Trabajo de fin de grado

Topología diferencial:
teorema de Sard, transversalidad e intersección

Doble grado en Física y Matemáticas

Facultad de Ciencias Matemáticas

Juan Ramón Gómez García

Tutores:
Vicente Muñoz Velázquez y José Javier Etayo Gordejuela

Resumen

El objetivo principal de este trabajo es presentar el teorema de Sard y mostrar su utilidad en el estudio de la transversalidad entre aplicaciones y subvariedades. En primer lugar, se hace una breve revisión de la teoría de variedades diferenciables y se da una demostración del citado teorema. Como primera aplicación, se demuestra que toda variedad diferenciable puede interpretarse como una subvariedad de un espacio euclídeo. A partir de esto, se desarrolla el concepto de transversalidad, demostrando que se trata de una propiedad estable y genérica. Finalmente, el estudio de las propiedades de la intersección de variedades nos lleva a introducir brevemente lo que se conoce como Teoría de la Intersección.

Abstract

In this work we introduce Sard's Theorem and show its utility in the study of transversality of applications and submanifolds. First, we look over the theory of differential manifolds and give a proof of the theorem. As a first application, we prove that every differential manifold is a submanifold of some euclidean space. From these results, we develop the notion of transversality, showing that it is a stable and generic property. Finally, the study of the intersection of manifolds guides us to a more general theory: the Intersection Theory.

Índice

Introducción

Esta memoria constituye una introducción a algunos de los temas básicos en Topología Diferencial. Concretamente, se demuestra el Teorema de Sard y se presentan algunas consecuencias que de él se deducen. Algunos de los resultados que se demuestran son resultados elementales, que pueden encontrarse en cualquier texto básico de topología o variedades diferenciables. Sin embargo, hemos preferido incluirlos con el fin de que el texto sea lo más autocontenido posible.

En la primera sección, se hace una revisión de los conceptos de variedad diferenciable y espacio tangente, presentando la teoría básica sobre la que trabajaremos a lo largo de todo el desarrollo.

En la segunda sección, se introduce la noción de medida cero en variedades y se demuestra el Teorema de Sard, que afirma que el conjunto de puntos no regulares de una aplicación diferenciable entre variedades tiene medida de Lebesgue nula. Este teorema constituye la herramienta fundamental con la que construiremos el resto de resultados del trabajo.

Como primera aplicación del teorema de Sard, se demuestra, en la sección 3, el teorema de inmersión de Whitney, que afirma que toda variedad diferenciable es subvariedad de un espacio euclídeo. Para ello, previamente se prueban una serie de resultados básicos sobre topología de variedades diferenciables que serán de gran utilidad.

En la sección 4, se introduce el concepto de transversalidad entre aplicaciones y subvariedades. De nuevo utilizando el teorema de Sard, probaremos que la transversalidad es una propiedad estable y genérica. El resultado básico, en este sentido, es el teorema de transversalidad de Thom, que permite probar de forma directa en variedades euclideas que la transversalidad puede conseguirse mediante una deformación arbitrariamente pequeña de una de las aplicaciones o subvariedades implicadas. Usando entornos tubulares y el teorema de Whitney, probaremos que eso también es cierto cuando tratamos con variedades abstractas.

Finalmente, en la sección 5 se presenta brevemente una teoría más general, la Teoría de la Intersección. Introducimos las nociones de grado de una aplicación y de números de intersección y vemos algunas de las buenas propiedades que se deducen de la transversalidad. Cerramos la sección con una aplicación sencilla y muy intuitiva de esta teoría: el teorema de separación de Jordan.

1. Variedades diferenciables y espacio tangente: una revisión

1.1. Variedades diferenciables

Definición 1.1.1. Una *variedad topológica n-dimensional*, M^n, es un espacio topológico Hausdorff y ANII localmente homeomorfo a $\mathbb{R}^n$. Esto es, para cada punto $p \in M^n$ existe un entorno U de p y un homeomorfismo $\phi : U \to U'$ sobre un abierto $U' \subset \mathbb{R}^n$.

Definición 1.1.2. Si M^n es una variedad topológica y $\varphi : U \to V$ un homeomorfismo de un abierto $U \subset M$ sobre el abierto $V \subset \mathbb{R}^n$, se dice que φ es una *carta* y U es el *dominio asociado.* Una colección de cartas $\{\varphi_\alpha \mid \alpha \in A\}$ con dominios U_α se denomina *atlas* de M si $\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha = M$.

Dadas dos cartas φ_α, φ_β cuyos dominios verifican $U_\alpha \cup U_\beta \neq \emptyset$, podemos definir la aplicación $\varphi_{\alpha\beta} := \varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1} : \varphi_\alpha(U_\alpha \cup U_\beta) \to \varphi_\beta(U_\alpha \cup U_\beta)$ y hablaremos entonces de un *cambio de carta.*

Definición 1.1.3. Un atlas de una variedad es *diferenciable* si, dadas dos cartas φ_α, φ_β, el cambio de carta $\varphi_{\alpha\beta}$ es C^∞.

Observamos ahora que, de acuerdo con la composición de cartas que acabamos de definir,

$$\varphi_{\alpha\alpha} = Id, \quad \varphi_{\alpha\beta} \circ \varphi_{\gamma\alpha} = \varphi_{\gamma\beta}$$

de donde se sigue que

$$\varphi_{\alpha\beta}^{-1} = \varphi_{\beta\alpha}$$

y, por tanto, las composiciones de cartas tienen inversa diferenciable, de manera que son difeomorfismos.

Si consideramos ahora un atlas diferenciable $\mathcal{A}$ de una variedad M, el atlas $\mathcal{D} = \mathcal{D}(\mathcal{A})$ que contiene a todas las cartas cuya composición con cartas de $\mathcal{A}$ es diferenciable, es también un atlas diferenciable. Por construcción, este atlas no puede extenderse a otro atlas compatible mediante la adición de nuevas cartas y hablaremos, por tanto, del *atlas maximal generado por* $\mathcal{A}$.

Definición 1.1.4. Una *estructura diferenciable* en una variedad topológica M es un atlas diferenciable maximal. Una *variedad diferenciable* es una variedad topológica equipada con una estructura diferenciable.

Proposición 1.1.5. Toda variedad diferenciable M admite un atlas numerable.

Demostración. Sea $\mathcal{B} = \{V_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una base numerable de entornos de M, que existe por ser IIAN. Sea un atlas $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha\in A}$ de M. Definimos el conjunto

$$K := \{n \in \mathbb{N} \mid V_n \text{ está contenido en algún } U_\alpha\}$$

que es numerable. Para cada $k \in K$, elegimos un α_k tal que $V_k \subset U_{\alpha_k}$.

Sea $x \in M$. Existe $\alpha \in A$ tal que $x \in U_\alpha$. Puesto que $\mathcal{B}$ es una base, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $x \in V_k \subset U_\alpha$. Pero entonces $x \in U_{\alpha_k}$ y $\{U_{\alpha_k}, \varphi_{\alpha_k}\}_{k\in K}$ cubre a la variedad M, con lo que hemos encontrado un atlas numerable. ■

Observación 1.1.6. El razonamiento anterior solo es válido si aceptamos el axioma de elección.

Definición 1.1.7. Una aplicación continua $f : M \to N$ entre variedades diferenciables se dice *diferenciable en el punto* $p \in M$ si existen una carta $\varphi : U \to U'$ de M, con $p \in U$, y otra $\psi : V \to V'$ de N, con $f(p) \in V$, tales que la composición $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ es diferenciable en el punto $\varphi(p) \in U'$. Diremos que f es *diferenciable* si lo es en cada punto $p \in M$.

Observamos que, en la definición anterior, podemos sustituir el 'existe' por un 'para todo' gracias a la estructura del atlas.

Lema 1.1.8. Las variedades diferenciables constituyen una categoría, cuyos morfismos son las aplicaciones diferenciables entre variedades. Denotamos dicha categoría (*categoría diferenciable*) por C^∞. ■

Definición 1.1.9. Un *difeomorfismo* es una aplicación diferenciable e invertible en la categoría C^∞.

Definición 1.1.10. Un subconjunto $N \subset M^{n+k}$ se llama *subvariedad diferenciable n-dimensional de M* si, para cada punto $p \in N$, existe una carta en torno a p, $\varphi : U \to U' \subset \mathbb{R}^{n+k} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k$ tal que $\varphi(N \cap U) = U' \cap (\mathbb{R}^n \times \{0\})$. El número k se denomina *codimensión* de la subvariedad.

Teorema 1.1.11. (Clasificación de 1-variedades) Toda variedad diferenciable conexa y de dimensión 1 es difeomorfa a uno de las siguientes variedades: $[0,1]$, $[0,\infty)$, $\mathbb{R}$ o $\mathbb{S}^1$.

Demostración. Ver [7, Appendix] ■

1.2. El espacio tangente

Procedemos ahora a introducir la noción de espacio tangente a una variedad. Lo haremos desde tres puntos de vista distintos pero equivalentes, utilizando en cada caso la noción que sea más ventajosa.

Sean M una variedad diferenciable y $p \in M$. Consideremos el conjunto

$$\{f \mid f : U \to N, \text{ para un entorno } U \text{ de } p \in M\}$$

En este conjunto tenemos la siguiente relación de equivalencia:

$$f \sim g \;\Leftrightarrow\; \text{existe un entorno } V \text{ de } p \text{ tal que } f|_V = g|_V.$$

Definición 1.2.1. Se denomina *germen* de una aplicación $M \to N$ en p a cada clase de equivalencia para la relación anterior. Denotamos por $\bar{f} : (M,p) \to N$ ó $\bar{f} : (M,p) \to (N, f(p))$ al germen de la clase representada por la aplicación f. Definimos la *composición de gérmenes* como $\bar{g} \circ \bar{f} = \overline{g \circ f}$. Una *función germen* es un germen diferenciable $(M,P) \to \mathbb{R}$. Denotamos el conjunto de todos las funciones germen en torno a $p \in M$ por $\mathcal{E}(p)$, que tiene estructura de álgebra real.

Definición 1.2.2. Una derivación en $\mathcal{E}(p)$ es una aplicación lineal $X : \mathcal{E}(p) \to \mathbb{R}$ que verifica la regla

$$X(\bar{f} \cdot \bar{g}) = X(\bar{f}) \cdot \bar{g}(p) + \bar{f}(p) \cdot X(\bar{g})$$

Definición 1.2.3. (Espacio tangente I) El *espacio tangente* T_pM de la variedad diferenciable M en el punto p es el $\mathbb{R}$-espacio vectorial de las derivaciones de $\mathcal{E}(p)$.

Un germen diferenciable $\bar{f} : (M,p) \to (N,q)$ define, por composición, un homomorfismo de álgebras

$$f^* : \mathcal{E}(q) \to \mathcal{E}(p) \;:\; \bar{g} \mapsto \bar{g} \circ \bar{f}$$

Obtenemos, así, una aplicación lineal, denominada *diferencial de f* en p:

$$\begin{aligned} T_pf : T_pM &\to T_qN \\ X &\mapsto X \circ f^* \end{aligned}$$

Denotamos $\mathcal{E}_n$ al conjunto de gérmenes $(\mathbb{R}^n, 0) \to \mathbb{R}$. Considerando el germen $\bar{\varphi} : (M,p) \to (\mathbb{R}^n, 0)$ de una carta en la variedad diferenciable M, la aplicación inducida $\varphi^* : \mathcal{E}_n \to \mathcal{E}(p)$ es un isomorfismo y, por tanto, también lo es la diferencial $T_p\varphi : T_pM \to T_0\mathbb{R}^n$.

Lema 1.2.4. Sea U una bola abierta en torno al origen de $\mathbb{R}^n$ o todo $\mathbb{R}^n$, y $f : U \to \mathbb{R}$ una función diferenciable. Entonces, existen $f_1, \ldots, f_n : U \to \mathbb{R}$ funciones diferenciables tales que:

$$f(x) = f(0) + \sum_{k=1}^{n} x_k \cdot f_k(x)$$

Demostración. Del teorema fundamental del cálculo y la regla de la cadena,

$$f(x) - f(0) = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(tx_1, \ldots, tx_n)\mathrm{d}t = \sum_{k=1}^{n} x_k \int_0^1 D_k f(tx_1, \ldots, tx_n)\mathrm{d}t$$

donde D_k es la derivada parcial con respecto a x_k. Llamando

$$f_k(x) = \int_0^1 D_k f(tx_1, \ldots, tx_n)\mathrm{d}t$$

tenemos el resultado. ∎

Entre las derivaciones de $\mathcal{E}_n$ se encuentran las derivadas parciales

$$\frac{\partial}{\partial x_k} : \mathcal{E}_n \to \mathbb{R} \;:\; \bar{f} \mapsto \frac{\partial f}{\partial x_k}(0)$$

Corolario 1.2.5. Las derivadas parciales forman una base del espacio vectorial $T_0\mathbb{R}^n$ de las derivaciones de $\mathcal{E}_n$.

Demostración. Supongamos que $\sum_{k=1}^n a_k \frac{\partial}{\partial x_k} = 0$ para ciertos $a_k \in \mathbb{R}$. Aplicando la derivación anterior a cada una de las proyecciones $\bar{x}_m$, obtenemos

$$a_m = \sum_{k=1}^n a_k \frac{\partial \bar{x}_m}{\partial x_k} = 0$$

para todo m. Por tanto, las derivadas parciales son linealmente independientes.

Sea ahora $X \in T_0\mathbb{R}^n$ y llamamos $a_m := X(\bar{x}_m)$. Vamos a ver que

$$X = \sum_{m=1}^n a_m \frac{\partial}{\partial x_m}.$$

Introducimos, para ello, la derivación $Y = X - \sum_{m=1}^n a_m \left(\frac{\partial}{\partial x_m}\right)$ que, por construcción, verifica $Y(\bar{x}_m) = 0$ para todo m. Si $\bar{f} \in \mathcal{E}_n$ es una función germen arbitraria, podemos escribir, por el lema anterior, $\bar{f} = \bar{f}(0) + \sum_{k=1}^n \bar{x}_k \cdot \bar{f}_k$ y obtenemos

$$Y(\bar{f}) = Y(f(0)) + \sum_{k=1}^n Y(\bar{x}_k) \cdot f_k(0) = Y(f(0))$$

Pero, por la definición de derivación, $Y(1) = Y(1) + Y(1)$ y, por tanto, $Y(1) = 0$. Esto, sumado a la linealidad de Y, nos da

$$Y(\bar{f}) = Y(f(0)) = f(0) \cdot Y(1) = 0$$

■

Con esto, hemos probado que $T_0\mathbb{R}^n$ y, por tanto, T_pM es un espacio vectorial de dimensión n. La dimensión está, de este modo, definida unívocamente.

Trataremos de dar ahora una expresión en coordenadas para las aplicaciones entre espacios tangentes. Introduciendo un sistema de coordenadas $(x_1, \ldots, x_n)$ en torno a un punto $p \in N^n$, podemos describir los vectores explícitamente como combinaciones lineales de las derivadas parciales. Sea $\bar{f} : (N^n, p) \to (M^m, q)$ un germen diferenciable, e $(y_1, \ldots, y_m)$ un sistema de coordenadas de M en torno a q. Localizando, podemos escribir $\bar{f}$ como un germen $(\mathbb{R}^n, 0) \to (\mathbb{R}^m, 0)$ que denotaremos con el mismo signo por simplicidad.

$$\begin{tikzcd}
(N,p) \arrow[r, "\bar{f}"] \arrow[d, "\psi^{-1}"] & (M,q) \arrow[d, "\varphi^{-1}"] \\
(\mathbb{R}^n,0) \arrow[r, "\bar{f}"'] & (\mathbb{R}^m,0)
\end{tikzcd}$$

La diferencial de $\bar{f}$ se calcula entonces de la siguiente manera: dado $\bar{g} \in \mathcal{E}_m$, siguiendo la definición y la regla de la cadena,

$$T_0\bar{f}\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)(\bar{g}) = \frac{\partial}{\partial x_i}(\bar{g} \circ \bar{f}) = \sum_{j=1}^m \frac{\partial g}{\partial y_j}(0) \cdot \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(0)$$

de donde se sique que

$$T_0\bar{f}\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right) = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(0) \cdot \frac{\partial}{\partial y_j}$$

La matriz

$$D_{x_0} f := \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)_{|x=x_0}$$

se denomina *matriz jacobiana* y constituye la representación matricial de la diferencial de $\bar{f}$ en las bases de las derivadas parciales. Todo esto puede resumirse en el siguiente resultado:

Teorema 1.2.6. Dados dos sistemas de coordenadas $(x_1, \ldots, x_n)$ e $(y_1, \ldots, y_m)$ en torno a los puntos $p \in N^n$ y $q \in M^m$, respectivamente, las derivadas parciales forman bases de T_pN y T_qM y la diferencial del germen $\bar{f} : (N, p) \to (M, q)$ con respecto a esas bases está dada por

$$D_0 f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$$

■

La construcción que acabamos de dar de espacio tangente es, probablemente, la más cómoda de manipular. Sin embargo, también es la más abstracta. Damos a continuación dos definiciones alternativas.

Consideremos el conjunto de gérmenes de la forma $\bar{c} : (\mathbb{R}, 0) \to (M, p)$, cuyos representantes son curvas en M que pasan por p. Tomamos en tal conjunto la siguiente clase de equivalencia:

$$\bar{c} \sim \bar{c}' \;\Leftrightarrow\; \text{para toda función germen } \bar{f} \in \mathcal{E}(p),\; \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\bar{f} \circ \bar{c})(0) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\bar{f} \circ \bar{c}')(0)$$

Definición 1.2.7. (Espacio tangente II) Se define el *espacio tangente* como el conjunto cociente de los gérmenes de curvas con la relación de equivalencia anterior.

De este modo, dos gérmenes de caminos definen el mismo vector tangente si, y solo si, definen la misma derivada de funciones en la dirección de la curva.

La última de las definiciones hace uso de la diferencial que introdujimos más atrás y tiene su motivación en la física. Los físicos definen *vector* (*covariante*) como un objeto matemático que, bajo cambios de coordenadas en la variedad, se transforma de una determinada manera.

Definición 1.2.8. (Espacio tangente III) Un *vector tangente* en el punto $p \in N^n$ es una correspondencia que asocia a cada germen de una carta $\bar{\varphi} : (N, p) \to (\mathbb{R}^n, 0)$ en torno a p un vector $v = (v_1, \ldots, v_n) \in \mathbb{R}^n$, de modo que el germen asociado a otra carta $\bar{\psi} = \bar{\phi} \circ \bar{\varphi}$ le corresponde el vector $D_0\phi \cdot v$.

Los vectores son entonces objetos que se transforman a través de la matriz jacobiana del cambio de carta.

Por último, probamos que las tres definiciones son equivalentes, lo que justifica el hecho de haber utilizado la misma notación en las tres definiciones.

Proposición 1.2.9. Los espacios tangentes I, II y III son isomorfos.

Demostración. Usaremos la notación $(T_pN)_I$, $(T_pN)_{II}$ y $(T_pN)_{III}$ para diferenciar las tres construcciones del espacio tangente.

Comenzamos viendo que la definición III es equivalente a la I. Para ello, designamos por

$$K_p = \{\bar{\varphi} \mid \bar{\varphi} : (N, p) \to (\mathbb{R}^n, 0) \text{ es germen de una carta en } N\}$$

de modo que $(T_pN)_{II}$ es el conjunto de las aplicaciones

$$v : K_p \to \mathbb{R}^n$$

tales que $v(\bar{\phi} \circ \bar{\varphi}) = D_0\bar{\phi} \cdot v(\bar{\varphi})$, para todo cambio de carta ϕ. Puesto que $D_0\phi$ es lineal, estas aplicaciones forman un espacio vectorial. Además, para una carta fija φ, podemos elegir arbitrariamente el vector $v \in \mathbb{R}^n$, fijando con esta elección su valor para el resto de cartas. De este modo, la elección de un determinado sistema de coordenadas nos da un isomorfismo entre $(T_pN)_{III}$ y $\mathbb{R}^n$. Por otro lado, ya probamos que $(T_pN)_I$ tiene dimensión n, de modo que $(T_pN)_I$ y $(T_pN)_{III}$ son isomorfos.

Veamos ahora que también son equivalentes las definiciones I y II. Para ello, a cada clase de equivalencia $[\bar{c}]$ en $(T_pN)_{II}$ le asignamos la derivación X_c de $\mathcal{E}(p)$:

$$X_c(\bar{f}) := \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\bar{f} \circ \bar{c}(0)$$

Esto nos da una correspondencia

$$X_\bullet : (T_pN)_{II} \to (T_pN)_I \ : \ [\bar{c}] \mapsto X_c$$

que, por la propia construcción del espacio tangente II, es lineal e inyectiva. Además, también es sobreyectiva. En efecto, dada una derivación $Y \in (T_pN)_I$, cuya expresión en coordenadas locales es $Y = \sum_{k=1}^n a_k(\partial/\partial x_k)$, se comprueba inmediatamente que la curva $c(t) = (ta_1, \ldots, ta_n)$ verifica $X_c = Y$. ■

1.3. La diferencial: valores críticos y regulares

En esta sección estudiamos algunas propiedades de la aplicación diferencial entre espacios tangentes que hemos definido en la sección anterior.

