

DES COORDONNÉES RIGIDES ANALYTIQUES SUR LE CHAMP DES GROUPES FORMELS DE DIMENSION UN

LAURENT FARGUES

RÉSUMÉ. Suivant les travaux fondateurs de Quillen on peut relier la catégorie d'homotopie stable des spectres aux faisceaux quasi-cohérents sur le champ des groupes formels de dimension 1 via l'anneau de Lazard. Ce point de vue a donné naissance à la théorie chromatique homotopique. Dans ce texte on présente de nouvelles coordonnées rigides analytiques sur ce champ qui ne sont pas connues des spécialistes de théorie chromatique homotopique, coordonnées qui pourraient être utiles lorsque couplées aux progrès récents concernant les faisceaux quasi-cohérents en géométrie analytique rigide.

ABSTRACT. Following the founding works of Quillen one can relate the stable homotopy category of spectra to quasi-coherent sheaves on the stack of 1-dimensional formal groups via Lazard's ring. This point of view has given birth to chromatic homotopy theory. In this article we present some new analytic rigid coordinates on this stack that are not known from specialists of chromatic homotopy theory, coordinates that could be useful when coupled with the recent advances on quasi-coherent sheaves in rigid analytic geometry.

INTRODUCTION

D'après Quillen, on peut associer à un CW complexe X un faisceau quasi-cohérent $MU_*(X)$ sur le champ des groupes formels de dimension 1. La stratification de ce champ par la hauteur du groupe formel en un nombre premier p permet alors de construire des théories cohomologiques paramétrées par des spectres p -locaux qui interpolent entre la K -théorie et la cohomologie usuelle modulo p . On peut ainsi à un spectre p -local X une tour de localisés

$$X \longrightarrow \cdots \longrightarrow L_{E(n)}X \longrightarrow L_{E(n-1)}X \longrightarrow \cdots \longrightarrow L_{E(0)}X$$

dont la limite homotopique est X lorsque X est p -local fini (théorème de convergence chromatique). Cela fournit alors un dévissage de X à partir des fibres homotopiques de $L_nX \rightarrow L_{n-1}X$ lorsque n varie, fibres qui sont elles reliées aux espaces de Lubin-Tate.

Dans ce cadre tous les calculs associés reposent sur la description de l'anneau de Lazard p -typique donnée par la théorie de Cartier des groupes formels

$$\mathbb{Z}_{(p)}[v_i]_{i \geq 1}.$$

On se propose dans ce texte de prendre un point de vue différent non-algébrique, rigide analytique, tel que dans [13] dont le moto était de tout faire « en fibre générique » sans utiliser des modèles entiers comme dans [17]. Ce point de vue est celui qui, au final, a mené à [15] où le champ Bun_G des G -fibrés sur la courbe est de nature rigide analytique contrairement à celui des F -isocristaux. Dans cette perspective, le point de vue « cristallin » de la théorie de Cartier, telle qu'elle apparaît dans [16] par exemple, est moins bien adapté que le point de vue « périodes de Hodge-Tate ». De fait il existe deux applications de périodes dans le cadre de la géométrie p -adique :

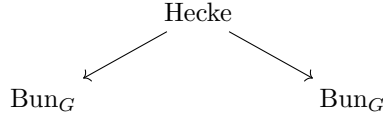
- les périodes de de Rham considérées dans [16] et [21, Chapitre 5] associées à la suite spectrale de Hodge de Rham,
- les périodes de Hodge-Tate associées à la suite spectrale de Hodge-Tate.

Date: April 7, 2024.

L'auteur a bénéficié du soutien du projet ANR COLOSS ANR-19-CE40-0015.

2010 Mathematics Subject Classification. Primary: 11G18; Secondary: 14G20.

Celles-ci se reflètent en les deux morphismes



de [15] définissant le champ de Hecke des modification des fibrés sur la courbe. Le point de vue périodes de Hodge-Tate est apparu dans [9] et [14]. Il a été récemment exploité dans [5] qui exploite l'isomorphisme de [14] que l'on peut reformuler de façon moderne en un isomorphisme de v -champs

$$[\mathcal{O}_D^\times \backslash \text{LT}_\eta^\diamond] \simeq [\text{GL}_n(\mathbb{Z}_p) \backslash \Omega^\diamond]$$

où LT est l'espace de Lubin-Tate de fibre générique LT_η , une boule ouverte rigide analytique, et Ω l'espace de Drinfeld.

On se propose dans ce texte d'étendre ce point de vue en prouvant le résultat suivant.

Théorème 0.1. *Soit $\widehat{\mathcal{M}}_{\text{GF},p}^{\leq h}$ le champs sur $\text{Spf}(\mathbb{Z}_p)$ des groupes formels de dimension 1 de hauteur $\leq h$. On peut définir le diamant de sa fibre générique « surconvergente »*

$$\widehat{\mathcal{M}}_{\text{GF},p,\eta}^{\leq h,\diamond,\dagger}$$

sur $\text{Spa}(\mathbb{Q}_p)^\diamond$.

(1) *Il y a un morphisme surjectif de v -champs*

$$\begin{array}{c} [\text{GL}_h(\mathbb{Z}_p) \backslash \mathbb{P}_{\mathbb{Q}_p}^{h-1,\diamond}] \\ \downarrow \\ \widehat{\mathcal{M}}_{\text{GF},p,\eta}^{\leq h,\diamond,\dagger} \end{array}$$

donné par les périodes de Hodge-Tate.

(2) *On peut expliciter la présentation associée du champ $\widehat{\mathcal{M}}_{\text{GF},p,\eta}^{\leq h,\diamond,\dagger}$ i.e. le groupoïde*

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{P}_{\mathbb{Q}_p}^{h-1,\diamond} \times \widehat{\mathcal{M}}_{\text{GF},p,\eta}^{\leq h,\diamond,\dagger} \times \mathbb{P}_{\mathbb{Q}_p}^{h-1,\diamond} & & \\ \downarrow \uparrow \downarrow & & \\ \mathbb{P}_{\mathbb{Q}_p}^{h-1,\diamond} & & \end{array}$$

(3) *La stratification par la hauteur de $\widehat{\mathcal{M}}_{\text{GF},p,\eta}^{\leq h,\diamond,\dagger}$ correspond à la stratification de $|\mathbb{P}_{\mathbb{Q}_p}^{h-1}|$ donnée par, pour $K|\mathbb{Q}_p$, à la dimension du noyau d'un morphisme \mathbb{Q}_p -linéaire non-nul $\mathbb{Q}_p^h \rightarrow K$. En particulier la strate ouverte est l'espace de Drinfeld Ω .*

L'idée est aini de remplacer les cordonnées (v_1, v_2, \dots) issues de la théorie de Cartier par des coordonnées $[x_0 : \dots : x_{h-1}]$ sur l'espace projectif $\mathbb{P}_{\mathbb{Q}_p}^{h-1}$. On espère que ce point de vue soit utile. Il s'agit là d'une simple proposition très probablement naïve, l'auteur n'étant pas spécialiste du sujet, mais qui vaut d'être notée.

