domaine $U \cap \partial M$ de ∂M . ■

On définit l'espace tangent et la différentielle de la même façon que pour les variétés sans bord. Pour les points intérieurs, tout ce qu'on a dit sur l'espace tangent en variétés sans bord reste valide. Étudions-le au bord de M .

On commence par trouver une relation entre les espaces tangents $T_a \mathbb{H}^m$ et $T_a \mathbb{R}^m$ pour $a \in \partial \mathbb{H}^m$:

Lemme 2.5.5. Soit $\iota : \mathbb{H}^m \hookrightarrow \mathbb{R}^m$ l'inclusion canonique. Pour chaque $a \in \partial \mathbb{H}^m$, la différentielle $T_a \iota : T_a \mathbb{H}^m \rightarrow T_a \mathbb{R}^m$ est un isomorphisme.

Démonstration. Soient $a \in \partial \mathbb{H}^m$ et $X \in T_a \mathbb{H}^m$ tel que $T_a \iota(X) = 0$. Soit $f : \mathbb{H}^m \rightarrow \mathbb{R}$ et prenons une extension \tilde{f} de f en une fonction différentiable définie sur \mathbb{R}^m (on peut la construire en utilisant des partitions de l'unité). Alors, $f = \tilde{f} \circ \iota$, de sorte que

$$X(f) = X(\tilde{f} \circ \iota) = T_a \iota(X)(f) = 0,$$

d'où $X = 0$. Ceci montre que $T_a \iota$ est injective.

Pour montrer la surjectivité, prenons un élément $Y \in T_a \mathbb{R}^m$ arbitraire. On définit $X \in T_a \mathbb{H}^m$ par

$$X(f) = Y(\tilde{f}),$$

où \tilde{f} est définie comme précédemment. On écrit

$$Y(\tilde{f}) = \sum_{k=1}^m a_k \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x_k}(a)$$

et on remarque que la définition de X est indépendante du choix de l'extension \tilde{f} , par continuité des dérivées partielles. D'ailleurs X est clairement une dérivation et

$$T_a \iota(X)(g) = X(g \circ \iota) = Y(g),$$

pour chaque $g : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ différentiable, ce qui démontre le résultat. ■

Puisque la différentielle d'une carte de bord procure un isomorphisme entre l'espace tangent $T_p M$, avec $p \in \partial M$, et $T_a \mathbb{H}^m$, on en déduit que l'espace tangent à M en un point de bord est aussi de dimension M .

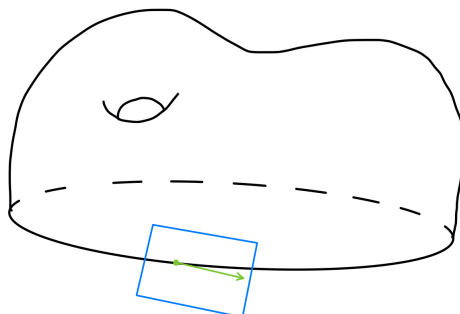


FIGURE 24 – Espace tangent en un point de bord.

Intuitivement, il est évident que si p est un point de bord, on peut distinguer trois classes d'éléments dans T_pM : les vecteurs qui sont tangents au bord, ceux qui pointent vers l'extérieur de M et ceux qui pointent vers l'intérieur.

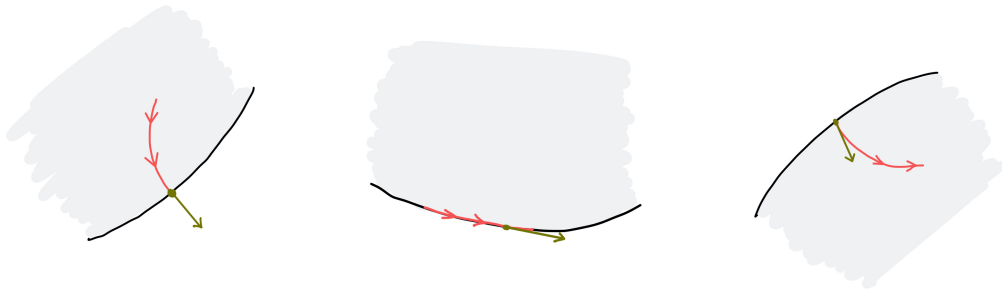


FIGURE 25 – Vecteurs tangents au bord.

Plus formellement, on dira qu'un élément $X \in T_pM \setminus T_p\partial M$ *pointe vers l'intérieur* si c'est le représentant d'une courbe $c : [0, +\varepsilon) \rightarrow M$ avec $\gamma(0) = p$, et on dira qu'il *pointe vers l'extérieur* si c'est le représentant d'une courbe de la forme $c : (-\varepsilon, 0] \rightarrow M$, avec $\gamma(0) = p$.

Prenons une carte φ en $p \in \partial M$, avec $\varphi(p) = 0$, et soit $c : [0, \varepsilon) \rightarrow M$ une courbe telle que $c(0) = p$. En coordonnées, $\varphi \circ c(t) = (c_1(t), \dots, c_m(t))$ et, puisque $c_m(0) = 0$ et que la courbe reste dans le sous-espace $x_m \geq 0$, on a nécessairement $c'_m(0) \geq 0$. De même, pour les courbes de la forme $c : (-\varepsilon, 0] \rightarrow M$, on a $c'_m(0) \leq 0$. Ceci nous donne la suivante caractérisation : un vecteur $X \in T_pM \setminus T_p\partial M$ pointe vers l'intérieur si la dernière coordonnée de son expression locale est positive, pour n'importe quelle carte ; si cette dernière coordonnée est négative, alors le vecteur pointe vers l'extérieur. Les vecteurs tangents au bord sont précisément ceux dont la dernière coordonnée est nulle.

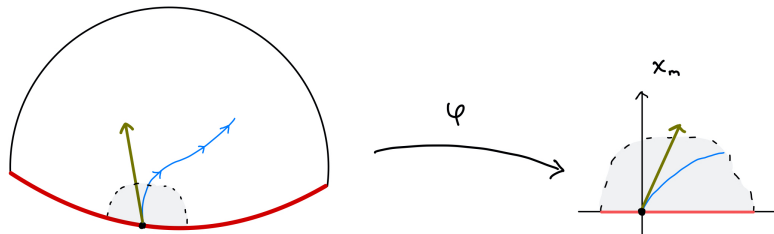


FIGURE 26 – Caractérisation des vecteurs tangents en un point de bord.

On remarque pour finir que, comme dans le cas des variétés différentielles, chaque recouvrement d'une variété à bord admet une partition de l'unité subordonnée.

2.6 Orientation

On introduit maintenant la notion d'orientation d'une variété différentielle, que l'on définira en adaptant l'orientation des espaces vectoriels au cas particulier des espaces tangents. Pour rappel, si E est un espace vectoriel et \mathcal{B}_1 et \mathcal{B}_2 sont deux bases de E , on dit que \mathcal{B}_1 et \mathcal{B}_2 ont la *même orientation* si le déterminant de la matrice du changement de base est positif. On déduit directement des propriétés des déterminants que « avoir la même orientation » est une relation d'équivalence sur l'ensemble des bases de E . Il est clair qu'il existe deux classes d'équivalence. Orienter E consiste, alors, à assigner un signe à chacune de ces classes : un espace vectoriel sera *positivement orienté* s'il est muni d'une base positive et il sera *négativement orienté* s'il a une base négative.

Soient F un autre espace vectoriel et $A : E \rightarrow F$ un isomorphisme linéaire. Alors, A envoie les bases avec la même orientation en bases avec la même orientation. En effet, soient \mathcal{B}_1 et \mathcal{B}_2 deux bases avec la même orientation, c-à-d, l'isomorphisme P tel que $P\mathcal{B}_1 = \mathcal{B}_2$ est de déterminant positif. Le changement de base entre $A\mathcal{B}_1$ et $A\mathcal{B}_2$ est donné par APA^{-1} , qui est de déterminant positif, car les déterminants de A et A^{-1} ont le même signe et $\det P > 0$. Ainsi, le signe de $A\mathcal{B}$ est soit toujours le même soit toujours l'opposé de celui de \mathcal{B} . Dans le premier cas, on dit que A *préserve* l'orientation ; dans le second, on dit qu'il l'*renverse*.

Orienter une variété différentielle (à bord) revient maintenant à donner une orientation à chacun de ses espaces tangents. Pour que ce soit intéressant, il faut le faire d'une façon différentiable, au sens de la définition suivante :

Définition 2.6.1. Une orientation de \mathbb{R}^m étant fixée, une *orientation* d'une variété différentielle (à bord) M est la donnée d'une orientation pour T_pM de sorte que, pour chaque $p \in M$, il existe une carte (φ, U) autour de p telle que $T_{\varphi(q)}\varphi^{-1} : \mathbb{R}^m \rightarrow T_qM$ préserve l'orientation, pour chaque $q \in U$.

Une variété est *orientable* si elle admet une orientation, auquel cas elle admet au minimum deux : en effet, une orientation étant donnée, il suffit de renverser l'orientation de chacun des espaces tangents pour obtenir l'orientation contraire. D'ailleurs, si la variété est connexe, elle n'admet que ces deux orientations, comme on verra ci-dessous.

On peut donner une définition équivalente d'orientation d'une variété basée sur un choix spécifique de l'atlas :

Définition 2.6.2. On appelle *atlas d'orientation* d'une variété différentielle M tout atlas $\{(\varphi_i, U_i)\}_{i \in I}$ tel que les changements de cartes aient un jacobien positif.

C'est immédiat qu'une variété est orientable si, et seulement si, elle admet un atlas d'orientation. En effet, si elle est orientable, les cartes de la définition forment un atlas à orientation, car elles préservent toutes l'orientation. Réciproquement, un atlas d'orientation étant donné, on peut orienter l'espace tangent T_pM en le munissant de la base $(T_{\varphi(p)}\varphi^{-1}(e_k))_{1 \leq k \leq m}$, où $\{e_k\}_{1 \leq k \leq m}$ est la base canonique de \mathbb{R}^m . Puisque les changements de base sont positifs, cette orientation est indépendante de la carte utilisé et, en particulier, elle est bien défini en les points d'intersection de deux domaines de cartes.

Deux atlas d'orientation $\{(\varphi_i, U_i)\}_{i \in I}$ et $\{(\psi_j, V_j)\}_{j \in J}$ étant donnés, on peut leur associer une application s de M dans $\{\pm 1\}$ de la façon suivante. Pour chaque $p \in M$, il existe un U_i et un V_j contenant p . C'est une conséquence directe de la définition d'atlas d'orientation que le signe du jacobien de $\varphi_i \circ \psi_j^{-1}$ ne dépend pas du choix de i et j . On définit $s(p)$ comme la valeur de ce signe : il s'agit d'une application localement constante, donc constante si M est connexe. Les atlas $\{(\varphi_i, U_i)\}_{i \in I}$ et $\{(\psi_j, V_j)\}_{j \in J}$ donnent la même orientation si $s = 1$, ce qui nous donne une relation d'équivalence pour les atlas d'orientation. Cette discussion montre aussi que, si M est connexe, il y a exactement deux classes d'équivalence, donc deux orientation possibles, qu'on peut construire comme dans le paragraphe précédente. Ainsi, choisir une orientation équivaut à choisir une classe d'équivalence d'atlas d'orientation.

On illustre la notion d'orientation avec quelques exemples :

Exemple 2.6.3. Si M admet un atlas avec une seule carte, alors M est orientable. En particulier, les graphes des fonctions continues sont orientables.

Exemple 2.6.4. Si M admet un atlas avec deux cartes de domaines U, V , avec $U \cap V$ connexe, mais le jacobien du changement de carte n'est pas positif, on peut remplacer l'une des cartes

par sa composition avec l'application $(x_1, \dots, x_m) \mapsto (-x_1, x_2, \dots, x_m)$. On obtient ainsi un atlas d'orientation. La supposition que l'intersection des domaines est connexe est essentielle : le signe du jacobien est localement constant, mais il peut-être différent sur deux composantes connexes de $U \cap V$.

Exemple 2.6.5. Pour l'espace projectif $\mathbb{R}\mathbb{P}^n$ on a construit un atlas avec $n + 1$ cartes de la forme

$$\varphi_i[x_1, \dots, x_{n+1}] = \left(\frac{x_1}{x_i}, \dots, \frac{x_{i-1}}{x_i}, \frac{x_{i+1}}{x_i}, \dots, \frac{x_{n+1}}{x_i} \right),$$

dont l'inverse est donnée par

$$\varphi_i^{-1}(u_1, \dots, u_n) = [u_1, \dots, u_{i-1}, 1, u_i, \dots, u_n].$$

Le changement de carte entre la première et la dernière carte est

$$\varphi_{n+1} \circ \varphi_1^{-1}(x_1, \dots, x_n) = \left(\frac{1}{x_n}, \frac{x_1}{x_n}, \dots, \frac{x_{n-1}}{x_n} \right),$$

dont le déterminant jacobien est $\det J_{1,n+1} = (-1)^{n+1} \frac{1}{(x_n)^{n+1}}$. Le résultat est analogue pour le reste de changements de cartes, ce qui prouve que l'espace projectif $\mathbb{R}\mathbb{P}^n$ est orientable si n est impair. En fait, il est possible de montrer qu'il est orientable si, et seulement si, n est impair.

On finit avec une remarque sur l'orientation du bord d'une variété à bord. On a déjà vu que si M est une variété de dimension m dont le bord est non-vide, alors ∂M est une variété différentielle de dimension $m - 1$. Une orientation de M étant donnée, on peut orienter ∂M de la façon suivante. Pour chaque $p \in \partial M$, on choisit une base positive $\{v_1, \dots, v_m\}$ de $T_p M$ telle que v_1 pointe vers l'extérieur et v_2, \dots, v_m sont tangents au bord. Alors, $\{v_2, \dots, v_m\}$ est une base positive de ∂M .

3 Théorème de Sard

On introduit dans cette section un résultat très utile en topologie différentielle : le théorème de Sard, qui affirme que l'ensemble de valeurs critiques d'une application différentiable $f : M \rightarrow N$ est négligeable dans un sens qu'on précisera tout de suite. Ce théorème nous permettra de démontrer l'existence d'une certaine classe de fonctions différentiables, les fonctions de Morse, qui seront les éléments clés pour l'étude de la topologie des variétés.

Théorème 3.0.1 (de Sard). L'ensemble des valeurs critiques d'une application différentiable entre variétés est de mesure nulle.

Il faut tout d'abord préciser ce qui veut dire « mesure nulle » dans le cadre des variétés différentielles. C'est ce qu'on fait dans la première sous-section.

3.1 Mesure nulle en variétés

On rappelle d'abord qu'un ensemble de *mesure nulle* (au sens de Lebesgue) dans \mathbb{R}^n est une partie de \mathbb{R}^n qui manque de « volume » et qui est, donc, négligeable du point de vue de l'intégration. Plus précisément, ces sont des ensembles qui peuvent être couverts par des cubes de volume aussi petit que souhaité.

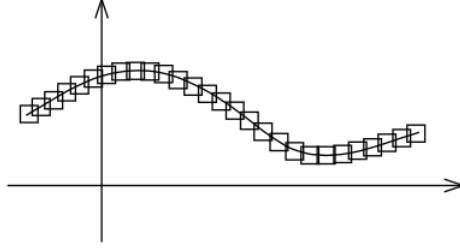


FIGURE 27 – Ensemble de mesure nulle dans \mathbb{R}^2 .

Un *parallélépipède* est une partie de \mathbb{R}^n de la forme

$$C = \prod_{i=1}^n [a_i, b_i].$$

On note $|C| = \prod_{i=1}^n |a_i - b_i|$ son volume. La définition de mesure nulle dans \mathbb{R}^n est alors la suivante :

Définition 3.1.1. Une partie $A \subset \mathbb{R}^n$ est de *mesure nulle* si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une suite $\{C_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ de parallélépipèdes telle que

$$A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} C_k \quad \text{et} \quad \sum_{k=1}^{\infty} |C_k| < \varepsilon.$$

C'est une conséquence directe de la définition que toute sous-partie d'une partie de mesure nulle est aussi de mesure nulle.

Remarque 3.1.2. En prenant des parallélépipèdes ouverts on obtient une définition équivalente de sous-ensemble de mesure nulle.

Le but est d'étendre cette définition en une notion analogue pour les variétés. Puisque les variétés ne sont pas munis d'une métrique, on ne peut ni parler du volume d'un parallélépipède ni utiliser la même définition. Pourtant, si on démontre que la propriété « être de mesure nulle » est invariante par difféomorphismes, on peut donner une définition consistante en utilisant les cartes de la variété : une partie de M sera de mesure nulle si son image par une carte est de mesure nulle dans \mathbb{R}^m . Commençons par démontrer trois lemmes auxiliaires :

Lemme 3.1.3. Si $m < n$, $\mathbb{R}^m \cong \mathbb{R}^m \times \{0\} \subset \mathbb{R}^n$ est de mesure nulle.

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$. Pour chaque $k \in \mathbb{N}$, on choisit $\delta_k > 0$ tel que

$$(2\delta_k)^{n-m} \cdot (2k + 2\varepsilon)^n < \frac{\varepsilon}{2^n}.$$

On définit

$$U_k := (-k - \varepsilon, k + \varepsilon)^m \times (-\delta_k, \delta_k)^{n-m},$$

de sorte que

$$\mathbb{R}^m \times \{0\} = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} [-k, k]^m \times \{0\} \subset \bigcup_{k \in \mathbb{N}} U_k$$

et

$$\sum_{k=1}^{\infty} |U_k| = \sum_{k=1}^{\infty} (2\delta_k)^{n-m} \cdot (2k + 2\varepsilon)^n < \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^n} = \varepsilon.$$

■

Lemme 3.1.4. Soit $\{A_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ une collection dénombrable de parties de mesure nulle de \mathbb{R}^n . Alors, $\bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k$ est de mesure nulle.

Démonstration. Soient $\varepsilon > 0$ et une suite de parallélépipèdes $\{C_k^j\}_{j \in \mathbb{N}}$ tel que

$$A_k \subset \bigcup_{j \in \mathbb{N}} C_k^j \quad \text{et} \quad \sum_{j=1}^{\infty} |C_k^j| < \frac{\varepsilon}{2^k}.$$

Alors,

$$\bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k \subset \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \bigcup_{j \in \mathbb{N}} C_k^j \quad \text{et} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} |C_k^j| < \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^k} = \varepsilon. \quad \blacksquare$$

Lemme 3.1.5. Soient $U \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert, $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction lipschitzienne et $A \subset U$ de mesure nulle. Alors, $f(A)$ est de mesure nulle.

Démonstration. Puisque f est lipschitzienne, il existe une constante $L > 0$ telle que

$$\|f(x) - f(y)\| \leq L\|x - y\|, \quad \forall x, y \in U.$$

Il suffit, alors, de remarquer que, si C est un parallélépipède dont son arête la plus longue est de longueur λ , alors $f(C)$ est contenu dans un parallélépipède dont ses arêtes ont une longueur inférieure ou égale à $\sqrt{n}L\lambda$. \blacksquare

La clé pour la définition de mesure nulle en variétés est la proposition suivante, qui implique que la condition « être de mesure nulle » dans \mathbb{R}^n est invariant par difféomorphismes :

Proposition 3.1.6. Soit $U \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert et $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ une application différentiable. Si $A \subset U$ est de mesure nulle, alors $f(A) \subset \mathbb{R}^n$ est de mesure nulle.

Démonstration. Puisque $f \in C^1(U)$, elle est localement lipschitzienne, c'est-à-dire, pour chaque $x \in U$ il existe une boule B contenant x et quel que

$$\|f(a) - f(b)\| \leq L_x\|a - b\|, \quad \forall a, b \in B,$$

où L_x est une constante. Soit maintenant $\{C_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ une famille de parallélépipèdes telle que

$$A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} C_k \quad \text{et} \quad \sum_{k=1}^{\infty} |C_k| < \varepsilon,$$

avec $\varepsilon > 0$. Comme chaque parallélépipède est compact, on peut l'écrire comme la réunion d'une famille finie de parallélépipèdes sur lesquels la fonction est lipschitzienne (en prenant un recouvrement par parallélépipèdes ouverts sur lesquels f est lipschitzienne, puis un sous-recouvrement fini et, enfin, leur adhérences). Le résultat découle alors des deux lemmes précédents. \blacksquare

On peut maintenant introduire la définition suivante, qui généralise la notion de mesure nulle aux variétés :

Définition 3.1.7. On dit qu'une partie A d'une variété M est de mesure nulle si $\varphi(U \cap A) \subset \mathbb{R}^n$ est de mesure nulle pour toute carte (φ, U) .

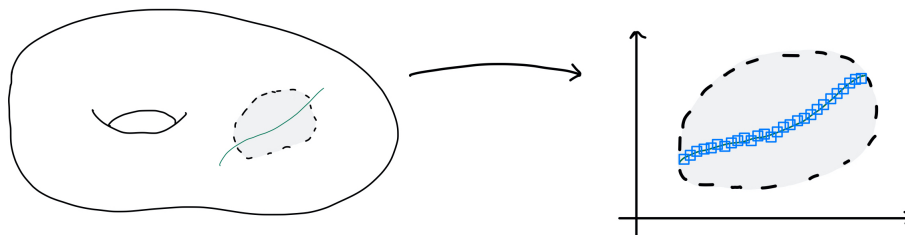


FIGURE 28 – Mesure nulle en variétés.

L'avantage de la proposition 3.1.6 est qu'elle rend la définition précédente indépendant du choix de l'atlas, comme le lemme suivant prouve :

Lemme 3.1.8. Soient M une variété différentielle et $A \subseteq M$. Soit $\{(\varphi_\alpha, U_\alpha)\}_\alpha$ une famille de cartes de M dont les domaines recouvrent A . Supposons que $\varphi_\alpha(U_\alpha \cap A)$ est de mesure nulle dans \mathbb{R}^m pour chaque α . Alors, A est de mesure nulle dans M .