Sean dos variedades M, N y una aplicación $f : M \to N$ diferenciable definida en un entorno de un punto $p \in M$. Retomando la definición que dimos antes, tenemos que, dadas una derivación $X \in T_pM$ y una aplicación $\alpha \to \mathbb{R}$ definida en un entorno de $f(p)$, la diferencial actúa según

$$T_pf(X)(\alpha) = X \circ f^*(\alpha) = X(\alpha \circ f)$$

De esto se deduce que, para la composición $(M, p) \xrightarrow{f} (N, q) \xrightarrow{g} (L, r)$, se cumple

$$T_p(g \circ f)(X)(\alpha) = X(\alpha \circ g \circ f) = X \circ f^*(\alpha \circ g) = T_pf(X)(\alpha \circ g) = T_qg \circ T_pf(X)(\alpha)$$

Es decir, la diferencial es un funtor contravariante. Esta propiedad funtorial nos permite probar de forma inmediata el siguiente teorema.

Teorema 1.3.1. (de la función inversa) Un germen diferenciable $\bar{f} : (M, p) \to (N, q)$ es invertible si, y solo si, su diferencial es un isomorfismo.

Observación 1.3.2. Con 'invertible' queremos decir que el germen tiene inversa y que esta también es diferenciable. Es decir, los representantes del germen aplican difeomórficamente entornos de p en entornos de q.

Demostración. La condición necesaria se sigue directamente de la propiedad funtorial anterior. Para probar la condición suficiente, consideramos dos cartas $\varphi : (M,p) \to (\mathbb{R}^m, 0)$ y $\psi : (N,q) \to (\mathbb{R}^n, 0)$, de manera que $\bar{f}$ induce el germen

$$\bar{g} = \psi \circ \bar{g} \circ \bar{\varphi}^{-1} : (\mathbb{R}^m, 0) \to (\mathbb{R}^n, 0)$$

La diferencial de $\bar{g}$ es una aplicación lineal que, como hemos visto en la sección anterior, está representada por la matriz jacobiana $D_0 g$. Si esta matriz es invertible (y, por tanto, $T_q\bar{g}$ isomorfismo), entonces el teorema de la función inversa del cálculo diferencial nos dice que un representante g de $\bar{g}$ es difeomorfismo local, por lo que $\bar{g}$, y en consecuencia también $\bar{f}$, es invertible. ■

Definición 1.3.3. El *rango* de una aplicación diferenciable $f : M \to N$ en el punto $p \in M$ (el rango del germen $\bar{f} : (M,p) \to N$) es el número $rg_p f := rg T_p f$

Lema 1.3.4. Si $rg_p f = r$, existe un entorno U de p tal que $rg_q f \geq r$ para todo $q \in U$.

Demostración. Vamos a probar que, una vez elegidas cartas en las variedades, el rango de la matriz jacobiana Df no puede disminuir localmente en torno a p. Las componentes de esta matriz describen una aplicación diferenciable

$$Df : V \to \mathbb{R}^{m\times n} \ : \ q \mapsto \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)(q)$$

Como $rg_p f = r$, existe una submatriz $r \times r$ de $D_p f$ cuyo determinante no se anula en el punto p. Así, la aplicación

$$\begin{array}{ccccccc} V & \to & \mathbb{R}^{m\times n} & \to & \mathbb{R}^{r\times r} & \to & \mathbb{R} \\ p & \mapsto & D_p f & \mapsto & \text{submatriz} & \mapsto & \text{determinante} \end{array}$$

no se anula en el punto p y, por tanto, tampoco en un entorno U de p. En este entorno, el rango no disminuye. ■

Teorema 1.3.5. (del rango) Sea $\bar{f} : (M,p) \to (N,q)$ un germen de rango constante r. Entonces existen cartas φ y ψ en torno a p y q, respectivamente, tales que el germen $\bar{\psi} \circ \bar{f} \circ \bar{\varphi}^{-1} : (\mathbb{R}^m, 0) \to (\mathbb{R}^n, 0)$ viene representado por

$$(x_1, \ldots, x_m) \mapsto (x_1, \ldots, x_r, 0, \ldots, 0)$$

Demostración. Nos restringimos al caso $\bar{f} : (\mathbb{R}^m, 0) \to (\mathbb{R}^n, 0)$, a partir del cual el resultado se sigue fácilmente. Para tal situación, tenemos una submatriz $r \times r$ de Df que es regular en el origen y que podemos suponer, sin pérdida de generalidad, formada por las r primeras filas y columnas:

$$\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right), \quad 1 \leq i, j \leq r$$

Sea $\bar{\varphi} : (\mathbb{R}^m, 0) \to (\mathbb{R}^m, 0)$ representada por la aplicación

$$\varphi = (x_1, \ldots, x_m) \mapsto (f_1(x), \ldots, f_r(x), x_{r+1}, \ldots, x_m)$$

cuya matriz jacobiana tiene la forma

$$D\varphi = \left(\begin{array}{c|ccc} \multicolumn{4}{c}{\partial f_i/\partial x_j} \\ \hline & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & \vdots & \ddots & \vdots \\ & 0 & \cdots & 0 \end{array}\right)$$

cuyo determinante verifica

$$\det(D_0\varphi) = \det\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)_{1\leq i,j\leq r}(0) = r \neq 0$$

Así, $\bar{h}$ es, según el teorema de la función inversa, un germen invertible y el diagrama

$$\begin{tikzcd}
(\mathbb{R}^m, 0) \arrow[r, "\bar{f}"'] \arrow[dr, "\bar{\varphi}"'] & (\mathbb{R}^n, 0) \\
& (\mathbb{R}^m, 0) \arrow[u, "\bar{g}=\bar{f}\circ\bar{\varphi}^{-1}"']
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
(x_1, \ldots, x_m) \arrow[r, mapsto] \arrow[dr, mapsto] & (f_1(x), \ldots, f_n(x)) \\
& (f_1(x), \ldots, f_r(x), x_{r+1}, \ldots, x_m) \arrow[u, mapsto]
\end{tikzcd}$$

muestra que el germen $\bar{k} := \bar{f} \circ \bar{\varphi}^{-1}$ está representado por la aplicación

$$(z_1, \ldots, z_m) \mapsto (z_1, \ldots, z_r, k_{r+1}(z), \ldots, k_n(z))$$

Por tanto, la matriz jacobiana tiene este aspecto

$$Dk = \left(\begin{array}{ccc|c}
1 & \cdots & 0 & \\
\vdots & \ddots & \vdots & 0 \\
0 & \cdots & 1 & \\
\hline
 & ? & & \partial k_i/\partial z_j
\end{array}\right)$$

Ahora, como $\bar{h}$ es invertible, $r = rg(f) = rg(k) = rg(D_0k)$ en un entorno del origen por lo que

$$\left(\frac{\partial k_i}{\partial z_j}\right)_{r+1\leq i,j\leq m}(z) = 0 \tag{$\star$}$$

en dicho entorno.

Consideramos ahora, en el espacio imagen, el germen $\bar{\psi} : (\mathbb{R}^n, 0) \to (\mathbb{R}^n, 0)$, representado por la aplicación

$$(y_1, \ldots, y_n) \mapsto (y_1, \ldots, y_r, y_{r+1} - k_{r+1}(y_1, \ldots, y_r, 0, \ldots, 0), \ldots, y_n - k_n(y_1, \ldots, y_r, 0, \ldots, 0))$$

Cuya matriz jacobiana es

$$D\psi = \left(\begin{array}{ccc|ccc}
1 & \cdots & 0 & & & \\
\vdots & \ddots & \vdots & & 0 & \\
0 & \cdots & 1 & & & \\
\hline
 & & & 1 & \cdots & 0 \\
 & ? & & \vdots & \ddots & \vdots \\
 & & & 0 & \cdots & 1
\end{array}\right)$$

Así, ψ es invertible en un entorno del origen, y $\bar{\psi} \circ \bar{f} \circ \bar{\varphi}^{-1} = \bar{\psi} \circ \bar{k}$ está representado por la composición

$$\begin{aligned}
(z_1, \ldots, z_m) &\underset{k}{\mapsto} (z_1, \ldots, z_r, k_{r+1}(z), \ldots, k_n(z)) \\
&\underset{\psi}{\mapsto} (z_1, \ldots, z_r, z_{r+1} - k_{r+1}(z_1, \ldots, z_r, 0, \ldots, 0), \ldots, z_n - k_n(y_1, \ldots, y_r, 0, \ldots, 0))
\end{aligned}$$

Ahora, por ($\star$), para un entorno suficientemente pequeño del origen, tenemos

$$k_i(z_1,\ldots,z_n) - k_i(z_1,\ldots,z_r,0,\ldots,0) = 0, \quad \text{para } r+1 \leq i,j \leq n$$

por lo que $\bar{g} := \bar{\psi} \circ \bar{f} \circ \bar{\varphi}^{-1}$ está representada por

$$(z_1,\ldots,z_m) \mapsto (z_1,\ldots,z_r,0,\ldots,0)$$

■

Observamos que si $rg_p f$ es máximo, entonces por el lema anterior, es localmente constante y el teorema del rango es entonces utilizable.

Definición 1.3.6. Una aplicación diferenciable $f : M \to N$ se llama *sumersión* si, para todo $p \in M$, $rg_p f = \dim N$; mientras que se llama *inmersión* si $rg_p f = \dim M$.

Definición 1.3.7. Dada una aplicación $f : M \to N$, un punto $p \in M$ se llama *regular* si la diferencial $T_p f$ es sobreyectiva. Por otro lado, un punto $q \in N$ se llama *valor regular* si cada punto de $f^{-1}(q)$ es regular. Cuando no se cumple lo anterior, se habla de puntos o valores *críticos*.

Definición 1.3.8. Se denomina *inmersión difeomórfica* a una inmersión $f : M \to N$ que es homeomorfismo sobre su imagen $f(M)$.

1.4. Variedades con borde

Escribiremos $\mathbb{R}^n_+ = \{(x_1,\ldots,x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1 \geq 0\}$ y $\partial\mathbb{R}^n_+ = \{(x_1,\ldots,x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1 = 0\}$.

Definición 1.4.1. Una *variedad diferenciable de dimensión n con borde* es un espacio topológico M, IIAN y Hausdorff , tal que para todo punto $p \in M$ existen un entorno abierto U de p y un homeomorfismo $\varphi : U \to V$, donde V es un abierto de $\mathbb{R}^n$ o $\mathbb{R}^n_+$, de manera que, para cualquier otra carta ψ, el cambio de coordenadas $\psi \circ \varphi^{-1}$ es difeomorfismo.

Lema 1.4.2. Sea $p \in M$. Si existe una carta (U,φ) en torno a p tal que $\varphi(p) \in \mathbb{R}^n_+$, entonces $\psi(p) \in \mathbb{R}^n_+$ para toda carta en torno a p.

Demostración. Sean (U,φ) y (V,ψ) dos cartas en torno a p y supongamos que $\varphi(p)$ es un punto interior de $\mathbb{R}^n_+$. Aplicando el teorema de la función inversa a $\psi \circ \phi^{-1}$ tenemos que también $\psi(p)$ es un punto interior a $\mathbb{R}^n_+$. ■

Esto nos permite introducir sin ninguna ambigüedad la siguiente definición:

Definición 1.4.3. Se llama *borde* de M a

$$\partial M = \{p \in M \mid \varphi(p) \in \mathbb{R}^n_+ \text{ para alguna (o para toda) carta } (U,\varphi) \text{ en torno a } p\}$$

Si $f : M \to N$, escribimos $\partial f = f|_{\partial M}$.

Lema 1.4.4. El borde ∂M de una variedad diferenciable de dimensión n es una $(n-1)$-variedad diferenciable sin borde. Así, $\partial\partial M = \emptyset$.

Demostración. Para cada punto $p \in \partial M$ existe una carta (U, φ) de M en torno a p tal que $\varphi(U \cap \partial M)$ es un entorno abierto de 0 en $\{0\} \times \mathbb{R}^{n-1}$. Suprimiendo la primera coordenada, $(U \cap \partial M, \varphi_{U \cap \partial M})$ es una carta de ∂M que lleva un entorno abierto de p en un abierto de $\mathbb{R}^{n-1}$. ■

Además, es inmediato que $M - \partial M$ también es una variedad sin borde de dimensión $n = \dim M$ a la que llamaremos *interior* de M.

1.5. Fibrado tangente

Definición 1.5.1. Se define el *fibrado tangente* de una variedad diferenciable M de dimensión m como el conjunto

$$TM = \bigsqcup_{p \in M} T_pM = \{(p, v) \mid p \in M,\ v \in T_pM\}$$

Tenemos, por tanto, una proyección canónica $\pi : TM \to M \ :\ (p, v) \mapsto p$ que envía cada punto del fibrado tangente sobre el punto de la variedad en el que se 'apoya'.

A partir del atlas $\{(U_i, \varphi_i)\}_{i \in I}$ de M podemos definir de manera natural un atlas $\{(V_i, \psi_i)\}_{i \in I}$ para TM mediante

$$V_i = \pi^{-1}(U_i), \quad \psi_i(p, v) = (\varphi_i(p), T_p\varphi(v))$$

lo que nos da el siguiente resultado:

Proposición 1.5.2. El fibrado tangente admite una estructura de variedad diferenciable dimensión $2m$.

Demostración. Sea $\{(U_i, \varphi_i)_{i \in I}$ un atlas de M y vamos a comprobar que la familia que hemos definido arriba es, en efecto, un atlas de TM. Para ello, tomamos dos cartas (V_i, ψ_i), (V_j, ψ_j) que se intersecan y un punto $(x, u) \in \psi_i(V_i)$ y vemos que

$$\psi_j \circ \psi_i^{-1}(x, u) = (\varphi_j \circ \varphi_i^{-1}(x), T_p\varphi_j \circ (T_p\varphi_i)^{-1}(u)) = (\varphi_j \circ \varphi_i^{-1}(x), D_x(\varphi_j \circ \varphi_i^{-1})u)$$

Puesto que la matriz jacobiana que aparece en la expresión anterior depende diferenciablemente de x, $\psi_j \circ \psi_i^{-1}$ es una aplicación diferenciable y, por tanto, $\{(V_j, \psi_j)\}_{j \in J}$ dota a TM de estructura de variedad diferenciable. ■

2. El teorema de Sard

2.1. Medida cero en variedades

Definición 2.1.1. Se denomina *paralelepípedo* en $\mathbb{R}^n$ a un conjunto de la forma

$$C = \prod_{i=1}^{n} [a_i, b_i]$$

Escribimos $|C| = \prod_{i=1}^{n} |a_i - b_i|$.

Definición 2.1.2. Un conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ tiene *medida cero* si, para todo $\varepsilon > 0$, existe una secuencia $\{C_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ de paralelepípedos tal que

$$A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} C_k \quad \text{y} \quad \sum_{k=1}^{\infty} |C_k| < \varepsilon$$

Observación 2.1.3. Considerando paralelepípedos abiertos obtenemos una definición equivalente de conjunto de medida cero.

De la definición se sigue directamente que todo subconjunto de un conjunto de medida cero tiene medida cero.

Lema 2.1.4. Si $m < n$, $\mathbb{R}^m \cong \mathbb{R}^m \times \{0\} \subset \mathbb{R}^n$ tiene medida cero.

Demostración. Dado $\varepsilon > 0$, para cada $k \in \mathbb{N}$ elegimos $\delta_k > 0$ tal que

$$\cancel{\forall k}\ (2\delta_k)^{n-m} \cdot (2k + 2\varepsilon)^n < \frac{\varepsilon}{2^n}$$

Definiendo

$$U_k := (-k - \varepsilon, k + \varepsilon)^m \times (-\delta_k, \delta_k)^{n-m}$$

tenemos que

$$R^m \times \{0\} = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} [-k, k]^m \times \{0\} \subseteq \bigcup_{k \in \mathbb{N}} U_k$$

y

$$\sum_{k=1}^{\infty} |U_k| = \sum_{k=1}^{\infty} (2\delta_k)^{n-m} \cdot (2k + 2\varepsilon)^n < \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^n} = \varepsilon .$$

■

Lema 2.1.5. Sea $\{A_k \subset \mathbb{R}^n\}_{k \in \mathbb{N}}$ una secuencia de conjuntos de medida cero. Entonces, $\bigcup_k A_k$ tiene medida cero.

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$. Tomamos, para cada A_k, una secuencia de paralalepípedos $\{C_k^j\}_{j \in \mathbb{N}}$ tal que

$$A_k \subset \bigcup_{j \in \mathbb{N}} C_k^j \quad \text{y} \quad \sum_{j=1}^{\infty} |C_k^j| < \frac{\varepsilon}{2^k}$$

Entonces,

$$\bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k \subset \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \bigcup_{j \in \mathbb{N}} C_k^j \quad \text{y} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} |C_k^j| < \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^k} = \varepsilon$$

■

Lema 2.1.6. Sea $U \subset \mathbb{R}^m$ un conjunto abierto y $f : U \to \mathbb{R}^m$ una aplicación diferenciable, es decir, $f \in C^1(U)$. Si $A \subset U$ tiene medida cero, entonces $f(A) \subset \mathbb{R}^m$ tiene medida cero.

Demostración. Por ser f diferenciable en un abierto, también es localmente lipschitziana. Esto es, para cada $x \in U$ existe una bola B que contiene a x y tal que

$$||f(a) - f(b)|| < L_x ||a - b||, \quad \forall a, b \in B$$

siendo L_x una constante. Sea ahora una familia de paralelepípedos $\{C_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ tales que

$$A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} C_k \quad \text{y} \quad \sum_{k=1}^{\infty} |C_k| < \varepsilon$$

Por ser cada uno de ellos compacto, podemos descomponerlo en una unión finita de paralelepípedos en los que la función es lipschitziana. Precisamente por esto, la imagen de cada elemento de la subpartición también tiene medida cero y, puesto que $f(A)$ esta contenido en su unión, concluimos por el lema anterior que $f(A)$ es de medida cero. ■

El resultado que acabamos de probar dota de consistencia a la siguiente definición, pues garantiza la independencia del sistema de coordenadas elegido.

Definición 2.1.7. Diremos que un conjunto A en una variedad M tiene *medida cero* si $\varphi(U \cap A) \subset \mathbb{R}^m$ tiene medida cero para toda carta (φ, U) del atlas maximal de M.

Lema 2.1.8. Si un subconjunto $A \subset M$ tiene medida cero, entones su complementario $M - A$ es denso en M.

Demostración. Sea (U, φ) una carta en M y $A \subset M$ un subconjunto ~~denso~~ de medida 0. Sea $V = \varphi(U) \subset \mathbb{R}^m$ que, por ser abierto, contiene una bola B de radio ε. Por tanto, $\varphi(U)$ no es de medida cero y $\varphi(A \cap U) \neq \varphi(U)$. Puesto que φ es homeomorfismo, lo anterior implica $A \cap U \neq U$ y, como los abiertos U cubren la variedad, concluimos que $M - A$ es denso en M. Revisar ■

Lema 2.1.9. Sea $U \subset \mathbb{R}^m$ abierto y $f : U \to \mathbb{R}^n$ diferenciable, siendo $n > m$. Entonces, $f(U) \subset \mathbb{R}^n$ tiene medida cero.

Demostración. Definimos $\hat{f} : U \times \mathbb{R}^{n-m} \to \mathbb{R}^n$ por $\hat{f}(x, y) = f(x)$, que es diferenciable. Como $U \times \{0\}$ tiene medida cero, se sigue del lema 2.1.6 que $f(U) = \hat{f}(U \times \{0\})$ tiene medida cero. ■

Con lo visto hasta ahora, podemos demostrar un primer caso del teorema de Sard, cuya versión general probaremos en la sección siguiente:

Proposición 2.1.10. Sea $f : M \to N$ una aplicación diferenciable entre dos variedades tales que $\dim M < \dim N$. Entonces, $f(M)$ tiene medida cero en N.

Demostración. Sean $\{(U_i, \varphi_i)\}_{i\in\mathbb{N}}$ y $\{(V_j, \psi_j)\}_{j\in\mathbb{N}}$ dos atlas numerables de M y N, respectivametne, cuya existencia está garantizada por la proposición 1.1.5. Entonces

$$\psi_j(f(M) \cap V_j) = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} \psi_j(f(U_i) \cap V_j) = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} (\psi_j \circ f \circ \varphi_i^{-1})(\varphi(U_i \cap f^{-1}(V_j)))$$

Ahora bien, $\psi_j \circ f \circ \varphi_i^{-1}$ es una aplicación diferenciable de $\mathbb{R}^m$ en $\mathbb{R}^n$ y, por ser $m < n$, del lema anterior se sigue que su imagen tiene medida cero. Finalmente, el lema 2.1.5 y la definición de medida cero en variedades nos dan el resultado. ■

2.2. Teorema de Sard

Introducimos, en primer lugar, algunos lemas que utilizaremos en la demostración del teorema de Sard.