L'intérêt d'un tel énoncé est que l'on dispose désormais d'une « bonne » notion de coefficients quasi-cohérents sur de tels objets.

Corollaire 0.2. *On dispose d'un foncteur naturel*

Faisceaux quasi-coh. sur $\widehat{\mathcal{M}}_{\text{GF},p}^{\leq h} \longrightarrow$ Complexes quasi-coh. $\text{GL}_n(\mathbb{Z}_p)$ -équivariants « à la Mann » sur $\mathbb{P}_{\mathbb{Q}_p}^{h-1,\diamond}$

Ici les complexes quasi-cohérents sont ceux définis par Mann dans [19], cf. également [4]. Il s'agit de complexes de $\mathcal{O}^{\sharp,+,\alpha}$ -modules p -adiquement complets (au sens dérivé). Ils sont donnés pro-étale localement sur $\mathbb{P}_{\mathbb{Q}_p}^{h-1,ad}$, dans des cartes affinoïdes perfectoides du type $\text{Spa}(A, A^+) \rightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{Q}_p}^{h-1,ad}$ avec « A de type

fini » (cf. [19, Proposition 3.1.9]), par des objets de

$$\left\{ C \in \underbrace{\mathcal{D}^b(A^{+,a})}_{\infty\text{-cat. stable}} \mid C \xrightarrow{\sim} \varprojlim_{n \geq 1} C/p^n \right\}.$$

On obtient ainsi un foncteur

$$\text{Spectres } p\text{-complets} \longrightarrow \text{Complexes quasi-coh. } \underline{\text{GL}}_n(\mathbb{Z}_p)\text{-équivariants « à la Mann » sur } \mathbb{P}_{\mathbb{Q}_p}^{h-1, \diamond}.$$

Après inversion de p , étant donné les progrès récents en théorie de Simpson p -adique (la reformulation des travaux de Faltings ([10], [11], [2]) en termes « modernes », cf. [18] et [3] par exemple) étendus aux complexes parfaits on peut espérer une construction du type

$$\text{Spectres } p\text{-locaux finis} \left[\frac{1}{p} \right] \dashrightarrow \text{Complexes parfaits de Higgs } \text{GL}_h(\mathbb{Z}_p)\text{-équivariants sur } \mathbb{P}_{\mathbb{Q}_p}^{h-1},$$

cf. section 7. Du point de vue de [16] des fibrés équivariants sur l'espace de Lubin-Tate cela consiste à regarder des fibrés de Higgs $\text{GL}_h(\mathbb{Z}_p)$ -équivariants sur l'espace de Drinfeld Ω_{h-1} de dimension $h-1$. Un des aspects fascianants d'une telle construction serait que, d'après GAGA, elle produirait des complexes parfaits de fibrés de Higgs algébriques sur l'espace projectif via un détour rigide analytique.

Historique : L'auteur de ce sujet a tenté de disséminer ces idées dès 2008 auprès de la communauté chromatique homotopique, comme Jack Morava ou Michael Hopkins ([12]), sur la base d'exposés sur [14]. Il était probablement têtnd smith et l'apparition de [5] couplée à l'insistance de Lars Hesselholt l'ont incité à rédiger cette note

1. LE CHAMP DES GROUPES FORMELS DE DIMENSION 1

1.1. Généralités.

1.1.1. Le champ sur $\text{Spec}(\mathbb{Z})$.

Définition 1.1. On note \mathcal{M}_{GF} le champ fpqc sur $\text{Spec}(\mathbb{Z})$ qui à un schéma S associe le groupoïde des S -groupes de Lie formels commutatifs de dimension 1.

Dans la définition précédente, un S -groupe de Lie formel est un S -schéma formel en groupes, formellement de type fini et formellement lisse, i.e. isomorphe à $\widehat{\mathbb{A}}_S^d$ localement sur S (avec $d = 1$ dans notre cas). On renvoie à [20, Chapitre II] pour les généralités sur les groupes de Lie formels. Considérons la présentation Zariski

$$\widetilde{\mathcal{M}}_{\text{GF}} \longrightarrow \mathcal{M}_{\text{GF}}$$

donnée par l'espace de modules des lois de groupes formels de dimension 1. En d'autres termes, $\widetilde{\mathcal{M}}_{\text{GF}}(S)$ est l'ensemble des couples (\mathcal{G}, ι) où $\mathcal{G} \in \mathcal{M}_{\text{GF}}(S)$ et $\iota : \widehat{\mathbb{A}}_S^1 \xrightarrow{\sim} \mathcal{G}$ est un isomorphisme de S -schémas formels pointés (la section 0 est envoyée sur la section neutre via ι). On a

$$\widetilde{\mathcal{M}}_{\text{GF}} = \text{Spec}(\Lambda)$$

où $\Lambda \simeq \mathbb{Z}[t_k]_{k \geq 1}$ est l'anneau de Lazard. Dès lors

$$\mathcal{M}_{\text{GF}} = [H \backslash \widetilde{\mathcal{M}}_{\text{GF}}]$$

(quotient Zariski) avec

$$H = \underline{\text{Aut}}(\widehat{\mathbb{A}}^1)$$

(automorphismes envoyant l'origine sur l'origine), un \mathbb{Z} -schéma en groupes pro-unipotent qui agit sur $\widetilde{\mathcal{M}}_{\text{FG}}$.