Démonstration. Soit (ψ, V) une carte arbitraire. Il existe une collection dénombrable de U_α qui recouvre $A \cap V$. Pour chacun de ces U_α on a

$$\psi(A \cap V \cap U_\alpha) = (\psi \circ \varphi_\alpha^{-1}) \circ \varphi_\alpha(A \cap V \cap U_\alpha).$$

Or, $\varphi_\alpha(A \cap V \cap U_\alpha)$ est un sous-ensemble de $\varphi_\alpha(U_\alpha \cap A)$, qui est de mesure nulle par hypothèse. D'autre part, $\psi \circ \varphi_\alpha^{-1}$ est différentiable. La proposition 3.1.6 implique, alors, que $\psi(A \cap V \cap U_\alpha)$ est de mesure nulle. Puisque $\psi(A \cap V)$ est une réunion dénombrable d'ensembles de cette forme, on conclue en appliquant le lemme 3.1.4. ■

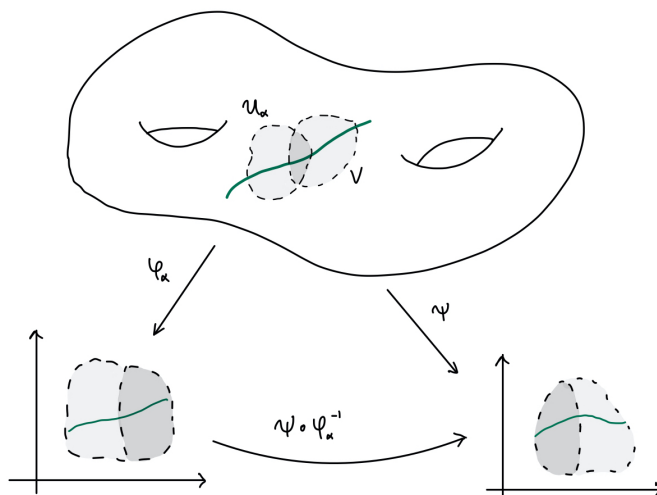


FIGURE 29 – Preuve du lemme 3.1.8.

On finit la sous-section avec un résultat de densité pour le complémentaire des parties de mesure nulle, que l'on utilisera plus tard :

Lemme 3.1.9. Si une partie $A \subset M$ d'une variété différentielle est de mesure nulle, alors son complémentaire $M \setminus A$ est dense dans M .

Démonstration. Soient $V \subset M$ un ouvert quelconque, (φ, U) une carte de M telle que $V \cap U \neq \emptyset$ et $A \subset M$ de mesure nulle. On pose $W = U \cap V$. Son image $\varphi(W) \subset \mathbb{R}^n$ contient une boule (c'est un ouvert) et, en conséquence, n'est pas de mesure nulle. Puisque $\varphi(W \cap A)$ est de mesure nulle, on a $\varphi(W \cap A) \neq \varphi(W)$ et que $A \cap W \neq W$. Ceci implique que $(M \setminus A) \cap V \neq \emptyset$, d'où le résultat. ■

3.2 Preuve du théorème de Sard

On est déjà prêts à aborder la démonstration du théorème de Sard. En particulier, on va démontrer la version du théorème de Sard pour les espace euclidiens :

Théorème 3.2.1 (de Sard). L'ensemble des valeurs critiques de toute application différentiable $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ est de mesure nulle.

La version générale du théorème (cf. théorème 3.0.1) est une conséquence directe de ce résultat. En effet, il suffit de remarquer que les valeurs critiques d'un fonction f entre variétés sont en correspondance avec celles des expressions de f en coordonnées locales, car les différentielles des cartes sont des isomorphismes linéaires.

Pour démontrer le théorème 3.2.1, on fera appel aux deux lemmes suivants :

Lemme 3.2.2. Tout recouvrement ouvert par sous-intervalles $\{I_j\}_{j \in J}$ de $[a, b]$ contient un sous-recouvrement fini $\{I_{j_1}, \dots, I_{j_k}\}$ tel que $\sum_{r=1}^k |I_{j_r}| \leq 2(b - a)$.

Démonstration. Soit $\{I_j\}_{j \in J}$ un recouvrement par intervalles ouverts de $[a, b]$. Prenons un sous-recouvrement fini $\mathcal{F} = \{I_{j_1}, \dots, I_{j_k}\}$ tel que $\mathcal{F} \setminus \{I_{j_s}\}$ ne recouvre pas $[0, 1]$. Le existence d'un tel recouvrement est garantie par la compacité de $[a, b]$. Chaque $p \in [a, b]$ appartient, au maximum, à deux des intervalles. En effet, supposons s.p.d.g. que $p \in I_{j_1} \cap I_{j_2} \cap I_{j_3}$ et posons $s = \inf(I_{j_1} \cup I_{j_2} \cup I_{j_3})$ et $t = \sup(I_{j_1} \cup I_{j_2} \cup I_{j_3})$. Alors, l'un des intervalles, disons I_{j_1} , contient $(s, p]$ et un autre, disons I_{j_2} , contient $[p, s)$, de sorte que $I_{j_1} \cup I_{j_2} = (s, t) = I_{j_1} \cup I_{j_2} \cup I_{j_3}$, ce qui contredit la minimalité du sous-recouvrement. On a montré, ainsi, que \mathcal{F} recouvre $[a, b]$ au maximum deux fois, d'où le résultat. ■

Lemme 3.2.3 (Théorème de Fubini). Soit $\mathbb{R}_t^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_n = t\} \subset \mathbb{R}^n$, pour chaque $t \in \mathbb{R}$. Soit $C \subset \mathbb{R}^n$ un compact tel que $C_t := C \cap \mathbb{R}_t^{n-1}$ est de mesure nulle dans $\mathbb{R}_t^{n-1} \cong \mathbb{R}^{n-1}$, pour tout $t \in \mathbb{R}$. Alors, C est de mesure nulle dans \mathbb{R}^n .

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$. Puisque C est borné, il existe $a < b$ tels que $C \subset [a, b]^n$. Par hypothèse, C_t est de mesure nulle dans \mathbb{R}^{n-1} , donc il existe une famille $\{W_t^i\}_{i \in \mathbb{N}^*}$ de parallélépipèdes ouverts recouvrant C_t (vu comme un sous-ensemble de \mathbb{R}^{n-1}) tels que $W_t^i \subset [a, b]^{n-1}$ pour tout $i \in \mathbb{N}^*$ et $\sum_i |W_t^i| \leq \varepsilon$. Pour chaque $t \in \mathbb{R}$, soient $W_t = \bigcup_i W_t^i \subset [a, b]^{n-1}$ et l'application $d_t : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto |x_n - t|$, qui est continue et s'annule sur \mathbb{R}_t^{n-1} . Puisque W_t est ouvert, $([a, b]^{n-1} \setminus W_t) \times [a, b]$ est fermé, donc $C \setminus (W_t \times [a, b])$ est compact et d_t atteint un minimum $\alpha > 0$ sur ce sous-ensemble. En conséquence, $\{x \in C : |x_n - t| < \alpha\} \subset W_t \times I_t$, où $I_t = (t - \alpha, t + \alpha)$. Les intervalles I_t recouvrent $[a, b]$ donc, d'après le lemme précédent, on peut obtenir un sous-recouvrement $\{I_{t_1}, \dots, I_{t_k}\}$ tel que $\sum_{j=1}^k |I_{t_j}| \leq 2(b - a)$. Alors, les $\{W_{t_j}^i \times I_{t_j} : i \in \mathbb{N}, j = 1, \dots, k\}$ recouvrent C et $\sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^{\infty} |W_{t_j}^i \times I_{t_j}| \leq 2(b - a)\varepsilon$. ■

On peut affaiblir l'hypothèse que C est compact dans le lemme précédent : il suffit qu'il soit une réunion dénombrable de compacts, auquel cas on applique le théorème précédent à chacun des éléments de la réunion et on utilise le fait que la réunion dénombrable de sous-ensembles de mesure

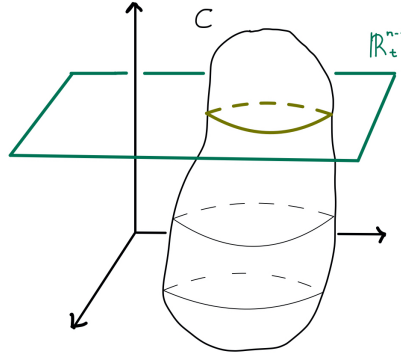


FIGURE 30 – Théorème de Fubini.

nulle est de mesure nulle. Cela est valide, en particulier, pour les ouverts et les fermes, aussi que leurs images par des fonctions continues et leurs réunions et intersections dénombrables.

Démonstration du théorème 3.2.1. On démontrera le théorème par récurrence sur n . Pour $n = 0$, \mathbb{R}^n est un point, donc $f(U)$ contient, au maximum, un seul point et c'est de mesure nulle.

Soit $C \subset U$ l'ensemble de points critiques de f . Pour appliquer la récurrence on définit les ensembles $C_i \subset U$ formés des points $x \in U$ où toutes les dérivées partielles d'ordre inférieur ou égal à $i \in \mathbb{N}$ des composantes de f sont nulles. On a alors une suite décroissante de sous-ensembles fermés

$$C \supset C_1 \supset C_2 \supset C_3 \supset \dots$$

On fera la preuve en trois étapes :

- Étape 1. L'image $f(C \setminus C_1)$ est de mesure nulle.
- Étape 2. L'image $f(C_i \setminus C_{i+1})$ est de mesure nulle, pour tout $i \geq 1$.
- Étape 3. L'image $f(C_k)$ est de mesure nulle, quand k est assez grand.

Ces trois étapes étant montrées, on peut écrire

$$f(C) = f(C \setminus C_1) \cup f(C_1 \setminus C_2) \cup f(C_2 \setminus C_3) \cup \dots \cup f(C_k),$$

qui est une réunion finie d'ensembles de mesure nulle, ce qui prouve le résultat.

Étape 1. Si $p = 1$, alors $C = C_1$ et le résultat est trivial, donc on suppose $p \geq 2$. Pour chaque $x^* \in C \setminus C_1$, on va trouver un voisinage ouvert $V \subset \mathbb{R}^n$ tel que $f(V \cap C)$ soit de mesure nulle. Puisque $C \setminus C_1$ peut se recouvrir avec un nombre fini d'ensembles de cette forme (parce que \mathbb{R}^n est à base dénombrable), on en conclut que $f(C \setminus C_1)$ est de mesure nulle.

En effet, puisque $x^* \notin C_1$, il existe une dérivée partielle, disons $\frac{\partial f_1}{\partial x_1}$ qui ne s'annule pas en x^* . Soit $h : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ l'application définie par

$$h(x) = (f_1(x), x_2, \dots, x_n),$$

dont la matrice jacobienne en x^* est

$$\text{Jac}_{x^*}(h) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_m} \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \Big|_{x=x^*}.$$

Ainsi, $T_{x^*}h$ est un isomorphisme et, d'après le théorème d'inversion local, h est un difféomorphisme local, c-à-d, il existe un voisinage ouvert V de x^* tel que $h|_V$ soit un difféomorphisme sur son image. Soit $V' = h(V)$ et posons $g := f \circ h^{-1} : V' \rightarrow \mathbb{R}^p$ qui a la forme

$$g(z) = (z_1, g_2(z), \dots, g_n(z)).$$

On remarque que, puisque h est un difféomorphisme, l'ensemble de points critiques de g est $h(C \cap V)$. D'autre part, pour chaque $t \in \mathbb{R}$, l'application g envoie les points de la forme (t, x_2, \dots, x_n) dans l'hyperplan $(\{t\} \times \mathbb{R}^{p-1}) \subset \mathbb{R}^p$. Soit

$$g^t : (\{t\} \times \mathbb{R}^{n-1}) \cap V' \rightarrow \{t\} \times \mathbb{R}^{p-1},$$

définie par restriction de g . Les points critiques de g^t coïncident avec ceux de g en $(\{t\} \times \mathbb{R}^{n-1}) \cap V'$, car les matrices jacobiniennes de g et g^t vérifient la relation

$$D_{(x_1, \tilde{x})}g = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ * & D_{\tilde{x}}g^t \end{array} \right).$$

Or, g^t est une fonction à $n - 1$ variables, donc, par hypothèse de récurrence, l'ensemble de ses valeurs critiques est de mesure nulle en $\{t\} \times \mathbb{R}^{p-1}$. Ainsi, l'ensemble des valeurs critiques de g intersecte chaque hyperplan $\{t\} \times \mathbb{R}^{p-1}$ en un ensemble de mesure nulle. Le théorème de Fubini implique, alors, que $h(C \cap V)$ est de mesure nulle et, puisque h est un difféomorphisme et f est différentiable, $f(V \cap C)$ l'est aussi.

Étape 2. La procédure est analogue à celle de l'étape précédente. Pour chaque $x^* \in C_i \setminus C_{i+1}$, il existe une fonction de la forme

$$w(x) = \frac{\partial^k f_r}{\partial x_{s_2} \cdots \partial x_{s_{k+1}}}(x)$$

qui s'annule en x^* et telle que sa dérivée $\frac{\partial w}{\partial x_{s_1}}$ ne le fait pas, pour un certain indice $1 \leq s_1 \leq n$. Supposons s.p.d.g. que $s_1 = 1$ et soit $h : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ la fonction définie par

$$h(x) = (w(x), x_2, \dots, x_n)$$

qui, par le même argument que dans l'étape précédente, transforme difféomorphiquement un voisinage ouvert V de x^* en un ouvert $V' \subset \mathbb{R}^n$. Un argument complètement analogue à celui de l'étape 1 nous donne alors que $f(C_i \setminus C_{i+1})$ est de mesure nulle.

Étape 3. Soit $I^n \subset U$ un cube d'arête δ . On va montrer que, si $k > \frac{n}{p} - 1$, $f(C_k \cap I^n)$ est de mesure nulle. Puisque C_k admet un recouvrement dénombrable de cubes de cette forme, on obtiendra que C_k est de mesure nulle. Par la formule de Taylor, pour $x \in C_k \cap I^n$ et $x + h \in I_n$, on a

$$f(x + h) = f(x) + R(x, h),$$

où

$$\|R(x, h)\| \leq c \|h\|^{k+1},$$

$c > 0$ étant une constante qui dépend de f et I^n . On divise maintenant I^n en r^n cubes d'arête δ/r . Soit I_1 un cube de la sous-division contenant un point $x^* \in C_k$ et écrivons chaque point de I_1 sous la forme $x^* + h$, où

$$\|h\| \leq \sqrt{n} \frac{\delta}{r}.$$

Alors,

$$\|f(x^* + h) - f(x^*)\| = \|R(x, h)\| \leq c \|h\|^{k+1} \leq c \frac{(\sqrt{n}\delta)^{k+1}}{r^{k+1}} =: \frac{a}{r^{k+1}},$$

d'où $f(I_1)$ est contenu dans un cube d'arête $\frac{2a}{r^{k+1}}$. Or, $f(C_k \cap I^n)$ est contenu dans une réunion de, au maximum, r^n cubes de cette forme, avec un volume total

$$V = r^n \left(\frac{2a}{r^{k+1}} \right)^p = (2a)^p r^{n-(k+1)p}.$$

Si $(k+1)p > n$, alors $V \rightarrow 0$ quand $r \rightarrow \infty$, donc $f(C_k \cap I^n)$ est de mesure nulle. ■

En particulier, les valeurs régulières des applications entre variétés sont denses :

Corollaire 3.2.4. Les valeurs régulières d'une application différentiable $f : M \rightarrow N$ entre variétés sont denses dans N .

Démonstration. C'est une conséquence du théorème de Sard et du lemme 3.1.9. ■

4 Théorie de Morse

On présente dans cette section la théorie de Morse, qui nous permettra d'étudier la topologie des variétés à partir de l'information donnée par les lignes de niveau et les sous-niveaux d'une certaine classe de fonctions : les fonctions de Morse.

Avant de donner les résultats formels, étudions quelques exemples qui nous donneront une intuition de ce qu'on veut faire. Considérons d'abord la sphère unitaire de \mathbb{R}^3 , c'est-à-dire, le sous-ensemble $\mathbb{S}^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$. On définit sur cet ensemble la fonction « hauteur » $h : \mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, (x, y, z) \mapsto z$, qui a deux points critiques sur \mathbb{S}^2 : le pôle nord et le pôle sud. En effet, ces sont les points où le gradient de h est orthogonal à la surface de la sphère.

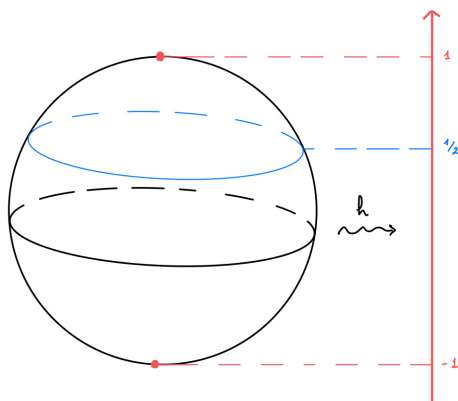


FIGURE 31 – Fonction hauteur sur la sphère.

Ce qui est intéressant de cette fonction sont ses sous-niveaux,

$$h^{-1}((-\infty, z]) = \begin{cases} \emptyset & \text{si } z < -1, \\ \bullet & \text{un point, si } z = -1, \\ \text{un disque} & \text{si } -1 < z < 1, \\ \mathbb{S}^2 & \text{si } z \geq 1. \end{cases}$$

On remarque que, lorsque on ne traverse pas un point critique, la topologie de ces ensembles reste invariante : ils sont toujours homéomorphes, ce qui sera un des points clés de la théorie qu'on va exposer. Voyons-le avec un autre exemple.

Soit S la surface de la figure 32, qui est homéomorphe à la sphère. On prend à nouveau la fonction hauteur sur S , qui a quatre points critiques : deux maximums, un minimum et un point col.

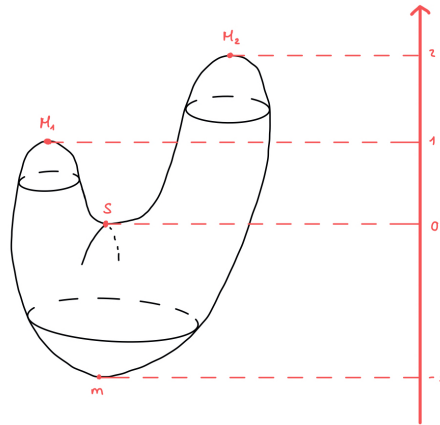


FIGURE 32 – Fonction hauteur sur S .

Regardons aux sous-niveaux de h :

$$h^{-1}((-\infty, z]) = \left\{ \begin{array}{ll} \emptyset & \text{si } z < -1, \\ \bullet & \text{un point,} \\ \text{un disque,} & \text{si } z = -1, \\ \text{un disque avec le bord} & \text{si } -1 < z < 0, \\ \text{attaché par un point,} & \text{si } z = 0, \\ \text{un cylindre,} & \text{si } 0 < z < 1, \\ \text{un disque,} & \text{si } 1 \leq z < 2, \\ S, & \text{si } z \geq 2. \end{array} \right.$$

Comme dans l'exemple de la sphère, le sous-niveaux sont homéomorphes si on ne traverse pas un point critique de h .

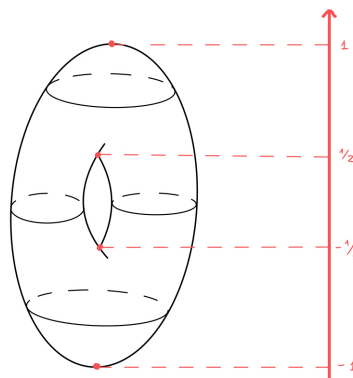


FIGURE 33 – Fonction hauteur sur le tore.

Une troisième exemple illustratif est celui du tore $\mathbb{T}^2 \subset \mathbb{R}^3$, qu'on montre dans la figure 33. Les sous-niveau dans ce cas sont

$$h^{-1}((-\infty, z]) = \left\{ \begin{array}{ll} \emptyset & \text{si } z < -1, \\ \bullet & \text{un point,} \\ \text{un disque} & \text{si } z = -1, \\ \text{un disque avec le bord} & \text{si } -1 < z < -1/2, \\ \text{attaché par un point,} & \\ \text{un cylindre,} & \text{si } z = -1/2, \\ \text{un cylindre avec les} & \text{si } -1/2 < z < 1/2, \\ \text{bords attachés par un,} & \\ \text{point} & \text{si } 1 \leq z < 2, \\ \mathbb{T}^2 \text{ privé d'un point,} & \text{si } 1/2 < z < 1, \\ \mathbb{T}^2, & \text{si } z \geq 1. \end{array} \right.$$

Il y a quelques faits qui semblent évidents à la lumière des trois exemples précédents. D'abord, la fonction h qu'on a choisie nous donne un « film » de la surface sur laquelle elle est défini par les sous-niveaux : on peut en fait « reconstruire » la surface en variant z dans $f^{-1}((-\infty, z])$. Du point de vue topologique, ce « film » ne dévient intéressant qu'aux points critiques de h : ces sont les points où on observe un changement dans la topologie des sous-niveaux. En particulier, si l'intervalle $[z_0, z_1]$ ne contient pas de point critique de h , on a :

- $f^{-1}(z_0)$ est homéomorphe à $f^{-1}(z_1)$.
- $f^{-1}((-\infty, z_0])$ est homéomorphe à $f^{-1}((-\infty, z_1])$.
- $f^{-1}([z_0, z_1])$ est homéomorphe à $f^{-1}(z_0) \times [z_0, z_1]$.

D'ailleurs, h décompose chaque surface en une collection de pièces homéomorphes à une des surfaces montrées dans la figure 34. Ces pièces nous permettront de construire n'importe quelle variété fermée orientable et seront à la base du théorème de classification des surfaces qu'on va démontrer.