Lema 2.2.1. Todo recubrimiento abierto por subintervalos de $[0, 1]$ contiene un subrecubrimiento finito $[0, 1] = \bigcup_{j=1}^{k} I_j$ con $\sum_{j=1}^{k} |I_j| < 2$.

Demostración. Tomamos un subrecubrimiento finito del que no se pueda quitar ningún intervalo más, que existe por compacidad. Sean $I_j = (a_j, b_j)$, $j = 1, \ldots, k$, los intervalos del subrecubrimiento. Cada punto $p \in [0, 1]$ pertenece, a lo sumo, a dos de los I_j. En efecto, supongamos, sin pérdida de generalidad, que $p \in I_1 \cap I_2 \cap I_3$ y sean $s = \inf(I_1 \cup I_2 \cup I_3)$ y $t = \sup(I_1 \cup I_2 \cup I_3)$. Ahora, uno de los intervalos, digamos I_1 contiene a $(s, p]$ y otro, digamos I_2, a $[p, t)$. Pero entonces $I_1 \cup I_2 = (s, t) = I_1 \cup I_2 \cup I_3$, lo que contradice la minimalidad del ~~intervalo~~ recubrimiento. Así, los I_j cubren, como mucho, dos veces a $[0, 1]$, lo que nos da el resultado. ■

Lema 2.2.2. (Teorema de Fubini) Sean $\mathbb{R}^{n-1}_t = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_n = t\} \subset \mathbb{R}^n$, $C \subset \mathbb{R}^n$ un compacto tal que $C_t := C \cap \mathbb{R}^{n-1}_t$ tiene medida nula en $\mathbb{R}^{n-1}_t \cong \mathbb{R}^{n-1}$, para todo $t \in \mathbb{R}$. Entonces C tiene medida nula en $\mathbb{R}^{n}$.

Demostración. Puesto que C es acotado, existe un intervalo $[a,b]$ tal que $C \subset [a,b]^n$. Sea $\varepsilon > 0$. Por hipótesis, C_t, visto como un subconjunto de $\mathbb{R}^{n-1}$ tiene medida cero, luego podemos cubrirlo con cubos abiertos $W^i_t \subset [a,b]^{n-1}$, $i \in \mathbb{N}$, tales que $\sum_i |W^i_t| \leq \varepsilon$. Sea $W_t = \bigcup_i W^i_t \subset [a,b]^{n-1}$. Para cada $t \in \mathbb{R}$, definimos la aplicación $d_t : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \ : \ x \mapsto |x_n - t|$, que es continua y se anula justamente en $\mathbb{R}^{n-1}_t$. Puesto que W_t es abierto, $([a,b]^{n-1} - W_t) \times [a,b]$ es cerrado, luego $C - (W_t \times [a,b])$ es compacto, y d_t alcanza un mínimo $\alpha > 0$ en este conjunto. En consecuencia,

$$\{x \in C \mid |x_n - t| < \alpha\} \subset W_t \times I_t$$

donde $I_t = (t - \alpha, t + \alpha)$. Los intervalos I_t así construidos cubren $[0,1]$ luego, por el lema anterior, podemos obtener un subrecubrimiento $\{I_{t_j}\}_{j=1,\ldots,k}$ de longitud menor o igual que 2. De este modo, los paralelepípedos

$$\{W^i_{t_j} \times I_{t_j} \mid i \in \mathbb{N},\ j = 1, \ldots, k\}$$

recubren C y $\sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^\infty |W^i_{t_j} \times I_{t_j}| < 2\varepsilon$. ∎

Observación 2.2.3. Podemos debilitar la hipótesis de que C es compacto: basta con que sea unión numerable de compactos. En tal caso, aplicamos el teorema anterior a cada uno de los elementos de la unión y, teniendo en cuenta que la unión numerable de conjuntos de medida cero también tiene medida cero, obtenemos el resultado. Esto se cumple, en particular, para los cerrados, abiertos, imágenes de conjuntos de esta clase por funciones continuas, uniones numerables e intersecciones finitas de tales conjuntos.

Teorema 2.2.4. (de Sard) Sea $f : U \to \mathbb{R}^p$ una aplicación diferenciable, $f \in C^\infty(U)$, con $U \subset \mathbb{R}^n$ abierto, y sea C el conjunto de sus puntos críticos; esto es, el conjunto de los puntos $x \in U$ tales que $rg_x f < p$. Entonces, $f(C) \subset \mathbb{R}^p$ tiene medida cero.

Demostración. Procederemos por inducción sobre n. Para $n = 0$, $\mathbb{R}^n$ es punto por lo que $f(U)$ también es a lo sumo un punto y tiene medida cero.

Sea $C \subset U$ el conjunto de los puntos críticos de f. Para aplicar la inducción definimos los conjuntos $C_i \subset U$ formados por los puntos $x \in U$ en los que se anulan todas las derivadas parciales de f de orden $\leq i$. Tenemos entonces una sucesión de conjuntos cerrados y encajados

$$C \supset C_1 \supset C_2 \supset \ldots$$

Dividimos la demostración en tres pasos:

- Paso 1. La imagen de $f(C - C_1)$ tiene medida cero.
- Paso 2. La imagen de $f(C_i - C_{i+1})$ tiene medida cero, para $i \geq 1$.
- Paso 3. La imagen de $f(C_k)$ tiene medida cero.

Una vez comprobado que lo anterior es cierto, escribiendo

$$f(C) = f(C - C_1) \cup f(C_1 - C_2) \cup f(C_2 - C_3) \cup \ldots \cup f(C_k)$$

tenemos el resultado por ser $f(C)$ unión finita de conjuntos de medida cero.

$\boxed{\text{Paso 1.}}$ Supondremos que $p \geq 2$, ya que $C = C_1$ cuando $p = 1$. Para cada $x^* \in C - C_1$, encontraremos un entorno abierto $V \subset \mathbb{R}^n$ tal que $f(V \cap C)$ tenga medida cero. Puesto que C es cerrado, puede escribirse como unión numerable de conjuntos compactos. Cada compacto puede cubrirse con un número finito de conjuntos de la forma $V \cap C$, de modo que $C - C_1$ puede cubrirse con una cantidad numerable de tales conjuntos. Esto probará que $f(C - C_1)$ tiene medida cero.

Puesto que $x^* \notin C_1$, existe alguna derivada parcial, supongamos $\partial f_1/\partial x_1$, que no se anula en x^*. Sea la aplicación $h : U \to \mathbb{R}^n$ definida por

$$h(x) = (f_1(x), x_2, \dots, x_n)$$

Cuya matriz jacobiana en x^* está dada por

$$D_{x^*}h = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}_{|_{x=x^*}}$$

De este modo, $T_{x^*}h$ es un isomorfismo y, por el teorema de la función inversa, h es difeomorfismo local, es decir, existe un entorno abierto V de x^* tal que $h|_V$ es difeomorfismo. Sea $V' = h(V)$ y definimos $g := f \circ h^{-1} : V' \to \mathbb{R}^p$ que tiene la forma

$$g(z) = (z_1, g_2(z), \dots, g_p(z))$$

Observamos que, por ser h difeomorfismo local, el conjunto de puntos críticos de g es $h(C \cap V)$.

Por otro lado, para cada $t \in \mathbb{R}$ la aplicación g lleva los puntos de la forma $(t, x_2, \dots, x_n)$ en el hiperplano $\{t\} \times \mathbb{R}^{p-1} \subset \mathbb{R}^p$. Sea entonces

$$g^t : (\{t\} \times \mathbb{R}^{n-1}) \cap V' \to \{t\} \times \mathbb{R}^{p-1}$$

la restricción de g a los hiperplanos de V'. Los puntos críticos de g^t coinciden con los puntos críticos de g en $(\{t\} \times \mathbb{R}^{n-1}) \cap V'$ y su matriz jacobiana tiene la forma

$$Dg = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline ? & \left(\frac{\partial g_i^t}{\partial x_j}\right) \end{array}\right)$$

Ahora, por hipótesis de inducción, el conjunto de valores críticos de g^t tiene medida cero en $\{t\} \times \mathbb{R}^{p-1}$, luego el conjunto de valores críticos de g interseca a cada hiperplano $\{t\} \times \mathbb{R}^{p-1}$ en un conjunto de medida cero. Por tanto, usando el teorema de Fubini, $h(C \cap V)$ tiene medida cero y, por ser h difeomorfismo y f diferenciable, también $f(V \cap C)$.

$\boxed{\text{Paso 2.}}$ Procedemos de manera análoga al paso anterior. Para cada $x^* \in C_i - C_{i+1}$ existe una derivada $(k+1)$-ésima,

$$\frac{\partial^{k+1} f_r}{\partial x_{s_1} \dots x_{s_{k+1}}}$$

que no se anula, de modo que la función

$$w(x) = \frac{\partial^k f_r}{\partial x_{s_2} \dots \partial x_{s_{k+1}}}(x)$$

se anula en x^* pero no lo hace su derivada $\partial w/\partial x_{s_1}$. Supongamos, sin pérdida de generalidad, que $s_1 = 1$. Definimos la aplicación $h : U \to \mathbb{R}^n$ que, por el mismo argumento que en el caso anterior, lleva difeomórficamente un entorno abierto V de x^* sobre un abierto V'. Además, por la forma en que hemos construido w y h, $h(C_i \cap V) \subset \{0\} \times \mathbb{R}^{n-1}$. De nuevo definimos $g = f \circ h^{-1}$ y sea

$$\hat{g} : (\{0\} \times \mathbb{R}^{n-1}) \cap V' \to \mathbb{R}^p$$

la restricción. Por hipótesis de inducción, el conjunto de sus valores críticos tiene medida cero en $\mathbb{R}^p$. Además, cada punto en $h(C_i \cap V)$ es un punto crítico de $\hat{g}$, puesto que se anulan todas sus derivadas de orden menor o igual que i. Por tanto,

$$\hat{g}\left(h(C_i \cap V)\right) = f(C_i \cap V)$$

tiene medida cero. Como $C_i - C_{i+1}$ puede cubrirse, de nuevo, con una cantidad a lo sumo numerable de conjuntos como V, se sigue que $f(C_i - C_{i+1})$ tiene medida cero.

Paso 3. Sea $I^n \subset U$ un cubo de lado δ. Veremos que, si $k > \frac{n}{p} - 1$, $f(C_k \cap I^n)$ tiene medida cero. Puesto que k puede cubrirse con una cantidad numerable de cubos de esta forma, esto nos dará que $f(C_k)$ tiene medida cero. Por la fórmula de Taylor,

$$f(x+h) = f(x) + R(x,h)$$

donde

$$||R(x,h)|| \leq c||h||^{k+1} \tag{$*$}$$

para $x \in C_k \cap I^n$ y $x + h \in I^n$, siendo c una constante que solo depende de f e I^n. Subdividimos ahora I^n en r^n cubos de longitud δ/r. Sea I_1 un cubo de esa subdivisión que contiene un punto x^* de C_k. Entonces, cualquier punto de I_1 puede escribirse como $x^* + h$, con

$$||h|| \leq \sqrt{n}\frac{\delta}{r} \tag{$**$}$$

De $(*)$ y $(**)$ se sigue que $f(I_1)$ se encuentra en un cubo de lado a/r^{k+1} centrado en $f(x)$, siendo $a = 2c(\sqrt{n}\delta)^{k+1}$. Puesto que $f(C_k \cap I^n)$ está contenido en la unión de r^n cubos de esta forma, con un volumen

$$V = r^n\left(\frac{a}{r^{k+1}}\right)^p = a^p r^{n-(k+1)p}$$

Si $(k+1)p > n$, entonces $V \to 0$ cuando $r \to \infty$, luego $f(C_k \cap I^n)$ tiene medida cero. ■

Corolario 2.2.5. (Teorema de Sard) El conjunto de los valores críticos de una aplicación diferenciable entre variedades tiene medida cero. ■

Corolario 2.2.6. Los valores regulares de una aplicación diferenciable entre variedades $f : M \to N$ forman un conjunto denso en N. ■

3. Inmersión de variedades

Dedicamos toda esta sección a demostrar el teorema de inmsersión de Whitney, que permite encajar difeomórficamente cualquier variedad diferenciable en una variedad euclídea.

3.1. Espacios semi-compactos y σ-compactos

Definición 3.1.1. Un espacio topológico X se dice *regular* cuando para cada cerrado $C \subset X$ y cada $x \notin C$, existen dos entornos abiertos disjuntos U, V tales que $C \subset U$ y $x \in V$.

Definición 3.1.2. Diremos que un espacio topológico Hausdorff X es *normal* si para cada par de conjuntos cerrados disjuntos C_1, C_2 existen dos abiertos disjuntos U_1, U_2 tales que $C_i \subset U_i$, $i = 1, 2$.

Teorema 3.1.3. (Lema de Urysohn) Sea X espacio topológico normal y $A, B \subset X$ dos cerrados disjuntos. Existe una función continua $f : X \to [0,1]$ tal que $f|_A \equiv 0$ y $f|_B \equiv 1$.

Demostración. Sea $P = \mathbb{Q} \cap [0,1]$ y vamos a probar que, para cada cada par de elementos $p, q \in P$ con $p < q$ existen dos abiertos $U_p, U_q \subset X$ tales que

$$\overline{U_p} \subset U_q \tag{$\clubsuit$}$$

Puesto que P es numerable, procederemos por inducción.

En primer lugar, consideramos una enumeración de P en la que 1 y 0 son los dos primeros elementos y definimos $U_1 = X - B$. Por ser X normal, existe un abierto U_0 tal que $A \subset U_0$ y $\overline{U_0} \subset U_1$. Llamamos P_n al conjunto formado por los n primeros elementos de P y sea $r \in P$ el primer elemento de la 'lista' que no esta en P_n. Supongamos cierto el resultado para cada par de elementos en P_n.

Sea $P_{n+1} = P_n \cup \{r\}$. Ordenando P_{n+1} mediante el orden $<$ usual en $\mathbb{R}$, tenemos que 0 es el elemento mínimo, 1 el elemento máximo y r no coincide con ninguno de los dos, por lo que tiene un predecesor inmediato p y un sucesor inmediato q y, además, $p, q \in P_n$. De este modo, tenemos ya definidos, por hipótesis de inducción, dos abiertos U_p y U_q tales que $\overline{U_p} \subset U_q$. Aplicando de nuevo la normalidad de X, podemos encontrar un abierto U_r tal que $\overline{U_p} \subset U_r$ y $\overline{U_r} \subset U_q$. Veamos que la condición ($\clubsuit$) se verifica en P_{n+1}.

En efecto, tomamos dos elementos de P_{n+1}. Si los dos están en P_n, entonces la condición se da por hipótesis de inducción. Por otro lado, si uno de los elementos es r, el otro tiene que ser un punto $s \in P_n$ tal que $s \leq p$ o $q \leq s$. Si $s \leq p$, entonces

$$\overline{U_s} \subset U_p \subset \overline{U_p} \subset U_r$$

mientras que, si $q \leq s$,

$$\overline{U_r} \subset U_q \subset \overline{U_q} \subset U_s$$

Por inducción, tenemos definido U_p para todo $p \in P$.

Extendemos la definición anterior a todo $\mathbb{Q}$ definiendo $U_p = \emptyset$ si $p < 0$, y $U_p = X$ si $p > 1$ y construimos ahora la función f. Para ello, dado un punto $x \in X$, llamamos $\mathbb{Q}(x) = \{p \in \mathbb{Q} \mid x \in U_p\}$. Observamos que este conjunto no posee ningún racional menor que 0 y contiene a todos los mayores que 1. Es decir, $\mathbb{Q}(x)$ está acotado inferiormente por lo que podemos definir

$$f(x) = \inf \mathbb{Q}(x) = \inf\{p \in \mathbb{Q} \mid x \in U_p\}$$

Comprobemos que f es la función que buscamos.

Por un lado, si $x \in A$, entonces $\mathbb{Q}(x)$ contiene a todos los racionales positivos y $f(x) = 0$. En cambio, si $x \in B$, entonces $x \notin U_p$ para $p \leq 1$, por lo que $\mathbb{Q}(x)$ está compuesto por todos los racionales mayores que 1 y $f(x) = 1$.

Finalmente, para comprobar que f es continua. Comenzamos viendo que

$$x \in \overline{U_r} \Rightarrow f(x) \leq r \tag{1}$$

$$x \notin U_r \Rightarrow f(x) \geq r \tag{2}$$

Para probar (1) observamos que, si $x \in \overline{U_r}$, entonces $x \in U_s$ para todo $s > r$. Por tanto, $\mathbb{Q}(x)$ contiene a todos los racionales mayores que r y, por definición,

$$f(x) = \inf \mathbb{Q}(x) \leq r$$

Razonando de manera análoga se prueba (2).

Ahora para ver que, en efecto, f es continua. Sean un punto $x_0 \in X$ y un intervalo $(c, d) \subset \mathbb{R}$ tal que $f(x_0) \in (c, d)$. Se trata de encontrar un entorno un entorno U de x_0 tal que $f(U) \subset (a, b)$. Tomamos, para ello, dos racionales p y q tales que

$$c < p < f(x_0) < q < d$$

El entorno U que buscamos (uno de ellos) es

$$U = U_q - \overline{U_p}$$

En efecto, en primer lugar observamos que, de (1) y (2) se sigue que $x_0 \in U$. En segundo lugar, vemos que $f(U) \subset (c, d)$. Para ello, sea $x \in U$, entonces $x \in U_q \subset \overline{U_q}$ y, por (1), $f(x) \leq q$. Además, $x \notin \overline{U_p}$ de modo que, por (2), $f(x) \geq p$. Por tanto, $f(x) \in [p, q] \subset (c, d)$, como queríamos. ∎

Observación 3.1.4. Aunque no lo probamos, el recíproco del teorema anterior también es cierto (ver [8, Lemma II.7.2.]).

Definición 3.1.5. Un espacio topológico X se dice *localmente compacto* si cada punto $x \in X$ tiene una base de entornos compactos.

Realmente, los resultados que nos interesan en esta sección se siguen de las siguiente propiedad, más débil que la compacidad local.

Definición 3.1.6. Un espacio topológico X se dice *semi-compacto* si, para cada $x \in X$, existen un abierto U y un compacto K tales que $x \in U \subset K$.

En particular, tanto los espacios compactos como los localmente compactos son semi-compactos.

Teorema 3.1.7. Sea X un espacio topológico. Entonces X es Hausdorff semi-compacto si, y solo si, existe un espacio topológico Y que verifica las siguientes condiciones:

1. X es un subespacio de Y.
2. El conjunto $Y - X$ contiene un solo punto.
3. Y es un espacio Hausdorff compacto.

Si Y e Y' son dos espacios que verifican estas condiciones, entonces existe un homemorfismo entre ellos cuya restricción a X es la identidad.

Demostración. Comenzamos con la unicidad. Sean Y e Y' dos espacios que verifican las tres condiciones del teorema. Consideramos la aplicación $h : Y \to Y'$ que lleva el punto de $Y - X$ en el punto de $Y' - X$ y es igual a la identidad en X. Veamos que es abierta lo que, por simetría, implica que también es homeomorfismo.

Sea U un abierto que no contiene a p. Entonces $h(U) = U$. Además, como U está contenido en X, también es abierto en X. Y, como Y' es Hausdorff, X es abierto en Y', de modo que U también es abierto en Y'.

Supongamos ahora que U contiene a p. Puesto que $C = Y - U$ es cerrado en Y (compacto), C es compacto en Y y también en X. Ahora, $f(C) = C \subset X$ es compacto en X y, como X es subespacio de Y', también es compacto en Y'. Por ser Y' Hausdorff, C es cerrado en Y' y $h(U) = Y' - C$ es abierto, como queríamos.

Vamos a probar ahora la existencia. Sea X un espacio Hausdorff semi-compacto y consideramos el conjunto $Y = X \cup \{\infty\}$ consistente en añadir a X un punto extra. Sea τ el conjunto formado por los abiertos de X y los conjuntos de la forma $Y - C$, con C compacto en X. Se comprueba inmediatamente que τ es una topología en Y y comprobamos, a continuación, que (Y, τ) verifica las tres propiedades del teorema.

En primer lugar, comprobamos que X es subespacio. Por un lado, cada abierto $U \subset X$ es también abierto en Y. Por otro, tomando $U \subset Y$ abierto, hay dos posibilidades: si $U \cap X = U$ es abierto en X, no hay nada que probar; si $U = Y - C$, con C compacto en X, entonces C es cerrado en X y $(Y - C) \cap X = X - C$ es abierto.

En segundo lugar, veamos que Y es compacto. Sea $\mathcal{U}$ un recubrimiento por abiertos de Y. Este recubrimiento debe contener un abierto del tipo $Y - C$ que recubra al subconjunto $\{\infty\}$. Consideremos la intersección del resto de abiertos de $\mathcal{U}$ con X. Estos abiertos recubren C, que es compacto, por lo que podemos tomar un subrecubrimiento finito que también lo haga. Entonces, los correspondientes elementos de $\mathcal{U}$, junto con $Y - C$, recubren Y.