1.1.2. *Localisation en p .* Fixons maintenant un nombre premier p . On dispose alors d'une présentation de

$$\mathcal{M}_{\text{GF},(p)} := \mathcal{M}_{\text{GF}} \otimes \mathbb{Z}_{(p)}$$

donnée par l'espace de module des lois de groupes formels p -typiques, les isomorphismes pointés $\iota : \widehat{\mathbb{A}}_S^1 \xrightarrow{\sim} \mathcal{G}$ tels que la courbe associée soit p -typique i.e. pour tout $n \geq 1$ vérifiant $(n, p) = 1$ on a $F_n \cdot \iota = 0$ dans le module de Cartier ([24]). Ici, si

$$\gamma : \widehat{\mathbb{A}}_S^1 \longrightarrow \mathcal{G}$$

est une courbe, i.e. un morphisme de S -schéma formels pointés, alors

$$F_n \gamma = \text{tr}_{\varphi_n}(\gamma).$$

Le morphisme $\varphi_n : \widehat{\mathbb{A}}_S^1 \rightarrow \widehat{\mathbb{A}}_S^1$ est donné par $\varphi_n^* T = T^n$, T étant la coordonnée sur $\widehat{\mathbb{A}}_S^1$, et

$$\text{tr}_{\varphi_n} : \varphi_{n*} \varphi_n^* \mathcal{G}_{\widehat{\mathbb{A}}_S^1} \longrightarrow \mathcal{G}_{\widehat{\mathbb{A}}_S^1}$$

est le morphisme trace ([1, XVII-6.3.4]). Cet espace de modules

$$\widetilde{\mathcal{M}}_{\text{GF},(p)}$$

est isomorphe à

$$\text{Spec}(\mathbb{Z}_{(p)}[v_k]_{k \geq 1}).$$

Le module de Cartier p -typique universel a pour générateur la courbe γ et relation

$$F\gamma = \sum_{k \geq 0} V^k [v_{k+1}] \gamma$$

dans le module de Cartier associé. En d'autres termes la loi de groupe formel associée a pour logarithme la série formelle $f \in \mathbb{Z}_{(p)}[[T]]$ vérifiant $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$ et l'équation fonctionnelle

$$f(T) = T + \sum_{k \geq 1} \frac{f(v_k T^{p^k})}{p}.$$

Considérons le sous-groupe fermé

$$\mathcal{N} \subset H \times_{\text{Spec}(\mathbb{Z})} \widetilde{\mathcal{M}}_{FG,(p)}$$

de $H \times_{\text{Spec}(\mathbb{Z})} \widetilde{\mathcal{M}}_{\text{GF},(p)}$ agissant sur $\widetilde{\mathcal{M}}_{\text{GF},(p)}$ formé des éléments (h, \mathcal{G}, ι) où $h \in H$ et $(\mathcal{G}, \iota) \in \widetilde{\mathcal{M}}_{FG,(p)}$ sont tels que $\iota \circ h$ est encore p -typique. Si on note $\widetilde{\mathcal{M}}_{\text{GF},(p)} = \text{Spec}(R)$,

$$X +_{\mathfrak{F}} Y = f^{-1}(f(X) + f(Y)),$$

et $+_{\mathfrak{F}}$ est la loi de groupe formel universelle à coefficients dans R , on peut le décrire comme étant, pour une R -algèbre A ,

$$\mathcal{N}(A) = \left\{ T + \sum_{k \geq 1}^{\mathfrak{F}} a_k T^{p^k} \mid a_k \in A \right\} \subset T + T^2 A[[T]] = H(A)$$

où la notation « $\sum^{\mathfrak{F}}$ » signifie que l'on prend la somme pour la loi de groupe formelle \mathfrak{F} . On a alors

$$\mathcal{M}_{\text{GF},(p)} = \text{coeq} \left[\mathcal{N} \rightrightarrows \widetilde{\mathcal{M}}_{\text{GF},(p)} \right]$$

(quotient Zariski champêtre).

1.1.3. *Complétion en p et stratification par la hauteur.*

Définition 1.2. On note $\widehat{\mathcal{M}}_{\text{GF},p}$ le champ sur $\text{Spf}(\mathbb{Z}_p)$ obtenu par complétion p -adique de \mathcal{M}_{GF} .

Par champ sur $\text{Spf}(\mathbb{Z}_p)$ on entend ici que les objets tests sont les schémas sur lesquels p est localement nilpotent, la topologie est la topologie fpqc et la valeur sur $S \in \text{Nilp}_{\mathbb{Z}_p}$ est le groupoïde des groupes de Lie formels de dimension 1 sur S . Il y a une stratification par la hauteur du groupe formel $h \in \mathbb{N}_{\geq 1} \cup \{+\infty\}$ telle que

$$\widehat{\mathcal{M}}_{\text{GF},p}^{\geq h}$$

soit un sous-champ Zariski fermé. On a

$$|\widehat{\mathcal{M}}_{\text{GF},p}| = |\widehat{\mathcal{M}}_{\text{GF},p,\text{red}}| = \mathbb{N}_{\geq 1} \cup \{+\infty\}$$

dont la topologie est donnée par l'opposé de l'ordre usuel sur $\mathbb{N}_{\geq 1} \cup \{+\infty\}$.

Avec les coordonnées $(v_k)_{k \geq 1}$, de la section précédente, on a

$$\widehat{\mathcal{M}}_{\text{GF},p,\text{red}}^{\geq h} = \{p = v_1 = \dots = v_{h-1} = 0\}.$$

1.1.4. *Complétion formelle en un point de hauteur finie.* Fixons $h \geq 1$. Soit \mathcal{G}_h le groupe formel p -divisible de hauteur h sur \mathbb{F}_p de cristal covariant \mathbb{Z}_p^h muni du Verschiebung V de matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & p \\ 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Il lui correspond le point

$$x_h \in \widehat{\mathcal{M}}_{\text{GF},p}(\mathbb{F}_p).$$

Définition 1.3. (1) On note

$$\widehat{\mathcal{M}}_{\text{GF},p}^{(h)}$$

le complété formel de $\mathcal{M}_{\text{GF},p}$ le long de x_h .

(2) On note

$$\mathfrak{X}_h = \text{Def}(\mathcal{G}_h)$$

l'espace de Lubin-Tate des déformations de \mathcal{G}_h .