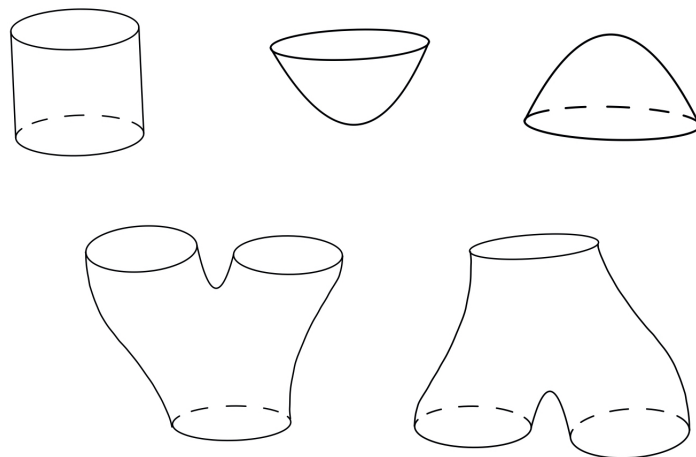


FIGURE 34 – Pièces élémentaires pour le construction des surfaces fermées orientables.

4.1 Fonctions de Morse

Pour que l'analyse qu'on vient de faire soit possible, c'est crucial que la fonction utilisée se comporte assez bien. On peut illustrer cela avec un exemple très simple : la fonction nulle est une fonction différentiable sur toute variété ; pourtant, elle possède un seul sous-niveau, qui est la variété toute entière, donc la procédure exposée ci-dessus ne procure aucune information utile.

Il y a, en particulier, quelques propriétés qui font de la fonction h une bonne fonction pour l'étude de la topologie de la variété : h a un nombre fini de points critiques, ces points critiques sont tous des points isolés et il n'y a pas deux points « à la même hauteur », c-à-d, ayant la même image. Le problème maintenant est de décider s'il est toujours possible de trouver une telle fonction : on trouvera la solution grâce aux fonctions de Morse.

4.1.1 Quelques définitions

Soient M une variété différentielle de dimension m et $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction différentiable. Soient $p_0 \in M$ et une carte $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ de M , avec $p_0 \in M$. Posons $x_0 = \varphi(p_0) \in \mathbb{R}^m$. Pour rappel, on note

$$D_i^{p_0, \varphi}(f) = \frac{\partial(f \circ \varphi^{-1})}{\partial x_i}(x_0) \quad \text{et} \quad [D_i^\varphi(f)](p_0) = D_i^{p_0, \varphi}(f).$$

De même, on notera

$$D_{ij}^{p_0, \varphi}(f) = \frac{\partial^2(f \circ \varphi^{-1})}{\partial x_i \partial x_j}(x_0).$$

Puisque la différentielle de φ est un isomorphisme, les points critiques de f sont les points où toutes les dérivées partielles de f s'annulent. D'ailleurs, cette caractérisation est indépendante du choix de φ , car les changements de carte sont des difféomorphismes.

Supposons maintenant que p_0 est un point critique de f et soit $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow M$ une courbe sur M telle que $\gamma(0) = p_0$. On pose $\varphi \circ \gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_m)$. Alors,

$$(f \circ \gamma)'(0) = \sum_{k=1}^m D_k^{p_0, \varphi}(f) \gamma'_k(0) = 0.$$

Toute fonction de la forme $f \circ \gamma - f(p_0)$ est, donc, d'ordre 2 en 0, sa partie principale étant donnée par la forme quadratique suivante :

Proposition 4.1.1. Soient $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ différentiable et p_0 un point critique de f . Il existe une unique forme quadratique $H_f(p_0)$ sur $T_{p_0}M$ tel que

$$(f \circ \gamma)''(0) = H_f(p_0) \gamma'(0),$$

pour chaque courbe γ tel que $\gamma(0) = p_0$. Cette forme quadratique s'appelle *hessienne de f en p_0* .

Démonstration. L'unicité est claire puisque $\gamma'(0)$ parcourt tout $T_{p_0}M$ et on a donné une formule explicite pour calculer son image. D'autre part, en prenant des coordonnées autour de p_0 , on calcule

$$(f \circ \gamma)''(0) = \sum_{k=1}^m D_k^{p_0, \varphi}(f) \gamma''_k(0) + \sum_{k,l} D_{kl}^{p_0, \varphi}(f) \gamma'_k(0) \gamma'_l(0).$$

Puisque p_0 est un point critique de f , le premier terme de la somme précédente s'annule, ce qui montre le résultat. ■

En outre, on a obtenu l'expression matricielle de $H_f(p_0)$. En effet, si on prend une carte locale autour de p_0 , le calcul précédente démontre que l'expression matricielle de $H_f(p_0)$ dans la base des dérivées partielles est

$$H_f(p_0) = \left(D_{ij}^{p_0, \varphi}(f) \right)_{i,j}.$$

Cette matrice est la *matrice hessienne* de f .

Définition 4.1.2. On dira que le point critique p_0 est *dégénéré* si $\det H_f(p_0) = 0$ et on dira qu'il est *non-dégénéré* au cas contraire.

Chaque changement de carte induit un changement de base en $T_{p_0}M$. Et, puisque les matrices de changement de base sont toujours inversibles, la définition précédente est indépendante du choix des coordonnées. Le lemme suivant donne le calcul explicite.

Lemme 4.1.3. Soient une application différentiable $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ avec un point critique non-dégénéré en $y_0 \in \mathbb{R}^m$ et un difféomorphisme ψ avec $\psi(x_0) = y_0$. Alors, $f \circ \psi$ a aussi un point critique non-dégénéré en $x_0 \in \mathbb{R}^m$.

Démonstration. On note $g := f \circ \psi$ et on calcule

$$\frac{\partial g}{\partial x_j}(x) = \sum_{k=1}^m \frac{\partial f}{\partial x_k}(\psi(x)) \frac{\partial \psi_k}{\partial x_j}(x),$$

donc

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x_i \partial x_j}(x_0) = \sum_{l=1}^n \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_l \partial x_k}(y_0) \frac{\partial \psi_l}{\partial x_i}(x_0) \frac{\partial \psi_k}{\partial x_j}(x_0) + \sum_{k=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_k}(y_0) \frac{\partial^2 \psi_k}{\partial x_i \partial x_j}(x_0).$$

Puisque y_0 est un point critique de f , le deuxième terme de la somme précédente est nul, donc on peut écrire la matrice hessienne de g comme

$$H_g(x_0) = {}^t(\text{Jac}_{x_0}\psi) \cdot H_f(y_0) \cdot \text{Jac}_{x_0}\psi.$$

Or, $\text{Jac}_{x_0}\psi$ est inversible, donc les points critiques de g coïncident avec ceux de f . ■

Puisque les changements de carte sont des difféomorphismes de \mathbb{R}^m , le lemme précédente montre que, en effet, la définition 4.1.2 a bien un sens.

Définition 4.1.4 (Fonction de Morse). Une fonction différentiable $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ est dite *de Morse* si tous ses points critiques sont non-dégénérés.

4.1.2 Lemme de Morse

Une bonne propriété des fonctions de Morse est qu'elles prennent une forme en coordonnées extrêmement simple autour des points critiques. Ce résultat, connu comme *lemme de Morse* nous permettra de démontrer que les fonctions de Morse possèdent certaines des propriétés désirables qu'on a mentionnées avant et de classifier les points critiques des fonctions de Morse. Il deviendra aussi très utile pour l'étude de la topologie des sous-niveaux que l'on traitera plus tard.

Théorème 4.1.5 (Lemme de Morse). Soit p_0 un point critique non-dégénéré de $f : M \rightarrow \mathbb{R}$. Alors, il existe une carte $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^m$, avec $p_0 \in U$ et $\varphi(p_0) = 0$, telle que l'expression de f en coordonnées locales est de la forme

$$f(x_1, \dots, x_m) = -x_1^2 - x_2^2 - \dots - x_\lambda^2 + x_{\lambda+1}^2 + \dots + x_m^2 + c,$$

où $c = f(p_0)$.

Démonstration. Prenons une carte φ vérifiant les conditions de l'énoncé du théorème. Soit $\hat{f} := f \circ \varphi^{-1}$ l'expression en coordonnées de f . En réduisant U si nécessaire, on peut utiliser le lemme 2.2.5 pour écrire \hat{f} sous la forme

$$\hat{f}(x_1, \dots, x_m) = \sum_{i=1}^m x_i g_i(x_1, \dots, x_m),$$

où g_1, \dots, g_m sont des fonctions différentiables, de sorte que, pour chaque i ,

$$\frac{\partial \hat{f}}{\partial x_i}(0, \dots, 0) = g_i(0, \dots, 0).$$

Puisque $\varphi(p_0) = (0, \dots, 0)$ est un point critique, on en déduit que $g_i(0, \dots, 0) = 0$. En appliquant à nouveau le lemme 2.2.5, pour chaque $j \in \{1, \dots, m\}$, il existe des fonctions différentiables $h_{j1}, h_{j2}, \dots, h_{jm}$ telles que

$$g_j(x_1, \dots, x_m) = \sum_{i=1}^m x_i h_{ij}(x_1, \dots, x_m),$$

au voisinage de 0. Ainsi,

$$\hat{f}(x_1, \dots, x_m) = \sum_{i,j=1}^m x_i x_j h_{ij}(x_1, \dots, x_m).$$

En posant $H_{ij} = \frac{1}{2}(h_{ij} + h_{ji})$, on obtient

$$\hat{f}(x_1, \dots, x_m) = \sum_{i,j=1}^m x_i x_j H_{ij}(x_1, \dots, x_m). \quad (\star)$$

On remarque que $H_{ij}(x_1, \dots, x_m) = H_{ji}(x_1, \dots, x_m)$. Un calcul simple nous donne

$$\frac{\partial^2 \hat{f}}{\partial x_i \partial x_j}(0, \dots, 0) = 2H_{ij}(0, \dots, 0).$$

Puisque p_0 est un point critique non-dégénéré, on peut supposer (en faisant un changement linéaire de coordonnées si nécessaire) que

$$\frac{\partial^2 \hat{f}}{\partial x_1^2}(0, \dots, 0) \neq 0,$$

donc $H_{11}(0, \dots, 0) \neq 0$. Or, H_{11} est une fonction continue, donc il existe un voisinage de $\varphi(p_0) = (0, \dots, 0)$ où H_{11} ne s'annule pas. On considère maintenant un nouveau système de coordonnées (y_1, \dots, y_m) défini par

$$y_1 = \sqrt{|H_{11}|} \left(x_1 + \sum_{i=2}^m x_i \frac{H_{1i}}{H_{11}} \right)$$

et $y_i = x_i$ pour $2 \leq i \leq m$. Le jacobien de cette transformation est non nul en 0, donc elle définit bien un changement de carte. On calcule le carré de y_1 :

$$\begin{aligned} y_1^2 &= |H_{11}| \left(x_1 + \sum_{i=2}^m x_i \frac{H_{1i}}{H_{11}} \right)^2 \\ &= \begin{cases} H_{11}x_1^2 + 2 \sum_{i,j=2}^m x_1 x_j H_{ij} + \frac{1}{H_{11}} \left(\sum_{i=2}^m x_i H_{1i} \right)^2, & \text{si } H_{11} > 0, \\ -H_{11}x_1^2 - 2 \sum_{i,j=2}^m x_1 x_j H_{ij} - \frac{1}{H_{11}} \left(\sum_{i=2}^m x_i H_{1i} \right)^2, & \text{si } H_{11} < 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Soit \tilde{f} l'expression de f en coordonnées (y_1, \dots, y_m) . En comparant l'expression précédente avec (\star) , on remarque que

$$\tilde{f} = \begin{cases} y_1^2 + \sum_{i,j=2}^m x_i x_j H_{ij} - \frac{1}{H_{11}} (\sum_{i=2}^m x_i H_{1i})^2, & \text{si } H_{11} > 0, \\ -y_1^2 + \sum_{i,j=2}^m x_i x_j H_{ij} - \frac{1}{H_{11}} (\sum_{i=2}^m x_i H_{1i})^2, & \text{si } H_{11} < 0. \end{cases}$$

Les deux derniers termes dans la somme précédente ne dépendent que de x_2, \dots, x_m , donc un récurrence sur le nombre de variables nous donne le résultat. ■

On remarque que, quand on écrit f sous cette forme, l'expression en coordonnées de la hessienne est une matrice diagonale et le nombre λ coïncide avec le nombre d'éléments diagonaux qui sont négatifs. Puisque les changements de carte se traduisent en des changements de base quand on travaille en coordonnées, ceci et la loi d'inertie de Sylvester impliquent que λ est bien défini : il ne dépend que de f et du point critique.

Définition 4.1.6. La valeur λ qui apparaît dans le théorème précédent s'appelle *indice* du point critique p_0 . D'autre part, le domaine de la carte dont l'existence est garantie par le lemme de Morse est un *voisinage canonique*.

On peut maintenant démontrer que, en effet, les points critiques des fonctions de Morse sont isolés et qu'ils existent en un nombre fini dans le cas des variétés compactes.

Corollaire 4.1.7. Tout point critique non-dégénéré est isolé.

Démonstration. Au voisinage d'un point critique non-dégénéré p_0 d'une fonction f , on peut localiser f en une fonction de la forme du théorème qu'on vient de prouver, dont le seul point critique est $(0, \dots, 0)$. ■

Corollaire 4.1.8. Une fonction de Morse définit sur une variété compacte admet seulement un nombre fini de points critiques.

Démonstration. Soit $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de Morse sur une variété compacte M . Tous les points critiques de f sont non-dégénérés, donc isolés. Soit C l'ensemble de tous les points critiques. Pour chaque $x \in C$, prenons un ouvert U_x tel que $C \cap U_x = \{x\}$. Prenons, pour chaque $x \in C$, un autre ouvert V_x contenant x et tel que $\overline{V_x} \not\subseteq U_x$. Soit

$$U = M \setminus \overline{\bigcup_{x \in C} V_x},$$

qui est un ouvert de M . On a un recouvrement de M par des ouverts contenant, au maximum, un point critique. Puisque M est compacte, on peut extraire un sous-recouvrement fini, ce qui nous donne le résultat. ■

4.1.3 Existence de fonctions de Morse

On vient de prouver que les fonctions de Morse ont certaines propriétés intéressantes pour aborder l'étude de la topologie des variétés. Cependant, ce n'est pas évident qu'il existe toujours une telle fonction définie sur une variété quelconque. On va démontrer non seulement qu'il existe des fonctions de Morse mais qu'il y en a, dans un certain sens, abondantes. On pourra les construire à partir d'une fonction différentiable arbitraire sur laquelle on fera une petite variation. Le théorème de Sard sera le résultat clé pour compléter la preuve. On commence par le cas d'un ouvert de \mathbb{R}^m :

Lemme 4.1.9. Soient $U \subset \mathbb{R}^m$ un ouvert et $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction différentiable sur U . Alors, pour presque tout $a \in \mathbb{R}^m$, l'application

$$f^a := f - \langle \cdot, a \rangle,$$

où $\langle \cdot, \cdot \rangle$ dénote le produit scalaire usuel, est une fonction de Morse sur U .

Démonstration. Soit $h : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ la fonction définie par

$$h(p) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(p), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_m}(p) \right), \quad p \in \mathbb{R}^m,$$

dont la matrice jacobienne est

$$\text{Jac}_p(h) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(p) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_m}(p) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_m \partial x_1}(p) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_m^2}(p) \end{pmatrix},$$

qui coïncide avec la matrice hessienne de f en p , $H_f(p)$. Alors, un point p_0 est un point critique de h si, et seulement si, $\det H_f(p_0) = 0$. Choisissons un $a = (a_1, \dots, a_m) \in \mathbb{R}^m$ qui ne soit pas une valeur critique de h : l'existence et la densité de tels points sont garanties par le théorème de Sard, car h est une fonction différentiable. Montrons que, pour ce choix de a , la fonction f^a est une fonction de Morse. En effet, si p_0 est un point critique de f^a , alors

$$\frac{\partial f^a}{\partial x_i}(p_0) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(p_0) - a_i = 0, \quad 1 \leq i \leq m,$$

et on a $h(p_0) = (a_1, \dots, a_m)$. Or, (a_1, \dots, a_m) n'est pas une valeur critique de h , donc p_0 n'est pas un point critique, de sorte que $\det H_f(p_0) \neq 0$. Mais, puisque f et f^a diffèrent en une fonction linéaire, leurs matrices hessiennes coïncident, d'où p_0 est un point critique non-dégénéré de f^a . Ceci montre que f^a est une fonction de Morse sur U . ■

Remarque 4.1.10. Soit M une variété compacte et prenons un atlas fini $\mathcal{A} = \{(\varphi_i, U_i)\}_{i=1}^r$ de M , dont l'existence est garantie par compacité. Pour chaque $1 \leq i \leq r$, on choisit un compact $K_i \subset U_i$ tel que

$$M = K_1 \cup K_2 \cup \dots \cup K_r.$$

On peut le faire de la façon suivante. Pour chaque $1 \leq i \leq r$, on considère la famille de tous les disques fermés contenus dans U_i (c-à-d, les images par φ_i^{-1} des disques fermés de \mathbb{R}^m contenus dans $\varphi_i(U_i)$). On considère le recouvrement de M formé des intérieurs de ces disques et on extrait un sous-recouvrement fini $\{V_1, \dots, V_k\}$ (s'il y en a plusieurs dans le même U_i , on peut prendre sa réunion ; s'il n'y en a aucun, on peut l'ajouter et le sous-recouvrement reste fini). Enfin, on prend $K_i = \overline{V_i}$. On remarque que chaque K_i a une système de coordonnées associé par construction.

Un recouvrement par compacts $\mathcal{K} = \{(\varphi_i, K_i)\}_{i=1, \dots, r}$ comme celui de la remarque précédente étant donné, on peut faire la définition suivante :

Définition 4.1.11. On dit qu'une fonction $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ est une $(C^2, \varphi_i, K_i, \varepsilon)$ -approximation d'une autre fonction $g : M \rightarrow \mathbb{R}$, si, pour tout $p \in K_i$,

$$|f(p) - g(p)| < \varepsilon, \quad \left| D_j^{p, \varphi_i}(f) - D_j^{p, \varphi_i}(g) \right| < \varepsilon \quad \text{et} \quad \left| D_{jk}^{p, \varphi_i}(f) - D_{jk}^{p, \varphi_i}(g) \right| < \varepsilon,$$

pour tous $1 \leq j, k \leq m$. On dira que f est une $(C^2, \mathcal{K}, \varepsilon)$ -approximation de g si elle est une $(C^2, \varphi_i, K_i, \varepsilon)$ -approximation de g , pour chaque $1 \leq i \leq r$.

La propriété « être une $(C^2, \mathcal{K}, \varepsilon)$ -approximation » dépend d'un choix d'atlas. Pourtant, elle donne une notion de « proximité » entre fonctions différentiables qui est indépendante de ce choix. En effet, notons $C^\infty(M, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonction différentiables sur M et soit $(K_1, \varphi_1), \dots, (K_r, \varphi_r)$ un recouvrement par compacts coordonnés de M . Soient $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction différentiable et $\varepsilon > 0$. On définit des « pseudo-boules »

$$\mathcal{U}(f, \varepsilon) = \{g : M \rightarrow \mathbb{R} \mid \text{existe } 0 < \delta < \varepsilon \text{ tel que } g \text{ est une } (C^2, \mathcal{K}, \delta)\text{-approximation de } f\}.$$

On dira qu'un sous-ensemble $V \subset C^\infty(M, \mathbb{R})$ est un C^2 -ouvert si, pour chaque $f \in V$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $\mathcal{U}(f, \varepsilon) \subset V$. On peut vérifier aisément que la collection des C^2 -ouverts définit une topologie sur $C^\infty(M, \mathbb{R})$. D'ailleurs, cette topologie ne dépend pas du choix de l'atlas. Effectivement, soit $(L_1, \psi_1), \dots, (L_s, \psi_s)$ une autre famille de compacts coordonnés recouvrant M . On note $L_{ij} := K_i \cap L_j$, de sorte que $L_j = L_{1j} \cup \dots \cup L_{rj}$. Prenons $p \in L_{ij}$ et $g \in \mathcal{U}(f, \varepsilon)$. En posant $\varphi_i = (x_1, \dots, x_m)$ et $\psi_j = (y_1, \dots, y_m)$, on a

$$\left| D_k^{p, \psi_j}(f) - D_k^{p, \psi_j}(g) \right| \leq \underbrace{\max_{\substack{h=1, \dots, m \\ p \in L_{ij}}} \left| \frac{\partial x_h}{\partial y_k}(p) \right|}_{:= C_{ij}^k} \cdot \sum_{h=1}^m |D_h^{p, \varphi_i}(f) - D_h^{p, \varphi_i}(g)| < m C_{ij}^k \varepsilon,$$

et

$$\begin{aligned} \left| D_{lk}^{p, \psi_j}(f) - D_{lk}^{p, \psi_j}(g) \right| &\leq \underbrace{\max_{\substack{h=1, \dots, m \\ p \in L_{ij}}} \left| \frac{\partial^2 x_h}{\partial y_l \partial y_k}(p) \right|}_{:= C_{ij}^{lk}} \cdot \sum_{h=1}^m |D_h^{p, \varphi_i}(f) - D_h^{p, \varphi_i}(g)| \\ &\quad + \max_{\substack{h, q=1, \dots, m \\ p \in L_{ij}}} \left| \frac{\partial x_h}{\partial y_k}(p) \right| \cdot \left| \frac{\partial x_q}{\partial y_l}(p) \right| \cdot \sum_{h, q=1}^m |D_{hq}^{p, \varphi_i}(f) - D_{hq}^{p, \varphi_i}(g)| \\ &< m \left(C_{ij}^{lk} + C_{ij}^l C_{ij}^k \right) \varepsilon. \end{aligned}$$

En prenant le maximum des constantes précédents, on déduit qu'il existe $C > 0$ tel que g est une $(C^2, \mathcal{L}, C\varepsilon)$ -approximation de f pour la famille \mathcal{L} de compacts L_1, \dots, L_s . On note $\mathcal{D}(f, C\varepsilon)$ la pseudo-boule de centre f et rayon $C\varepsilon$ pour la deuxième famille de compacts. On remarque alors que

$$\mathcal{B}(f, \varepsilon) \subset \mathcal{D}(f, C\varepsilon),$$

d'où les deux familles définissent la même topologie.