Por último, para ver que Y es Hausdorff, sean $x, y \in Y$ dos puntos de Y. Si los dos están en X (Hausdorff), es claro que se pueden separar mediante dos abiertos contenido en X. Supongamos, por tanto, que $x \in X$ e $y = \infty$. Sea C un compacto de X con $x \in C$ y $U \subset X$ un abierto tal que $x \in U \subset C$, que existe por la semi-compacidad. Entonces, $Y - C$ y U son abiertos disjuntos que separan a x e y.

Para terminar, probamos el recíproco. Supongamos que Y es un espacio en las condiciones del teorema. Sea $x \in X$ y veamos que X es semi-compacto en x. Sean U y V dos abiertos disjuntos que contienen a x y al único punto $y = \infty \in Y - X$, respectivamente. Entonces, el conjunto $C = Y - V$ es cerrado en Y, luego compacto. Como X es subespacio de Y, también es compacto en Y y contiene a U, lo que nos da la semi-compacidad. Que X es Hausdorff se sigue trivialmente. ■

Si X es compacto, el espacio Y del teorema anterior no es muy interesante. Sin embargo, si X no es compacto, nos permite construir un conjunto compacto a partir de él añadiendo un solo punto. Esto motiva la siguiente definición.

Definición 3.1.8. Si Y es un espacio Hausdorff compacto y X es un subespacio propio de Y, cuya adherencia es Y, entonces Y es una *compactificación* de X. Si $Y - X$ tiene un único punto, entonces Y recibe el nombre de *compactificación por un punto* de X.

Hemos demostrado, además, que un espacio X es Hausdorff semi-compacto si, y solo si, admite una compactificación por un punto que, además, es esencialmente única.

Lema 3.1.9. Si Y es un subespacio compacto de un espacio X Hausdorff y $x_0 \notin Y$, entonces existen dos abiertos disjuntos U y V de X que contienen a x_0 e Y, respectivamente.

Demostración. Sea Y un subespacio compacto de un espacio X Hausdorff. Sea $x_0 \in X - Y$. Por la propiedad Hausdorff, elegimos para cada $y \in Y$, entornos disjuntos U_y y V_y de x_0 e y, respectivamente. La familia $\{V_y\}_{y \in Y}$ recubre Y, por lo que podemos extraer un subrecubrimiento finito $\{V_{y_1}, \ldots, V_{y_n}\}$. Entonces,

$$V = V_{y_1} \cup \ldots \cup V_{y_n}$$

es un abierto que contiene a Y y que es disjunto del abierto

$$U = U_{y_1} \cap \ldots \cap U_{y_n}$$

que contiene a x_0. ■

Damos a continuación otra caracterización de la semi-compacidad para espacios Hausdorff, que utilizaremos repetidamente en apartados siguientes.

Teorema 3.1.10. Sea X un espacio topológico Hausdorff. Entonces, X es semi-compacto si, y solo si, dado $x \in X$ y un entorno suyo U, existe otro entorno V de x tal que $\overline{V}$ es compacto y $\overline{V} \subset U$.

Demostración. La condición suficiente es trivial. Para probar el recíproco, supongamos que X es semi-compacto y sean $x \in X$ y un entorno suyo U. Sea Y la compactificación por un punto de X y $C = Y - U$ que es cerrado y, por tanto, compacto en Y. Usando el lema 3.1.9, tomamos dos abiertos disjuntos V y W que contienen a x y C, respectivamente. Entonces, la adherencia $\overline{V}$ de V en Y es compacta, por ser Y compacto. Además, como $\overline{V} \subset U$, como queríamos. ■

Corolario 3.1.11. Sea X un espacio Hausdorff semi-compacto y $K \subset X$ compacto. Existe un abierto $U \supset K$ tal que $\overline{U}$ es compacto.

Demostración. Por el teorema anterior, existe un cubrimiento abierto $\{V_j\}_{j \in J}$ de X con adherencia compacta. Como K es compacto, se puede cubrir con un número finito de abiertos del cubrimiento. La unión de tales conjuntos es abierto y con adherencia compacta. ■

Definición 3.1.12. Un espacio topológico X es *σ-compacto* si es unión numerable de subconjuntos compactos.

Proposición 3.1.13. Todo espacio X Hausdorff semi-compacto y σ-compacto es normal.

Demostración. Sean $E, F \subset X$ dos subconjuntos cerrados. Para cada $x \in E$ tomamos un entorno abierto U_x de x tal que $\overline{U_x} \cap F \neq \emptyset$. Por las propiedades de X y por ser E cerrado, E es σ-compacto, de modo que podemos extraer un subrecubrimiento numerable $\{U_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \{U_x\}_{x \in E}$. Del mismo modo, podemos encontrar un cubrimiento $\{V_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ de F tal que $\overline{V_m} \cap E = \emptyset$. Ahora sean

$$A_n = U_n - \bigcup_{k \leq n} \overline{V_k}, \quad B_m = V_m - \bigcup_{k \leq m} \overline{U_k}$$

Cada uno de estos conjuntos es abiertos y, además, $A_n \cap B_m = \emptyset$, de modo que $A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ y $B = \bigcup_{m \in \mathbb{N}} B_m$ son abiertos disjuntos que contienen, respectivamente, a E y F, con lo que X es normal. ■

Observación 3.1.14. La existencia de los entornos U_x en la primera línea de la demostración no es trivial y, de hecho, se deduce de la semi-compacidad de X (ver [12, Proposition 1.7.5. y 1.7.6.])

Corolario 3.1.15. Todo espacio IIAN semi-compacto es σ-compacto.

Demostración. Sea un cubrimiento $\{U_i\}_{i \in I}$ de X tal que $\overline{U_i}$ es compacto para cada $i \in I$. Por la propiedad ANII, podemos extraer un subrecubrimiento numerable, $\{U_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \{U_i\}_{i \in I}$. Ahora, $\{\overline{U_n}\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una familia numerable de compactos que cubre X. ■

3.2. Espacios paracompactos y particiones de la unidad

Definición 3.2.1. Una familia $\{U_i\}_{i \in I}$ en un espacio topológico X se dice *localmente finita* si, para cada punto $p \in X$, existe un entorno U de p tal que el conjunto $\{i \in I \mid U \cap U_i \neq \emptyset\}$ es finito. Un *refinamiento* de una familia $\{U_i\}_{i \in I}$ es otra familia $\{V_j\}_{j \in J}$ tal que todo V_j está contenido en algún U_i y $\bigcup_{i \in I} U_i = \bigcup_{j \in J} V_j$.

Lema 3.2.2. Si $\{W_i\}_{i \in I}$ es una familia de abiertos localmente finita, entonces $\bigcup_{i \in I} \overline{W_i} = \overline{\bigcup_{i \in I} W_i}$.

Demostración. En primer lugar, $\overline{W_i} \subset \overline{\bigcup_{i\in I} W_i}$, por lo que $\bigcup_{i\in I} \overline{W_i} \subset \overline{\bigcup_{i\in I} W_i}$. Para probar el otro contenido, sea $x \notin \bigcup_{i\in I} \overline{W_i}$. Tomamos un entorno U de x tal que $U \cap W_i = \emptyset$, salvo para $i = i_1 \ldots, i_n$, que existe por ser la familia localmente finita. Además, $x \notin \overline{W_i}$, luego $x \in V := U \cap (\overline{W_{i_1}})^c \cap \ldots \cap (\overline{W_{i_n}})^c$. Hemos construido, de este modo, un entorno abierto V de x tal que $V \cap W_i = \emptyset$ para todo $i \in I$. Pero entonces, $V \cap \left(\bigcup_{i\in I} W_i\right) = \emptyset$ y, por tanto, $x \notin \overline{\bigcup_{i\in I} W_i}$. ■

Definición 3.2.3. Un espacio topológico X es *paracompacto* si cada recubrimiento por abiertos admite un refinamiento localmente finito.

Observación 3.2.4. Notamos que todo espacio compacto es paracompacto.

Proposición 3.2.5. Todo espacio Hausdorff paracompacto es normal.

Demostración. Probamos en primer lugar la regularidad. Para ello, sean $x \in X$ y $C \subset X$ tales que $x \notin C$. Para cada $y \in C$, existen dos abiertos disjuntos U^x, V^y en torno a x e y, respectivamente. Construimos la familia $\{X - C\} \cup \{V^y \mid y \in C\}$, que es un cubrimiento abierto de X. Por la paracompacidad, tenemos un refinamiento localmente finito $\{W_i\}_{i\in I}$. Sea $U = \cup\{W_i \mid W_i \subset V^y \text{ para algún } y \in C\}$. Por el lema anterior, $\overline{U} = \cup\{\overline{W_i} \mid W_i \subset V^y \text{ para algún } y \in C\}$. Por construcción, $\overline{U}$ es cerrado y $x \notin \overline{U}$, por lo que tenemos dos abiertos disjuntos $U \supset C$ y $X - U \ni x$, como queríamos.

Sean ahora dos cerrados $C, D \subset X$ tales que $C \cap D = \emptyset$. Por la regularidad que acabamos de probar, para cada $y \in D$ existe un abierto U^y tal que $\overline{U^y} \cap C = \emptyset$. Sea el cubrimiento $\{U^y\}_{y\in D} \cup D^c$ y $\{W_j\}_{j\in J}$ un refinamiento localmente finito suyo. Llamamos $\hat{J} = \{j \in J \mid W_j \cap D \neq \emptyset\}$, de manera que $\{W_j\}_{j\in\hat{J}}$ cubre a D. Sea $V = \bigcup_{j\in\hat{J}} W_j$. Ahora, para todo j, existe $y \in D$ tal que $W_j \subset U^y$, luego $\overline{W_j} \subset \overline{U^y}$ y, por tanto, $C \cap \overline{W_j} = \emptyset$. Así, $\emptyset = C \cap \left(\bigcup_{j\in\hat{J}} \overline{W_j}\right) = C \cap \overline{\bigcup_{i\in\hat{J}} W_j} = C \cap \overline{V}$, con lo que X es normal. ■

Definición 3.2.6. Una *contracción* de un cubrimiento $\{U_i\}_{i\in I}$ es otro cubrimiento $\{V_i\}_{i\in I}$ tal que $\overline{V_i} \subset U_i$, para todo $i \in I$.

Lema 3.2.7. Todo cubrimiento localmente finito de un espacio paracompacto Hausdorff admite una contracción.

Demostración. Sea $\{U_i\}_{i\in I}$ un cubrimiento localmente finito de X. Para cada $x \in X$, elegimos un U_i que contenga a $x \in X$ y lo llamamos U_x. Por la regularidad de los espacios de este tipo, existen dos entornos abiertos Y_x, Z_x tales que $x \in Y_x$ y $X - U_x \subset Z_x$ y su interesección es vacía. Además, $Y_x \subset X - Z_x$, por lo que $\overline{Y_x} \subset \overline{X - Z_x} = X - Z_x \subset U_x$. Hemos construido así un cubrimiento abierto $\{Y_x\}_{x\in X}$ y, por paracompacidad, consideramos un refinamiento localmente finito suyo $\{W_j\}_{j\in J}$. Sea $V_i = \bigcup\{W_j \mid \overline{W_j} \subset U_i$. La familia formada por tales conjuntos es, de nuevo, un cubrimiento del mismo índice que el original y, por ser localmente finito, $\overline{V_i} = \bigcup\{\overline{W_j} \mid \overline{W_j} \subset U_i\} \subset U_i$, con lo que $\{V_i\}_{i\in I}$ es la contracción buscada. ■

Definición 3.2.8. Sea X un espacio topológico. Una familia $\{\lambda_i \mid \lambda_i : X \to [0,1]\}_{i\in I}$ es una *partición de la unidad* si

1. es localmente finita, es decir, para cada punto $x \in X$ existe un entorno donde todos los elementos de la familia, salvo un número finito, son idénticamente nulos;
2. para cada $x \in X$ se verifica que $\sum_{i\in I} \lambda_i(x) = 1$.

Claramente, los conjuntos $V_i = \{x \in X \mid \lambda_i(x) > 0\}$ cubren X y diremos que la partición está *subordinada* a un cubrimiento $\{U_i\}_{i\in I}$ si $\{V_i\}_{i\in I}$ es una contracción de $\{V_i\}_{i\in I}$.

Proposición 3.2.9. Un espacio Hausdorff X es paracompacto si, y solo si, todo cubrimiento admite una partición de la unidad subordinada.

Demostración. Sea $\{U_i\}_{i\in I}$ un cubrimiento abierto de X y supongamos que admite una partición de la unidad subordinada $\{\lambda_i\}_{i\in I}$. Entonces, la familia formada por los conjuntos $V_i = \{x \in X \mid \lambda_i(x) > 0\}$ es un refinamiento localmente finito y X es paracompacto. Recíprocamente, supongamos que X es paracompacto y sea $\{U_i\}_{i\in I}$ un cubrimiento. Sea $\{W_j\}_{j\in J}$ un refinamiento localmente finito y $\{V_j\}_{j\in J}$ una contracción suya. Por el lema de Urysohn, tenemos funciones $f_j : X \to [0,1]$ tales que $f_j|_{\overline{W_j}} \equiv 1$ y $f_j|_{X-U_j} \equiv 0$. Por tanto, forman una familia localmente finita y $f = \sum_{j\in J} f_j$ no se anula en ningún punto. Finalmente, tomando $\lambda_j = f_j/f$ obtenemos una partición de la unidad. ■

Teorema 3.2.10. Sea X un espacio Hausdorff semi-compacto. Si cada componente conexa de X es σ-compacta, entonces X es paracompacto.

Demostración. Es claro que la suma directa de espacios paracompactos es paracompacto. Por tanto, es suficiente con probar que un espacio Hausdorff semi-compacto σ-compacto es paracompacto.

Por la σ-compacidad, tenemos un cubrimiento compacto numerable $\{C_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de X. Usando el corolario 3.1.11 podemos elegir, para cada $n \in \mathbb{N}$, un abierto E_n con adherencia compacta que contiene a $\overline{E_{n-1}} \cup C_n$ (con $E_0 = \emptyset$). Claramente, $\bigcup_n E_n = X$. Ahora, $A_n = \overline{E_n} - E_{n-1}$ define una secuencia de conjuntos compactos tal que $\bigcup_n A_n = X$ y $A_i \cap A_j = \emptyset$ siempre que $|i-j| > 1$. Tomamos otra secuencia $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de conjuntos compactos tales que $A_n \subset \mathring{B}_n$ y $B_i \cap B_j = \emptyset$ si $|i-j| > 1$.

Sea ahora $\{U_i\}_{i\in I}$ un cubrimiento abierto arbitrario de X. Por compacidad, cada A_n se puede cubrir por un número finito de elementos de esta familia, luego

$$A_n \subset \bigcup_{r=1}^{s_n} U_{i(n,r)}$$

Entonces, la familia

$$\{V_{n,r} = U_{i(n,r)} \cap \mathring{B}_n \mid n \in \mathbb{N},\ r = 1, \dots, s_n\}$$

es un refinamiento abierto de $\{U_i\}_{i\in I}$. Cada $x \in X$ tiene un entorno abierto U contenido en algún $\mathring{B}_m$ y se encuentra, como mucho, en la familia $\{V_{n,r} \mid |n-m| \le 1,\ r = 1, \dots, s_n\}$. Por tanto, el nuevo cubrimiento es localmente finito. ■

Corolario 3.2.11. Todo espacio Hausdorff IIAN semi-compacto y, en particular, toda variedad topológica, es paracompacto y normal. ■

3.3. Particiones diferenciables de la unidad

Probamos en este apartado que, en variedades diferenciables, es posible encontrar una partición de la unidad en la que las funciones sean diferenciables.

Lema 3.3.1. Sea $K \subset U \subset M$, donde K es compacto, U abierto y M una variedad diferenciable. Existe una función diferenciable $g : M \to [0, \infty)$ tal que $g(x) > 0$ para todo $x \in K$ y $\operatorname{supp} g \subset U$.

Demostración. Sea $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función dada por

$$F(x) = \begin{cases} e^{-1/(x-1)^2} e^{-1/(x+1)^2}, & \text{si } |x| < 1 \\ 0, & \text{si no} \end{cases}$$

que es diferenciable y estrictamente positiva en $(-1, 1)$. Sea $p \in U$ y tomamos una carta (V, φ) en torno a p. Tomando $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeño, tenemos que

$$\{(x_1, \ldots, x_m) \mid |x_i| < \varepsilon \text{ para todo } i\} \subset \varphi(U \cap V) \subset \mathbb{R}^m$$

Entonces la función $q \mapsto F(\varphi_1(q)/\varepsilon, \ldots, \varphi_m(q)/\varepsilon)$ se extiende diferenciablemente a una función $g_p : M \to [0, 1]$ tal que $g_p(p) > 0$ y supp $g_p \subset U$.

Tomamos ahora una función g_p como la que acabamos de construir para cada $p \in K$. Los conjuntos $\{x \in M \mid g_p(x) > 0\}$ cubren K y son abiertos, por lo que podemos quedarnos con un número finitos de ellos. La suma g de las funciones g_p resultantes tiene las propiedades deseadas. ■

Teorema 3.3.2. Sea M una variedad diferenciable y $\{U_i\}_{i \in I}$ un cubrimiento abierto. Entonces existe una partición diferenciable de la unidad $\{\lambda_i\}_{i \in I}$ subordinada a $\{U_i\}_{i \in I}$.

Demostración. Por paracompacidad, existe un refinamiento localmente finito $\{V_j\}_{j \in J}$ que, a su vez, admite una contracción $\{W_j\}_{j \in J}$. Además, podemos suponer que cada V_j está contenido en un dominio de coordenadas y que cada $\overline{W_j}$ es compacto. Usando el lema anterior, para cada $j \in J$, construimos una función diferenciable $g_j : M \to [0, \infty)$ tal que $g_j(x) > 0$ si $x \in \overline{W_j}$ y supp $g_j \subset V_j$. Ahora, usando que $\{V_j\}_{j \in J}$ es localmente finita, podemos definir $g = \sum_i g_i(x)$, que no se anula en ningún punto y es diferenciable. Por último, tomando $\lambda_i = g_i/g$, tenemos el resultado. ■

3.4. Aplicaciones propias e inmersiones difeomórficas

Definición 3.4.1. Una aplicación $f : X \to Y$, no necesariamente continua, entre espacios topológicos es *propia* si $f^{-1}(K)$ es compacto, para cada compacto $K \subset Y$.

Lema 3.4.2. Sea $f : X \to Y$ una aplicación continua e inyectiva entre espacios topológicos Hausdorff semi-compactos. Entonces, son equivalentes:

1. $f(X)$ es cerrada y $f : X \to f(X)$ es homeomorfismo, con respecto a la topología de subconjunto.
2. f es cerrada.
3. f es propia.

Demostración. $\boxed{2 \Rightarrow 1}$ Es trivial, pues f es inyectiva y cerrada, lo que implica que f^{-1} es continua.

$\boxed{1 \Rightarrow 3}$ Sea $K \subset Y$ compacto. Entonces, $K \cap f(X)$ es compacto en $f(X)$, por lo que $f^{-1}(K) = f^{-1}(K \cap f(X))$ es compacto en X por ser f homeomorfismo.

$\boxed{3 \Rightarrow 1}$ Por ser propia, f se extiende a una aplicación continua $\hat{f} : \hat{X} \to \hat{Y}$ de las compactificaciones por un punto de X e Y imponiendo $\hat{f}(\infty) = \infty$. En efecto, dado un abierto $U \subset \hat{Y}$, hay dos posibilidades: si U es abierto en Y, entonces $\hat{f}^{-1}(U) = f^{-1}(U)$ que es abierto; por otro lado, si $U = \hat{Y} - K$, con K compacto, entonces $\hat{f}^{-1}(U) = \hat{X} - f^{-1}(K)$ que es abierto por ser $f^{-1}(K)$ compacto. Sea $C \subset X$ cerrado, entonces $C \cup \{\infty\} \subset \hat{X}$ también es cerrado y, en consecuencia, compacto. Entonces, $\hat{f}(C \cup \{\infty\}) \subset \hat{Y}$ es compacto (en Hausdorff), luego cerrado. De esto se sigue que $\hat{Y} - \hat{f}(C \cup \{\infty\}) = Y - f(C)$ es abierto en $\hat{Y}$ y, por tanto, en Y. Así, $f(C) \subset Y$ es cerrado, como queríamos. ■

Corolario 3.4.3. Una aplicación $f : M \to N$ es una inmersión propia e inyectiva si, y solo si, f es inmersión difeomórfica y $f(M) \subset N$ es cerrado. ■

Lema 3.4.4. Sea $f : X \to Y$ una aplicación continua entre espacios topológicos. Si X es compacto e Y es Hausdorff, entonces f es propia.