(3) On note J_h le faisceau en groupes pro-étale sur les schémas localement annulés par une puissance de p donné par

$$J_h(S) = \text{Aut}(\mathcal{G}_h \times_{\text{Spec}(\mathbb{F}_p)} S).$$

À proprement parler, l'espace de Lubin-Tate est l'extension des scalaires de $\text{Spf}(\mathbb{Z}_p)$ à $\text{Spf}(W(\overline{\mathbb{F}}_p))$ de cet espace de déformations. On a

$$\mathfrak{X}_h \simeq \text{Spf}(\mathbb{Z}_p[[x_1, \dots, x_{h-1}]])$$

Si $D_h = \mathbb{Q}_p^h[\Pi]$ est l'algèbre à division d'invariant $\frac{1}{h}$ sur \mathbb{Q}_p , J_h est étale localement constant isomorphe à \underline{D}_h^\times . Plus précisément,

$$J_h \times_{\text{Spec}(\mathbb{F}_p)} \text{Spec}(\mathbb{F}_p^h) = \underline{O}_{D_h}^\times.$$

Le résultat suivant est alors classique.

Proposition 1.4. *Il y a alors un isomorphisme*

$$\widehat{\mathcal{M}}_{\text{GF},p}^{(h)} \xrightarrow{\sim} [J_h \setminus \mathfrak{X}_h]$$

où le quotient champêtre est pris pour la topologie pro-étale sur les schémas localement annulés par une puissance de p .

Le J_h -torseur pro-étale

$$\mathfrak{X}_h \longrightarrow \widehat{\mathcal{M}}_{\text{GF},p}^{(h)}$$

est le toseur d'Igusa ([17, Chapitre IV])

2. FIBRE GÉNÉRIQUE

On renvoie à [22, Section 8] pour la v -topologie sur les espaces perfectoïdes. Dans la définition qui suit le symbole « η » signifie que l'on prend la fibre générique de notre champ formel. On ne donne aucun sens à cette fibre générique mais on peut donner un sens à son diamant comme v -champ. Notons de plus que l'on prend la version « surconvergente ». Si \mathfrak{X} est un $\mathrm{Spf}(\mathbb{Z}_p)$ -schéma formel séparé local séparé localement formellement de type fini alors $\mathfrak{X}_\eta^{\circ, \dagger}$ n'est rien d'autre que le diamant de la compactification canonique de Huber de la fibre générique \mathfrak{X}_η . Par exemple, si $\mathfrak{X} = \mathrm{Spf}(\mathbb{Z}_p\langle T \rangle)$ alors

$$\mathfrak{X}_\eta^{\circ, \dagger} = \mathrm{Spa}(\mathbb{Q}_p\langle T \rangle, \mathbb{Z}_p + pT\mathbb{Z}_p\langle T \rangle)^\circ,$$

la compactification canonique de Huber de la boule ouvert rigide analytique « classique ».

Définition 2.1. *On note*

$$\widehat{\mathcal{M}}_{\mathrm{GF}, p, \eta}^{\circ, \dagger}$$

le v -champ sur la catégorie des \mathbb{F}_p -espaces perfectoïdes qui est le champ associé au préchamp associant à une \mathbb{F}_p -algèbre affinoïde perfectoïde (R, R^+) un débasculé $(R^\sharp, R^{\sharp, +})$ sur \mathbb{Q}_p et un objet de $\widehat{\mathcal{M}}_{\mathrm{GF}, p}(R^{\sharp, \circ})$.

On note de même

$$\widehat{\mathcal{M}}_{\mathrm{GF}, p, \eta}^{\leq h, \circ, \dagger}$$

qui est l'objet auquel on va s'intéresser au final lorsque h varie i.e. on ne s'intéresse qu'à la partie de hauteur finie.

On va d'intéresser de même au champ des groupes p -divisibles de hauteur fixée h . On note

$$\mathrm{BT}_h$$

le champ des groupes p -divisibles de hauteur h sur $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z}_p)$ et $\widehat{\mathrm{BT}}_h$ son complété formel sur $\mathrm{Spf}(\mathbb{Z}_p)$ obtenu en regardant des groupes p -divisibles sur des schémas localement annulés par p .

Définition 2.2. *On note pour $h \geq 1$ et $d \geq 0$,*

$$\widehat{\mathrm{BT}}_{d, h, \eta}^{\circ, \dagger}$$

le v -champ associé associé au préchamp associant à une \mathbb{F}_p -algèbre affinoïde perfectoïde (R, R^+) un débasculé $(R^\sharp, R^{\sharp, +})$ sur \mathbb{Q}_p et un groupe p -divisible de dimension d et hauteur h sur $\mathrm{Spf}(R^\circ)$.

Il y a un morphisme évident

$$\widehat{\mathrm{BT}}_h \longrightarrow \widehat{\mathcal{M}}_{\mathrm{GF}, p}^{\leq h}$$

donné par l'opération de complétion formelle d'un groupe p -divisible ([20, Chapitre II]).

Définition 2.3. *On note*

$$\pi_h : \widehat{\mathrm{BT}}_{1, h, \eta}^{\circ, \dagger} \longrightarrow \widehat{\mathcal{M}}_{\mathrm{GF}, p, \eta}^{\leq h, \circ, \dagger}$$

le morphisme induit par la complétion formelle d'un groupe p -divisible.

Commençons par un lemme qui justifie l'introduction de ce morphisme.

Lemme 2.4. *Le morphisme π_h est v -surjectif.*

Démonstration. Soit $S = \mathrm{Spa}(R, R^+)$ un \mathbb{Q}_p -espace affinoïde perfectoïde et \mathcal{G} un groupe de Lie formel de dimension 1 sur $\mathrm{Spf}(R^\circ)$ de hauteur $\leq h$. Pour tout $s \in S$, on considère le groupe de Lie formel $\mathcal{G} \hat{\otimes}_{R^\circ} K(s)^\circ$. Puisque $K(s)^\circ$ est un anneau de valuation de hauteur 1 la hauteur de ce groupe formel sur $\mathrm{Spf}(K(s)^\circ)$ est constante et il s'agit donc d'un groupe p -divisible de hauteur $t(s) \leq h$. Notons alors $H_s = \mathcal{G} \hat{\otimes}_{R^\circ} K(s)^\circ \oplus (\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p)^{h-t(s)}$ qui est p -divisible de hauteur h .