Définition 4.1.12. On appelle *topologie C^2* la topologie qu'on vient de construire.

Lemme 4.1.13. Soit C un compact d'une variété différentielle N de dimension n . L'ensemble des fonctions différentiables sans points critiques dégénérés en C est ouvert.

Démonstration. Soit $(K_1, \varphi_1), \dots, (K_r, \varphi_r)$ une famille comme celle de la remarque 4.1.10. Soit g une fonction sans points critiques dégénérés sur C . On remarque que, puisque les dérivées partielles de g s'annulent en tout point critique p_0 de g , la fonction g n'a pas de points critiques dégénérés en $C \cap K_i$ si, et seulement si,

$$|D_1^{p, \varphi_i}(g)| + \dots + |D_m^{p, \varphi_i}(g)| + |\det H_g| > 0$$

sur $C \cap K_i$. En prenant $\varepsilon > 0$ assez petit, la même inégalité est valide pour une $(C^2, \varphi_i, K_i, \varepsilon)$ -approximation f sur $C \cap K_i$, d'où f n'a pas de points critiques non-dégénérés sur $C \cap K_i$. Puisque l'argument est valide pour tout $1 \leq i \leq r$, on conclut que f n'a pas de points critiques dégénérés sur C . ■

Théorème 4.1.14 (Existence de fonctions de Morse). L'ensemble des fonctions de Morse sur une variété compacte M est dense dans $C^\infty(M, \mathbb{R})$.

Démonstration. On prend un recouvrement par compacts de M comme précédemment. Soit $g : M \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction différentiable. On pose $f_0 := g$ et on va construire, par récurrence, des fonctions f_l qui n'ont pas de points critiques dégénérés en $K_1 \cup K_2 \cup \dots \cup K_l$, pour chaque $l \in \{1, \dots, r\}$. On prouvera que la fonction f_r est une fonction de Morse.

On note $C_l = K_1 \cup K_2 \cup \dots \cup K_l$, qui est compact et $C_0 = \emptyset$, de sorte que le cas $l = 0$ est trivial. Supposons construite une fonction $f_{l-1} : M \rightarrow \mathbb{R}$ sans point critique dégénéré en C_{l-1} et soit $\hat{f}_{l-1} := f_{l-1} \circ \varphi_l^{-1}$. En appliquant le lemme 4.1.9 à l'image par φ_l de l'ouvert coordonné U_l qui contient K_l , il existe $a = (a_1, \dots, a_m) \in \mathbb{R}^m$ de norme arbitrairement petite tel que

$$\hat{f}_{l-1} - \langle \cdot, a \rangle$$

est une fonction de Morse sur $\varphi_l(U_l)$. En composant avec φ_l , on obtient une fonction de Morse définie sur U_l . En particulier, cette fonction n'a pas de point critique dégénéré sur K_l . Pour la prolonger en une fonction définie sur toute la variété, prenons un compact L_l tel que $K_l \subset L_l \subset U_l$ et qu'il existe une fonction plateau $h_l : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ qui vaille 1 sur $\varphi_l(K_l)$ et qui s'annule hors de $\varphi_l(L_l)$. Soit

$$\hat{f}_l^a := \hat{f}_{l-1} - \langle \cdot, a \rangle h_l.$$

La fonction $f_l^a := \hat{f}_l^a \circ \varphi_l$ n'a pas de point critique dégénéré sur K_l et coïncide avec f_{l-1} en dehors de L_l . On peut alors définir

$$f_l(p) = \begin{cases} f_l^a(p), & \text{si } p \in L_l, \\ f_{l-1}(p), & \text{sinon.} \end{cases}$$

Cette fonction n'a pas de points critiques dégénérés sur K_l . Montrons que, d'ailleurs, on peut choisir les a_1, \dots, a_m de sorte que f_l soit une $(C^2, \mathcal{K}, \varepsilon)$ -approximation de f_{l-1} , ce qui implique, d'après le lemme précédent, que f_l n'a pas de points critiques dégénérés sur C_{l-1} non plus et qu'elle est la fonction cherchée. On calcule d'abord sur U_l , où on a

$$|f_{l-1}(p) - f_l(p)| = |\langle \varphi_l(p), a \rangle h_l(\varphi_l(p))|,$$

$$|D_i^{p, \varphi_l}(f_{l-1}) - D_i^{p, \varphi_l}(f_l)| = \left| a_i h_l(\varphi_l(p)) + \langle \varphi_l(p), a \rangle \frac{\partial h_l}{\partial x_i}(\varphi_l(p)) \right|,$$

$$\left| D_{ij}^{p, \varphi_l}(f_{l-1}) - D_{ij}^{p, \varphi_l}(f_l) \right| = \left| a_i \frac{\partial h_l}{\partial x_j}(\varphi_l(p)) + a_j \frac{\partial h_l}{\partial x_i}(\varphi_l(p)) + \langle \varphi_l(p), a \rangle \frac{\partial^2 h_l}{\partial x_i \partial x_j}(\varphi_l(p)) \right|,$$

avec $i, j \in \{1, \dots, m\}$. Chacune des fonctions qui apparaissent accompagnées d'un coefficient a_i dans les expressions précédentes sont bornées sur K_l (par continuité et compacité), donc on peut faire les termes à droite arbitrairement petits en prenant a_1, \dots, a_m de valeur absolue arbitrairement petite, ce qui prouve qu'on peut choisir f_l parmi les $(C^2, K_l, \varphi_l, \varepsilon)$ -approximations de f_{l-1} .

Pour approximer sur le reste de compacts K_j , on remarque que f_l coïncide avec f_{l-1} hors de L_l , donc il suffit de faire les calculs en $L_l \cap K_j$, qui est un sous-ensemble de $U_l \cap U_j$. Or, les différences sur $U_l \cap U_j$ entre f et g et entre leurs dérivées, en coordonnées de U_j , peuvent être obtenues à partir des expressions qu'on a calculées sur U_l en faisant un changement de carte. Puisque les changements de cartes sont des difféomorphismes, les éléments de sa matrice jacobienne sont bornés sur K_l , donc, à nouveau, les fonctions qui vont apparaître avec chaque coefficient a_i sont bornées sur K_j et on peut raisonner comme précédemment. Ceci montre que f_l n'a pas de points critiques dégénérés sur C_l .

La récurrence finit en $C_r = M$, la dernière fonction f_r étant une fonction de Morse sur M . D'ailleurs, en prenant $\varepsilon > 0$ assez petit en chaque étape de la récurrence, on peut obtenir f_k arbitrairement proche de g . ■

4.2 Topologie des sous-niveaux d'une fonction de Morse

L'existence et les bonnes propriétés des fonctions de Morse étant déjà établies, on se propose maintenant d'étudier la topologie des variétés en utilisant l'information que ces fonctions nous fournissent. En particulier, on va décrire les changements dans la topologie des sous-niveaux de la forme $M_c = f^{-1}((-\infty, c])$ lorsqu'on c franchit une valeur critique. Deux résultats clés seront obtenus :

1. Si $f^{-1}([a, b])$ ne contient pas de point critique, alors M_a et M_b sont difféomorphes.
2. Si $c \in \mathbb{R}$ est une valeur critique, alors le type d'homotopie de $M_{c+\varepsilon}$ est celui de $M_{c-\varepsilon}$ avec une cellule attachée, pour $\varepsilon > 0$ assez petit.

Pour démontrer le premier résultat, il faut « étirer » le sous-niveau M_a dans la direction croissante de f . On fera cela en utilisant le flot d'un champ de vecteurs associé à f qui se comporte localement comme un gradient. On étudie ces notions dans les deux premières sous-sections ci-dessous. D'autre part, la démonstration du deuxième résultat se base sur le lemme de Morse, que l'on a déjà prouvé.

4.2.1 Pseudo-gradients

Un *champ de vecteurs* sur une variété M est la donnée, pour chaque point $p \in M$, d'un vecteur tangent $X(p) \in T_p M$. Si on fixe une carte φ autour de p , $X(p)$ admet une expression locale de la forme

$$X(p) = \xi_1(p)D_1^{p,\varphi} + \dots + \xi_m(p)D_m^{p,\varphi},$$

où ξ_1, \dots, ξ_m sont des fonctions définies sur le domaine U de la carte choisie. On dira que X est *différentiable sur U* si chaque ξ_1, \dots, ξ_m l'est. De même, on appellera *champ différentiable* un champ de vecteurs X qui est différentiable sur tout domaine U . On note $\mathfrak{X}(M)$ l'espace vectoriel de tous les champs de vecteurs différentiables sur M .

Pour chaque champ de vecteurs $X \in \mathfrak{X}(M)$ et chaque fonction différentiable $f : M \rightarrow \mathbb{R}$, on définit la *dérivée de f suivant le champ X* , et on note $X \cdot f$, comme la fonction qui à chaque $p \in M$ associe $(X(p))(f)$. En coordonnées,

$$X \cdot f = \xi_1 D_1^\varphi(f) + \dots + \xi_m D_m^\varphi(f),$$

avec $\xi_1, \dots, \xi_m : U \rightarrow \mathbb{R}$.

On rappelle qu'on peut associer à chaque courbe $c : \mathbb{R} \rightarrow M$, $c(t_0) = p$, un élément $X_{c(t_0)}$ de l'espace tangent $T_p M$ de la façon suivante :

$$X_{c(t_0)}(f) = \frac{d}{dt}(f \circ c)(t_0).$$

Si on pose $\varphi \circ c = (c_1, \dots, c_m)$, le terme à droite peut s'écrire en coordonnées comme

$$\frac{d}{dt}(f \circ c)(t_0) = \sum_{k=1}^m \frac{dc_k}{dt}(t_0) \cdot D_k^{p,\varphi}(f),$$

donc on peut voir les vecteurs tangents à M comme les vecteurs vitesse des courbes sur M . Ainsi, on notera parfois

$$c'(t)(f) := X_{c(t)}(f).$$

Champ de gradient local. Un exemple de champ de vecteurs important pour la suite est le gradient (local). Soit (φ, U) une carte de M et f une fonction définie sur U . On appelle *champ de gradient local de f* le champ de vecteurs donné par

$$X_f(p) = D_1^{p,\varphi}(f) \cdot D_1^{p,\varphi} + \dots + D_m^{p,\varphi}(f) \cdot D_m^{p,\varphi}.$$

On remarque que

$$X_f \cdot f = \sum_{k=1}^m (D_k^\varphi(f))^2 \geq 0,$$

et qu'on a l'égalité exactement sur les points critiques f . Supposons, d'ailleurs, que f est une fonction de Morse et U un voisinage canonique de f (cf. théorème 4.1.5), de sorte que, en coordonnées,

$$f = -x_1^2 - \dots - x_\lambda^2 + x_{\lambda+1}^2 + \dots + x_m^2.$$

L'expression du gradient locale dans la base des dérivées partielles est alors

$$X_f = -2x_1 D_1^\varphi - \dots - 2x_\lambda D_\lambda^\varphi + 2x_{\lambda+1} D_{\lambda+1}^\varphi + \dots + 2x_m D_m^\varphi.$$

Le gradient local de f n'est défini que sur un ouvert de M . La définition suivante introduit un champ de vecteurs qui garde ses propriétés et qui est défini globalement sur M . On démontrera que, en effet, un tel champ existe.

Définition 4.2.1 (Pseudo-gradient). Un champ de vecteurs X est un *pseudo-gradient* d'une fonction de Morse $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ s'il vérifie les deux conditions suivantes :

1. $X \cdot f > 0$ sur M privée des points critiques de f ,
2. si p_0 est un point critique de f d'indice λ , alors il existe un voisinage V de p_0 et des coordonnées $\varphi = (x_1, \dots, x_m)$ sur V tels que l'expression locale de f est

$$f = -x_1^2 - \dots - x_\lambda^2 + x_{\lambda+1}^2 + \dots + x_m^2 + f(p_0)$$

et X s'écrit comme son gradient locale :

$$X = -2x_1 D_1^\varphi - \dots - 2x_\lambda D_\lambda^\varphi + 2x_{\lambda+1} D_{\lambda+1}^\varphi + \dots + 2x_m D_m^\varphi.$$

Théorème 4.2.2. Soit $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de Morse définie sur une variété compacte M . Il existe un pseudo-gradient de f .

Démonstration. Prenons un recouvrement de M par compacts $K_1 \subset U_1, \dots, K_r \subset U_r$ comme dans la remarque 4.1.10. De même, on suppose qu'il existe un voisinage de chaque point critique de f , contenu dans un des U_1, \dots, U_r , où la fonction s'écrit en forme canonique (il suffit de prendre d'abord un tel voisinage pour chaque point critique, compléter en un recouvrement fini par ouverts coordonnées, puis construire le recouvrement compact comme précédemment).

Pour chaque $j \in \{1, \dots, r\}$, prenons le gradient local X_j de f sur U_j et une fonction plateau h_j de valeur 1 sur un voisinage V_j de K_j et à support dans un compact L_j tel que $V_j \subset L_j \subset U_j$. On pose

$$X := \sum_{j=1}^r h_j X_j.$$

Montrons que X est un pseudo-gradient. En effet, soit p un point régulier de M , alors il est contenu dans l'un des K_j , de sorte que

$$(h_j X_j \cdot f)(p) = (X_j \cdot f)(p) > 0.$$

Ceci implique que $(X \cdot f)(p) > 0$, car $(h_j X_j \cdot f)(p) \geq 0$ pour tout $j \in \{1, \dots, r\}$. D'ailleurs, si p_0 est un point critique, il est contenu dans un des V_j , de sorte que X coïncide avec le gradient X_j au voisinage de p_0 . De plus, le recouvrement qu'on a construit inclut un voisinage de p_0 où f s'écrit en forme standard. Il suffit de prendre l'intersection de ces deux derniers voisinages pour obtenir la condition 2 de la définition 4.2.1. ■

Comme on l'a dit dans l'introduction, pour que l'étude de la topologie des sous-niveaux de f soit effectif, il est important qu'il n'y aie pas deux points critiques dans la même ligne de niveau. Une première application des pseudo-gradients est la construction de fonctions Morse vérifiant cette condition.

Théorème 4.2.3. Soit $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de Morse sur M , et soient p_1, p_2, \dots, p_r ses points critiques. Il existe une fonction de Morse \tilde{f} dont ses points critiques sont p_1, \dots, p_r et telle que

$$\tilde{f}(p_i) \neq \tilde{f}(p_j), \quad \text{quand } i \neq j.$$

Démonstration. Supposons que $f(p_1) = f(p_2) = c$. Soit U un voisinage canonique de p_1 , associé à la carte $\varphi = (x_1, \dots, x_m)$, de sorte que l'expression locale de f soit

$$f = -x_1^2 - \dots - x_\lambda^2 + x_{\lambda+1}^2 + \dots + x_m^2 + c.$$

Soit X_f un pseudo-gradient de f , et on calcule $X_f \cdot f$ en coordonnées :

$$\begin{aligned} X_f \cdot f &= (D_1^\varphi(f))^2 + \dots + (D_\lambda^\varphi(f))^2 + \dots + (D_m^\varphi(f))^2 \\ &= 4(x_1^2 + \dots + x_\lambda^2 + \dots + x_m^2). \end{aligned}$$

Prenons $\varepsilon > 0$ tel que les disques D_ε et $D_{2\varepsilon}$ de centre $\varphi(p_1)$ et de rayons ε et 2ε , respectivement, sont contenus dans $\varphi(U)$. La couronne $D_{2\varepsilon} - \text{int}(D_\varepsilon)$ délimitée par ces deux disques a pour équation $4\varepsilon^2 \leq X_f \cdot f \leq 4(2\varepsilon)^2$. Soit $h : M \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction plateau qui vaut 1 sur $\varphi^{-1}(D_\varepsilon)$ et qui s'annule en dehors de $\varphi^{-1}(\text{int}(D_{2\varepsilon}))$. On définit maintenant \tilde{f} par

$$\tilde{f} = f + ah,$$

où a est un réel de valeur absolue arbitrairement petite. Puisque $f = \tilde{f}$ hors de U , ils ont les mêmes points critiques dans cette région. De même, $h = 1$ sur $\varphi^{-1}(\text{int}(D_\varepsilon))$, donc le seul point critique des deux fonctions dans cet ouvert est p_1 . Il reste à vérifier que les deux fonctions ont aussi les mêmes points critiques dans la région correspondante à la couronne circulaire. On calcule les différences entre les dérivées partielles de f et \tilde{f} :

$$\left| D_i^\varphi(f) - D_i^\varphi(\tilde{f}) \right| = |aD_i^\varphi(h)|, \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

En choisissant a assez petit, on peut alors faire la différence entre $\sum_{i=1}^m (D_i^\varphi(f))^2$ et $\sum_{i=1}^m (D_i^\varphi(\tilde{f}))^2$ arbitrairement petite. Or, la valeur minimale de $\sum_{i=1}^m (D_i^\varphi(f))^2 = X_f \cdot f$ est supérieure à $4\varepsilon^2$ dans la région dont on s'intéresse, donc $\sum_{i=1}^m (D_i^\varphi(\tilde{f}))^2 > 0$ aussi. Ceci prouve que les points critiques de f et \tilde{f} sont les mêmes. D'ailleurs,

$$\tilde{f}(p_1) = f(p_1) + a, \quad \tilde{f}(p_2) = f(p_2).$$

En répétant l'argument avec le reste de points critiques, on obtient la fonction recherchée. ■

4.2.2 Flot d'un champ de vecteurs

Pour l'étude de l'évolution de la topologie des sous-niveaux, une notion importante est le *flot* des pseudo-gradients. Cela nous amène à l'étude des courbes intégrales des champs de vecteurs. Les courbes intégrales d'un champ de vecteurs sont des courbes différentiables dont le vecteur vitesse en chaque point coïncide avec la valeur du champ de vecteurs. La collection de toutes les courbes intégrales détermine une famille de difféomorphismes qu'on appellera le *flot* du champ.

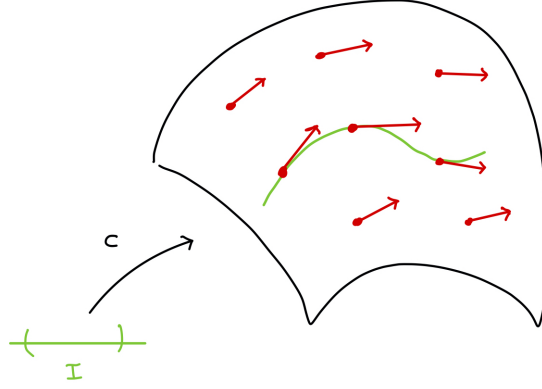


FIGURE 35 – Courbe intégrale d'un champ de vecteurs sur une variété.

Définition 4.2.4. On dit qu'une courbe $c : I \subset \mathbb{R} \rightarrow M$ est une *courbe intégrale* d'un champ de vecteurs X si, pour chaque $t \in I$,

$$X(c(t)) = c'(t).$$

En introduisant des coordonnées $\varphi = (x_1, \dots, x_m)$, on peut écrire $\varphi \circ c = (c_1, \dots, c_m)$. La définition précédente revient alors à dire que c est une courbe intégrale de

$$X = \xi_1 D_1^\varphi + \dots + \xi_m D_m^\varphi$$

si, et seulement si,

$$\frac{dc_i}{dt} = \xi_i(c_1, \dots, c_m), \quad i = 1, \dots, m.$$

L'existence de solutions locales dépendant régulièrement des conditions initiales est ainsi garantie par les théorèmes d'existence et unicité de solutions pour les équations différentielles ordinaires. En particulier, pour chaque champ de vecteurs $X \in \mathfrak{X}(M)$ et chaque point $p \in M$, il existe un $\varepsilon > 0$ et une courbe différentiable $c : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$ qui est une courbe intégrale de X vérifiant $c(0) = p$.

On étudie le comportement des courbes intégrales par translation et changement d'échelle :

Lemme 4.2.5. Soient $X \in \mathfrak{X}(M)$ un champ de vecteurs, $J \subset \mathbb{R}$ un intervalle, et $c : J \rightarrow M$ une courbe intégrale de X . Pour chaque $a \in \mathbb{R}$, la courbe $\tilde{c} : \tilde{J} \rightarrow M$ définie par $\tilde{c}(t) = c(at)$ est une courbe intégrale du champ de vecteurs aX , où $\tilde{J} = \{t : at \in J\}$.

Démonstration. Un calcul simple nous donne, pour chaque $t_0 \in \tilde{J}$ et chaque $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ différentiable,

$$\begin{aligned} \tilde{c}'(t_0)(f) &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=t_0} (f \circ \tilde{c})(t) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=t_0} (f \circ c)(at) \\ &= a(f \circ c)'(at_0) = ac'(at_0)(f) = aX(\tilde{c}(t_0))(f), \end{aligned}$$

ce qui prouve le résultat. ■

Lemme 4.2.6. Soient X, M, J et c comme dans le lemme précédent. Pour chaque $b \in \mathbb{R}$, la courbe $\hat{c} : \hat{J} \rightarrow M$ définie par $\hat{c}(t) = c(t+b)$ est aussi une courbe intégrale de X , où $\hat{J} = \{t : t+b \in J\}$.