Demostración. Sea $C \subset Y$ un subconjunto compacto. Como Y es Hausdorff, C es cerrado y, por ser f continua, también lo es $f^{-1}(C)$. Por último, como X es compacto, se sigue que $f^{-1}(C)$ es compacto. ■

Proposición 3.4.5. Sea $f : M \to N$ una aplicación diferenciable entre variedades. Entonces son equivalentes:

1. $f(M) \subset N$ es una subvariedad cerrada y $f : M \to f(M)$ es un difeomorfismo.

2. $f(M) \subset N$ es cerrado, f es una inmersión y $f : M \to f(M)$ es homeomorfismo.

Demostración. $\boxed{1 \Rightarrow 2}$ El difeomorfismo $f : M \to f(M)$ es necesariamente homeomorfismo. Por el teorema de la función inversa, $T_pf : T_pM \to T_{f(p)}(f(M))$ es isomorfismo, luego invertible, con lo que la composición $T_pM \to T_{f(p)}(f(M)) \hookrightarrow T_{f(p)}N$ es inyectiva.

$\boxed{2 \Rightarrow 1}$ Puesto que f es una inmersión, tenemos $rg(T_pM) = m$, para todo $p \in M$. Usando el teorema del rango, tenemos cartas (U, φ), (V, ψ) en torno a $p \in M$ y $q = f(p) \in N$, respectivamente, tales que $f(U) \subset V$ y $\tilde{f} : \psi \circ f\varphi^{-1} : \varphi(U) \to \psi(V)$ está dada por $x \mapsto (x, 0)$, siendo $0 \in \mathbb{R}^{n-m}$. Además, $\varphi(U) \subset \mathbb{R}^m$ y $\psi(V) \subset \mathbb{R}^n$ son entornos abiertos de 0. Como $m \leq n$, podemos encontrar entornos abiertos $A \subset \mathbb{R}^m$ y $B \subset \mathbb{R}^{n-m}$, que contienen ambos al 0, tales que $W \times W' \subset \psi(V)$. Entonces, $U' = \varphi^{-1}(A \cap \varphi(U)) \subset M$ es abierto y tenemos $\varphi(U') \times B \subset \psi(V)$. Por último, definiendo $V' = \psi^{-1}(\varphi(U') \times B)$ tenemos una aplicación $\tilde{f}$ de $\varphi(U')\mathbb{R}^m$ en $\psi(V') = \varphi(U') \times B \subset \mathbb{R}^n$.

Por otro lado, como $f : M \to f(M)$ es homeomorfismo, $f(U')$ es abierto en $f(M)$, luego existe un abierto $W \subset N$ tal que $f(U') = W \cap f(M)$, de manera que $U' = f^{-1}(W)$. Ahora, $(V' \cap W, \psi|_{V' \cap W})$ es una carta en torno a $q \in N$. Teniendo en cuenta que $\psi(V') = \psi(U') \times B \subset \mathbb{R}^n$, un punto $y \in V' \cap W$ verifica $\psi(y) \in \mathbb{R}^m$ si, y solo si, existe $x \in U'$ tal que $\psi(y) = (\varphi(x), 0)$. Esto es equivalente a $\psi(f(m) \cap V' \cap W) = \psi(V' \cap W) \cap \mathbb{R}^m$. Por tanto, $f(M)$ es una subvariedad y $f : M \to f(M)$ es localmente diferenciablemente invertible, luego difeomorfismo. ■

3.5. Teorema de inmersión de Whitney

Lema 3.5.1. Sea M una variedad compacta (con o sin borde). Entonces existe una inmersión difeomórfica $\Psi : M \to \mathbb{R}^n$ para algún $n \in \mathbb{N}$

Demostración. Llamamos $m = \dim M$ y sea $\{U_i, \varphi_i\}_{i \in I}$ un atlas de M. Por compacidad, asumimos que $I = \{1, \ldots, k\}$ es finito y sea $\{V_i\}_{i \in I}$ un recubrimiento de M tal que $\overline{V_i} \subset U_i$ para cada i, que existe por el lema 3.2.7. Sea $\{\lambda_i\}_{i \in I}$ una partición diferenciable de la unidad subordinada al recubrimiento. Definimos $\psi_i : M \to \mathbb{R}^m$ como $\psi_i(p) = \lambda_i(p)\varphi_i(p)$ si $p \in U_i$ y $\psi_i(p) = 0$ en caso contrario. A partir de ellas, construimos otra aplicación $\Psi : M \to \mathbb{R}^{m \cdot k} \times \mathbb{R}^k$ tal que $\Psi = (\psi_1, \ldots, \psi_k, \lambda_1, \ldots, \lambda_k)$, que es claramente un difeomorfismo. Por el lema 3.4.4, Ψ es una aplicación propia. Veamos que, además, es una inmersión inyectiva lo que, por el corolario 3.4.3, nos dará el resultado.

Sean $p, q \in M$ tales que $\Psi(p) = \Psi(q)$. Entonces $\lambda_i(p) = \lambda_i(q)$ para todo $i \in I$. Ahora, para algún $j \in I$, $p \in V_j$, por lo que $\lambda_j(p) = 1$. Como también $\lambda_j(q) = 1$, tenemos que $q \in U_j$ y

$$\varphi_j(p) = \lambda_j(p)\varphi_j(p) = \psi_j(p) = \psi_j(q) = \lambda_j(q)\varphi_j(q) = \varphi_j(q)$$

lo que implica $p = q$ por ser φ_j inyectiva.

Para ver que es una inmersión, hay que probar que $T_p\Psi$ es una aplicación inyectiva para todo $p \in M$. Razonando de la misma manera que en el caso de la inyectividad, tenemos que, localmente, $\varphi_i \equiv \psi_i$ para algún i, de modo que $T_p\psi_i = T_p\varphi_i$. Puesto que $T_p\varphi_i$ es inyectiva, tenemos el resultado. ■

Proposición 3.5.2. Sea M una variedad compacta de dimensión m. Existe una inmersión difeomórfica $\Psi : M \to \mathbb{R}^{2m+1}$.

Demostración. Sabemos, por el lema anterior, que cualquier variedad compacta se puede encajar difeomórficamente en $\mathbb{R}^n$ para algún $n \in \mathbb{N}$. Veamos ahora, por inducción, que n puede reducirse a $n-1$ para cada $n > 2m+1$. Para ello, sea $a \in \mathbb{R}^n$ no nulo y π_a la proyección ortogonal sobre $a^\perp \cong \mathbb{R}^{n-1}$, esto es, $\pi_a(x) = a - \frac{\langle x,a\rangle}{\langle a,a\rangle}a$, siendo $\langle\cdot,\cdot\rangle$ un producto escalar en $\mathbb{R}^n$. Sea $\Psi_a = \pi_a \circ \Psi$ (siendo Ψ la aplicación del lema anterior) y comprobamos que, para algún $a \neq 0$, Ψ_a es inmersión difeomórfica.

Para ello, sea $h : M \times M \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ la aplicación definida como $h(p,q,t) = t\,(\Psi(p) - \Psi(q))$ y $g : TM \to \mathbb{R}^n$ la dada por $g(p,v) = T_p\Psi(v)$. Puesto que $\dim(M \times M \times \mathbb{R}) = 2m+1$, $\dim TM = 2m$ y Ψ es inmersión difeomórfica, se sigue de la proposición 2.1.10 (esto es, del Teorema de Sard) que tanto $\operatorname{im} h$ como $\operatorname{im} g$ tienen medida cero en $\mathbb{R}^n$. Por tanto, su unión también es de medida cero y existe $a \in \mathbb{R}^n - (\operatorname{im} h \cup \operatorname{im} g)$. Además, $a \neq 0$ puesto que $0 \in \operatorname{im} h \cap \operatorname{im} g$.

Por el lema 3.4.4, Ψ_a es una aplicación propia. Además, es inyectiva. En efecto, supongamos que existen $p \neq q$ tales que $\Psi_a(p) = \Psi_a(q)$, lo que es equivalente a que $\Psi(p) - \Psi(q) = \lambda a$, para algún $\lambda \in \mathbb{R}$. Puesto que Ψ es inyectiva, tiene que ser $\lambda \neq 0$ por lo que podemos escribir $a = \lambda^{-1}(\Psi(p) - \Psi(q)) = h(p,q,\lambda^{-1})$, lo que nos lleva a una contradicción pues $a \notin \operatorname{im} h$. Por tanto, Ψ_a es inyectiva.

Comprobamos ahora que Ψ_a es inmersión. Para ello, sea $v \in T_pM$ tal que $T_p\Psi_a(v) = 0$. De nuevo por la definición de Ψ_a, esto equivale a que $T_p\Psi(v) = \lambda a$. Supongamos que $v \neq 0$, entonces $\lambda \neq 0$ por ser $T_p\Psi$ inyectiva, de modo que podemos escribir $a = \lambda^{-1}T_p\Psi(v) = T_p\Psi(\lambda^{-1}a)$ y estamos, otra vez, en una contradicción. Así, Ψ_a es una inmersión propia e inyectiva y, por el corolario 3.4.3, es inmersión difeomórfica. ■

Generalizamos ahora este resultado al caso de variedades no necesariamente compactas.

Teorema 3.5.3. (de Whitney) Toda variedad de dimensión m admite una inmersión difeomórfica en $\mathbb{R}^{2m+1}$.

Demostración. Puesto que M es un espacio semi-compacto, usando teorema 3.1.10 obtenemos un recubrimiento por abiertos $\{U_i\}_{i\in I}$ con adherencia compacta. Además, hemos visto que toda variedad es un espacio paracompacto, por lo que podemos extraer un refinamiento localmente finito $\{V_j\}_{j\in J}$, cuyas adherencias también son compactas. Por la propiedad IIAN, podemos suponer, además, que J es numerable. Sea una partición diferenciable de la unidad $\{\lambda_j\}_{j\in J}$ subordinada a este recubrimiento. Por tratarse de una familia localmente finita, la función $\eta(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} n\lambda_n(x)$ es diferenciable. Observamos, por otro lado que $\eta^{-1}([1,N]) \subset \bigcup_{i=1}^{N} \overline{V_i}$ y es un conjunto cerrado, luego compacto, de modo que η es una aplicación propia.

Sean, para cada $i \in \mathbb{N}$, $U_i = \eta^{-1}((i-2/3, i+2/3))$, que es abierto, y $C_i = \eta^{-1}([i-3/4, i+3/4])$, que es compacto. Además, $\overline{U_k} \subset \mathring{C}_k$, $C_{2k} \subset C_{2k'} = \emptyset$ y $C_{2k-1} \subset C_{2k'-1} = \emptyset$, para cada k natural. Con esta construcción, podemos aplicar el lemas 3.5.1 y la proposición 3.5.2 para construir aplicaciones $\Psi_i : M \to \mathbb{R}^{m+1}$ cuya restriccione a $\overline{U_i}$ es inmersión difeomórfica y que lleva el complementario de C_i al 0. Componiendo con un difeomorfismo de $\mathbb{R}^{m+1}$ en una bola abierta, podemos suponer que las imágenes de todas las Ψ_i están contenidas en un mismo subconjunto acotado. Definimos ahora $\Psi_e = \sum_k \Psi_{2k}$, $\Psi_o = \sum_k \Psi_{2k-1}$ y $\Psi = (\Psi_e, \Psi_o, \eta) : M \to \mathbb{R}^{2m+1} \times \mathbb{R}^{2m+1} \times \mathbb{R}$ y comprobamos que es inmersión inyectiva y propia, luego inmersión difeomórfica.

Por un lado, observamos que, por ser los C_i con índice par o impar disjuntos, las aplicaciones Ψ_e y Ψ_o coinciden, en cada punto, con una de las Ψ_i, que es inmersión difeomórfica. Por tanto, Ψ_e y Ψ_o son inmersiones y también lo es Ψ. Por otro, si $\Psi(x) = \Psi(y)$, entonces $\eta(y) = \eta(x)$, y x e y están en el mismo U_i. Si i es par (impar), entonces Ψ_e (Ψ_o), es inmersión difeomórfica en U_i, lo que implica $x = y$. Además, como η es propia, también lo es Ψ.

Por construcción, $\Psi(M) \subset K \times \mathbb{R}$, con $K \subset \mathbb{R}^{2(2m+1)}$. Repitiendo el argumento de la demostración del caso compacto, construimos una proyección $\pi : \mathbb{R}^{2(2m+1)+1} \to \mathbb{R}^{2m+1}$ de tal manera que $\Psi' = \pi \circ \Psi$ es una inmersión inyectiva. Si elegimos proyección π cuyo núcleo no contenga al último eje coordenado, Ψ' sigue siendo una aplicación propia, de modo que el lema 3.4.4 y el corolario 3.4.3 nos dan el resultado. ■

Observación 3.5.4. Aplicando la proposición 3.4.5 y los teoremas que acabamos de probar, obtenemos que toda variedad diferenciable es realmente una subvariedad de un determinado espacio euclídeo.

4. Transversalidad

4.1. Construcción de variedades mediante sumersiones

Llamaremos *sumersión canónica* a la proyección canónica de $\mathbb{R}^k$ sobre $\mathbb{R}^l$, para $l \leq k$.

Teorema 4.1.1. (de sumersión local) Supongamos que $f : M \to N$ es una sumersión en $p \in M$ y sea $q = f(p)$. Entonces, existen dos cartas (U, φ) y (V, ψ) entorno a p e q, respectivamente, tales que $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}(x_1, \ldots, x_m) = (x_1, \ldots, x_n)$. Es decir, f es localmente equivalente a la sumersión canónica en p.

Demostración. Sean (U_0, φ_0) y (V_0, ψ_0) dos cartas cualesquiera en torno a p y q, respectivamente, tales que $\varphi_0(p) = 0$, $\psi_0(q) = 0$. Sea $g = \psi_0 \circ f \circ \varphi_0^{-1}$. Como $D_0 g : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ es sobreyectiva, podemos suponer que

$$D_0 g = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 \end{array}\right)$$

Definimos ahora $h : U_0 \to \mathbb{R}^m$ como

$$h(z) = (g_1(z), \ldots, g_n(z), z_{n+1}, \ldots, z_m)$$

cuya matriz jacobiana en 0 es la identidad de dimensión m. Así, h es difeomorfismo local en torno a 0, luego existe un entorno U de 0 que va difeomorficamente en U_0 por h^{-1}. Finalmente, observamos que $g \circ h^{-1}$ es la sumersión canónica, luego tomando $\varphi = \varphi_0 \circ h^{-1}$ y $\psi = \psi_0$, tenemos el resultado. ■

Observación 4.1.2. El teorema que acabamos de probar constituye un caso particular del teorema del rango que probamos en la primera sección.

Teorema 4.1.3. (de la preimagen) Si q es un valor regular de $f : M^{n+k} \to N^n$, entonces la preimagen $f^{-1}(q)$ es una subvariedad de M, con dimensión $\dim f^{-1}(q) = \dim M - \dim N = k$.

Demostración. Si $f(p) = q$, por el teorema anterior, podemos encontrar sistemas de coordenadas locales en torno a p y q de modo que f esté dada en estas coordenadas por

$$(x_1, \ldots, x_m) \mapsto (x_1, \ldots, x_n)$$

$$p = (0, \ldots, 0), \quad q = (0, \ldots, 0)$$

en un entorno U de p. Entonces, $f^{-1}(q) \cap U = \mathbb{R}^k \cap U \subset \mathbb{R}^{n+k} \cap U$, de modo que $f^{-1}(q)$ es una subvariedad de dimensión k. ■

Proposición 4.1.4. Sea Z la preimagen de un valor regular $q \in N$ por la aplicación diferenciable $f : M \to N$. Entonces, el núcleo de la diferencial $T_pf : T_pM \to T_qN$ es T_pZ para todo $p \in M$.

Demostración. Puesto que f es constante en Z, T_pf se anula en T_pZ. Pero T_pZ es sobreyectiva, por lo que la dimensión del núcleo está dada por

$$\dim T_pM - \dim T_qN = \dim M - \dim N = \dim Z$$

Por tanto, T_pZ es un subespacio del núcleo de dimensión igual al núcleo, es decir, $T_pZ = \ker T_pf$. ■

Sean $g_1, \ldots, g_l$ funciones diferenciables de una variedad M de dimensión $\dim M \geq l$ en $\mathbb{R}$. Nos interesa saber cuándo el conjunto Z de los ceros comunes a todas ellas es una variedad diferenciable. Para responder a esta pregunta, consideramos la aplicación

$$g = (g_1, \ldots, g_l) : M \to \mathbb{R}^l$$

Puesto que $Z = g^{-1}(0)$, Z será una variedad de M si 0 es un valor regular de g.

Vamos a reformular esto en términos de las funciones g_i. Tomando un sistema de coordenadas, observamos a partir de las matrices jacobianas que la diferencial T_pg es sobreyectiva si, y solo si, las aplicaciones T_pg_i son linealmente independientes. Diremos, si se cumple esto, que las funciones $g_1, \ldots, g_l$ son *independientes* en p, lo que nos permite formular el siguiente resultado:

Proposición 4.1.5. Si las funciones diferenciables $g_1, \ldots, g_l : M \to \mathbb{R}^l$ son independientes en cada uno de los puntos donde se anulan simultáneamente, entonces el conjunto Z de dichos puntos es una subvariedad de M de codimensión $\operatorname{codim} Z = l$. ■

El recíproco del enunciado anterior no siempre es cierto. Sin embargo, añadiendo hipótesis, tenemos los dos resultados parciales siguientes.

Lema 4.1.6. Si q es un valor regular de una aplicación diferenciable $f : M \to N$, entonces la subvariedad preimagen $f^{-1}(q)$ puede expresarse como los ceros de un conjunto de funciones independientes.

Demostración. Tomamos un difeomorfismo h de un entorno W de q sobre un entorno del 0 en $\mathbb{R}^l$, con $h(q) = 0$. Tomamos $g = h \circ f$ y observamos que 0 es un valor regular suyo por ser h difeomorfismo y q un valor regular de f. Entonces, las funciones coordenadas $g_1, \ldots, g_l$ nos dan el resultado. ■

Lema 4.1.7. Toda subvariedad de M puede expresarse localmente como los ceros de un conjunto independiente de funciones.

Demostración. Sea $Z \subset M$ una subvariedad de dimensión l. Considerando la inmersión natural $Z \hookrightarrow M$ y aplicándole el teorema del rango, se sigue directamente que Z puede expresarse como $x_{l+1} = \ldots = x_m = 0$. ■

4.2. Transversalidad: el concepto

Definición 4.2.1. Sean $K, L \subset M$ subvariedades de una variedad diferenciable M tales que, para cada punto $p \in K \cap L$ se verifica

$$T_pK + T_pL = T_pM$$

Decimos entonces que K y L son *subvariedades transversales* y escribimos $K \pitchfork L$.

Hemos definido la condición anterior en los puntos de la intersección de las subvariedades. Cuando $K \cap L = \emptyset$, la condición se satisface de manera trivial.

Por otro lado, observamos que la condición de transversalidad no depende solo de la forma en la que se intersecan las dos subvariedades, sino que es crucial la dimensión de la variedad ambiente. Para verlo, recordamos del álgebra lineal que

$$\dim T_pK + \dim T_pL \leq \dim T_pM$$

Podemos extender la definición anterior para definir la transversalidad entre subvariedades y aplicaciones.

Definición 4.2.2. Sea $f : M \to N$ una aplicación diferenciable entre variedades y sea Z una subvariedad de N. Decimos que $f$es *transversal* a Z si, para cada $p \in f^{-1}(Z)$,

$$T_pf(T_pM) + T_{f(p)}Z = T_{f(p)}N$$

De nuevo, escribimos $f \pitchfork Z$.

Definición 4.2.3. Sean M, L, N variedades diferenciables y $f : M \to N$, $g : L \to N$ dos aplicaciones diferenciables. Diremos que f es *transversal* a g si

$$T_pf(T_pM) + T_qg(T_qN) = T_rN$$

para todos $p \in M$, $q \in L$ y $r \in N$ tales que $f(p) = g(q) = r$. Escribiremos, otra vez, $f \pitchfork g$.

Damos, a continuación, dos resultados que ilustran las ventajas de la propiedad de transversalidad que acabamos de definir.

Proposición 4.2.4. Sean $K, L \subset M$ subvaridades de una variedad diferenciable M tales que $K \pitchfork L$. Entonces, $K \cap L$ es una subvariedad diferenciable de dimensión $\dim K \cap L = \dim K + \dim L - \dim M$.

Demostración. Sea $p \in K \cap L$. Como K, L son subvariedades, pueden expresarse localmente como los ceros de un conjunto de funciones independientes, es decir, existe un entorno U de p tal que $K \cap U = f^{-1}(0)$ y $L \cap U = g^{-1}(0)$, con $f : U \to \mathbb{R}^{m-k}$ y $g : U \to \mathbb{R}^{m-l}$, siendo 0 un valor regular de ambas aplicaciones. Entonces, por la transversalidad, p es un punto regular para $(f, g) : L \cap M \cap U \to \mathbb{R}^{2m-k-l}$ que será, así, una aplicación regular en un entorno W de p. Entonces, $(f, g)|_W^{-1}(0, 0) = f^{-1}(0) \cap g^{-1}(0) = K \cap L \cap U$ es una subvariedad. ■

El siguiente teorema, basado también en la transversalidad, nos permite generalizar el teorema de la imagen inversa que dimos en la sección anterior y determinar cuándo la preimagen de una variedad (y no solo de un punto regular) es también una variedad.