On considère maintenant la \mathbb{Q}_p -algèbre perfectoïde (A, A^+) avec

$$A^+ = \prod_{s \in S} K(s)^+$$

et $A = A^+[\frac{1}{\varpi}]$ où ϖ est une pseudo-uniformisante de R . Le morphisme

$$\mathrm{Spa}(A, A^+) \longrightarrow S$$

est de façon évidente v -surjectif. On a de plus $A^\circ = \prod_{s \in S} K(s)^\circ$. Pour tout entier $n \geq 1$ on considère la A° -algèbre

$$B_n = \prod_{s \in S} \mathcal{O}(H_s[p^n]).$$

Le lemme 2.5 montre que $\varinjlim_{n \geq 1} \text{Spec}(B_n)$ est un groupe p -divisible. Notons $\mathcal{O}(H_s[p^n])^+$ l'idéal d'augmentation associé à la section unité. On a alors $B_n^+ = \prod_{s \in S} \mathcal{O}(H_s[p^n])^+$ et donc pour $k \geq 1$,

$$(B_n^+)^k = \prod_{s \in S} (\mathcal{O}(H_s[p^n])^+)^k.$$

Le complété formel de notre groupe p -divisible est donc donné par l'algèbre

$$\varprojlim_{n \geq 1, k \geq 1} \prod_{s \in S} [\mathcal{O}(H_s[p^n]) / (\mathcal{O}(H_s[p^n])^+)^k]$$

qui est donc

$$\varprojlim_{n \geq 1, k \geq 1} \prod_{s \in S} \mathcal{O}(\mathcal{G} \hat{\otimes}_{R^\circ} K(s)^\circ[p^n]) / (\mathcal{O}(\mathcal{G} \hat{\otimes}_{R^\circ} K(s)^\circ[p^n])^+)^k,$$

soit encore

$$\prod_{s \in S} \mathcal{O}(\mathcal{G} \hat{\otimes}_{R^\circ} K(s)^\circ).$$

Il s'agit de voir que ce produit s'identifie à $\mathcal{O}(\mathcal{G}) \hat{\otimes}_{R^\circ} \prod_{s \in S} K(s)^\circ$. Cela est clair en écrivant $\mathcal{O}(\mathcal{G}) \simeq R^\circ[[T]]$. \square

Lemme 2.5. *Soit $h \geq 1$ un entier.*

- (1) *Soit $(A_i)_{i \in I}$ une collection d'anneaux et pour tout $i \in I$, H_i un groupe p -divisible sur $\text{Spec}(A_i)$ de hauteur h tel que pour tout entier $n \geq 1$, $\mathcal{O}(H_i[p^n])$ soit un A_i -module libre. Alors, la collection*

$$\left(\text{Spec} \left(\prod_{i \in I} \mathcal{O}(H_i[p^n]) \right) \right)_{n \geq 1}$$

est un groupe p -divisible de hauteur h sur $\text{Spec}(\prod_{i \in I} A_i)$.

- (2) *Si de plus $(H'_i)_{i \in I}$ est une autre collection de groupes p -divisibles satisfaisant les mêmes hypothèses que $(H_i)_{i \in I}$ alors*

$$\text{Hom} \left(\varinjlim_{n \geq 1} \text{Spec} \left(\prod_{i \in I} \mathcal{O}(H_i[p^n]) \right), \varinjlim_{n \geq 1} \text{Spec} \left(\prod_{i \in I} \mathcal{O}(H'_i[p^n]) \right) \right) = \prod_{i \in I} \text{Hom}(H_i, H'_i).$$

3. LA FIBRE GÉNÉRIQUE DU CHAMP DES GROUPES DE BARSOTTI-TATE

On identifie désormais $\widehat{\text{BT}}_{1,h,\eta}^{\circ,\dagger}$. Le v -champ

$$[\text{GL}_h(\mathbb{Z}_p) \backslash \mathbb{P}_{\mathbb{Q}_p}^{h-1,\circ}]$$

associe à un \mathbb{F}_p -espace perfectoïde S un débasculé S^\sharp , un \mathbb{Q}_p -faisceau pro-étale \mathcal{F} localement isomorphe à $\underline{\mathbb{Q}_p^h}$ et un morphisme surjectif

$$\mathcal{F} \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathcal{O}_{S^\sharp} \longrightarrow \mathcal{L}$$

où \mathcal{L} est un \mathcal{O}_{S^\sharp} -module localement libre de rang un.

Si $S = \text{Spa}(A, A^+)$ est un \mathbb{Q}_p -espace affinoïde perfectoïde et H un groupe p -divisible de hauteur h sur A° on peut regarder le $\text{GL}_h(\mathbb{Z}_p)$ -torseur pro-étale associée au module de Tate de $H^D \otimes_{A^\circ} A$. Au dessus de ce toseur $T = \text{Spa}(B, B^+)$ il y a un morphisme

$$\alpha_{H^D} : \underline{\mathbb{Q}_p^h} \longrightarrow \omega_H \left[\frac{1}{p} \right] \otimes_A B.$$

Cela permet de définir un morphisme de périodes de Hodge-Tate comme dans la proposition qui suit.

Proposition 3.1. *Les périodes de Hodge-Tate induisent une équivalence*

$$\widehat{\text{BT}}_{1,h,\eta}^{\circ,\dagger} \xrightarrow{\sim} [\underline{\text{GL}}_h(\mathbb{Z}_p) \backslash \mathbb{P}_{\mathbb{Q}_p}^{h-1,\circ}].$$

Démonstration. La surjectivité essentielle se réduit au cas où $S = \text{Spa}(A, A^+)$ est strictement totalement discontinu ([22]) et on dispose d'un morphisme

$$u : \underline{\mathbb{Z}}_p^h \longrightarrow A$$

qui induit un morphisme non-nul $u_s : \underline{\mathbb{Z}}_p^h \rightarrow K(s)$ pour tout $s \in S$. D'après Scholze-Weinstein ([23]) pour tout $s \in S$, on peut trouver un groupe p -divisible H_s sur $K(s)^\circ$ ainsi qu'une base de $T_p(H_s^D)$, de période de Hodge-Tate u_s . Utilisant le lemme 2.5 on en déduit un groupe p -divisible H sur $\prod_{s \in S} K(s)^\circ$ muni d'un morphisme $(\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p)^h \rightarrow H^D$ et tel que ω_H soit identifié à $\prod_{s \in S} K(s)^\circ$. Notons

$$v : \underline{\mathbb{Z}}_p^h \longrightarrow \left(\prod_{s \in S} K(s)^\circ \right) \left[\frac{1}{\varpi} \right]$$

le morphisme associé via les périodes de Hodge-Tate sur $T = \text{Spa} \left(\left(\prod_{s \in S} K(s)^\circ \right) \left[\frac{1}{\varpi} \right], \prod_{s \in S} K(s)^\circ \right)$ qui vit au dessus de S . Il coïncide avec le changement de base de S à T de u .