Démonstration. On calcule, pour $t_0 \in \mathbb{R}$ et $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ différentiable,

$$\begin{aligned} \hat{c}'(t_0)(f) &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=t_0} (f \circ \hat{c})(t) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=t_0} (f \circ c)(t+b) \\ &= (f \circ c)'(t_0+b) = c'(t_0+b)(f) = X(\hat{c}(t_0))(f), \end{aligned}$$

d'où le résultat. ■

Considérons encore un champ $X \in \mathfrak{X}(M)$ et supposons que X possède une unique courbe intégrale qui passe par $p \in M$ en temps $t = 0$ et qui est définie pour tout $t \in \mathbb{R}$ (ce n'est pas toujours le cas), que l'on note $\theta^{(p)} : \mathbb{R} \rightarrow M$. Pour chaque $t \in \mathbb{R}$, on peut définir une application $\theta_t : M \rightarrow M$ par

$$\theta_t(p) = \theta^{(p)}(t).$$

Le résultat sur les translation qu'on a montré ci-dessus implique que $t \mapsto \theta^{(p)}(t + s)$ est une courbe intégrale de X qui passe par $q := \theta^{(p)}(s)$ en $t = 0$. Puisqu'on a supposé que les courbes intégrales sont uniques, on a

$$\theta^{(q)}(t) = \theta^{(p)}(t + s).$$

On peut réécrire cela en termes des applications θ_t de la façon suivante :

$$\theta_t \circ \theta_s(p) = \theta_t(\theta^{(p)}(s)) = \theta_t(q) = \theta^{(q)}(t) = \theta^{(p)}(t + s) = \theta_{t+s}(p).$$

Étant donné aussi que $\theta_0(p) = \theta^{(p)}(0) = p$, ceci implique que l'application $\theta : \mathbb{R} \times M \rightarrow M$ est une action du groupe additive \mathbb{R} sur M . Cet analyse motive la définition suivante :

Définition 4.2.7. Un *flot global* ou *groupe à un paramètre de difféomorphismes* sur une variété M est une application différentiable $\theta : \mathbb{R} \times M \rightarrow M$ telle que

1. pour chaque $t \in \mathbb{R}$, l'application $\theta_t : M \rightarrow M$, $p \mapsto \theta(t, p)$, est un difféomorphisme de M sur elle-même,
2. pour tous $t, s \in \mathbb{R}$, $\theta_{t+s} = \theta_t \circ \theta_s$.

Un groupe à un paramètre de difféomorphismes θ étant donné, on peut définir un champ de vecteurs sur M en posant

$$X(p) := \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \theta_t(p),$$

pour chaque $p \in M$. On dit que X engendre le groupe θ . On remarque que, pour chaque $p \in M$, $t \mapsto \theta_t(p)$ est une courbe intégrale de ce champ par construction.

Dans les paragraphes précédents on est partis de la supposition que les courbes intégrales sont définies sur \mathbb{R} tout entier. Les champs vérifiant cette condition sont dits *complètes*. Le lemme suivante démontre que tout champ de vecteurs à support compact est complète. On utilisera ce fait dans la sous-section suivante pour l'étude de la topologie des sous-niveaux.

Lemme 4.2.8. Un champ de vecteurs différentiable sur M qui s'annule hors d'un compact $K \subset M$ engendre un unique groupe à un paramètre de difféomorphismes de M .

Démonstration. Soient X un champ de vecteurs et θ un groupe à un paramètre de difféomorphismes. On remarque que X engendre θ si, et seulement si, pour chaque $p \in M$ fixe, la courbe $t \mapsto \theta_t(p)$ est une courbe intégrale de X vérifiant la condition initiale $\theta_0(p) = p$, c-à-d,

$$\begin{cases} X_{\theta_t(p)} = X(\theta_t(p)), \\ \theta_0(p) = p. \end{cases}$$

En effet, si l'équation précédent se vérifie pour chaque p , le champ X clairement engendre θ . Réciproquement, si $X(p) = X_{\theta_0(p)}$ pour chaque $p \in M$, on écrit $p = \theta_t(q)$, avec t fixe, de sorte que

$$X(\theta_t(q)) = X(p) = X_{\theta_0(p)} = X_{\theta_0(\theta_t(q))} = X_{\theta_t(q)}.$$

D'après la remarque qu'on a fait au début de la sous-section, pour chaque $q \in M$, il existe un voisinage U et un $\varepsilon > 0$ tels que l'équation différentielle précédente admet une unique solution

différentiable défini sur $|t| < \varepsilon$. Puisque $K \subset M$ est compact, on peut le couvrir par un nombre fini de tels voisinages. Soit ε_0 le plus petit des ε correspondants. L'unicité des solutions garantit que les solutions trouvées localement sont compatibles dans l'intersection des domaines. De plus, l'équation est vérifiée trivialement par la courbe constante $\theta_t(p) = p$, si $p \notin K$. On a trouvé, ainsi une solution globale θ_t , pour $|t| < \varepsilon_0$, qui est différentiable en ses deux variables.

On fixe $0 < s < \varepsilon_0$ et $q \in M$. Les courbes $\psi_t^1(q) := \theta_{t+s}(q)$ et $\psi_t^2(q) := \theta_t \circ \theta_s(q)$, $|s+t| < \varepsilon$, sont deux solutions de l'équation différentielle $X_{\theta_t(q)} = X(\theta_t(q))$ telles que $\psi_0^1(p) = \psi_0^2(p)$. On en déduit que $\theta_{t+s}(p) = \theta_t \circ \theta_s(p)$, par l'unicité des solutions.

Il reste à définir θ_t pour $|t| \geq \varepsilon_0$. Pour cela, on écrit chaque $t \in \mathbb{R}$ sous la forme $t = k(\varepsilon_0/2) + r$, avec $k \in \mathbb{Z}$ et $|r| < \varepsilon_0/2$. Il suffit de prendre

$$\theta_t = \underbrace{\theta_{\varepsilon_0/2} \circ \dots \circ \theta_{\varepsilon_0/2}}_{k \text{ fois}} \circ \theta_r;$$

pour $k \geq 0$ et

$$\theta_t = \underbrace{\theta_{-\varepsilon_0/2} \circ \dots \circ \theta_{-\varepsilon_0/2}}_{-k \text{ fois}} \circ \theta_r,$$

pour $k < 0$. Cette application est bien définie. En effet, si $t = k(\varepsilon_0/2)$ pour un certain $k \in \mathbb{Z}$, la définition est univoque; alors que, pour $t = k(\varepsilon_0/2) + r = (k+1)(\varepsilon_0/2) + (r - \varepsilon_0/2)$, avec $k \in \mathbb{Z}$ et $r > 0$, on a

$$\begin{aligned} \underbrace{\theta_{\varepsilon_0/2} \circ \dots \circ \theta_{\varepsilon_0/2}}_{k \text{ fois}} \circ \theta_r &= \underbrace{\theta_{\varepsilon_0/2} \circ \dots \circ \theta_{\varepsilon_0/2}}_{k \text{ fois}} \circ \theta_{\varepsilon_0/2} \circ \theta_{-\varepsilon_0/2} \circ \theta_r \\ &= \underbrace{\theta_{\varepsilon_0/2} \circ \dots \circ \theta_{\varepsilon_0/2}}_{k \text{ fois}} \circ \theta_{\varepsilon_0/2} \circ \theta_{r-\varepsilon_0/2}, \end{aligned}$$

car $\theta_t \circ \theta_s = \theta_s \circ \theta_t$ quand $|s|, |t|, |s+t| < \varepsilon_0$. D'ailleurs, elle est différentiable car on peut toujours choisir k et r de manière que k reste constant au voisinage de t et la différentiabilité découle par composition. Enfin, pour montrer $\theta_{t+s} = \theta_t \circ \theta_s$, pour $t, s \in \mathbb{R}$, il suffit de remarquer que, dans la définition de θ_t , $\theta_{\pm\varepsilon_0/2}$ et θ_r commutent. ■

4.2.3 Évolution de la topologie des sous-niveaux

Pour une fonction $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ donnée, notons

$$M_a = f^{-1}((-\infty, a]) = \{p \in M : f(p) \leq a\}.$$

Théorème 4.2.9. Soit $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de Morse sur une variété compacte M et soient $a < b$. Supposons que $f^{-1}([a, b])$ ne contient aucun point critique de f . Alors, M_a est difféomorphe à M_b . En outre, M_a est une rétraction par déformation de M_b .

Démonstration. Soit X un pseudo-gradient pour f . Soit $h : M \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction plateau qui vaut 1 sur le compact $f^{-1}([a, b])$ et qui s'annule hors d'un voisinage compact de cet ensemble ne contenant aucun point critique de f . Alors, le champ de vecteurs

$$Y = \frac{h}{X \cdot f} X$$

est bien définie sur M et vérifie les conditions du lemme 4.2.8. Soit $\varphi_t : M \rightarrow M$ le groupe à un paramètre engendré par Y . D'après la démonstration du lemme, $\varphi_t(p)$ est une courbe intégrale de Y pour chaque $p \in M$. Si $\varphi_t(p) \in f^{-1}([a, b])$, alors

$$\frac{d}{dt} f(\varphi_t(p)) = (Y \cdot f)(\varphi_t(p)) = \frac{h(\varphi_t(p))}{X \cdot f(\varphi_t(p))} X \cdot f(\varphi_t(p)) = 1.$$

C'est-à-dire, $f \circ \varphi_t(p)$ est une fonction linéaire de dérivée $+1$, de sorte que, pour chaque $q \in f^{-1}(a)$,

$$f(\varphi_{b-a}(q)) = f(\varphi_0(q)) + (b-a) = a + (b-a) = b.$$

Donc, le difféomorphisme φ_{b-a} envoie M_a en M_b , ce qui prouve la première partie du théorème.

Enfin, on définit une homotopie $r_t : M_b \rightarrow M_b$ par

$$r_t(p) = \begin{cases} p, & \text{si } f(p) \leq a, \\ \varphi_{t(a-f(p))}(p), & \text{si } a < f(p) \leq b. \end{cases}$$

Alors, r_0 est l'identité et r_1 est une rétraction de M_b en M_a .

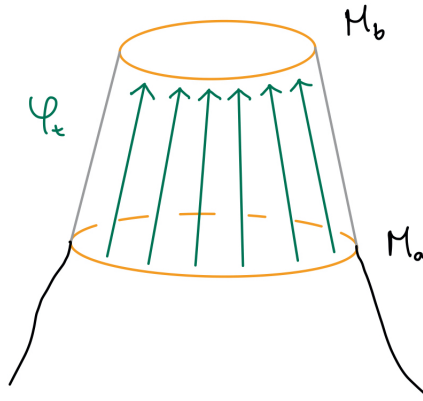


FIGURE 36 – On déforme M_a en M_b en utilisant le flot d'un pseudo-gradient.

■

Définition 4.2.10 (Attachement d'une cellule). Soient X un espace topologique quelconque et \mathbb{D}^k le disque unitaire fermé de \mathbb{R}^k . On note \mathbb{S}^{k-1} sa frontière. Si $f : \mathbb{S}^{k-1} \rightarrow X$ est une application continue, alors l'espace topologique

$$X \cup_f \mathbb{D}^k$$

est un *attachement d'une k -cellule* sur l'espace topologique X . Pour le cas $k = 0$, on définit $X \cup \mathbb{D}^0$ simplement comme l'union disjointe de X et un point.

Théorème 4.2.11. Soient $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction différentiable sur une variété compacte M et p un point critique non-dégénéré de f d'indice λ . On écrit $f(p) = c$ et on suppose que $f^{-1}([c - \varepsilon, c + \varepsilon])$ est compact et ne contient pas de points critiques de f différents de p , pour un certain $\varepsilon > 0$. Alors, si ε est assez petit, $M_{c+\varepsilon}$ a le même type d'homotopie que l'espace obtenue en attachant une k -cellule au sous-niveau $M_{c-\varepsilon}$.

Démonstration. Prenons une carte (φ, U) , avec $p \in U$ et $\varphi = (x_1, \dots, x_m)$, telle que l'expression de f en coordonnées soit

$$f = -x_1^2 - \dots - x_\lambda^2 + x_{\lambda+1}^2 + \dots + x_m^2 + c.$$

Soit $\varepsilon > 0$ tel que $f^{-1}([c - \varepsilon, c + \varepsilon])$ est un compact et $\varphi(U)$ contient le disque $\{(x_1, \dots, x_m) : x_1^2 + \dots + x_m^2 \leq 2\varepsilon\}$. Soit e_λ l'ensemble des points de U vérifiant l'équation en coordonnées

$$x_1^2 + \dots + x_\lambda^2 \leq \varepsilon \quad \text{et} \quad x_{\lambda+1} = \dots = x_m = 0.$$

On note \hat{e}_λ sa frontière et on remarque que $M_{c-\varepsilon} \cap e_\lambda = \hat{e}_\lambda$, donc e_λ est attaché à $M_{c-\varepsilon}$ (via l'identité sur \hat{e}_λ). Montrons que $M_{c-\varepsilon} \cup e_\lambda$ est, en effet, une rétraction par déformation de $M_{c+\varepsilon}$.

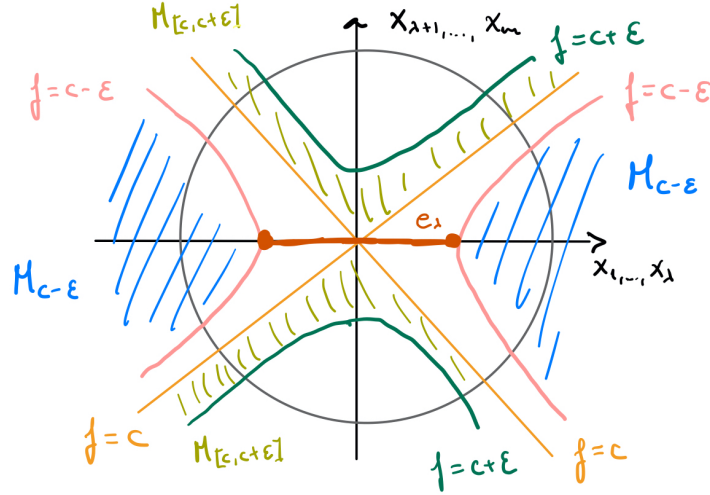


FIGURE 37 – Représentation en coordonnées du voisinage canonique du point critique.

Soit $\mu : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ une fonction C^∞ vérifiant : (i) $\mu(0) > \epsilon$; (ii) $\mu(r) = 0$, pour tout $r \geq 2\epsilon$; et (iii) $-1 < \mu'(r) \leq 0$, pour tout $r \in \mathbb{R}$. On définit $F : M \rightarrow \mathbb{R}$ en posant $F = f$ à l'extérieur de U et

$$F = f - \mu(x_1^2 + \dots + x_\lambda^2 + 2x_{\lambda+1}^2 + \dots + 2x_m^2)$$

sur U . Cette fonction est bien définie et différentiable, car le deuxième terme dans l'expression précédente s'annule hors d'un compact contenu dans U et f et μ sont différentiables. On définit, de même, des fonctions $\xi, \eta : U \rightarrow [0, +\infty)$ données par

$$\xi = x_1^2 + \dots + x_\lambda^2 \quad \text{et} \quad \eta = x_{\lambda+1}^2 + \dots + x_m^2.$$

Ainsi, $f = c - \xi + \eta$ et, pour chaque $q \in U$,

$$F(q) = c - \xi(q) + \eta(q) - \mu(\xi(q) + 2\eta(q)).$$

Affirmation 1. La région $F^{-1}((-\infty, c + \epsilon])$ coïncide avec $M_{c+\epsilon} = f^{-1}((-\infty, c + \epsilon])$.

En effet, l'ellipsoïde d'équation en coordonnées $\xi + 2\eta \leq 2\epsilon$ est contenu dans les deux preimages car μ est positive sur \mathbb{R} , de sorte que

$$F \leq f = c - \xi + \eta \leq c + \frac{1}{2}\xi + \eta \leq c + \epsilon$$

sur $\xi + 2\eta \leq 2\epsilon$. D'ailleurs, f et F coïncident à l'extérieur de cette région, d'où le résultat.

Affirmation 2. F et f ont les mêmes points critiques.

On remarque que

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x_i} &= 2x_i \frac{\partial F}{\partial \xi}, & \text{si } i = 1, \dots, \lambda, \\ \frac{\partial F}{\partial x_i} &= 2x_i \frac{\partial F}{\partial \eta}, & \text{si } i = \lambda + 1, \dots, m, \end{aligned}$$

et que

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial \xi} &= -1 - \mu'(\xi + 2\eta) < 0, \\ \frac{\partial F}{\partial \eta} &= 1 - 2\mu'(\xi + 2\eta) \geq 1, \end{aligned}$$

d'où le seul point critique de F sur U est p . Puisque f et F coïncident sur $M \setminus U$, les deux fonctions ont les mêmes points critiques.

Affirmation 3. La région $F^{-1}((-\infty, c - \varepsilon])$ est une rétraction par déformation de $M_{c+\varepsilon}$.

On a déjà prouvé dans l'affirmation 1 que $M_{c+\varepsilon} = F^{-1}((-\infty, c + \varepsilon])$, donc il faut démontrer que $F^{-1}((-\infty, c - \varepsilon])$ est une rétraction par déformation de $F^{-1}((-\infty, c + \varepsilon])$. Considérons la région $F^{-1}([c - \varepsilon, c + \varepsilon])$. D'après l'affirmation 1 et que $F \leq f$, on a

$$F^{-1}([c - \varepsilon, c + \varepsilon]) \subset f^{-1}([c - \varepsilon, c + \varepsilon]).$$

En particulier, $F^{-1}([c - \varepsilon, c + \varepsilon])$ est compact et il ne contient aucun point critique sauf, peut-être, p . Or,

$$F(p) = c - \mu(0) < c - \varepsilon,$$

donc $p \notin F^{-1}([c - \varepsilon, c + \varepsilon])$ et on peut appliquer le théorème 4.2.9 pour obtenir le résultat.

Notons H l'adhérence de $F^{-1}((-\infty, c - \varepsilon]) \setminus M_{c-\varepsilon}$ et écrivons $F^{-1}((-\infty, c - \varepsilon]) = M_{c-\varepsilon} \cup H$. On remarque que $e_\lambda \subset H$. Effectivement, puisque $\frac{\partial F}{\partial \xi} < 0$ et $\xi(q) > \xi(p)$ pour tout $q \in e_\lambda$, on a

$$F(q) \leq F(p) = c - \mu(0) \leq c - \varepsilon,$$

d'où $e_\lambda \subset F^{-1}((-\infty, c - \varepsilon])$. Mais, $f(q) = c - \xi(q) \geq c - \varepsilon$, ce qui prouve que $e_\lambda \subset H$.

Affirmation 4. $M_{c-\varepsilon} \cup e_\lambda$ est une rétraction par déformation de $M_{c-\varepsilon} \cup H = F^{-1}((-\infty, c - \varepsilon])$.

On définit la rétraction $r_t : M_{c-\varepsilon} \cup H \rightarrow M_{c-\varepsilon} \cup H$ en distinguant trois cas :

1. Sur la région $\xi \leq \varepsilon$, on r_t est donné par

$$(x_1, \dots, x_m) \mapsto (x_1, \dots, x_\lambda, tx_{\lambda+1}, \dots, tx_m).$$

Ainsi, r_1 est l'identité et l'image de r_0 est dans e_λ . D'ailleurs, pour tout $t \in [0, 1]$, $r_t|_{e_\lambda} = \text{id}_{e_\lambda}$ et r_t envoie $F^{-1}((-\infty, c - \varepsilon])$ en lui-même, car $\frac{\partial F}{\partial \eta} > 0$.

2. Sur la région $\varepsilon \leq \xi \leq \eta + \varepsilon$ on définit r_t comme la transformation

$$(x_1, \dots, x_m) \mapsto (x_1, \dots, x_\lambda, s_t x_{\lambda+1}, \dots, s_t x_m),$$

où $s_t \in [0, 1]$ est donné par

$$s_t = t + (1 - t) \sqrt{\frac{\xi - \varepsilon}{\eta}},$$

de sorte que r_1 est à nouveau l'identité. En outre, r_0 a pour image l'hypersurface $f^{-1}(c - \varepsilon)$. En effet, pour chaque q dans $\varepsilon \leq \xi \leq \eta + \varepsilon$, on a

$$f(r_1(q)) = c - \xi(r_1(q)) + \eta(r_1(q)) = c - \xi(q) + \frac{\xi(q) - \varepsilon}{\eta(q)} \eta(q) = c - \varepsilon.$$

On remarque, aussi, que s_t est bornée sur $\varepsilon \leq \xi \leq \eta + \varepsilon$, car

$$0 \leq \frac{\xi - \varepsilon}{\eta} \leq \frac{\eta + \varepsilon - \varepsilon}{\eta} = 1,$$

de sorte que $s_t(q)x_i(q) \rightarrow 0$ quand $\xi \rightarrow \varepsilon$ et $\eta \rightarrow 0$, pour chaque q dans la région. Ainsi, la rétraction qu'on vient de construire est continue et coïncide sur $\xi = \varepsilon$ avec la fonction qu'on a définie dans le point précédent.

3. Sur la région $\eta + \varepsilon \leq \xi$, il suffit de prendre r_t égale à l'identité pour chaque t .

La construction précédente montre que $M_{c-\varepsilon} \cup e_\lambda$ est une rétraction par déformation de $M_{c-\varepsilon} \cup H = F^{-1}((-\infty, c - \varepsilon])$. L'affirmation 3 qu'on a montrée précédemment nous donne alors le résultat.