Teorema 4.2.5. Sea $f : M \to N$ una aplicación entre variedades y $Z \subset N$ una subvariedad tal que $f \pitchfork Z$. Entonces $f^{-1}(Z)$ es una variedad. Además, la condimensión de Z coincide con la de $f^{-1}(Z)$ en X.

Demostración. Construimos una función diferenciable $g : N \to \mathbb{R}$ tal que $g^{-1}(0) = f^{-1}(Z)$ y aplicamos el teorema de la imagen inversa.

Sea $r \in Z$. Puesto que Z es una subvariedad de N, elegimos una carta (U, φ) en torno a z tal que

$$\varphi(U \cap Z) = \varphi(U) \cap (\mathbb{R}^z \times \{0\})$$

siendo $z = \dim Z$. Escribimos $\varphi = (c_1, \ldots, c_z, c_{z+1}, \ldots, c_n)$ y definimos

$$\begin{array}{rccl} h: & N & \to & \mathbb{R}^{n-z} \\ & q & \mapsto & (c_{z+1}(q), \ldots, c_n(q)) \end{array}$$

que es una función diferenciable en U tal que $Z = h^{-1}(0)$ y $T_s h$ es sobreyectiva (por ser φ difeomorfismo) para todo $s \in f^{-1}(0)$.

Consideramos ahora la aplicación $g = h \circ f : M \to \mathbb{R}^{n-z}$ que es diferenciable por ser composición de aplicaciones diferenciables y que verifica $g^{-1}(0) = f^{-1}(Z)$. Para ver que $f^{-1}(Z)$ es variedad basta con demostrar que $T_p g$ es sobreyectiva para todo $p \in F^{-1}(0)$, pero

$$T_p g = T_{f(p)} h \cdot T_p f$$

Ahora bien, puesto que $T_s h$ es sobreyectiva, $T_p g$ será sobreyectiva si lo es $T_p f$. Pero de la condición de transversalidad, se sigue que $rg(T_p f) \geq n - z$, por lo que es sobreyectiva y tenemos el resultado. ∎

Observación 4.2.6. Podríamos haber obtenido la proposición anterior a partir del teorema, observando que la inmersión de una de las subvariedades en la variedad ambiente es una aplicación transversal a la otra subvariedad.

4.3. Homotopía y estabilidad

Introducimos a continuación las nociones de estabilidad y genericidad de una propiedad. Veremos que la transversalidad verifica ambas, lo que la convierte en una característica deseable en el estudio de aplicaciones y subvariedades.

Intuitivamente, la estabilidad de una propiedad de una aplicación o variedad tiene que ver con su comportamiento ante pequeñas variaciones. Así, una propiedad será estable si se mantiene cuando se producen tales variaciones. Para formalizar el concepto utilizaremos lo que se conoce como familias de homotopía.

Definición 4.3.1. Dos aplicaciones $f_0 : M \to N$ y $f_1 : M \to N$ se dicen *(diferenciablemente) homotópicas* si existe una aplicación diferenciable $F : M \times [0, 1] \to N$ tal que $F(p, 0) = f_0(p)$ y $F(p, 1) = f_1(p)$. La aplicación F es una *homotopía (diferenciable)* y el conjunto $\{f_s(p) := F(p, s) : s \in [0, 1]\}$ es una *familia de homotopía (diferenciable)*.

Definición 4.3.2. Una propiedad es *estable* si, para cada aplicación $f_0 : M \to Y$ con dicha propiedad y para cada homotopía F de f_0, existe un $\varepsilon > 0$ tal que para todo $s \in [0, \varepsilon]$, f_s también posee esa propiedad.

A continuación, vamos a ver que la transversalidad es, en efecto, una propiedad estable en variedades compactas. De hecho y aunque no lo demostraremos, todas las propiedades diferenciales con las que estamos tratando lo son: difeomorfismos locales, inmersiones, sumersiones, difeomorfismos, inmersiones difeomórficas. La prueba de ello puede encontrarse en [4, pág. 35].

Proposición 4.3.3. Para aplicaciones diferenciables $f_0 : M \to N$ de una variedad compacta M en otra variedad cualquiera N, la tranversalidad con respecto a una subvariedad dada $Z \subset N$ es una propiedad estable.

Demostración. Sea $F : M \times [0,1] \to N$ una homotopía de la aplicación $f_0 : M \to N$, donde $f_0 \pitchfork Z$ para alguna subvariedad Z de N. Sea $p \in f^{-1}(Z)$ y sea l la codimensión de Z en N. De la condición de transversalidad se sigue que $rg(T_p f) = k \geq l$ por lo que, eligiendo sistemas de coordenadas en M y N podemos extraer una submatriz $k \times k$ de la jacobiana $D_p f$ con determinante no nulo.

Por otro lado, puesto que $f_0(\bullet) = F(\bullet, 0)$, ampliando el sistema de coordenadas en M a uno en $M \times [0,1]$, tenemos que $D_p f_0$ es una submatriz de $D_{(p,0)}F$. Por tanto, $D_{(p,0)}F$ contiene una submatriz de dimensiones $k \times k$ con determinante no nulo y, por continuidad de las derivadas parciales, existe un entorno $U \times [0, \delta)$ donde tampoco se anula. Puesto que X es compacto, podemos cubrir $X \times \{0\}$ con un número finito de dichos entornos. De este modo, tomando $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeño, tenemos que $X \times [0, \varepsilon)$ está contenido en la intersección de todos ellos.

Puesto que las filas y columnas que componen las submatriz con determinante no nulo son siempre las mismas, se sigue que, para cada $0 \leq t \leq \varepsilon$, $\text{span}(D_p f_0) = \text{span}(D_p f_t)$ y, por tanto, la condición de transversalidad se mantiene. ■

Acabamos de probar la estabilidad de $f \pitchfork Z$ bajo variaciones de f. Esta prueba puede extenderse a variaciones de Z y al caso $K \pitchfork L$. Para ello, basta con notar que la condición $L \pitchfork K$ puede sustituirse por $i \pitchfork K$, siendo $i : L \hookrightarrow N$.

4.4. Teorema de transversalidad de Thom

Para ilustrar lo que llevamos hasta ahora, consideremos el ejemplo de dos rectas en $\mathbb{R}^2$ que se cortan en un único punto. Claramente, constituyen un ejemplo de subvariedades transversales. Además, también está claro que, modificando ligeramente alguna de las dos rectas, la intersección no se deshace y las rectas siguen siendo transversales: la transversalidad es estable.

Si ahora consideramos $\mathbb{R}^2$ como un subespacio de $\mathbb{R}^3$, el espacio generado por las rectas es un plano, de dimensión 2 y, por tanto, en esta situación, no hay transversalidad: la dimensión ambiente es crucial para la transversalidad.

Supongamos ahora que tenemos, en $\mathbb{R}^3$, un plano y una recta contenida en él. Claramente, no son transversales, pues el plano contiene a los espacios tangentes de ambas subvariedades. Sin embargo, basta con levantar ligeramente la curva en un punto cualquiera y una cantidad tan pequeña como queramos para que esta situación cambie. Observamos aquí una propiedad mucho más sutil de la transversalidad: no solo es estable, sino que también es *genérica*, en el sentido de que basta deformar en una cantidad arbitrariamente pequeña una de las subvariedades para conseguir la propiedad deseada.

El resultado bajo lo anterior se debe a Thom y en su demostración es esencial el teorema de Sard, que demostramos en la sección anterior. Para su enunciado, consideraremos una familia de aplicaciones diferenciables $f_s : M \to N$, de una variedad con borde M en una sin borde N e indexadas sobre otra variedad sin borde S. La familia $\{f_s\}$ varia diferenciablemente mediante la aplicación diferenciable $F : M \times S \to N$, donde $F(p, s) = f_s(p)$.

Teorema 4.4.1. (de la transversalidad de Thom) Supongamos que $F : M \times S \to N$ es una aplicación diferenciable entre variedades, donde solo M tiene borde, y sea Z una subvariedad sin borde de N. Si tanto F como ∂F son transversales a Z, entonces para casi todo $s \in S$, tanto f_s como ∂f_s son transversales a Z.

Demostración. Sea $W = F^{-1}(Z)$ y llamamos $\pi : X \times S \to S$ a la proyección natural. Veremos que $f_s \pitchfork Z$ para todo punto $s \in S$ que es valor regular de la restricción $\pi|_W$, y $\partial f_s \pitchfork Z$ para todo $s \in S$ valor regular de la restricción $\partial\pi|_W$. Como, por el teorema de Sard, casi todo $s \in S$ es valor regular para ambas aplicaciones, obtendremos el resultado.

Puesto que $F \pitchfork Z$, W es, de acuerdo con el teorema 4.2.5, una subvariedad de $M \times S$ con borde $\partial W = W \cap \partial(M \times S)$.

Tomamos un valor regular $s \in S$ de $\pi|_W$ y $p \in f_s^{-1}(Z)$. Sea $f_s(x) = z \in Z$. Como $F(p, s) = z$ y $F \pitchfork Z$, tenemos que

$$T_{(p,s)}F(T_{(p,s)}M) + T_zZ = T_zN$$

esto es, para cada $v \in T_zN$ existe un vector $u \in T_{(p,s)}(X \times S)$ tal que

$$T_{(p,s)}F(u) - v \in T_zZ$$

Para comprobar que $f_s \pitchfork Z$, dado el vector v anterior, basta con encontrar un $w \in T_pM$ tal que

$$T_pf_s(w) - v \in T_zZ$$

Vamos a ver como podemos construirlo a partir de u.

Teniendo en cuenta que

$$T_{(p,s)}(M \times S) = T_pM \times T_sS$$

podemos escribir $u = (a, b)$ con $a \in T_pM$ y $b \in T_sS$. Observamos que, puesto que $f_s(\bullet) = F(\bullet, s)$, la jacobiana D_pf es una submatriz de $D_{(p,s)}$. De este modo, si $b = 0$, entonces $T_pf_s(a) = T_{(p,s)}(u)$ y hemos terminado.

Supongamos, por tanto, que $b \neq 0$ y construimos w a partir de la proyección π. Recordamos que s es un valor regular de $\pi|_W$, es decir, la proyección

$$T_{(p,s)}\pi : T_pM \times T_sS \to T_sS$$

es sobreyectiva en todo punto de $\pi^{-1}(s) \cap W$ y, por tanto, existe un vector de la forma (c, b) en $T_pM \times T_sS$ tal que $T_{(p,s)}\pi(c, b) = b$. Además, como $F(W) = Z$, tenemos que $T_{(p,s)}F(b, c) \in T_zZ$. Sea $w = a - c$ y calculamos

$$\begin{aligned} T_pf_s(w) - v &= T_{(p,s)}F\left((a, b) - (c, b)\right) - v \\ &= T_{(p,s)}F(a, b) - T_{(p,s)}F(c, b) - v \\ &= \big(T_{(p,s)}F(a, b) - v\big) - T_{(p,s)}F(c, b) \in T_zZ \end{aligned}$$

Por tanto, $f_s \pitchfork Z$ como queríamos. Finalmente, basta con aplicar lo que acabamos de obtener a la variedad ∂M para obtener el resultado. ■

Veamos cómo se sigue del teorema que acabamos de demostrar que la transversalidad es genérica cuando la variedad de llegada N es el espacio euclídeo $\mathbb{R}^N$. Para una aplicación diferenciable $f : M \to \mathbb{R}^N$ tomamos una bola abierta $S \subset \mathbb{R}^N$ y definimos $F : M \times S \to \mathbb{R}^N$ como $F(p, s) = f(p) + s$. Su jacobiana tiene la forma

$$D_{(p,s)}F = \left(\begin{array}{c|ccc} & 1 & \cdots & 0 \\ ? & \vdots & \ddots & \vdots \\ & 0 & \cdots & 1 \end{array}\right)$$

por lo que F es una sumersión y, en consecuencia, es transversal a cualquier subvariedad $Z \subset \mathbb{R}^N$. Por tanto, aplicando el teorema anterior, para casi todo $s \in S$, la aplicación $f_s(p) = f(p) + s$ es transversal a Z. Por tanto, f puede moverse a una aplicación transversal simplemente añadiéndole una cantidad arbitrariamente pequeña s.

Cuando la variedad Y es arbitraria (no necesariamente euclídea), la comprobación no es tan directa. Por lo visto en la sección anterior, Y puede verse como una subvariedad de un cierto espacio euclídeo $\mathbb{R}^N$ (mediante una inmersión difeomórfica). Además, para variedades euclídeas, acabamos de ver cuál es el procedimiento para deformar f en una aplicación transversal. El siguiente paso es encontrar la forma de proyectar esa deformación de nuevo sobre la variedad Y.

La clave para ello nos la da el teorema del entorno tubular, que demostraremos a continuación. Para la construcción de entornos tubulares es necesario introducir una estructura similar al fibrado tangente: el fibrado normal.

Definición 4.4.2. Sea $M \subset \mathbb{R}^M$ una variedad diferenciable de dimensión m. Para cada $p \in M$ se define el *espacio normal* N_pM de M en p como el complemento ortogonal de T_pM en $\mathbb{R}^M$. Se llama *fibrado normal* al conjunto $NM = \{(p, v) \subset M \times \mathbb{R}^M \mid v \in N_pM\}$.

Notamos que el espacio tangente no es una noción intrínseca a la variedad, pues depende de la dimensión del espacio euclídeo en el que se encuentra sumergida. Tenemos una proyección natural $\sigma : NM \to M$ definida por $\sigma(p, v) = p$.

Proposición 4.4.3. $NM \subset \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$ es una subvariedad de dimensión N.

Demostración. Dado $p \in M$, elegimos una carta $(U, \varphi = (u_1, \dots, u_N))$ en $\mathbb{R}^N$ tal que $\varphi(Y \cap U) = \{u_{m+1} = \dots = u_N = 0\}$. Sea $\Phi : U \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^{N-n} \times \mathbb{R}^n$ definida por

$$\psi(q, v) = \left(u_{m+1}(p), \dots, u_N(p), \left\langle v, \left.\frac{\partial}{\partial u_1}\right|_p \right\rangle, \dots, \left\langle v, \left.\frac{\partial}{\partial u_n}\right|_p \right\rangle \right)$$

de manera que $\Phi^{-1}(0) = NM \cap (U \times \mathbb{R}^N)$. Comprobamos que 0 es un valor regular, lo que nos dará el resultado por el teorema de la preimagen. Para ello, observamos que

$$\left\langle v, \left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_p \right\rangle = \left\langle v_j \frac{\partial}{\partial x_j}, \frac{\partial x_k}{\partial u_i}(u(p)) \left.\frac{\partial}{\partial x_k}\right|_p \right\rangle = \sum_{j=1}^{N} v_j \frac{\partial x_j}{\partial u_i}(u(p))$$

donde $\left\{ \frac{\partial}{\partial x_i} \right\}_{i=1,\dots,N}$ es la base canónica de $\mathbb{R}^N$. La matriz jacobiana tiene, entonces, la forma

$$D_p\Phi = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_j}{\partial x_i}(p) & 0 \\ ? & \frac{\partial x_j}{\partial u_i}(u(p)) \end{pmatrix}$$

cuyas filas son linealmente independientes, lo que muestra que es una sumersión. ■

Construimos, usando el fibrado normal, lo que se conoce como *entornos tubulares* de una variedad diferenciable. Aprovechando que el fibrado normal está sumergido en $\mathbb{R}^N$, definimos la aplicación diferenciable $\theta : NY \to \mathbb{R}^N$ dada por $\theta(p, v) = p + v$, que utilizaremos en la prueba del teorema del entorno tubular.

Definición 4.4.4. Un *entorno tubular* de una variedad sumergida $Y \subset \mathbb{R}^N$ es un entorno U de Y en $\mathbb{R}^N$ que es difeomorfo por π a la imagen de un entorno abierto $V \subset NY$ de la forma

$$Y^\varepsilon = \{(y, v) \in NY \mid |v| < \delta(y)\}$$

para alguna función continua positiva $\delta : M \to \mathbb{R}$.

El siguiente teorema garantiza la existencia de entornos tubulares.

Teorema 4.4.5. (del entorno tubular) Sea $M \subset \mathbb{R}^N$ una subvariedad sumergida. Entonces, existe una aplicación diferenciable y positiva $\varepsilon : M \to (0, \infty)$ tal que la restricción de θ al entorno $N^\varepsilon M = \{(p, v) \in NM \mid |v| < \varepsilon(p)\}$ de $M = \{(p, 0) \in NM\}$ en NM es un difeomorfismo sobre el entorno tubular M^ε de M en $\mathbb{R}^N$.

Demostración. Consideremos la aplicación definida anteriormente $\theta(p, v) = p + v$. Cada punto $(p, 0) \in NM$ está contenido en las subvariedades $M \times \{0\}$ y $\{p\} \times N_pM$. Además, la diferencial $T_{(p,0)}\theta$ lleva sus espacios tangentes sobre $T_pM \subset \mathbb{R}^N$ y $N_pM \subset \mathbb{R}^M$, respectivamente, por lo que es sobreyectiva y $(p, 0)$ un punto regular. Como NM y $\mathbb{R}^N$ tienen la misma dimensión y $T_{(p,0)}\theta$ es sobreyectiva, también es isomorfismo, y usando el teorema de la función inversa, esto implica que h es difeomorfismo de un entorno de $M \times \{0\}$ en NM sobre un entorno $\tilde{M}$ de M en $\mathbb{R}^N$. Si M es compacta, el entorno anterior contiene M^ε para algún $\varepsilon > 0$. Si no lo es, cubrimos M con abiertos $U_i \subset M$ y elegimos para cada uno un $\varepsilon_i > 0$ tal que $U_i^{\varepsilon_i} \subset \tilde{M}$. Si $\{\lambda_i\}_{i\in I}$ es una partición de la unidad subordinada a $\{U_i\}_{i\in I}$, entonces $\varepsilon(p) = \sum_i \varepsilon_i\lambda_i(p)$ es la función buscada. ■

Corolario 4.4.6. Sea $f : M \to N$ una aplicación diferenciable entre variedades, siendo N una variedad sin borde. Entonces, existe una bola S en un determinado espacio euclídeo y una aplicación diferenciable $F : M \times S \to N$ tal que $F(p, 0) = f(p)$ y, para cada $p \in M$ fijo, la aplicación $s \mapsto F(p, s)$ es una sumersión $S \to N$. En particular, tanto F como ∂F son ambas sumersiones.

Demostración. Sea S la bola unidad en $\mathbb{R}^N$, el espacio ambiente euclídeo de N. Definimos

$$F(p, s) = (\sigma \circ \theta^{-1}) [f(p) + \varepsilon(f(p))s]$$

Puesto que $f(p) \in N$, tenemos que $\theta^{-1}(f(p)) = f(p)$, de modo que $F(p, 0) = (\sigma \circ \theta^{-1})(f(p)) = f(p)$. Por otro lado, para un p fijo, $s \mapsto f(p) + \varepsilon(f(p))s$ es claramente sumersión, pues su matriz jacobiana está dada por

$$J_s = \varepsilon(f(p)) \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

Además, σ es sumersión y θ difeomorfismo. Como la composición de sumersiones es sumersión, $s \mapsto F(p, s)$ también lo es. ■

El siguiente teorema, ahora sí, nos permite afirmar que la transversalidad es una propiedad transversal.

Teorema 4.4.7. (de transversalidad por homotopía) Para cada aplicación diferenciable $f : M \to N$ y cada subvariedad sin borde Z de la variedad sin borde N, existe una aplicación diferenciable $g : M \to N$ homotópica a f y tal que $g \pitchfork Z$ y $\partial g \pitchfork Z$.

Demostración. Sea F al aplicación definida en el corolario anterior. Puesto que F y ∂F son sumersiones, se sigue que son transversales a Z y ∂Z, para cualquier subvariedad $Z \subset N$. Entonces, el teorema de transversalidad de Thom implica que tanto $f_s \pitchfork Z$ como $\partial f_s \pitchfork Z$, para casi todo $s \in S$. Pero cada f_s es homotópica a f mediante la homotopía $X \times I \to Y$ dada por $(x, t) \mapsto F(x, ts)$. ■

Teorema 4.4.8. (de extensión) Sea Z una subavariedad cerrada de N, ambas sin borde, y C un subconjunto cerrado de M. Sea $f : M \to N$ una aplicación diferenciable con $f \pitchfork Z$ en C y $\partial f \pitchfork Z$ en $C \cap \partial M$. Entonces, existe una aplicación diferenciable $g : X \to Y$ homotópica a f, tal que $g \pitchfork Z$, $\partial g \pitchfork Z$ y, en un entorno de C, $g = f$.