La pleine fidélité du foncteur période de Hodge-Tate se déduit alors du point (2) du lemme 2.5. \square

Remarque 3.2. *On n'a considéré que le cas des groupes p -divisibles de dimension 1 mais en fait l'isomorphisme précédent se généralise en un isomorphisme*

$$\widehat{\text{BT}}_{d,h,\eta}^{\circ,\dagger} \xrightarrow{\sim} [\underline{\text{GL}}_h(\mathbb{Z}_p) \backslash \text{Gr}_{d,h,\mathbb{Q}_p}^\circ]$$

où $\text{Gr}_{d,h}$ désigne la Grassmannienne des quotients de dimension d de \mathcal{O}^h .

4. STRATIFICATION PAR LA HAUTEUR

Si H est un groupe p -divisible sur \mathcal{O}_C , $C|\mathbb{Q}_p$ complet algébriquement clos, de période de Hodge-Tate

$$\alpha_{H^D} : T_p(H^D) \longrightarrow \omega_H$$

on a

$$T_p((H^{\text{ét}})^D) = \ker(\alpha_{H^D})$$

où

$$0 \longrightarrow H^\circ \longrightarrow H \longrightarrow H^{\text{ét}} \longrightarrow 0$$

est le dévissage usuel connexe/étale de H . De cela on déduit aisément la proposition qui suit.

Proposition 4.1. *Pour $1 \leq i \leq h$, l'image réciproque par π_h de la strate de hauteur i dans $\mathbb{P}_{\mathbb{Q}_p}^{h-1,\circ}$ s'identifie à*

$$\Omega_{i-1}^\circ \times_{\frac{P_i(\mathbb{Q}_p)}{\times}} \underline{\text{GL}}_h(\mathbb{Q}_p) \subset \mathbb{P}_{\mathbb{Q}_p}^{h-1,\circ}$$

où

- (1) $\Omega_{i-1} \subset \mathbb{P}_{\mathbb{Q}_p}^{i-1}$ est l'espace de Drinfeld de dimension $i-1$ et P_i est le sous-groupe parabolique de GL_h formé des matrices $\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$ avec $A \in \text{GL}_i$ et $B \in \text{GL}_{h-i}$.
- (2) le plongement dans $\mathbb{P}_{\mathbb{Q}_p}^{h-1,\circ}$ est donné par l'application qui à un morphisme $u : \underline{\mathbb{Q}}_p^i \rightarrow \mathcal{L}$ dans Ω_{i-1}° associe $u \oplus 0 : \underline{\mathbb{Q}}_p^i \oplus \underline{\mathbb{Q}}_p^{h-i} \rightarrow \mathcal{L}$.
- (3) L'image consiste en l'ensemble localement fermé dans $|\mathbb{P}_{\mathbb{Q}_p}^{h-1}|$ donné par les $x \in |\mathbb{P}_{\mathbb{Q}_p}^{h-1}|$ tels que $\dim_{\mathbb{Q}_p} \ker(\mathbb{Q}_p^h \rightarrow K(x)) = h-i$.
- (4) En particulier la strate ouverte correspondant à $i=h$ est Ω_{h-1}° .

5. LIEN AVEC LES ESPACES DE LUBIN-TATE

Le lien entre proposition 1.4 et le point (4) de la proposition 4.1 résulte de l'isomorphisme

$$\left[\underline{GL}_h(\mathbb{Z}_p) \backslash \Omega_{h-1}^\diamond \right] \simeq \left[J_h^{ad} \backslash \mathcal{X}_{h,\eta}^\diamond \right]$$

entre les tours jumelles où J_h^{ad} est un v -groupe sur $\text{Perf}_{\mathbb{F}_p}$ forme tordue de \mathcal{O}_D^\times . On renvoie à [7, Section 5.1] pour la forme générale de l'isomorphisme entre les deux tours pour n'importe quel groupe G .

6. UNE PRÉSENTATION RIGIDE ANALYTIQUE DE $\widehat{\mathcal{M}}_{\text{GF},p,\eta}^{\leq h,\diamond,\dagger}$

Prenons la définition suivante.

Définition 6.1. On note \mathcal{P} le groupoïde au dessus de $\mathbb{P}_{\mathbb{Q}_p}^{h-1,\diamond}$ dont les objets sur $S \rightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{Q}_p}^{h-1,\diamond}$ associé à un morphisme

$$u : \underline{\mathbb{Q}}_{p,S}^h \longrightarrow \mathcal{L}$$

avec \mathcal{L} un \mathcal{O}_{S^\dagger} -module localement libre de rang 1 sont des couples (g, f) où

- $g \in \underline{GL}_h(\mathbb{Z}_p)(S)$
- f est un isomorphisme

$$f : \underline{\mathbb{Q}}_{p,S}^h / \ker(u) \xrightarrow{\sim} \underline{\mathbb{Q}}_{p,S}^h / \ker(u \circ g)$$

faisant commuter le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \underline{\mathbb{Q}}_{p,S}^h / \ker(u) & & \\ \downarrow f \sim & \searrow u & \\ \underline{\mathbb{Q}}_{p,S}^h / \ker(u \circ g) & \xrightarrow{u \circ g} & \mathcal{L} \end{array}$$

La preuve du théorème qui suit est laissée au lecteur.

Théorème 6.2. Il y a un isomorphisme

$$\mathcal{P} \xrightarrow{\sim} \mathbb{P}_{\mathbb{Q}_p}^{h-1,\diamond} \times \widehat{\mathcal{M}}_{\text{GF},p,\eta}^{\leq h,\diamond,\dagger} \mathbb{P}_{\mathbb{Q}_p}^{h-1,\diamond}$$

et on dispose donc d'une présentation pour la v -topologie

$$\mathcal{P} \rightrightarrows \mathbb{P}_{\mathbb{Q}_p}^{h-1,\diamond} \longrightarrow \widehat{\mathcal{M}}_{\text{GF},p,\eta}^{\leq h,\diamond,\dagger}$$

7. COEFFICIENTS COHÉRENTS / QUASI-COHÉRENTS

7.1. Coefficients cohérents. On doit faire attention qu'étant donné que $\text{Spf}(\mathbb{Z}_p\langle v_1, v_2, \dots \rangle)$ n'est pas un schéma formel noethérien, il n'y a à priori pas de bonne notion de faisceau cohérent sur $\widehat{\mathcal{M}}_{\text{GF},p}$. Par définition un faisceau cohérent sur $\mathcal{M}_{\text{GF},(p)}$ est un faisceau quasi-cohérent tel que pour tout morphisme $\text{Spec}(A) \rightarrow \mathcal{M}_{\text{GF},(p)}$, le A -module associé est de type fini.