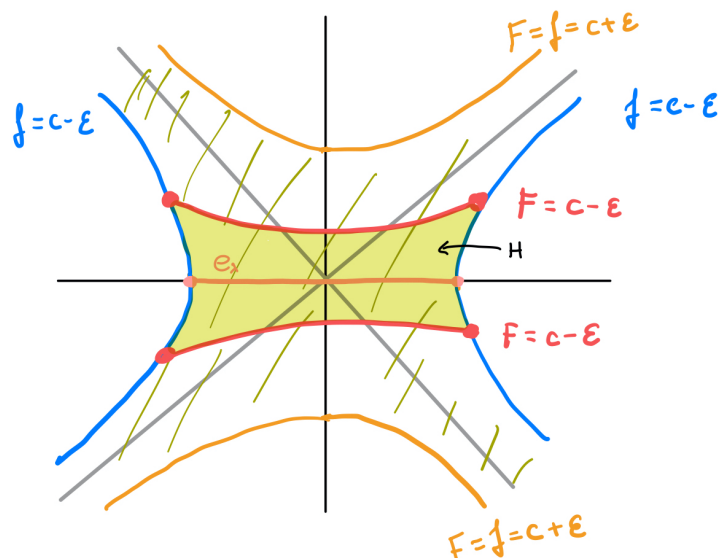


FIGURE 38 – Représentation en coordonnées des sous-niveaux de F .

■

5 Classification des surfaces fermées orientables

La théorie de Morse qu'on a décrit dans la section précédente constitue un outil très puissant pour l'étude de la topologie des variétés. On va exploiter cette théorie pour établir une classifications des surfaces fermées et orientables. Classifier les surfaces revient à donner une liste de surfaces non difféomorphes et telle que toute surface est difféomorphe à un des éléments de la liste. Plus précisément, on se propose de démontrer le théorème suivant :

Théorème de classification des surfaces fermées orientables. Toute surface connexe, fermée et orientable est difféomorphe à la sphère ou à la « somme connexe » d'un certain nombre g de tores.

La notion de somme connexe sera proprement établie ci-dessous mais, en quelque sorte, cela consiste à recoller deux variétés de la façon la plus simple possible (voir la figure 42 pour avoir une idée intuitive). La démonstration du est à nouveau fondée sur l'étude des sous-niveaux d'une fonction de Morse.

5.1 Recollement de variétés à bord

On commence par démontrer un résultat technique très utile pour l'étude des variétés à bord : l'existence de *voisines collier*. On l'utilisera pour formaliser la notion de récolement de deux variétés le long de leurs bords.

Définition 5.1.1. Soit M une variété à bord. On appelle *voisinage collier* de ∂M un voisinage U du bord ∂M de la variété qui est difféomorphe à $\partial M \times [0, 1)$.

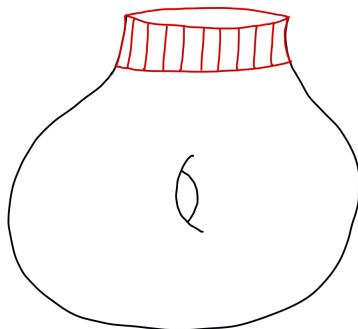


FIGURE 39 – Voisinage collier du bord d’une variété.

Pour démontrer qu’un tel voisinage existe, on utilisera, comme dans le théorème 4.2.9, le flot d’un champ de vecteurs défini au voisinage du bord, qui nous permettra « d’étirer » le bord pour obtenir le collier. En particulier, on a besoin d’une famille de courbes intégrales commençant en un point du bord et qui pénètrent dans la variété. Autrement dit, on a besoin d’un champ de vecteurs qui pointe vers l’intérieur en tout point de ∂M . Montrons qu’on peut toujours choisir un tel champ :

Lemme 5.1.2. Soit M une variété différentielle à bord. Alors, il existe un champs de vecteurs X sur M tel que $X(p)$ pointe vers l’intérieur pour tout $p \in \partial M$.

Démonstration. On commence par remarquer que, si $X_1, \dots, X_k \in T_p M$ pointent vers l’intérieur, $\lambda_1, \dots, \lambda_k \geq 0$ et $\sum \lambda_i > 0$, alors $X = \sum_i \lambda_i X_i$ pointe aussi vers l’intérieur. Soient maintenant $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ un atlas de M et $\{\psi_\alpha\}_{\alpha \in A}$ une partition de l’unité subordonnée. Sur chaque U_α , on considère le champs de vecteur constant défini par

$$X_\alpha(p) = T_{\varphi(p)} \varphi^{-1} \left(\frac{\partial}{\partial x_n} \right).$$

Il suffit de prendre alors

$$X = \sum_{\alpha \in A} \psi_\alpha X_\alpha,$$

qui est défini sur M toute entière. ■

On peut maintenant prouver l’existence d’un collier de ∂M :

Théorème 5.1.3 (Voisinage collier). Soit M un variété différentielle à bord. Supposons que ∂M est compact. Alors, il existe un voisinage $U \subset M$ de ∂M difféomorphe à $\partial M \times [0, 1)$.

Démonstration. Soit $X \in \mathfrak{X}(M)$ un champ de vecteurs comme celui du lemme précédent. Pour chaque $p \in \partial M$, une courbe intégrale de X commençant en p est donnée pour la solution de l’équation différentielle

$$\begin{cases} X_{\theta_t(p)} = X(\theta_t(p)), \\ \theta_0(p) = p. \end{cases}$$

Puisque le champ pointe vers l’intérieur, les solutions sont dans M pour $t > 0$ assez petit. En raisonnant comme dans la preuve du lemme 4.2.8, on a alors un voisinage $U \subset M$ et un $\varepsilon_p > 0$ tels que la solution est définie pour $t \in [0, \varepsilon_p)$ avec dépendance différentiable en les conditions initiales sur U . Or, ∂M est compact, donc on peut le couvrir par un nombre fini de voisinages comme ça. Soit $\varepsilon > 0$ le plus petit des ε_p correspondants. Par unicité, les solutions trouvés sont compatibles dans

l'intersection des domaines. On a ainsi une fonction différentiable $\theta : [0, \varepsilon] \times \partial M \rightarrow M$, $(t, p) \mapsto \theta_t(p)$. Puisque $\theta_0(p) = p$ pour chaque p , on a

$$T_{(0,p)}\theta(0, X) = X$$

pour tout $X \in T_p\partial M$. De même, par construction on a

$$T_{(0,p)}\theta\left(\frac{\partial}{\partial t}, 0\right) = X(p).$$

Mais, pour chaque $p \in \partial M$, $X(p)$ pointe vers l'intérieur. En particulier, $X(p) \notin T_p\partial M$ et on en déduit que $T_{(0,p)}\theta$ est un isomorphisme pour tout $p \in \partial M$. Le théorème d'inversion locale garantit alors l'existence d'un voisinage $V_p \subset \partial M$ contenant p et d'un $\delta_p > 0$ tels que $\theta|_{[0, \delta_p] \times V_p}$ est un difféomorphisme sur un ouvert de M . Ces voisinages V_p recouvrent le bord. En utilisant à nouveau la compacité de ∂M , on peut prendre un sous-recouvrement fini, que l'on écrit $\{V_i\}_{i=1}^N$. En posant $\delta = \min_i \delta_i$, on obtient un difféomorphisme locale $F := \theta|_{[0, \delta] \times \partial M}$ de $[0, \delta] \times \partial M$ sur son image dans M .

On va construire maintenant, par restriction de F , le difféomorphisme recherché. En particulier, on va démontrer qu'il existe un $0 < \delta^* < \delta$ tel que $F|_{[0, \delta^*] \times \partial M}$ est injective. Supposons, par l'absurde, qu'il n'existe pas un tel $\delta^* > 0$. On peut alors construire des suites $\{(s_n, p_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ et $\{(r_n, q_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ telles que $s_n, t_n \rightarrow 0$, $(s_n, p_n) \neq (r_n, q_n)$ et $F(s_n, p_n) = F(r_n, q_n)$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. Puisque M est métrisable et δM est compact, en prenant une sous-séquence si nécessaire, on a $p_n \rightarrow p$ et $q_n \rightarrow q$ pour certains $p, q \in \partial M$. Ainsi,

$$F(s_n, p_n) \rightarrow F(0, p) = p \quad \text{et} \quad F(r_n, q_n) \rightarrow F(0, q) = q,$$

d'où $p = q$. Or, F est un difféomorphisme local en $(0, p)$, donc il existe un voisinage de ce point où la restriction de F est injective. On obtient une contradiction car, pour n assez grand, (s_n, p_n) et (r_n, q_n) sont arbitrairement proches de $(0, p)$. ■

Considérons maintenant deux variétés compactes à bord M et N . Soient U, V deux voisinages collier de M et N , respectivement. Notons $f : M \times [0, 1] \rightarrow U$ et $g : \partial N \times [0, 1] \rightarrow V$ des paramétrages de ces voisinages. On peut recoller les deux variétés en « imbriquant » l'un des voisinages dans l'autre, comme la figure suivante évoque :

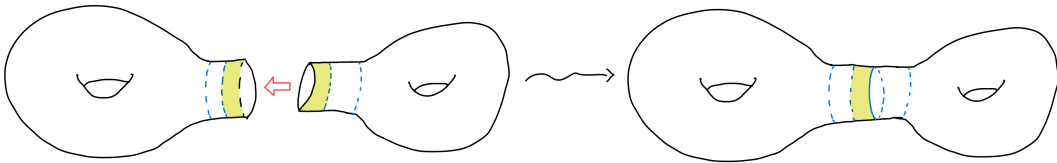


FIGURE 40 – Recollement de deux variétés le long de leurs bords.

On peut formaliser cette construction de la façon suivante. Supposons ∂M et ∂N connexes et orientés comme le bord de M et N . Soit $h : \partial M \rightarrow \partial N$ un difféomorphisme reversant l'orientation. On définit le *recollement de M et N le long de leurs bords* comme l'espace topologique obtenu en faisant la somme connexe de M et N puis en identifiant le point (x, t) de U avec le point $(h(x), 1/4 - t)$ de V , pour chaque $t \in [0, 1/4]$. On note cet espace $M \cup_h N$.

On peut munir l'espace $M \cup_h N$ d'une structure différentielle à partir des structures de M et N . En effet, chaque point $p \in M \cup_h N$ est soit un point intérieur à M soit un point intérieur à N , donc on peut prendre une carte intérieure d'une des deux variétés. D'ailleurs, si les domaines de deux cartes φ de M et ψ de N s'intersectent, le changement de carte est donné par $\psi \circ H \circ \varphi^{-1}$, où H

est l'application $(x, t) \mapsto (h(x), 1/4 - t)$, qui est un difféomorphisme. Ainsi, les cartes intérieures de M et N forment un atlas pour $M \cup_h N$. D'ailleurs, $M \cup_h N$ est orientable : puisque h reverse l'orientation, H la préserve et, donc, les orientations de M et N sont compatibles.

Dans la construction précédente on a fait deux choix : le difféomorphisme h et les paramétrages $f : \partial M \times [0, 1) \rightarrow U$ et $g : \partial N \times [0, 1) \rightarrow V$ des voisinages colliers. Le résultat $M \cup_h N$ ne dépend que de la classe d'isotopie de h . En particulier, c'est indépendant du choix de f et g .

Définition 5.1.4. On dit que deux difféomorphismes $h_0, h_1 : U \rightarrow V$ sont *isotopes* s'il existe une application différentiable $H : U \times [0, 1] \rightarrow V$ telle que (i) $H(x, 0) = h_0(x)$, pour tout $x \in U$; (ii) $H(x, 1) = h_1(x)$, pour tout $x \in U$; et l'application $h_t : U \rightarrow V, x \mapsto H(x, t)$, est un difféomorphisme, pour tout $t \in [0, 1]$.

Proposition 5.1.5. Soient M, N deux variétés différentielles à bord où on fixe deux voisinages collier U, V et deux paramétrages f, g de ces colliers. Soient $h_0, h_1 : \partial M \rightarrow \partial N$ deux difféomorphismes reversant l'orientation. Si h_0 et h_1 sont isotopes (via h_t), alors $M \cup_{h_0} N$ et $M \cup_{h_1} N$ sont difféomorphes.

Démonstration. Soit $W = M \sqcup N$ la réunion disjointe de M et N , qui est une variété différentielle dont l'atlas est la réunion des atlas de M et N . On pose $W_0 = M \cup_{h_0} N$ et $W_1 = M \cup_{h_1} N$. Soient $U \cong_f \partial M \times [0, 1)$ et $V \cong_g \partial N \times [0, 1)$ des voisinages collier des bords de M et N , respectivement, tels que ∂M est identifié avec $\partial M \times \{0\}$, ∂N s'identifie avec $\partial N \times \{0\}$ et $U \cap V = \emptyset$. Soit

$$\varphi_t : h_1^{-1} \circ h_t : \partial M \rightarrow \partial M.$$

Pour tout $t \in [0, 1]$, φ_t est un difféomorphisme de ∂M , car c'est une composition de difféomorphismes, et φ_1 est l'identité. On peut maintenant utiliser cette application pour définir un difféomorphisme de $F : W \rightarrow W$ de la façon suivante. Soit $\chi : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ une fonction qui vaut 0 sur $[0, 1/4]$ et qui vaut 1 au voisinage de 1 (on peut la construire, par exemple, en faisant une translation sur la fonction g_a de la figure 21, avec $a = 1/4$). On définit alors F comme l'identité sur $W \setminus U$ et l'application $(x, t) \mapsto (\varphi_{t\chi(t)}(x), t)$ sur U . Cette application est un difféomorphisme, car chaque φ_t l'est et $\varphi_1 = \text{id}$. D'ailleurs, si $t \in [0, 1/4]$ et $x \in \partial M$ et $y = h_0(x)$, alors $F(x, t) = (\varphi_0(x), t)$ et

$$F(y, 1/4 - t) = (y, 1/4 - t) = (h_0(x), 1/4 - t) = (h_1 \circ \varphi_0(x), 1/4 - t).$$

Autrement dit, F envoie éléments qui sont dans la même classe en W_0 en éléments qui sont dans la même classe en W_1 , donc elle passe au quotient en un difféomorphisme $\hat{F} : W_0 \rightarrow W_1$. ■

Proposition 5.1.6. Soient M, N et h comme précédemment. La variété différentielle $M \cup_h N$ ne dépend pas du choix des voisinages collier utilisés pour le recollement.

Démonstration. On donne les idées principales de la preuve et on laisse les détails techniques au lecteur. Soient $f, g : \partial M \times [0, 1) \rightarrow M$ les paramétrages de deux voisinages collier de M . Notons $U = f(\partial M \times [0, 1))$ et $V = g(\partial M \times [0, 1))$ ces voisinages. On va construire un difféomorphisme de M qui envoie $f(\partial M \times [0, 1/4])$ sur $g(\partial M \times [0, 1/4])$. Les vecteurs vitesse des courbes $t \mapsto f(x, t)$ et $t \mapsto g(x, t)$, avec x fixe, définissent des champs de vecteurs X_U et X_V qui pointent vers l'intérieur sur U et V , respectivement. Prenons des fonctions $h_U, h_V : M \rightarrow \mathbb{R}$ qui prennent la valeur 1 sur $f(\partial M \times [0, 1/4])$ et $g(\partial M \times [0, 1/4])$ et qui s'annulent hors de $f(\partial M \times [0, 1/2])$ et $g(\partial M \times [0, 1/2])$, respectivement. Posons $Y_U = h_U X_U$ et $Y_V = h_V X_V$. Par convexité de l'espace de champs de vecteurs qui pointent vers l'intérieur, le champ $Y_s = (1 - s)Y_U + sY_V$ est un champs de vecteurs qui pointe vers l'intérieur, pour tout $s \in [0, 1]$. On note $\theta_s : \partial M \times [0, 1) \rightarrow M$ la famille d'applications telle que $t \mapsto \theta_s(x, t)$ est la courbe intégrale de Y_s commençant par $x \in \partial M$. On a $\theta_0 = f$ et $\theta_1 = g$ sur $\partial M \times [0, 1/4]$ et $\theta_0 = \theta_1 = \text{id}$ en dehors de $\partial M \times [0, 1/2]$. Le difféomorphisme $\theta_1 \circ \theta_0^{-1}$,

prolongé par l'identité hors de U est le difféomorphisme recherché. D'ailleurs, ce difféomorphisme est l'identité sur ∂M .

On répète le processus avec N pour obtenir un difféomorphisme de N avec les mêmes propriétés. Ces deux difféomorphismes passent au quotient en deux applications qui se recollent pour donner un difféomorphisme du recollement construit avec les deux premiers paires de voisinages collier sur le recollement construit avec le deuxième pair. ■

Un cas particulier de cette construction est la somme connexe des variétés, de laquelle on a parlé dans l'introduction. On l'étudie dans la sous-section suivante.

5.2 Somme connexe de variétés

Un cas particulier de recollement de variétés est la somme connexe. Cette opération nous permet de coller deux variétés sans bord en ôtant un disque à chacune puis recollant le long des bords de las variétés à bord qu'on obtient.

Définition 5.2.1 (Somme connexe). Soient M, N deux variétés compactes et connexes de dimension m . Soient $\varphi : \mathbb{D}^m \hookrightarrow M$ et $\psi : \mathbb{D}^m \hookrightarrow N$ deux plongements du disque unité fermé, et $h : \partial(\varphi(\mathbb{D}^m)) \rightarrow \partial(\psi(\mathbb{D}^m))$ un difféomorphisme, tels que φ et ψ préservent et h la renverse. On appelle *somme connexe* de M et N la variété différentielle $M \# N := M \cup_h N$.

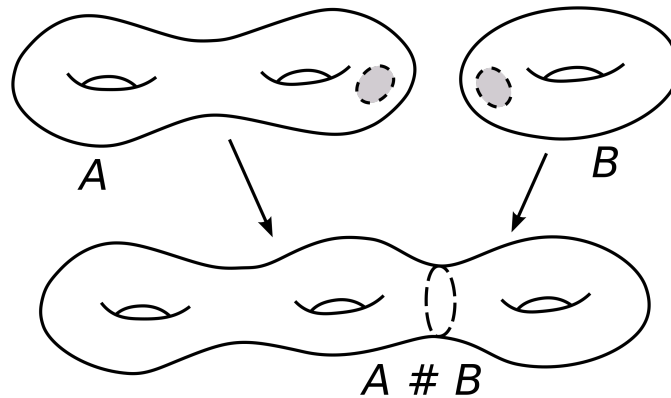


FIGURE 41 – Somme connexe de deux variétés.

Comme on la vu dans la sous-section précédente, un atlas de $M \# N$ est donné par la réunion de cartes de M et N qui n'intersectent pas les disques $\varphi(\mathbb{D}^m)$ y $\psi(\mathbb{D}^m)$.

On se restreint maintenant au cas des surfaces, c-à-d, des variétés différentielles de dimension $m = 2$. Pour que la somme connexe soit intéressante du point de vue du problème de la classification des surfaces fermées orientables, c'est essentiel de vérifier qu'elle est bien défini : $M \# N$ est indépendante, à difféomorphisme près, du choix de h , φ et ψ .

On a déjà démontré (cf. théorème 5.1.5) que $M \# N$ ne dépend que de la classe d'isotopie de h . Pourtant, cette dépendance est banale en dimension 2, car il n'y a qu'une classe d'isotopie de difféomorphismes du cercle préservant l'orientation, comme la proposition suivante montre.

Proposition 5.2.2. Soit $f : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ un difféomorphisme du cercle. Si f préserve l'orientation, alors il est isotope à l'identité ; sinon, il est isotope à la conjugaison complexe.

Démonstration. Considérons le revêtement $e : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^1$, $e(x) = e^{2\pi ix}$. L'application $f \circ e : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^1$ est différentiable, donc elle admet un relèvement. Autrement dit, il existe une application différentiable $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $e \circ F = f \circ e$. Cette application est un difféomorphisme qui préserve l'orientation et tel que $F(x+1) = F(x) + 1$. En effet, pour chaque $x \in \mathbb{R}$, on a

$$e(F((x, x+1))) = f(e((x, x+1))) = f(\mathbb{S}^1 \setminus \{e(x)\}) = \mathbb{S}^1 \setminus \{f(e(x))\}.$$

Cela implique que $F((x, x+1))$ est un intervalle ouvert de taille 1, car c'est un connexe. On pose $F((x, x+1)) = (y, y+1)$ et on considère les cartes $e_{|(x,x+1)}^{-1}$ et $e_{|(y,y+1)}^{-1}$ de \mathbb{S}^1 obtenues par restriction de e . On peut écrire alors

$$F_{|(x,x+1)} = e_{|(y,y+1)}^{-1} \circ f_{|e(x,x+1)} \circ e_{|(x,x+1)},$$

ce qui prouve que $F_{|(x,x+1)}$ préserve l'orientation. En particulier, $F_{|(x,x+1)}$ est strictement croissante, ce qui implique que $F(x) = y$ et $F(x+1) = y+1$. On a montré que la dérivée de F est strictement positive sur chaque intervalle ouvert de taille 1, donc elle est positive sur \mathbb{R} , ce qui démontre que F est un difféomorphisme de \mathbb{R} qui préserve l'orientation.

On définit maintenant l'application

$$\begin{aligned} h : \mathbb{R} \times [0, 1] &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x, t) &\mapsto (1-t)F(x) + tx. \end{aligned}$$

En dérivant, on obtient $h'_t(x) = (1-t)F'(x) + t > 0$, donc $h_t := h(\bullet, t)$ préserve l'orientation pour chaque $t \in [0, 1]$. D'ailleurs, $h_t(x+1) = h_t(x) + 1$, pour chaque $x \in \mathbb{R}$. Alors, en factorisant par l'application quotient, h induit une unique application $H : \mathbb{S}^1 \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{S}^1$ telle que $e \circ h = H \circ (e \times \text{id}_{[0,1]})$. Cette application vérifie $H_0 = f$, $H_1 = \text{id}$ et $H_t := H(\bullet, t)$ préserve l'orientation, pour tout $t \in [0, 1]$, donc c'est l'isotopie recherchée.

Le cas où f renverse l'orientation découle de ce qu'on vient de dire, en composant par la conjugaison complexe. ■

On prouve maintenant que $M \# N$ est aussi indépendante des disques choisis. La démonstration consiste à connecter les centres des deux disques par un chemin sur la surface M et à démontrer que toutes les surfaces qu'on obtient en déplaçant le trou le long du chemin sont difféomorphes. Pour pouvoir faire cela, il est nécessaire qu'un chemin connectant les deux centres existe.