Demostración. En primer lugar, demostramos que $f \pitchfork Z$ en un entorno de C. Si $x \in C$ pero $x \notin f^{-1}(Z)$, entonces, como Z es cerrado, $X - f^{-1}(Z)$ es un entorno de X en el que $f \pitchfork Z$ automáticamente. Si $p \in f^{-1}(Z)$, tomamos una carta (W, ϕ) en torno a $f(p)$ en Y. Ahora, dado un punto $p' \in f^{-1}(W)$, tenemos que $D_{p'}(\phi \circ f) = D_{f(p')}\phi \cdot D_{p'}\phi$. Puesto que $D_{f(p')}\phi$ es isomorfismo lineal, que p' sea valor regular de $\phi \circ f$ equivale a que $T_{p'}f$ tenga rango máximo y, por tanto, f sea transversal a Z en p'. Pero ahora, del cálculo diferencial sabemos que si p es valor regular de $\phi \circ f$ entonces existe un entorno de p donde la aplicación es también regular. De este modo, $f \pitchfork$ en un entorno de cada punto $p \in C$ y, por tanto, $f \pitchfork Z$ en un entorno U de C.

Si $\gamma : M \to [0, 1]$ un función diferenciable que se anula en C y que vale indénticamente 1 fuera C y llamamos $\tau = \gamma^2$. Puesto que $T_p\tau = 2\gamma(p)T_p\gamma$, tenemos que $T_p\tau = 0$ siempre que $\tau(p) = 0$. Sea $F(x, s)$ la aplicación definida en la demostración del teorema de transversalidad por homotopía, y definimos $G : M \times S \to N$ por $G(x, s) = F(x, \tau(x)s)$ y vamos a ver que $G \pitchfork Z$. Sea $(p, s) \in G^{-1}(Z)$ y, supongamos, $\tau(p) \neq 0$. Entonces, la aplicación $S \to Y$, definida por $r \mapsto G(p, r)$ es una sumersión, pues es composición de $r \mapsto \tau(p)r$ (difeomorfismo) con $r \mapsto F(p, r)$ (sumersión). De este modo, G es regular en (p, s) y, por tanto, $G \pitchfork Z$ en (p, s).

En el caso $\tau(p) = 0$, evaluamos $T_{(p,s)}$ en un punto arbitrario $(v, w) \in T_pM \times T_s(S) = T_pM \times \mathbb{R}^M$. Para mayor claridad, definimos $h : M \times S \to M \times S$ por $h(x, s) = (x, \tau(x)s)$, de forma que su matriz jacobiana está dada por

$$D_{(x,s)}h = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \cdots & 0 & & & \\ \vdots & \ddots & \vdots & & 0 & \\ 0 & \cdots & 1 & & & \\ \hline & & & \tau(x) & \cdots & 0 \\ & s \cdot D_x\tau & & \vdots & \ddots & \vdots \\ & & & 0 & \cdots & \tau(x) \end{array}\right)$$

y $T_{(x,s)}h(v, w) = (v, sT_{(x,s)}\tau(v) + \tau(x)w)$. Ahora, por la regla de la cadena,

$$T_{(p,s)}(v, w) = T_{(p,\tau(p)s)}F \circ T_{(p,s)}h(v, w) = T_{(p,\tau(p)s)}F(v, sT_{(x,s)}\tau(v) + \tau(x)w)$$

y, sustituyendo $\tau(p) = T_p\tau(v) = 0$, tenemos $D_{(p,s)}(v, w) = T_{(p,0)}F(v, 0)$. Teniendo en cuenta que $F|_{M\times\{0\}} = f$, $T_{(p,s)}G(v, w) = T_pf(v)$. Pero, si $\tau(p) = 0$, entonces $p \in U$ y $f \pitchfork Z$ en p y, como las diferenciales de f y G tienen las mismas imágenes, obtenemos que $G \pitchfork Z$ en (p, s).

Repitiendo el mismo análisis obtenemos que $\partial G \pitchfork Z$. Ahora, por el teorema de transversalidad de Thom, podemos elegir s de manera que $g(x) = G(x, s)$ verifique $g \pitchfork Z$ y $\partial g \pitchfork Z$. Esta g es homotópica a f y, además, si p está en el entorno de C donde $\tau = 0$, entonces $g(p) = G(p, s) = F(p, 0) = f(p)$. ■

5. Teoría de la Intersección

5.1. Grado módulo 2 de una aplicación diferenciable

En las secciones anteriores, hemos visto como es posible construir subvariedades a partir de una aplicación $f : M \to N$ tomando la imagen inversa de un valor regular $q \in N$. Veremos ahora que, bajo ciertas condiciones, la paridad del cardinal de las subvariedades así construidas no depende de la elección particular de q: o bien tienen todas cardinal par, o bien lo tienen impar.

Lema 5.1.1. Sea $f : M \to N$ una aplicación diferenciable entre variedades diferenciables, donde M es compacta y $\dim M = \dim N$. Si $q \in N$ es un valor regular de f, entonces $f^{-1}(q)$ consta, a lo sumo, de un número finito de puntos.

Demostración. Por ser N Hausdorff, $\{p\}$ es cerrado en N, luego compacto, de manera que también lo es $f^{-1}(q)$. Además, $f^{-1}(q)$ tiene por, el teorema de la preimagen, dimensión 0, de manera que es un conjunto discreto en N. Finalmente, por ser discreto y compacto, es finito, como queríamos. ■

Proposición 5.1.2. (Lema de homotopía) Sean $f, g : M \to N$ dos aplicaciones homotópicas entre variedades de la misma dimensión, donde M es una variedad compacta sin borde. Si $p \in N$ es un valor regular para ambas aplicaciones, entonces

$$\sharp f^{-1}(q) \equiv \sharp g^{-1}(q) \mod 2$$

Demostración. Sea $F : M \times [0,1] \to N$ una homotopía entre f y g. Supongamos que q es también un valor regular para F. Entonces $F^{-1}(q)$ es una subvariedad de dimensión 1 de M, cuyo borde es $F^{-1}(q) \cap (M \times \{0\} \cup M \times \{1\}) = f^{-1}(q) \times \{0\} \cap g^{-1}(q) \times \{1\}$. Por tanto, el número de puntos frontera de $F^{-1}(q)$ es igual a $\sharp f^{-1}(q) + \sharp g^{-1}(q)$. Ahora, del teorema 1.1.11 se sigue que toda variedad compacta de dimensión 1 es unión disjunta de intervalos cerrados y circunferencias, por lo que el número de puntos de su borde es par. Por tanto, la suma anterior es par y tenemos el resultado. ■

Observación 5.1.3. Como se demuestra en [7, pág. 21], la relación de homotopía es una relación de equivalencia, de modo que el número de puntos de $\sharp f^{-1}(q) \mod 2$ de f depende únicamente de su clase de homotopía.

Definición 5.1.4. Una aplicación $f : M \to N$ es *diferenciablemente isotópica* o *difeotópica* a otra aplicación $g : M \to N$ si existe una homotopía diferenciable $F : M \to [0,1] \to N$ tal que, para cada $t \in [0,1]$, la aplicación $p \mapsto F(p,t)$ es un difeomorfismo de M sobre N.

Proposición 5.1.5. (Lema de homogeneidad) Sean p, q puntos interiores de una variedad diferenciable conexa N. Entonces existe un difeomorfismo $h : N \to N$ que es diferenciablemente isotópico a la indentidad y tal que $h(p) = q$.

Demostración. Sea F_t una difeotopía de $\mathbb{R}^n$ en sí mismo que verifica: i) deja fijo el complementario de la bola unitaria de centro el origen y ii) desplaza el origen a otro punto de la bola unitaria que podemos escoger arbitrariamente. Sea N una variedad conexa y diremos que dos puntos de N son *isotópicos* si existe una isotopía diferenciable que lleva uno en el otro. Esto define claramente una relación de equivalencia. Sea ahora p un punto interior de N, que tiene un entorno difeomórfico a un cierto $\mathbb{R}^n$. Componiendo con F_t, tenemos que todo punto "suficientemente próximo" a p es isotópico a p. Por tanto, las clases de equivalencia de esta relación son abiertos y componen una partición de N en abiertos disjuntos. Pero el interior de N es conexo, luego solo puede haber una clase de equivalencia. Para completar la prueba solo falta demostrar que existe un F_t en las condiciones anteriores. Veámoslo.

Sea $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una aplicación diferenciable tal que $\varphi(x) > 0$, si $|x| < 1$, y $\varphi(x) = 0$, si $|x| \geq 1$ (por ejemplo, $\varphi(x) = \lambda(1 - ||x||^2)$, siendo $\lambda(t) = 0$, para $t \leq 0$, y $\lambda(t) = e^{-\frac{1}{t}}$, si $t > 0$). Sea $c \in \mathbb{R}^n$ tal que $||c|| = 1$ y consideramos el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t} = c_i \varphi(x_1, \ldots, x_n); \quad i = 1, \ldots, n.$$

Por los teoremas de existencia y unicidad para EDOs, las ecuaciones anteriores tienen una única solución $x = x(t)$ definida en todo $\mathbb{R}$ que satisface la condición inicial $x(0) = \bar{x}$. Llamando $F_t(\bar{x}) = x(t)$ para tal solución, se verifica:

1. $F_t(\bar{x})$ está definida para todo t y depende diferenciablemente de t y de $\bar{x}$,

2. $F_0(\bar{x}) = \bar{x}$,
3. $F_{s+t}(\bar{x}) = F_s \circ F_t(\bar{x})$.

De este modo, para cada t, F_t es un difeomorfismo de $\mathbb{R}^n$ sobre sí mismo (basta con notar que es diferenciable y que su inversa es F_{-t}, que también es diferenciable). Moviendo t, vemos que cada F_t es difeotópica a la identidad. Además, deja fijos los puntos fuera de la bola unitaria. En efecto, para un punto z del complementario de la bola unitaria, $F_t'(z) = 0$, para todo t, por lo que $F_t(z) = z$. Por último, para un punto q arbitrario dentro de la bola, es claro que la elección de $c = \frac{q}{|q|}$ implica que $F_t(0) = q$ para un cierto $t > 0$. ■

Teorema 5.1.6. Sean M una variedad compacta sin borde, N una variedad conexa y $f : M \to N$ una aplicación diferenciable. Si p y q son valores regulares de f, entonces

$$\sharp f^{-1}(p) \equiv \sharp f^{-1}(q) \mod 2$$

Esta clase de congruencia, que se denomina *grado mod 2* y se denota por $\deg_2(f)$, depende solo de la clase de homotopía diferenciable de f.

Demostración. Dados dos valores regulares p, q de f, sea h un difeomorfismo de N en N isotópico a la identidad y tal que $h(p) = q$. Entonces, z es valor regular de la composición $h \circ f$. Ahora, por ser h isotópica a la identidad, $h \circ f$ es homeotópica a f y el lema de homotopía nos da que

$$\sharp(h \circ f)^{-1}(q) \equiv \sharp f^{-1}(q) \mod 2$$

Pero

$$(h \circ f)^{-1}(q) = f^{-1}(h^{-1}(q)) = f^{-1}(p)$$

luego

$$\sharp(h \circ f)^{-1}(q) = \sharp f^{-1}(p)$$

y, por tanto,

$$\sharp f^{-1}(p) \equiv \sharp f^{-1}(q) \mod 2$$

como queríamos.

Supongamos, por otro lado, que f es homeotópica a g. Por el teorema de Sard, existe $q \in N$ que es valor regular de f y d g. De nuevo usando el lema de homotopía, tenemos que

$$\deg_2(f) \equiv \sharp f^{-1}(p) \equiv \sharp g^{-1}(p) \equiv \deg_2(g) \mod 2$$

lo que nos da la invarianza por homotopía. ■

5.2. Grado de Brower

La noción de grado introducida en la sección anterior tiene ya importantes aplicaciones. Sin embargo, se trata todavía de una noción débil en el sentido de que solo puede tomar dos valores y la información que aporta es limitada. Trataremos ahora de extender su definición, obteniendo un nuevo invariante por homotopía que pueda tomar cualquier valor entero.

Definición 5.2.1. Sean $\mathcal{B}$ y $\mathcal{B}'$ dos bases de $\mathbb{R}^n$ y M su matriz de cambio de base. Diremos que $\mathcal{B}$ y $\mathcal{B}'$ *tienen la misma orientación* si $\det M > 0$. Cada una de las clases de equivalencia de la relación anterior es una *orientación* de $\mathbb{R}^n$.

Definición 5.2.2. Una *orientación* de una variedad M consiste en la elección de una orientación de T_pM para cada $p \in M$. Además, requeriremos que si $\dim M > 0$, para todas las carta (U, φ) de M en torno a p, la orientación de $T_p\varphi(T_pM)$ sea la misma. Una variedad será *orientable* si admite una orientación.

En particular, toda variedad orientable, conexa y compacta admite, exactamente, dos orientaciones.

Una orientación para M permite definir una orientación en su borde ∂M como sigue. Suponiendo que $\dim M > 1$, para cada $p \in M$ elegimos una base $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_m\}$ de T_pM positivamente orientada (esto es, orientada como M) tal que: i) los vectores $v_2, \ldots, v_m$ son tangentes al borde y ii) v_1 "apunta hacia fuera" de M. Entonces la orientación de ∂M es la definida por $\{v_2, \ldots, v_m\}$.

Definición 5.2.3. Sean M, N variedades diferenciables sin borde, orientadas y de la misma dimensión, donde M es compacta. Para una aplicación diferenciable $f : M \to N$ y un valor regular $q \in N$, definimos el *grado de Brower*, $\deg(f, q) \in \mathbb{Z}$, como

$$\deg(f, q) = \sum_{p \in f^{-1}(q)} \text{sign } T_pf$$

donde sign $T_pf = 1$ si la orientación de su imagen coincide con la de $T_{f(p)}N$ y sign $T_pf = -1$ en caso contrario.

Lema 5.2.4. La aplicación $\deg_f(\bullet) = \deg(f, \bullet)$ es localmente constante.

Demostración. Sea $q \in N$ un valor regular de N y $f^{-1}(q) = p_1, \ldots, p_r$. Puesto que f es difeomorfismo y cada uno de los p_i es valor regular, el teorema de la función inversa garantiza la existencia de entornos abiertos U'_k de p_k tales que $f|_{U'_k}$ es difeomorfismo sobre un abierto V' de a, que podemos considerar común (reduciendo si es necesario los U'_k) a todos ellos. Puesto que f es cerrada, el conjunto $f\left(M - \bigcup_k U'_k\right)$ es cerrado. Puesto que este conjunto no contiene a q, podemos encontrar un entorno abierto y conexo $V \subset V'$ de q tal que

$$V \cap f\left(M - \bigcup_k U'_k\right) = \emptyset$$

Por tanto, $f^{-1}(V) \subset \bigcup_k U'_k$, y tomamos $U_k = f^{-1}(V) \cap U'_k$, luego $f^{-1}(V) = \bigcup_k U_k$.

Observamos ahora que, por ser cada U_k conexo, sign T_pf es constante en U_k. Llamamos a ese valor constante σ_k. Ahora, dado otro valor regular $q' \in V$, tenemos

$$f^{-1}(q) = \{p_1, \ldots, p_r\}, \quad f^{-1}(q') = \{p'_1, \ldots, p'_r\}$$

con $p_k, p'_k \in U_k$. Por tanto,

$$\deg(f, q) = \sum_k \text{sign } T_{p_k}f = \sum_k \sigma_k = \sum_k \text{sign } T_{p'_k}f = \deg(f, q').$$

■

Lema 5.2.5. Sea X una variedad compacta orientada, M su borde y N una variedad orientada, con $\dim M = \dim N$. Si $f : M \to N$ se puede extender a una aplicación diferenciable $F : X \to N$, entonces $\deg(f, q) = 0$ para todo valor regular q.

Demostración. Supongamos primero que q es un valor regular de F y de $f = F|_M$. La 1-variedad compacta $F^{-1}(q)$ es una unión finita de circunferencias e intervalos, de modo que los únicos puntos de $F^{-1}(q)$ en $M = \partial X$ son los extremos de los intervalos. Sea $A \subset F^{-1}(q)$ uno de esos intervalos, con $\partial A = \{a, b\}$. Vamos a ver que

$$\text{sign } T_a f + \text{sign } T_b f = 0$$

lo que nos dará, sumando sobre todos los intervalos, que $\deg(f, q) = 0$.

Las orientaciones de X y N determinan una orientación para A de la siguiente manera: dado $c \in A$, sea $\{v_1, \ldots, v_{m+1}\}$ una base positivamente orientada de $T_c X$ con v_1 tangente a A. Entonces, v_1 define la orientación de A si, y solo si, $T_a F$ lleva $\{v_2, \ldots, v_{m+1}\}$ a una base positivamente orientada de $T_{F(c)} N$.

Denotamos por $v_1(x)$ al vector unitario positivamente orientado de A en x. Claramente, v_1 es una función diferenciable y v_1 "apunta hacia fuera" en uno de los puntos frontera de A, digamos en b, y "hacia dentro" en el otro. Así,

$$\text{sing } T_a f = -1 \quad \text{y} \quad \text{sign } T_b f = 1$$

y su suma es 0.

Por último, supongamos que q_0 es un valor regular de f, pero no de F. Usando que los valores regulares de F forman un conjunto denso y que el grado es localmente constante, podemos escoger un valor regular q de F tal que

$$\deg(f, q_0) = \deg(f, q) = 0$$

lo que completa la demostración. ■

Lema 5.2.6. Dadas dos aplicaciones $f, g : M \to N$ homotópicas y un valor regular q común a ambas, se verifica

$$\deg(f, q) = \deg(g, q).$$

Demostración. Sea $F : [0, 1] \times M \to N$ la homotopía entre f y g. La variedad $[0, 1] \times M$ se orienta como un producto de variedades y su borde está compuesto por $\{0\} \times M$ y $\{1\} \times M$. Observamos que este borde está orientado de la siguiente manera: la equivalencia $\{0\} \times M \equiv M$ preserva la orientación, mientras que $\{1\} \times M \equiv M$ la invierte. De este modo, la orientación de $F|_{\partial([0,1]\times M}$ en un valor regular q es igual a la diferencia

$$\deg(g, q) - \deg(f, q)$$

Usando el lema anterior, esta diferencia vale 0. ■

Usando los lemas anteriores y repitiendo ahora los argumentos usados en la subsección anterior, supongamos ahora que q, q' son dos valores regulares de $f : M \to N$ y sea un difeomorfismo $h : N \to N$ que lleva q en q' y es isotópico a la identidad. Entonces, h preserva la orientación y

$$\deg(f, q) = \deg(h \circ f, h(q))$$

Pero f es homotópica a $h \circ f$, luego

$$\deg(f, q') = \deg(h \circ f, q')$$

por el lema 5.2.5. Por lo tanto, $\deg(f, q) = \deg(f, q')$ y hemos probado los dos siguientes teoremas:

Teorema 5.2.7. El valor $\deg(f, q)$ no depende de la elección del valor regular q. ■

A partir de ahora escribiremos simplemente $\deg f$, omitiendo el punto.

Teorema 5.2.8. Si f es diferenciablemente homeotópica a g, entonces $\deg f = \deg g$. ■

5.3. Teoría de la intersección módulo 2

La teoría desarrollada en los dos apartados anteriores se refiere a aplicaciones $f : M \to N$ entre variedades de la misma dimensión. La Teoría de la Intersección, que presentamos en esta subsección y la siguiente, es una generalización de esta situación en la que consideraremos una aplicación $f : M \to N$ y una subvariedad $L \subset N$ sujeta a la condición $\dim M + \dim L = \dim N$. Además, sustituiremos la condición de que q sea un valor regular por la de que $f \pitchfork L$.

Proposición 5.3.1. Sean $Y, Z \subset M$ dos variedades de dimensión complentaria, esto es, $\dim Y + \dim Z = \dim M$. Supongamos, además, que Y y Z son cerradas, Y compacta y que $Y \pitchfork Z$. Entonces, $Y \cap Z$ consta de un número finito de puntos.

Demostración. De la fórmula de las dimensiones para espacios vectoriales, tenemos

$$\dim(T_pY + T_pZ) = \dim T_pY + \dim T_pZ - \dim(T_pY \cap T_pZ)$$

Pero, por ser $Y \pitchfork Z$, $\dim(T_pY + \dim T_pZ) = \dim M$; y, por hipótesis, $\dim T_pY + \dim T_pZ = \dim M$, lo que implica, por la fórmula anterior, que $\dim(Y \cap Z) = 0$. Por tanto, $Y \cap Z$ tiene que ser un conjunto discreto, de modo que cada abierto fundamental de un atlas suyo contiene un único punto. Por otro lado, $Y \cap Z$ es cerrada (en un compacto Y) y, por tanto, compacta, de modo que podemos quedarnos con un número finito de abiertos fundamentales del atlas, lo que completa la prueba. ■

Definición 5.3.2. Consideremos una aplicación $f : M \to N \supset L$, donde M es compacta, $\dim M + \dim L = \dim N$ y $f \pitchfork L$. Definimos el *número de intersección módulo 2*, $I_2(f, L) \in \{0, 1\}$ como

$$I_2(f, L) = \sharp f^{-1}(L) \mod 2$$

Observamos que, por el teorema 4.2.5, $f^{-1}(L)$ es una variedad diferenciable, por lo que tiene sentido la sustitución de la condición de que q sea valor regular por la de $f \pitchfork L$.