Proposition 7.1. Le faisceau de \mathcal{O}_v^+ -modules sur $\mathbb{P}_{\mathbb{Q}_p}^{h-1,\diamond}$ associé à un faisceau cohérent sur $\mathcal{M}_{\text{GF},(p)}$ est un complexe parfait.

Démonstration. On utilise le lemme 7.2. Avec les notations de ce lemme, puisque X est un schéma régulier, le faisceau cohérent associé sur X est un complexe parfait. \square

Lemme 7.2. Il existe un schéma propre et lisse X sur $\text{Spec}(\mathbb{Z}_p)$ muni d'un morphisme $X \rightarrow \text{BT}_{1,h}$ tel que le morphisme associé sur les complétés p -adiques $\widehat{X} \rightarrow \widehat{\text{BT}}_{1,h}$ soit formellement étale et le morphisme induit par les périodes de Hodge-Tate

$$\widehat{X}_\eta^\diamond \longrightarrow \left[\underline{GL}_h(\mathbb{Z}_p) \backslash \mathbb{P}_{\mathbb{Q}_p}^{h-1,\diamond} \right]$$

soit un v -recouvrement.

Démonstration. Il suffit de prendre pour X un modèle entier de variété de Shimura du type de celles utilisées par Harris et Taylor ([17]) en niveau compact hyperspécial en p . \square

Remarque 7.3. *On aurait également pu utiliser [8, Theorem 1.6] avec une notion plus forte de faisceau cohérents en demandant que le tiré en arrière à $\text{Spec}(\mathbb{Z}_{(p)}[v_k]_{k \geq 1})$ soit donné par un module cohérent. C'est le cas qui nous intéresse d'après [8, Theorem 1.6].*

Remarque 7.4. *Le point de vue des variétés de Shimura de type Harris-Taylor est celui utilisé dans [6].*

Corollaire 7.5. *On dispose d'un foncteur pour tout nombre premier p et entier $h \geq 1$,*

$$\underbrace{\text{SH}_{fin}}_{\substack{\text{catégorie d'homotopie stable} \\ \text{des spectres finis}}} \longrightarrow \underbrace{\text{Parf}_{\mathcal{O}_v^{\sharp,+}} \left(\left[\underline{GL}_h(\mathbb{Z}_p) \setminus \mathbb{P}_{\mathbb{Q}_p}^{h-1,\diamond} \right] \right)}_{\substack{\text{complexes parfaits } \underline{GL}_h(\mathbb{Z}_p) \text{ équivariants} \\ \text{de } \mathcal{O}_v^{\sharp,+}\text{-modules sur } \mathbb{P}_{\mathbb{Q}_p}^{h-1,\diamond}}}$$

Après inversion de p on peut espérer en utilisant les résultats récents en théorie de Simpson p -adique ([18], [3]) trouver un foncteur

$$\text{SH}_{fin} \left[\frac{1}{p} \right] \xrightarrow{?} \left\{ \text{complexes parfaits } \underline{GL}_h(\mathbb{Z}_p) \times \text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}|\mathbb{Q}_p)\text{-équivariants de fibrés de Higgs sur } \mathbb{P}_{\mathbb{C}_p}^{h-1} \right\}.$$

Remarque 7.6. *Quant on parle d'espace projectif ici on peut prendre la version espace adique ou bien algébrique d'après GAGA. Un des aspects fascinants d'une telle construction est qu'elle produirait des fibrés de Higgs algébriques sur $\mathbb{P}_{\mathbb{C}_p}^{h-1}$ à partir de spectres finis en passant par un détour rigide analytique.*

7.2. Coefficients quasi-cohérents. Dans le cas où notre faisceau sur $\mathcal{M}_{\text{GF},(p)}$ est seulement quasi-cohérent on dispose encore d'une structure « géométrique » sur l'objet associé sur $\left[\underline{GL}_h(\mathbb{Z}_p) \setminus \mathbb{P}_{\mathbb{Q}_p}^{h-1,\diamond} \right]$. On utilise pour cela les travaux de Mann ([19]). On obtient ainsi le résultat suivant.

Corollaire 7.7. *Il y a un foncteur naturel*

$$\text{SH} \longrightarrow \text{Complexes quasi-cohérents de } \mathcal{O}^{\sharp,+,\alpha}\text{-modules à la Mann sur } \left[\underline{GL}_h(\mathbb{Z}_p) \setminus \mathbb{P}_{\mathbb{Q}_p}^{h-1,\diamond} \right].$$

Les objets définis par Mann peuvent sembler abstraits mais ils ne le sont pas grâce au théorème de descente [19, Theorem 3.1.17]. De fait, si on regarde si on regarde l'espace projectif perfectoïde

$$\mathbb{P}_{\mathbb{C}_p}^{h-1,1/p^\infty} := \varprojlim_{n \geq 1} \mathbb{P}_{\mathbb{C}_p}^{h-1}$$

où les applications de transition sont données par $[x_1 : \dots : x_h] \mapsto [x_1^p : \dots : x_h^p]$, le morphisme

$$(1) \quad \mathbb{P}_{\mathbb{C}_p}^{h-1,1/p^\infty,b} \longrightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{Q}_p}^{h-1,\diamond}$$

est un recouvrement quasi-pro-étale ([22]) qui est pro-étale sur l'ouvert

$$\bigcup_{i=1}^h \{x_i \neq 0\}$$

complémentaire de h -hyperplans (qui contient l'espace de Drinfeld Ω_{h-1}). Dès lors, si pour $1 \leq i \leq h$,

$$U_i = \{[x_1 : \dots : x_h] \mid |x_j| \leq |x_i| \neq 0 \text{ for all } 1 \leq j \leq h\} \subset \mathbb{P}_{\mathbb{C}_p}^{h-1,1/p^\infty}$$

on a

$$U_i = \text{Spa} \left(\mathbb{C}_p \left\langle \left(\frac{x_1}{x_i} \right)^{1/p^\infty}, \dots, \left(\frac{x_h}{x_i} \right)^{1/p^\infty} \right\rangle, \mathcal{O}_{\mathbb{C}_p} \left\langle \left(\frac{x_1}{x_i} \right)^{1/p^\infty}, \dots, \left(\frac{x_h}{x_i} \right)^{1/p^\infty} \right\rangle \right),$$

une boule fermée perfectoïde de dimension $h-1$ sur \mathbb{C}_p . Au dessus du recouvrement quasi-pro-étale (1) ces complexes sont donnés par des objets de

$$\varprojlim_{[n] \in \Delta} \prod_{1 \leq i_1, \dots, i_n \leq h} \underbrace{\mathcal{D}(\mathcal{O}(U_{i_1} \cap \dots \cap U_{i_n})^{+,a})}_{\substack{\infty\text{-catégorie stable « usuelle » des} \\ \mathcal{O}(U_{i_1} \cap \dots \cap U_{i_n})^{+,a}\text{-modules}}}$$

où Δ est la catégorie simpliciale.