Proposition 5.2.3. Toute variété connexe est connexe par arcs.

Démonstration. Soient M une variété connexe et $p \in M$. Soit

$$U = \{q \in M : \text{il existe } \gamma : [0, 1] \rightarrow M \text{ tel que } \gamma(0) = p \text{ et } \gamma(1) = q\}.$$

On remarque que ce sous-ensemble est non-vide, car $p \in U$. Montrons que U et $U^c = M \setminus U$ sont les deux ouverts. En effet, si $r \in U$, il suffit de prendre une carte (V, ψ) autour de r tel que $\psi(V) = B(0, \varepsilon) \subset \mathbb{R}^m$, pour un certain $\varepsilon > 0$. Puisque ψ est un homéomorphisme et que $B(0, \varepsilon)$ est connexe par arcs, V l'est aussi, ce qui implique que $V \subseteq U$. En raisonnant de façon analogue, on obtient que U^c est ouvert aussi. Puisque $M = U \cup U^c$ est connexe et que U est non-vide, on a nécessairement $U^c = \emptyset$. ■

Proposition 5.2.4. Soit M une variété connexe de dimension $m = 2$ et soient ψ_1 et ψ_2 deux plongements de \mathbb{D}^2 . Alors, $M \setminus \psi_1(\mathbb{D}^2)$ et $M \setminus \psi_2(\mathbb{D}^2)$ sont difféomorphes.

Démonstration. On remarque d'abord qu'on peut supposer que $\psi_1(\mathbb{D}^2)$ et $\psi_2(\mathbb{D}^2)$ sont contenus dans les domaines de deux cartes (U, φ_0) et (V, φ_n) . En effet, si c'est n'est pas le cas, on peut réduire le domaine de ψ_1 et ψ_2 et utiliser le fait que deux disques centrés à l'origine sont difféomorphes.

Soit $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$ une courbe telle que $\gamma(0) = \psi_1(0)$ et $\gamma(1) = \psi_2(0)$. L'image de γ est compacte, donc on peut la recouvrir par un nombre fini de domaines de cartes $U_0 = U, U_1, \dots, U_n = V$, tels que $\varphi_k(U_k) = \mathbb{R}^2$. Pour chaque $k = 0, \dots, n-1$ soient $x_k \in U_k \cap U_{k+1} \cap \gamma([0, 1])$ et $B_k \subset U_k \cap U_{k+1}$ l'image par φ_k^{-1} d'une boule fermée centrée en $\varphi_k(x_k)$. On va prouver que $M \setminus B_k$ est difféomorphe à $M \setminus B_{k+1}$, pour chaque k .

On remarque que, pour chaque k , $\varphi_k(U_k \setminus B_k)$ et $\varphi_k(U_k \setminus B_{k+1})$ sont difféomorphes à \mathbb{R}^2 privé d'une boule fermée. Soit $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ un difféomorphisme qui envoie la première boule en la seconde et qui est l'identité hors d'un compact K . Cette application induit (via φ_k) un homéomorphisme entre $U_k \setminus B_k$ et $U_k \setminus B_{k+1}$ que l'on peut prolonger par l'identité hors de U_k .

Une récurrence en k nous donne maintenant le résultat. ■

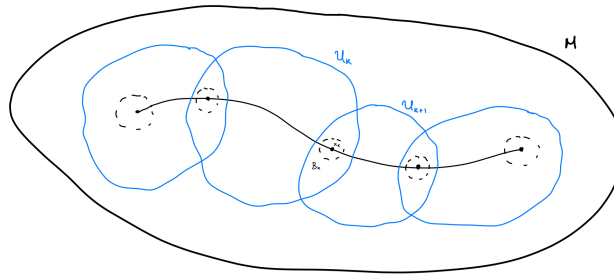


FIGURE 42 – On déplace le trou le long de γ .

Remarque 5.2.5. On peut construire le difféomorphisme h de la démonstration précédente de la façon suivante. Soient D un disque de \mathbb{R}^2 et D_1, D_2 deux sous-disques inclus dans D . En conjuguant par une homothétie, on peut se ramener au cas où D est le disque unité. On applique alors l'homographie du plan complexe

$$f_1(z) = \frac{z - a}{1 - \bar{a}z},$$

où a est le centre de D_1 . Cette application envoie D_1 sur un disque de centre 0 et rayon r . On construit de la même façon une application f_2 envoyant D_2 sur un disque de centre 0 et rayon r' . Supposons $r' > r$. La restriction de chacune des applications précédentes préserve l'orientation, donc on peut construire, comme dans la preuve de la proposition 5.2.2, un arc $f_{i,t}$ dans l'espace des difféomorphismes préservant l'orientation du cercle tel que $f_{i,0} = \text{id}$ et $f_{i,1} = f_i$, pour chaque $i = 1, 2$. On définit maintenant une nouvelle application $g_i : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ comme

1. $g_i = f_i$, sur D ;
2. $g_i(re^{i\theta}) = rf_{i,\rho(r)}(e^{i\theta})$, si $1 \leq r < 2$, où $\rho : [1, 2] \rightarrow [0, 1]$ est une application lisse et décroissante, dont les dérivés aux tous les ordres sont nulles aux extrêmes de $[1, 2]$;
3. $g_i = \text{id}$, en dehors du disque de rayon 2.

Cette application est un difféomorphisme qui vaut l'identité hors du disque de rayon 2 et qui coïncide avec f_i sur D . D'autre part, soit $h : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ un difféomorphisme qui est l'identité au voisinage de 0 et 1, et qui envoie r sur r' . Prenons, enfin, $H : re^{i\theta} \mapsto h(r)e^{i\theta}$. La composition $g_2^{-1} \circ H \circ g_1$ est le difféomorphisme recherché.

La somme connexe consiste ainsi à ouvrir un « petit trou » dans chacune des variétés et à les coller le long des bords de ces trous. Cette opération est commutative et associative, comme conséquence de la commutativité et l'associativité de la réunion disjointe, et elle possède un élément neutre : la sphère. Pour se convaincre de cette dernière affirmation, il suffit de remarquer que la sphère privé d'un disque est difféomorphe à un disque. De plus, si $m > 1$, la somme connexe est une variété connexe (elle est connexe par arcs).

5.3 La surface de genre g

On étudie maintenant la surface de genre g , obtenue en collant ensemble g tores. En particulier, on va démontrer que, si $g_1 \neq g_2$, le résultat du recollement de g_1 tores est distinct de celui du recollement de g_2 tores, ce qui est indispensable pour que le théorème de classification donne une vraie classification des surfaces fermées orientables. On utilisera quelques résultats de la topologie algébrique, qu'on résume dans l'appendice A.

Définition 5.3.1. Pour tout $g \geq 1$, on définit la *surface de genre g* comme la somme connexe de g tores. C'est une surface fermée et orientable.

On note Σ_g la surface de genre g et on pose $\Sigma_0 = \mathbb{S}^2$. De même, on note $\Sigma_{g,r}$ l'espace obtenu en ôtant r disques de Σ_g .

Lemme 5.3.2. Le groupe fondamental de $\Sigma_{g,1}$ est un groupe libre à 2 générateurs $L(a, b)$. Le bord S a pour classe $aba^{-1}b^{-1}$.

Démonstration. On représente $\Sigma_{g,1}$ comme l'espace quotient obtenu en recollant les bords d'un carré avec un trou circulaire. On écrit $\Sigma_{g,1} = U \cup V$, où U est le complémentaire d'un disque et V est une boule ouverte autour du trou (voir figure 43), tels que $U \cap V$ est une couronne. Le groupe fondamental de U est un groupe libre à deux générateurs, $L(a, b)$, car U se rétracte sur un bouquet de deux cercles, et celui de V est un groupe libre à un générateur, $L(c)$, car V se rétracte sur un cercle. Enfin, si on prend un lacet γ dans $U \cap V$, on peut lui déformer en $aba^{-1}b^{-1}$ dans U et en c dans V , donc on identifie $aba^{-1}b^{-1}c$ et c .

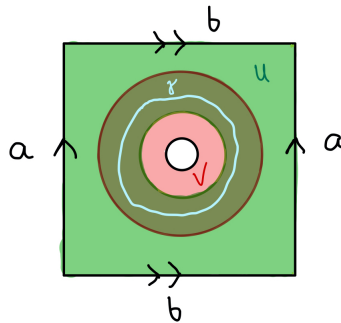


FIGURE 43 – Application du théorème de Seifert-Van Kampen à \mathbb{V}_1 .

Ainsi, le groupe fondamental de $\Sigma_{g,1}$ est

$$\pi(\Sigma_{g,1}) = L(a, b, c) / \langle aba^{-1}b^{-1} = c \rangle \cong L(a, b),$$

d'après le théorème de Seifert-Van Kampen. ■

Lemme 5.3.3. Le groupe fondamental de Σ_2 est le quotient du groupe libre à quatre générateurs $L(a_1, b_1, a_2, b_2)$ par le sous-groupe distingué engendré par $a_1b_1a_1^{-1}b_1^{-1}a_2b_2a_2^{-1}b_2^{-1}$.

Démonstration. On écrit $\Sigma_2 = U \cup V$, avec U, V deux voisinages des tores dans Σ_2 homéomorphes à $\Sigma_{g,1}$ et dont l'intersection est homéomorphe à un tube. D'après le lemme précédent, $\pi(U) = L(a_1, b_1)$ et $\pi(V) = L(a_2, b_2)$. Tout lacet dans $U \cap V$ peut être déformé en le bord de U et V , dont les classes sont $a_1b_1a_1^{-1}b_1^{-1}$ et $a_2b_2a_2^{-1}b_2^{-1}$, respectivement. Le résultat est maintenant une conséquence directe du théorème de Seifert-Van Kampen. ■

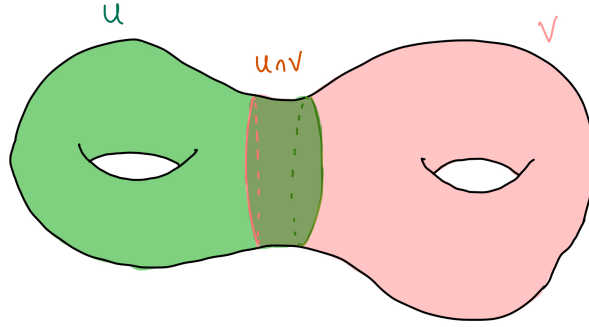


FIGURE 44 – Application du théorème de Seifert-Van Kampen à la surface de genre 2.

Proposition 5.3.4. Le groupe fondamental de $\Sigma_{g,1}$ est un groupe libre à $2g$ générateurs $a_1, b_1, \dots, a_g, b_g$, le bord γ ayant pour classe $a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \dots a_g b_g a_g^{-1} b_g^{-1}$. Le groupe fondamental de Σ_g est le quotient du groupe précédent par le sous-groupe distingué engendré par la classe de γ .

Démonstration. Le résultat s'obtient par une récurrence en g , en raisonnant de manière complètement analogue aux deux lemmes précédents. ■

Corollaire 5.3.5. Si $g_1 \neq g_2$, alors Σ_{g_1} et Σ_{g_2} ne sont pas homéomorphes.

Démonstration. C'est une conséquence directe de la proposition précédente et du lemme A.1.1. ■

5.4 Théorie de Morse en surfaces compactes

Soient M une surface compacte et $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de Morse. On va étudier en détail les changements dans les sous-niveaux de f pour le cas particulier des variétés de dimension 2. L'analyse qu'on va faire sera la base de la démonstration du théorème de classification des surfaces, qu'on présente dans la sous-section suivante.

Pour rappel, un voisinage canonique d'un point critique est l'un des voisinage dont l'existence est garanti par le lemme de Morse. De même, pour chaque $a \in \mathbb{R}$, on note $M_a = \{p \in M : f(p) \leq a\}$.

Point critique d'indice 0. Soit p un point critique d'indice 0 de f . Posons $c = f(p)$ et soit U un voisinage canonique de p contenu délimité par la courbe de niveau $c + 2\varepsilon$, pour $\varepsilon > 0$ tel que le seul point critique dans $f^{-1}([c - \varepsilon, c + \varepsilon])$ soit p . D'après le lemme de Morse, $D = M_{c+\varepsilon} \cap U$ est difféomorphe à $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq \varepsilon\}$. D'ailleurs, $M_{c-\varepsilon} \cap U = \emptyset$, car $f(q) < f(p)$ pour tout $q \in M_{c-\varepsilon}$ et f atteint sa valeur minimal sur U en p . En appliquant le théorème 4.2.9, on obtient donc que $M_{c+\varepsilon} \setminus D$ est difféomorphe à $M_{c-\varepsilon}$. Cela démontre la proposition suivante :

Proposition 5.4.1. Si p est un point critique d'indice 0 de f , alors $M_{c+\varepsilon}$ est homéomorphe à $M_{c-\varepsilon} \sqcup \mathbb{D}^2$. ■

Point critique d'indice 2. Pour les points critiques d'indice 2 l'analyse est analogue. En effet, on prend $\varepsilon > 0$ comme dans le cas précédent et un voisinage canonique U délimité par la courbe de niveau $c+2\varepsilon$. Par le lemme de Morse, $D = M_{c+\varepsilon} \cap U$ est difféomorphe à $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -x^2 - y^2 \geq -\varepsilon\}$. On peut alors appliquer le cas d'indice 0 à la fonction $-f$, en échangeant les rôles de a et b , pour obtenir :

Proposition 5.4.2. Si p est un point critique d'indice 2 de f , alors $M_{c+\varepsilon}$ est homéomorphe à l'espace obtenu en collant à $M_{c-\varepsilon}$ un disque le long d'une composante circulaire de son bord. ■

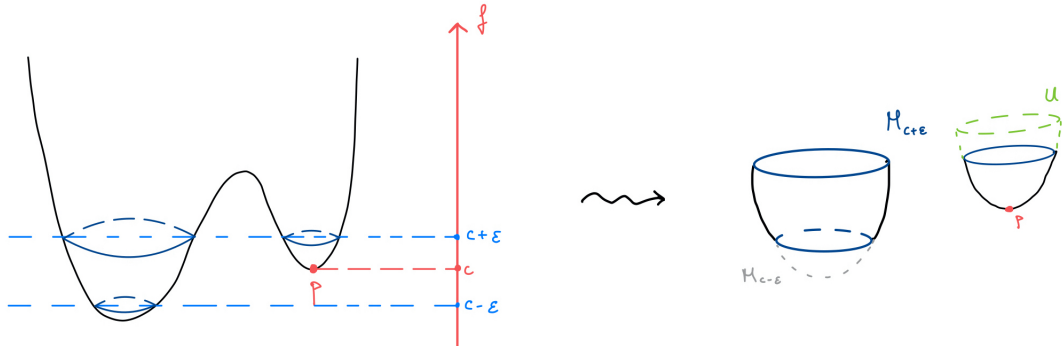


FIGURE 45 – Point critique d'indice 0 d'une fonction de Morse.

Point critique d'indice 1. Le cas le plus compliqué est celui des points critiques d'indice 1. Soit p un tel point. Dans ce cas, le franchissement d'un point critique se traduit en un recollement d'un rectangle le long de deux segments d'une composant connexe du bord du sous-niveau de la fonction de Morse.

Proposition 5.4.3. Si p est un point critique d'indice 1 de f , alors $M_{c+\varepsilon}$ est homéomorphe à l'espace obtenu en recollant deux côtes opposés d'un rectangle à $M_{c-\varepsilon}$ le long de deux segments de $f^{-1}(c-\varepsilon)$.

Démonstration. Soient U', U deux voisinages canoniques de p délimités par les courbes de niveaux $c \pm 2\varepsilon$ et $c \pm \varepsilon$. On suppose que U est fermé et que les lignes AB, CD, EF et GH qui connectent $f^{-1}(c-\varepsilon)$ et $f^{-1}(c+\varepsilon)$ sont orthogonales (en coordonnées) aux lignes de niveau de f . Soit φ la carte associée à ces voisinages canoniques.

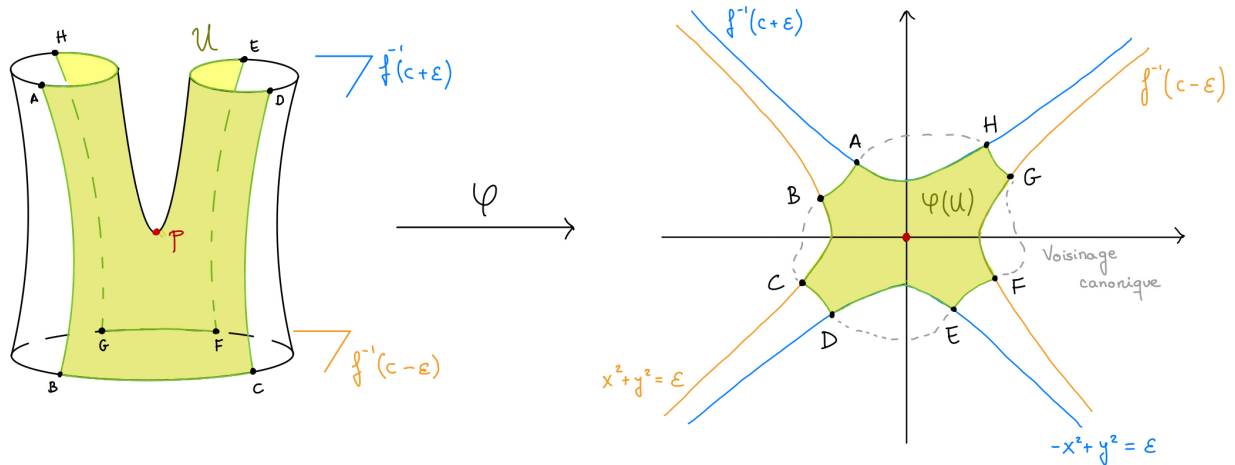


FIGURE 46 – Voisinage U sur M et en coordonnées.

On pose $M_{[c\pm\varepsilon]} = f^{-1}([c-\varepsilon, c+\varepsilon])$ et on remarque que l'on peut obtenir $M_{c+\varepsilon}$ en recollant $M_{[c\pm\varepsilon]}$ le long du bord de $M_{c-\varepsilon}$. De même, $M_{[c\pm\varepsilon]}$ s'obtient en recollant U et $T = \overline{M_{[c\pm\varepsilon]}} \setminus \overline{U}$. D'autre part, en prenant ε assez petit, $U \cap f^{-1}(c-\varepsilon)$ est constitué de deux segments, qu'on appelle I et J . Enfin, on pose $K = T \cap f^{-1}(c-\varepsilon) = \overline{f^{-1}(c-\varepsilon)} \setminus (I \cup J)$. Tout cela est représenté dans la figure 47.

On pose $a = c - \varepsilon$ et $b = c + \varepsilon$. Montrons d'abord que T est homéomorphe à $K \times [a, b]$. Comme dans la preuve du théorème 4.2.9, prenons un pseudo-gradient X de f , une fonction h qui s'annule en dehors d'un voisinage compact de p et soit

$$Y = \frac{h}{(X \cdot f)^2} X.$$

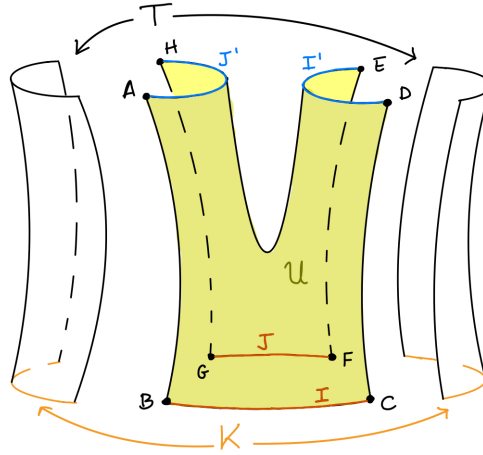


FIGURE 47 – Voisinage canonique d'un point critique d'indice 1.

Soit $\{\varphi_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ le flot de Y . On définit une nouvelle application ϕ par $\phi(x, t) = \varphi_t(x)$. Montrons que sa restriction à $K \times [a, b]$ est l'homéomorphisme que l'on recherche. Pour cela, il suffit de vérifier que toute courbe intégrale qui passe par un point de T est entièrement contenue dans T et que chaque courbe qui « entre » par un point de K « sort » par un point dans $f^{-1}(c + \varepsilon)$.

On remarque que, puisque X est un pseudo-gradient de f , que U' est un voisinage canonique et que les segments qui définissent la frontière de U sont contenus dans U' , ces segments sont des courbes intégrales de X . Par unicité, ceci implique qu'aucune courbe intégrale ne traverse la frontière de U . D'autre part, pour chaque $x \in K$, soit la fonction $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $g(t) = f \circ \phi(x, t)$, qui vérifie $g(a) = a$. Comme $t \mapsto \phi(x, t)$ est une courbe intégrale de Y et X est un pseudo-gradient de f , la dérivée de cette fonction est $g'(t) = h(\phi(x, t))$. Ainsi, $0 \leq g'(t) \leq 1$, pour tout $t \in [a, b]$, de sorte que le théorème des accroissements finis implique que $g(t) \leq g(a) + t - a = t \leq b$. Ainsi, $\phi(K \times [a, b]) \subset M_{[c \pm \varepsilon]}$. Puisque g est croissante, on a le résultat.

Comme on l'a déjà dit, l'intersection de U avec $f^{-1}(c - \varepsilon)$ est formée de deux composantes homéomorphes à deux segments I, J . De même, $U \cap f^{-1}(c + \varepsilon)$ se compose de deux courbes I', J' . On pose $I \cong [B, C]$, $J \cong [F, G]$, $I' \cong [D, E]$ et $J' \cong [H, A]$ (voir figure 47). On découpe $\varphi(U)$ en trois parties $P' = (ABCD)$, $Q' = (EFGH)$ et $R' = (ADEH)$ toutes trois homéomorphes à des rectangles, comme dans la figure 48. On considère leurs images P, Q et R dans M par φ^{-1} , de manière que $M_{c+\varepsilon}$ s'obtient en recollant $M_{c-\varepsilon}$, T, P, Q et R .