Proposición 5.3.3. Si $f, g : M \to N$ son aplicaciones homotópicas, ambas transversales a $L \subset N$, entonces $I_2(f, L) = I_2(g, L)$.

Demostración. Sea $F : M \times [0, 1] \to N$ una homotopía entre f y g. Por el teorema de extensión probado en la sección anterior, podemos suponer que $F \pitchfork L$. Puesto que $\partial(M \times I) = M \times \{0\} \cup M \times \{1\}$ y $\partial F = f$ en $M \times \{0\}$ y $\partial F = g$ en $M \times \{1\}$, $\partial F \pitchfork L$. Entonces $F^{-1}(L)$ es una variedad unidimensional de $M \times I$ con borde

$$\partial F^{-1}(L) = F^{-1}(L) \cap \partial(M \times I) = f^{-1}(L) \times \{0\} \cup g^{-1}(L) \times \{1\}$$

Por el teorema de clasificación de variedades unidimensionales, $\partial F^{-1}(L)$ tiene un número par de puntos, luego $\sharp f^{-1}(L) \equiv \sharp g^{-1}(L) \mod 2$. ■

Puesto que la homotopía es una relación de equivalencia, se sigue directamente el siguiente corolario.

Corolario 5.3.4. Si $f, g : M \to N$ son aplicaciones homotópicas arbitrarias, entonces $I_2(f, L) = I_2(g, L)$. ■

Igualmente, podemos introducir el número de intersección para el caso de dos subvariedades transversales.

Definición 5.3.5. Sea M un variedad compacta y $L, Z \subset M$ subvariedades tales que $\dim L + \dim Z = \dim M$. Definimos su *número de intersección módulo 2* como $I_2(L, Z) = I_2(i, Z)$, donde $i : L \hookrightarrow M$ es la inmersión canónica.

Supongamos ahora que $f : L \to M$ y $g : Z \to M$ son dos aplicaciones entre variedades tales que $f \pitchfork g$. Una definición natural de $I_2(f, g)$ vendría dada por

$$I_2(f,g) \equiv \sharp\{(p,q) \in L \times Z \mid f(p) = g(q)\} \quad \text{mód } 2$$

Sin embargo, para que lo anterior tenga sentido, es necesario probar primero que el conjunto anterior tiene cardinal finito. Vamos a tratar de solucionarlo con la siguiente proposición, para la que usamos un lema previo.

Lema 5.3.6. Sean U, V subespacios de un espacio vectorial W. Entonces $W = U \oplus V$ si, y solo si, $(U \times V) \oplus \Delta = W \times W$, siendo $\Delta = \{(x, x) \mid x \in W\}$.

Demostración. Claramente, $U \cap W = \{0\}$ equivale a $(U \times V) \cap \Delta = \{0\}$. Bajo estas condiciones equivalentes, que las sumas sean directas equivale a que $\dim U + \dim V = \dim W$ y $\dim U + \dim V + \dim W = 2 \dim W$. Pero esto implica de nuevo las condiciones sobre la intersección del principio de la demostración. ■

Proposición 5.3.7. En la situación $L \xrightarrow{f} M \xleftarrow{g} Z$ con M compacto, $f \pitchfork g$ si, y solo si, $(f \times g) \pitchfork \Delta$, donde Δ es ahora la diagonal en $M \times M$. Bajo estas condiciones,

$$I_2(f, g) = I_2(f \times g, \Delta).$$

Demostración. La primera afirmación es consecuencia directa del lema anterior, tomando $U = T_pf(T_pL)$, $V = T_qg(T_qZ)$ y $W = T_rM$, con $f(p) = g(q) = r$. Ahora el conjunto $\{(p, q) \in L \times Z \mid f(p) = g(q)\}$ es justamente $(f \times g)^{-1}(\Delta)$, que es finito por la transversalidad $(f \times g) \pitchfork \Delta$. ■

Proposición 5.3.8. Si f, g son dos aplicaciones homotópicas a f', g', respectivamente. Entonces, $I_2(f, g) = I_2(f', g')$.

Demostración. Si F, G son homotopías de f en f' y de g en g', entonces $F \times G$ lo es de $f \times g$ en $f' \times g'$. Usando esto, la proposición anterior y la invarianza por homotopía del grado módulo 2, obtenemos el resultado. ■

Corolario 5.3.9. Sean L, Z, M variedades compactas tales que $\dim L + \dim Z = \dim M$. Si $Z \subset M$ es una subvariedad e $i : Z \hookrightarrow M$ es la inmersión canónica, entonces $I_2(f, B) = I_2(f, i)$, para cualquier $f : L \to M$.

Demostración. Si $f \pitchfork L$, el resultado es trivial. Si no, usando la genericidad de la transversalidad, tomamos f' homotópica a f y tal que $f' \pitchfork B$. Entonces, tenemos $I_2(f, Z) = I_2(f', B) = I_2(f', i) = I_2(f, i)$. ■

El siguiente resultado muestra que la teoría del grado módulo 2 puede obtenerse como un caso particular de la teoría de intersección módulo 2:

Corolario 5.3.10. Sean una variedad M compacta y otra N conexa tales que $\dim M = \dim N$. Entonces, $I_2(f, \{q\})$ es independiente del valor regular q y coincide con $\deg_2(f)$.

Demostración. Puesto que N es conexa y localmente conexa por caminos, es conexa por caminos, de manera que las aplicaciones inmersión i, i' de $q, q' \in N$ en N son homotópicas. Por tanto, $I_2(f, \{q\}) = I_2(f, i) = I_2(f, i') = I_2(f, \{q'\})$. Por otro lado, si q es valor regular de f, de la definición de número de intersección se sigue que $I_2(f, \{q\}) = \sharp f^{-1}(q) \mod 2 = \deg_2(f)$. ■

Corolario 5.3.11. Bajo las mismas suposiciones que en el corolario anterior, $I_2(L, Z) = I_2(Z, L)$.

Demostración. Si $L \pitchfork Z$, el resultado es obvio dado que $I_2(L, Z) = \sharp(L \cap Z) \mod 2 = I_2(Z, L)$. En el caso general, tomamos dos aplicaciones f y g homotópicas a las inmersiones y tales que $f \pitchfork g$. Entonces $I_2(L, Z) = I_2(f, g)$ y, claramente, $I_2(f, g) = I_2(g, f)$. ■

5.4. Teoría de la Intersección Orientada

Pasamos ahora al caso más general, en el que las variedades con las que trabajamos son variedades orientadas. Consideramos variedades M, N, L orientadas, siendo L una subvariedad de N y tales que $\dim M + \dim L = \dim N$. Dada una aplicación $f : M \to N$ transversal a L, $f \pitchfork L$, tendremos

$$T_p f(T_p M) \oplus T_{f(p)} = T_{f(p)} N, \quad \forall p \in M. \tag{$\dagger$}$$

Por otro lado, $T_p f : T_p M \to T_{f(p)} N$ define una orientación sobre su imagen. Para $p \in f^{-1}(L)$ definimos sign $T_p f = 1$ si la condición ($\dagger$) se mantiene para espacios vectoriales orientados, es decir, si la orientación de $T_{f(p)}$ coincide con la orientación que se obtiene de la suma directa $T_p f(T_p M) \oplus T_{f(p)}$, y sign $T_p f = -1$ en caso contrario (en general, la suma orientada no es conmutativa).

Supondremos, a no ser que se diga lo contrario, que todas las variedades que aparecen en esta sección son variedades orientadas.

Definición 5.4.1. Sea $f : M \to N \supset L$ una aplicación entre variedades orientadas, donde M es compacta, $\dim M + \dim L = \dim N$ y $f \pitchfork L$. Definimos el *número de intersección orientada*, $I(f, L) \in \mathbb{Z}$, como

$$I(f, L) = \sum_{p \in f^{-1}(L)} \text{sign } T_p f.$$

Proposición 5.4.2. Si $M = \partial X$, con X compacto, y $f : M \to N \supset L$ se extiende a X, entonces $I(f, Z) = 0$.

Demostración. Sea $F : X \to N$ la extensión de f, por el teorema de extensión, podemos suponer $F \pitchfork L$. Entonces, $F^{-1}(L)$ es una subvariedad compacta y orientada con borde $\partial F^{-1}(L) = f^{-1}(L)$. Repitiendo el razonamiento para variedades unidimensionales de la demostración del lema 5.2.5., se sigue que el valor del número de intersección tiene que ser 0. ■

Proposición 5.4.3. Sean M, N, L variedades en las condiciones de la definición anterior y sean $f, g : M \to N$ aplicaciones homotópicas tales que $f \pitchfork L$, $g \pitchfork L$. Entonces, $I(f, L) = I(g, L)$.

Demostración. Sea : $I \times M$ la homotopía que lleva f en g. Por la proposición anterior, $I(\partial F, L) = 0$. Pero $\partial(I \times M)$ está compuesto, como ya hemos dicho, por $M \times \{1\} \equiv M$, con orientación positiva, y $M \times \{0\} \equiv M$, con orientación negativa. Se sigue que $\partial F^{-1}(L)$ está formada por $\partial g^{-1}(L)$, positivamente orientada, y por $\partial f^{-1}(L)$, orientada negativamente, de manera que

$$0 = I(\partial F, L) = I(g, L) - I(f, L).$$

■

La invarianza por homotopía da consistencia a la definición de número de intersección que hemos dado. Si $f : M \to N$ es una aplicación diferenciable cualquiera, no necesariamente transversal a L, podemos encontrar otra aplicación f homotópica a g tal que $g \pitchfork L$. La invarianza por homotopía permite entonces definir $I(f, L) := I(g, L)$. Como en el caso no orientado, podemos definir el número de intersección entre dos variedades utilizando la inmersión canónica como $I(L, Z) = I(i, Z)$, con $i : Z \hookrightarrow M$.

De nuevo, la teoría del grado de Brower se obtiene como un caso particular de esta situación más general. Supongamos que q es un valor regular de f, de manera que $f \pitchfork \{q\}$, vemos que

$$I(f, \{q\}) = \sum_{p \in f^{-1}(q)} \operatorname{sign} T_p f = \operatorname{def}(f).$$

Por las definiciones de ambas nociones, lo anterior es, además, válido para cualquier $q \in N$.

Supongamos ahora que tenemos $L \xrightarrow{f} M \xleftarrow{g} Z$, con M compacto y $f \pitchfork g$. Definimos $I(f, g)$ como la suma sobre todos los pares $(p, q) \in L \times Z$ verificando $f(p) = g(q) = r$ de números ± 1, dependiendo de si la orientación de $T_r M$ coincide con la orientación inducida por la suma directa $T_p f(T_p L) \oplus T_q g(T_q Z) \cong T_r M$.

Proposición 5.4.4. $I(f, g) = (-1)^{\dim L \cdot \dim Z} I(g, f)$.

Demostración. Sean $\mathcal{B}_f = \{v_1, \ldots, v_r\}$ y $\mathcal{B}_g = \{v_{r+1}, \ldots, v_{r+s}\}$ bases de los espacios vectoriales $T_p f(T_p L)$ y $T_q g(T_q Z)$, respectivamente. Una base de $T_p f(T_p L) \oplus T_q g(T_q Z)$ está dada por $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_r\, v_{r+1}, \ldots, v_{r+s}\}$ mientras que la base de $T_q g(T_q Z) \oplus T_p f(T_p L)$ se construye como $\mathcal{B}' = \{v_{r+1}, \ldots, v_{r+s}, v_1, \ldots, v_r\}$. Para pasar de una a la otra son necesarias $\dim L \times \dim Z$ transposiciones. Puesto que cada transposición invierte la orientación, tenemos el resultado. ■

Corolario 5.4.5. $I(L, Z) = (-1)^{\dim L \cdot \dim Z} I(Z, L)$. ■

En particular, supongamos que L es una subvariedad de M de dimensión $\dim L = \frac{1}{2} \dim L$, de manera que podemos definir el número de autointersección $I(L, L)$. Si L tiene dimensión impar, el corolario anterior nos da $I(L, L) = -I(L, L)$, es decir, $I(L, L) = 0$. En consecuencia, $I_2(L, L) = I(L, L) \mod 2$ también se anula. Esto proporciona una herramienta para estudiar la orientabilidad de una variedad. Puesto que el número de intersección módulo 2 no requiere la orientabilidad de las variedades, puede ser calculado aunque esta propiedad no esté garantizada. Así, podemos tomar subvariedades de dimensión impar de una variedad M y calcular su número de intersección módulo 2. Si resulta que obtenemos un valor distinto de 0 para alguna subvariedad, la variedad M no puede ser orientada.

Definición 5.4.6. Sea M una variedad compacta y orientada. Se define su *característica de Euler*, $\chi(M)$, como el número de autointersección de la diagonal Δ en $M \times M$:

$$\chi(M) = I(\Delta, \Delta).$$

El razonamiento anterior nos da la siguiente consecuencia:

Proposición 5.4.7. La característica de Euler de una variedad compacta y orientada de dimensión impar es 0.

5.5. Una aplicación: Teorema de Separación de Jordan

Finalizamos la exposición con una aplicación de la teoría de intersección que acabamos de presentar. Concretamente, usaremos el grado módulo 2 para probar una versión del teorema de separación de Jordan para hipersuperficies cerradas del espacio euclídeo.

Definición 5.5.1. Sea $M \subset \mathbb{R}^{m+1}$ una hipersuperficie diferenciable, compacta y sin borde. Tomando $p \notin M$, se denomina *índice módulo 2 de M en torno a p*, $w_2(M,p)$, al grado módulo 2 de la aplicación diferenciable

$$f_p : M \to \mathbb{S}^m \ : \ x \mapsto \frac{x-p}{||x-p||},$$

que es propia por ser M compacto.

Lema 5.5.2. El índice módulo 2 es constante en cada componente conexa de $\mathbb{R}^{m+1} - M$.

Demostración. Sean p, q en la misma componente conexa. Dicha componente es abierta en $\mathbb{R}^{m+1}$ y conexa, luego conexa por poligonales. Sea $\gamma = \gamma(t)$ una poligonal tal que $\gamma(0) = p$ y $\gamma(1) = q$. Podemos construir, entonces, la homotopía

$$F : [0,1] \times M \to \mathbb{S}^m \ : \ x \mapsto \frac{x-\gamma(t)}{||x-\gamma(t)||}.$$

Usando la invarianza por homotopía del grado módulo 2, obtenemos el resultado. ∎

El teorema de separación de Jordan afirma que toda hipersuperficie en las condiciones del lema anterior desconecta $\mathbb{R}^{m+1}$. Usando el lema anterior, la prueba se reduce a encontrar dos puntos con diferente índice módulo 2.

Teorema 5.5.3. (de separación de Jordan) Sea $M \subset \mathbb{R}^{m+1}$ una hipersuperficie diferenciable, compacta y sin borde. M desconecta $\mathbb{R}^{m+1}$.

Demostración. Sea $a \in M$ y una recta ℓ que pasa por a y cuya dirección es perpendicular a T_aM. Sea $p \in \ell - M$. Vemos que a es valor regular de f_p calculando directamente. Para $v \in T_pM$, tenemos

$$T_af_p(v) = \frac{||a-p||^2 v - \langle a-p, v\rangle (a-p)}{||a-p||^3} = \frac{v}{||a-p||},$$

puesto que $\langle a-p, v\rangle = 0$ por la elección de ℓ. De este modo, T_af_p es isomorfismo lineal y, por el teorema de la función inversa, f_p es difeomorfismo local en a. Por la forma de M, esto implica que $f_p(M)$ tiene interior no vacío en $\mathbb{S}^m$ y, por el teorema de Sard, f_p tiene algún valor regular $u \in f_p(M)$. Sea L la semirrecta $x = p\lambda u$, $\lambda > 0$. Entonces, si p está suficientemente alejado de M, $f_p^{-1}(u) = M \cap L$, y

$$w_2(M,p) = \deg_2(f_p) = \sharp(M \cap L) \quad \text{mód } 2.$$

Ahora, sea x el primer punto que encontramos en $M \cap L$ cuando nos desplazamos desde p sobre L y sea $p \in L - M$ un punto que encontramos antes de la segunda intersección entre L y M. En esta situación, $f_q^{-1}(u) = (M \cap L) - \{x\}$ y u es un valor regular de f_q.

La primera observación se sigue de que ahora x se proyecta sobre un punto antipodal en la esfera. Para probar la segunda, observamos que $y - q = \mu(y-p)$, para $\mu > 0$ y todo $y \in f_q^{-1}(u)$. Entonces, para $v \in T_yM$ tenemos

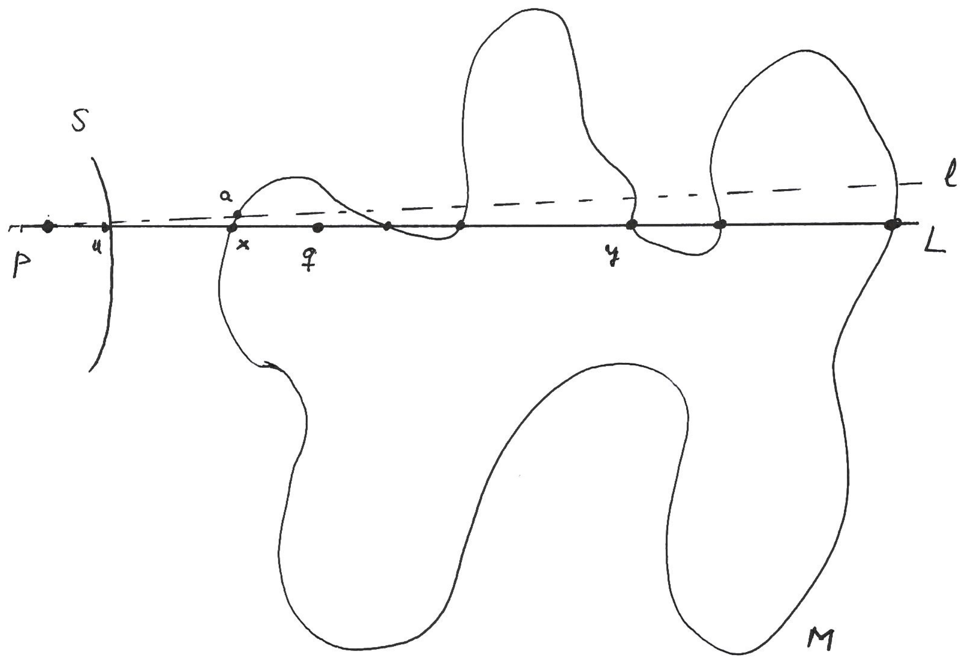
$$\begin{aligned} T_yf_q(v) &= \frac{||y-q||^2 v - \langle y-q, v\rangle (y-q)}{||y-q||^3} \\ &= \frac{||y-p||^2 v - \langle y-p, v\rangle (y-p)}{\mu ||y-p||^3} = \frac{1}{\mu} T_yf_p(v), \end{aligned}$$

lo que prueba que $T_y f_q = \frac{1}{2} T_y f_p$ es un isomorfismo.

Por tanto,

$$w_2(M,q) = \deg_2(f_q) = \sharp(M \cap L - \{x\}) \quad \text{mód } 2$$

lo que implica claramente que $w_2(M,p) \neq w_2(M,q)$, y hemos terminado.



■

Bibliografía

[1] T. Bröcker, K. Jänich, *Introducción a la topología diferencial*, Editorial AC, Madrid 1977.

[2] J.M. Gamboa, J.M. Ruiz, *Iniciación al estudio de las variedades diferenciables*, Sanz y Torres, Madrid 2016.

[3] M. Gualtieri, *Geometry and Topology Notes*, http://www.math.toronto.edu/mgualt/MAT1300/1300 %20Lecture %20notes.pdf, 2009.

[4] V. Guillem, A. Pollack, *Differential topology*, Prentice Hall, Englewood Cliffs 1974.

[5] M.W. Hirsch, *Differential topology*, Springer-Verlag, New York 1976.

[6] I. Madsen, J. Tornehave, *From Calculus to Cohomology*, Cambridge University Press, Cambridge 1999.

[7] J.W. Milnor, *Topology from the differential viewpoint*, Princeton University Press, Princeton 1997.

[8] M. Müger, *An introduction to differential topology: de Rham Theory and Morse Theory*, http://www.math.ru.nl/∼mueger/diff_notes.pdf

[9] J.R. Munkres, *Topology, Second Edition*, Prentice-Hall, USA 2000.

[10] E. Outerelo, J.A. Rojo, J.M. Ruiz, *Topología diferencial: un curso de iniciación*, Sanz y Torres, Madrid 2014.

[11] E. Outerelo, J.M. Ruiz, *Mapping degree theory*, AMS, Providence 2009.

[12] G. Pedersen, *Analysis Now*, Springer-Verlag, New York 1989.