8. LE CAS NON-SURCONVERGENT

On n'a considéré dans ce texte que la version surconvergente de nos champs i.e. des groupes p -divisibles/groupes formels sur R° et non R^+ quelconque. Cela mène aux questions suivantes.

Question :

- (1) Soit (C, C^+) extension complète de $(\mathbb{Q}_p, \mathbb{Z}_p)$ avec C algébriquement clos et \mathcal{G} un groupe formel p -divisible sur C^+ . Existe-t-il un groupe p -divisible H sur C^+ tel que $\widehat{H} \simeq \mathcal{G}$?
- (2) Peut-on étendre la classification de Scholze-Weinstein des groupes p -divisibles sur $\mathcal{O}_C = C^\circ$ ([23]) en une classification des groupes p -divisibles sur C^+ ?

L'auteur ne connaît pas la réponse à ces questions.

RÉFÉRENCES

- [1] *Théorie des topos et cohomologie étale des schémas. Tome 2.* Springer-Verlag, Berlin, 1972. Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois-Marie 1963–1964 (SGA 4), Dirigé par M. Artin, A. Grothendieck et J. L. Verdier. Avec la collaboration de N. Bourbaki, P. Deligne et B. Saint-Donat, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 270.
- [2] A. Abbes, M. Gros, and T. Tsuji. *The p -adic Simpson correspondence*, volume 193 of *Annals of Mathematics Studies*. Princeton University Press, Princeton, NJ, 2016.
- [3] J. Anschütz, B. Heuer, and A. Le Bras. Hodge-tate stacks and non-abelian p -adic hodge theory of v -perfect complexes on rigid spaces. <https://arxiv.org/abs/2302.12747>.
- [4] J. Anschütz and L. Mann. Descent for solid quasi-coherent sheaves on perfectoid spaces. <https://arxiv.org/abs/2403.01951>.
- [5] T. Barthel, T.M. Schlank, Stapleton N., and Weinstein J. On the rationalization of the $K(n)$ -local sphere. <https://arxiv.org/abs/2402.00960>.
- [6] M. Behrens and T. Lawson. Topological automorphic forms. *Mem. Amer. Math. Soc.*, 204(958) :xxiv+141, 2010.
- [7] M. Chen, L. Fargues, and X. Shen. On the structure of some p -adic period domains. *Camb. J. Math.*, 9(1) :213–267, 2021.
- [8] P. E. Conner and L. Smith. On the complex bordism of finite complexes. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, (37) :117–221, 1969.
- [9] G. Faltings. A relation between two moduli spaces studied by V. G. Drinfeld. In *Algebraic number theory and algebraic geometry*, volume 300 of *Contemp. Math.*, pages 115–129, 2002.
- [10] G. Faltings. A p -adic Simpson correspondence. *Adv. Math.*, 198(2) :847–862, 2005.
- [11] G. Faltings. A p -adic Simpson correspondence II : small representations. *Pure Appl. Math. Q.*, 7(4) :1241–1264, 2011.
- [12] L. Fargues. Lettre à Michael Hopkins. <https://webusers.imj-prg.fr/~laurent.fargues/Lettres.html/Hopkins.pdf>.
- [13] L. Fargues. Cohomologie des espaces de modules de groupes p -divisibles et correspondances de Langlands locales. Number 291, pages 1–199. 2004. Variétés de Shimura, espaces de Rapoport-Zink et correspondances de Langlands locales.
- [14] L. Fargues. L'isomorphisme entre les tours de Lubin-Tate et de Drinfeld et applications cohomologiques. In *L'isomorphisme entre les tours de Lubin-Tate et de Drinfeld*, Progress in math., 262, pages 1–325. Birkhäuser, 2008.
- [15] L. Fargues and P. Scholze. Geometrization of the local langlands correspondence. <https://arxiv.org/abs/2102.13459>.
- [16] B. Gross and M. Hopkins. Equivariant vector bundles on the Lubin-Tate moduli space. In *Topology and representation theory (Evanston, IL, 1992)*, volume 158 of *Contemp. Math.*, pages 23–88. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1994.
- [17] M. Harris, R. Taylor. *The geometry and cohomology of some simple Shimura varieties*, volume 151 of *Annals of Mathematics Studies*. Princeton University Press, Princeton, NJ, 2001.
- [18] B. Heuer. A p -adic simpson correspondence for smooth proper rigid varieties.
- [19] L. Mann. A p -adic 6-functor formalism in rigid-analytic geometry. <https://arxiv.org/abs/2206.02022>.
- [20] W. Messing. The crystals associated to Barsotti-Tate groups : with applications to abelian schemes. *Lecture Notes in Mathematics*, 264, 1972.
- [21] M. Rapoport and T. Zink. *Period spaces for p -divisible groups*. Number 141 in *Annals of Mathematics Studies*. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1996.
- [22] P. Scholze. étale cohomology of diamonds. <https://arxiv.org/abs/1709.07343>.
- [23] P. Scholze and J. Weinstein. Moduli of p -divisible groups. *Camb. J. Math.*, 1(2) :145–237, 2013.
- [24] Th. Zink. *Cartiertheorie kommutativer formaler Gruppen*. Number 68. Teubner-Texte zur Mathematik [Teubner Texts in Mathematics], 1984.

LAURENT FARGUES, CNRS, INSTITUT DE MATHÉMATIQUES DE JUSSIEU, 4 PLACE JUSSIEU 75252 PARIS

Email address: laurent.fargues@imj-prg.fr