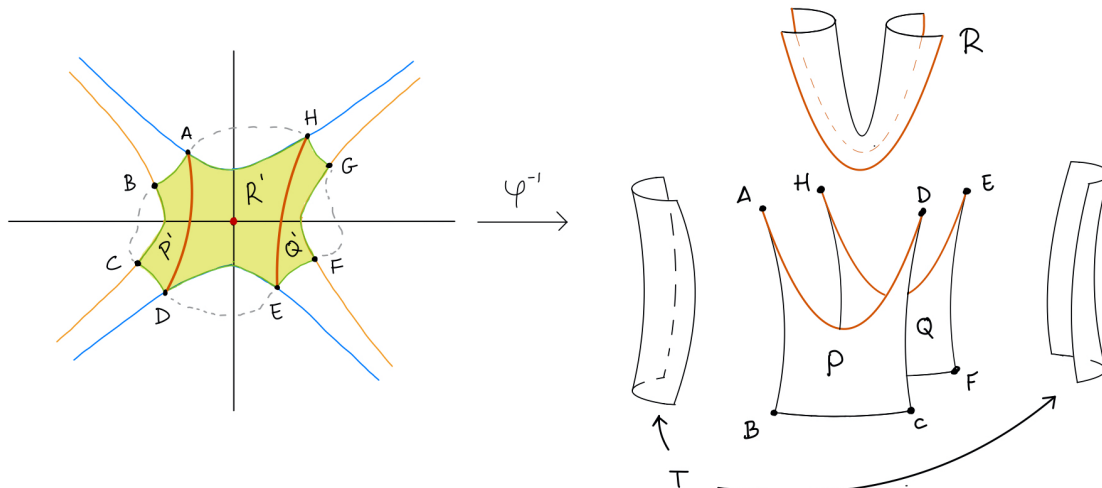


FIGURE 48 – Représentation en coordonnées d'un voisinage canonique d'indice 1.

Les espaces P et Q sont homéomorphes aux rectangles $I \times [a, b]$ et $J \times [a, b]$, respectivement, donc on peut les recoller à T en utilisant l'application ϕ qu'on a construit dans le premier paragraphe de la preuve. On obtient un homéomorphisme de $T \cup P \cup Q$ sur le cylindre $(K \cup I \cup J) \times [a, b]$. Ainsi, $M_{c+\varepsilon} \setminus \text{int}(R) = M_{c-\varepsilon} \cup T \cup P \cup Q$ s'obtient en collant un cylindre le long de $f^{-1}(a)$. Cet espace est difféomorphe à $M_{c-\varepsilon}$. Or, l'espace obtenu en recollant le cylindre à $M_{c-\varepsilon}$ est homéomorphe à $M_{c-\varepsilon}$ (on peut utiliser à nouveau le flot d'un pseudo-gradient de f). Alors, $M_{c+\varepsilon}$ s'obtient en recollant deux côtes opposés de R , qui est homéomorphe à un rectangle, au bord d'une surface homéomorphe à $M_{c-\varepsilon}$. Ceci démontre le résultat. ■

5.5 Classifications de surfaces fermées orientables

Théorème 5.5.1. Toute surface connexe, fermée et orientable est homéomorphe à la surface de genre g , pour un certain $g \geq 0$.

Démonstration. Notons $\Sigma_{g,r}$ la surface à bord obtenue en privant Σ_g de r disques disjoints (cf. théorème 5.2.4). Soit f une fonction de Morse dont les points critiques sont p_0, p_1, \dots, p_n et posons $c_i = f(p_i)$, pour chaque $i = 0, 1, \dots, n$. On peut supposer, grâce au théorème 4.2.3, que $c_0 < c_1 < \dots < c_n$. Le lemme de Morse (cf. théorème 4.1.5) implique que p_0 est un point critique d'indice 0 et que p_n est un point critique d'indice 2 (ils sont un point de minimum et de maximum, respectivement).

On va démontrer que, pour chaque $c > c_0$ et chaque composante connexe A du sous-niveau $M_c = f^{-1}((-\infty, c])$, il existe $g \geq 0$ et $r \geq 0$ tels que A est homéomorphe à $\Sigma_{g,r}$. On remarque d'abord que, si $c' < c_0$, alors $M_{c'} = \emptyset$. Puisque p_0 est nécessairement un point critique d'indice 0, la proposition 5.4.1 implique alors que, pour $c_0 < c < c_1$, $M_c \cong \mathbb{D}^2 \cong \Sigma_{0,1}$.

Soient maintenant $c, c' \in \mathbb{R}$ tels que $c_{i-1} < c < c_i$ et $c_i < c' < c_{i+1}$, pour un certain $i \in \{1, \dots, n\}$. Étant donné que les sous-niveaux d'une fonction de Morse restent difféomorphes lorsqu'on ne franchit pas une valeur critique (cf. théorème 4.2.9), on doit prouver par récurrence que, si pour chaque composante connexe A de M_c il existe $g \geq 0$ et $r \geq 0$ tels que A est homéomorphe à $\Sigma_{g,r}$, alors chaque composante connexe de $M_{c'}$, est homéomorphe à $\Sigma_{g',r'}$, pour un certain $g' \geq 0$ et un certain $r' \geq 0$. On étudie les différents cas, en fonction de l'indice de p_i .

Point critique d'indice 0. D'après la proposition 5.4.1, franchir un point critique d'indice 0 revient à ajouter un disque comme nouvelle composante connexe du sous-niveau. Puisque $\mathbb{D}^2 \cong \Sigma_{0,1}$, le résultat est immédiat.

Point critique d'indice 2. Dans la proposition 5.4.2 on a démontré que passer un point critique d'indice 2 équivaut à recoller un disque le long d'une composante du bord. Autrement dit, on passe de $\Sigma_{g,r}$ à $\Sigma_{g,r-1}$.

Point critique d'indice 1. Le cas le plus compliqué est celui des points critiques d'indice 1. Comme on a vu dans la proposition 5.4.3, franchir un tel point critique équivaut à recoller un rectangle, le long de deux bords opposés, à deux segments du bord du sous-niveau. Il y a plusieurs cas, selon la position relative des deux segments dans le bord :

- **Premier cas :** on attache le rectangle à deux composantes connexes distinctes A, B de la surface. Par hypothèse de récurrence, il existe $g_1, g_2, r_1, r_2 \geq 0$ tels que $A \cong \Sigma_{g_1, r_1}$ et $B \cong \Sigma_{g_2, r_2}$. L'attachement revient dans ce cas-ci à faire la somme connexe de Σ_{g_1, r_1-1} et Σ_{g_2, r_2-1} puis priver d'un disque. En effet, prenons deux colliers de A et B , qui se recollent en un cylindre. En ôtant un disque et le déformant en un rectangle, on obtient deux cylindres collés par une bande, les bases des cylindres s'identifiant avec le bord de A et B :

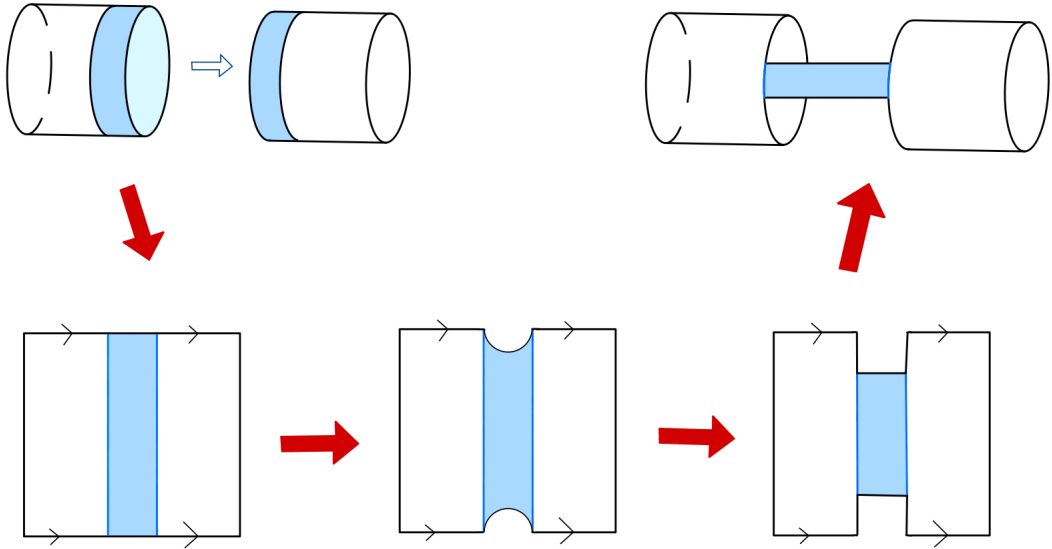


FIGURE 49 – Recoller un rectangle équivaut à faire la somme connexe puis enlever un disque.

On obtient, donc, une surface homéomorphe à $\Sigma_{g_1+g_2, r_1+r_2-1}$.

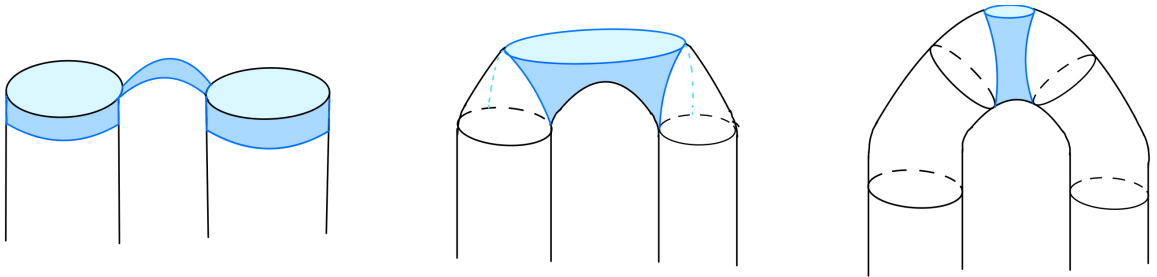


FIGURE 50 – Rectangle attaché le long des bords de deux composantes distinctes.

- Deuxième cas : on attache le rectangle à la même composante de bord de la surface. On remarque d'abord que, puisque la surface est orientable, on doit recoller le rectangle à travers de deux applications préservant l'orientation. Lorsqu'on fait cela, on obtient une nouvelle surface avec une composante de bord de plus : on passe ainsi de $\Sigma_{g,r}$ à $\Sigma_{g,r+1}$.

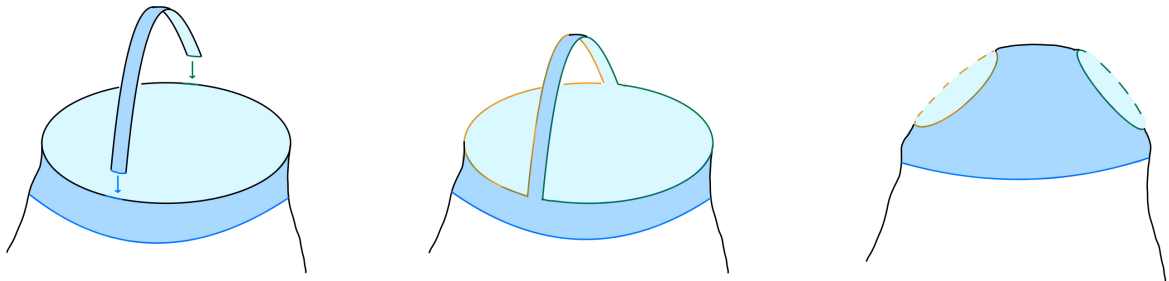


FIGURE 51 – Rectangle attaché le long des bords de deux composantes distinctes.

Pour se convaincre, on peut prendre à nouveau un collier du bord, qui est homéomorphe à une couronne, puis attacher deux cotés opposés du rectangle au bord intérieur pour obtenir le cercle avec deux trous, qu'on recolle sur le bord de $M_{C-\varepsilon}$.

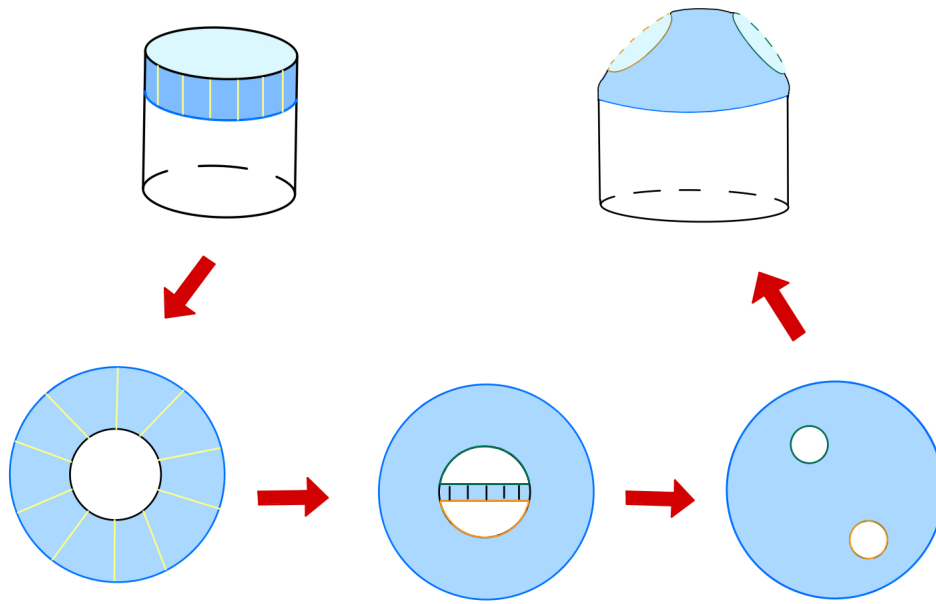


FIGURE 52 – Recoller un rectangle équivaut à recoller un disque puis faire deux trous.

- Troisième cas : on attache le rectangle à deux composantes de bord de la même composante connexe. À nouveau, l'attachement doit respecter l'orientation, donc on ne permet pas les « twist » du rectangle. Soit A la composante connexe, qu'on écrit comme $A \cong \Sigma_{g,r} \setminus (D_1 \cup D_2)$, où D_1 et D_2 sont les disques sur lesquels on va recoller le rectangle. On va démontrer que la surface obtenue en attachant la bande est homéomorphe à $\Sigma_{g,r} \# \mathbb{T}^2$ privé d'un disque. Soient H une bande connectant les deux composantes de bord de la même composante connexe et R un rectangle. Posons $T = \overline{A \setminus H}$. On veut démontrer que l'espace obtenu en recollant H , R et T est homéomorphe à $\Sigma_{g,r} \# \mathbb{T}^2$ privé d'un disque. On remarque que le bord de T est homéomorphe au cercle $ABCD$ (voir figure 53). On retire maintenant un voisinage collier du bord de T et on recolle le tore privé de deux disques, qu'on montre dans la figure, le long d'un voisinage de H .

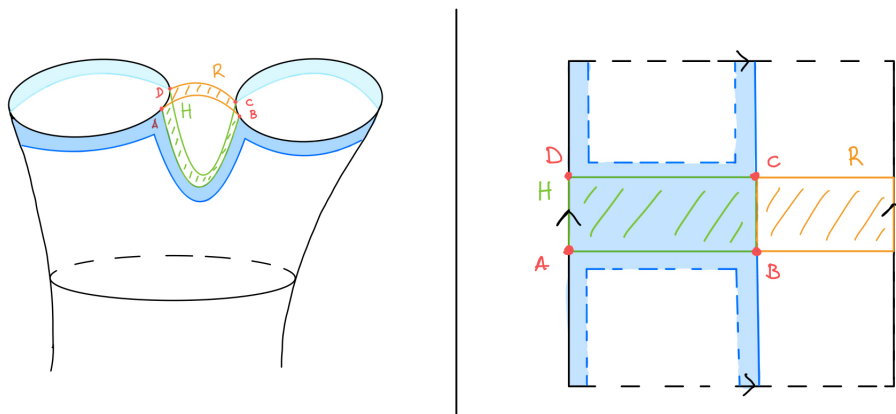


FIGURE 53 – (i) Composante connexe avec un rectangle attaché à deux composantes de bord distinctes. (ii) Tore avec deux trous, qu'on recolle à T .

On a démontré que toute composante connexe d'un sous-niveau est de la forme $\Sigma_{g,r}$, avec $g, r \geq 0$. En particulier, si $c > c_n$, $M = f^{-1}((-\infty, c])$ et, puisque M est une surface connexe sans bord, nécessairement $r = 0$ et il existe $g \geq 0$ tel que $M \cong \Sigma_{g,0} \cong \Sigma_g$. ■

Remarque 5.5.2. Le nombre g du théorème précédent est le *genre* de la surface, dont on a parlé

dans l'introduction du travail.

Comme on l'a dit aussi dans l'introduction, le théorème qu'on vient de démontrer est un résultat extrêmement rare. La preuve qu'on vient d'exposer ne se généralise pas en dimension 3. L'une des raisons est que le recollement des variétés en dimension 3 n'est pas bien définie. On a pu faire cela en dimension 2 grâce au fait que le groupe de difféomorphismes du cercle est assez maniable. Par contre, le bord d'une variété de dimension 3 est une variété de dimension 2, dont le groupe de difféomorphismes est extrêmement difficile à manipuler.

A Théorème de Seifert-Van Kampen

A.1 Groupes libres

Considérons l'ensemble E des mots finis formés en juxtaposant des symboles de la forme a^p et b^q , avec $p, q \in \mathbb{Z}$. Étant donné un mot, on autorise les réductions suivantes :

- remplacer deux symboles consécutifs a^p, a^q par le symbole a^{p+q} , et pareil pour b ;
- supprimer a^0 et b^0 .

Un mot sur lequel toute réduction est impossible est dit *réduite*. On remarque que tout mot réduit est de la forme $a^{p_1}b^{q_1}a^{p_2}b^{q_2} \dots a^{p_n}b^{q_n}$. L'opération qui à deux mots associe le mot construit par juxtaposition puis réduction muni l'ensemble des mots réduits d'une structure de groupe. L'élément neutre est le mot vide et l'inverse du mot $a^{p_1}b^{q_1} \dots a^{p_n}b^{q_n}$ est $b^{-q_n}a^{-p_n} \dots b^{-q_1}a^{-p_1}$. On note $L(a, b)$ le groupe libre à deux éléments.

Suivant la même procédure, on peut définir le groupe libre à n éléments.

Lemme A.1.1. Soient S et S' deux ensembles de symboles. Si $L(S)$ et $L(S')$ sont isomorphes, alors $\text{card}(S) = \text{card}(S')$.

Démonstration. La preuve consiste à calculer et comparer les abélianisés des groupes $L(S)$ et $L(S')$. ■

A.2 Produit libre de deux groupes

Soient G_1 et G_2 et considérons l'ensemble des mots finis constitués d'éléments de G_1 et G_2 . On permet les réductions suivantes :

- on remplace deux lettres consécutives g_1, g_2 appartenant au même groupe par leur produit $g = g_1 \cdot g_2$;
- on supprime les éléments neutres.

On définit le *produit libre* $G_1 * G_2$ de G_1 et G_2 comme l'ensemble des mots réduits muni de l'opération constante à juxtaposer puis réduire deux mots, qui lui fournit une structure de groupe.

A.3 Somme amalgamée de deux groupes

Soient G_0, G_1, G_2 des groupes et $\varphi_1 : G_0 \rightarrow G_1$ et $\varphi_2 : G_0 \rightarrow G_2$ des homomorphismes. Soit $N \triangleleft G_1 * G_2$ le plus petit sous-groupe distingué contenant les mots de la forme $(\varphi_1(g)\varphi_2(g)^{-1})$ et $(\varphi_2(g)\varphi_1(g)^{-1})$, $g \in G_0$. On appelle *somme de G_1 et G_2 amalgamée par G_0* le groupe quotient $G_1 * G_2 / N$. On note $G_1 *_{G_0} G_2$ ou $G_1 *_N G_2$.

A.4 Théorème de Seifert-Van Kampen

Théorème A.4.1. Soit X un espace topologique. Soient U et V des ouverts connexes de X tels que $X = U \cup V$ et que $U \cap V$ est connexe. Alors, $\pi(X, x)$ est la somme de $\pi(U, x)$ et $\pi(V, x)$ amalgamée par $\pi(U \cap V, x)$ via les inclusions canoniques, pour chaque $x \in U \cap V$. ■

Bibliographie

- [1] J. GALLIER, D. XU, *A Guide to the Classification Theorem for Compact Surfaces*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2013.
- [2] A. GRAMAIN, *Topologie des Surfaces*, Presses universitaires de France, 1971.
- [3] V. GUILLEM, A. POLLACK, *Differential topology*, Prentice Hall, Englewood Cliffs 1974.
- [4] M.W. HIRSCH, *Differential topology*, Springer-Verlag, 1976.
- [5] I. M. JAMES, *History of Topology*, North Holland, 1999.
- [6] J.M. LEE, *Introduction to Smooth Manifolds (Second Edition)*, Springer-Verlag New York, 2000.
- [7] W. S. MASSEY, *Algebraic Topology : An Introduction*, Springer-Verlag New York, 1977.
- [8] Y. MATSUMOTO, *An Introduction to Morse Theory*, Translations of Mathematical Monographs, Iwanami Series in Modern Mathematics, 2002.
- [9] J.W. MILNOR, *Morse Theory*, Princeton University Press, Princeton, 1963.
- [10] J.W. MILNOR, *Topology from the differential viewpoint*, Princeton University Press, Princeton 1965.
- [11] A. MUKHERJEE, *Differential Topology (Second Edition)*, Birkhäuser Basel, 2015.
- [12] H. P. DE SAINT-GERVAIS, *Analysis Situs*, [http ://analysis-situs.math.cnrs.fr](http://analysis-situs.math.cnrs.fr).