Théorie des groupes/*Group theory*

Groupe de Grothendieck-Teichmüller et automorphismes de groupes de tresses

Leila Schneps

Résumé. Le but de cette note est d'identifier le groupe de Grothendieck-Teichmüller défini par Drinfel'd dans [D] au groupe des automorphismes d'une tour de complétés profinis de groupes de tresses.

The Grothendieck-Teichmüller group and automorphisms of braid groups

Abstract. In this note we identify the Grothendieck-Teichmüller group defined by Drinfel'd in [D] with the automorphism group of a tower of profinite completions of Artin braid groups.

Abridged English version. A *tower of groups* is a family of groups $\{G_n\}$ for n in some index set I, and for every $i,j \in I$, a (possibly empty) family $\mathcal{F}_{i,j}$ of homomorphisms $G_i \to G_j$. The *automorphism group* of a tower of groups is defined by

$$\{(\phi_n)_{n\in I} \mid \phi_n \in \mathrm{Aut}(G_n) \text{ for } n \in I \text{ and} f\phi_i = \phi_j f \text{ for all } i,j \in I \text{ and for } f \in \mathcal{F}_{i,j}\}.$$

Let us define $\mathcal{T}$ to be the following tower: as groups we take the profinite completions $\hat{B}_n$ of the Artin braid groups B_n for $n \geq 2$ (generated by $\sigma_1,\ldots,\sigma_{n-1}$), and the profinite completions $\hat{A}_n$ of the subgroups $A_n \subset B_n$ generated by $\sigma_1^2,\sigma_2,\ldots,\sigma_{n-1}$. We equip this family with the following three types of homomorphisms:

$$\begin{aligned} &f_n : \hat{B}_n \to \hat{B}_{n+1} \text{ via } f_n(\sigma_i) = \sigma_i \text{ for } 1 \leq i \leq n-1;\\ &g_n : \hat{A}_n \to \hat{B}_{n+1} \text{ via restriction of } f_n \text{ to } A_n \text{ and}\\ &h_n : \hat{A}_n \to \hat{B}_{n+1} \text{ via } h_n(\sigma_1^2) = \sigma_2\sigma_1^2\sigma_2 \text{ and } h_n(\sigma_i) = \sigma_{i+1} \text{ for } 2 \leq i \leq n-1. \end{aligned} \tag{1}$$

The automorphism group of this tower is thus given by

$$\mathrm{Aut}(\mathcal{T}) = \{(\phi_n,\phi_n')_{n\geq 1} \mid \phi_n \in \mathrm{Aut}(\hat{B}_n), \phi_n' \in \mathrm{Aut}(\hat{A}_n) \text{ and } f_n\phi_n = \phi_{n+1}f_n, \tag{2}$$

$$g_n\phi_n' = \phi_{n+1}g_n \text{ and } h_n\phi_n' = \phi_{n+1}h_n \text{ for all } n \geq 1\}.$$

Let $\rho_n : \hat{B}_n \to S_n$ be the natural homomorphism from $\hat{B}_n$ into the group of permutations on n letters. Set $\mathrm{Out}(\mathcal{T}) := \mathrm{Aut}(\mathcal{T})/\mathrm{Int}(\mathcal{T})$ where $\mathrm{Int}(\mathcal{T})$ is the subgroup of elements of $\mathrm{Aut}(\mathcal{T})$ which act on all the $\hat{B}_n$ and $\hat{A}_n$ via conjugation by a fixed $\hat{\mathbf{Z}}$-power of σ_1 (where $\hat{\mathbf{Z}}$ is the profinite completion of $\mathbf{Z}$). For every positive integer N, let $\mathcal{T}_N$ be the tower consisting of the groups $\hat{A}_n$ and $\hat{B}_n$ for $1 \leq n \leq N$, and define $\mathrm{Out}(\mathcal{T}_N)$ to be the group defined exactly like $\mathrm{Out}(\mathcal{T})$ except that its elements are (classes mod conjugation by a power of σ_1 of) finite collections $(\phi_n)_{1\leq n\leq N}$ respecting the maps f_n, g_n and h_n for $1 \leq n \leq N-1$.

Let us recall the definition of Drinfel'd's group $\widehat{GT}$. Let $\widehat{GT}_0$ be the set of couples $(\lambda, f) \in \hat{\mathbf{Z}}^* \times [\hat{F}_2,\hat{F}_2]$ where $\hat{F}_2$ is the profinite completion of the free group on two generators X and Y, satisfying the two relations $f(X,Y)f(Y,X) = 1$ and $f(Z,X)Z^{(\lambda-1)/2}f(Y,Z)Y^{(\lambda-1)/2}f(X,Y)X^{(\lambda-1)/2} = 1$ where $Z := (XY)^{-1}$. This set can be made into a group by the introduction of a suitable multiplication. Let K_4 be the pure Artin braid group on four strings, and x_{ij} for $1 \leq i < j \leq 4$ be its classical generators, also considered as generators of the profinite completion $\hat{K}_4$. Let $\widehat{GT}$ be the subgroup of $\widehat{GT}_0$ consisting of couples satisfying the following relation in $\hat{K}_4$: $f(x_{12},x_{23}x_{24})f(x_{13}x_{23},x_{34}) = f(x_{23},x_{34})f(x_{12}x_{13},x_{24}x_{34})f(x_{12},x_{23})$. Our main theorem can be stated as follows:

Theorem: (i) $\mathrm{Out}(\mathcal{T}_3) \simeq \widehat{GT}_0$

(ii) $\mathrm{Out}(\mathcal{T}_4) \simeq \widehat{GT}$

(iii) $\mathrm{Out}(\mathcal{T}) \simeq \widehat{GT}$.

The theorem is proved using only elementary group theoretic calculations in braid groups.

---

§1. La tour des groupes de tresses et le groupe $\widehat{GT}$.

Une *tour de groupes* est la donnée d'une famille de groupes $\{G_n\}_{n\in I}$ pour un ensemble d'indices I, et pour chaque paire (i,j) dans I^2, d'une famille (éventuellement vide) $\mathcal{F}_{i,j}$ d'homomorphismes $G_i \to G_j$. Le *groupe d'automorphismes* d'une tour de groupes est défini par

$$\{(\phi_n)_{n\in I} \mid \phi_n \in \mathrm{Aut}(G_n) \text{ pour tout } n \in I \text{ et} f\phi_i = \phi_j f \text{ pour tout } (i,j) \in I^2 \text{ et } f \in \mathcal{F}_{i,j}\}.$$

Nous définissons maintenant la tour $\mathcal{T}$ qui nous servira, avant de rappeler la définition du groupe $\widehat{GT}$ de Drinfel'd et d'énoncer le théorème principal.

Pour $n \geq 2$, soit B_n le groupe des tresses d'Artin engendré par $\sigma_1, \ldots, \sigma_{n-1}$ tels que

$$\sigma_i\sigma_j = \sigma_j\sigma_i \text{ pour } |i-j| \geq 2 \text{ et } \sigma_i\sigma_{i+1}\sigma_i = \sigma_{i+1}\sigma_i\sigma_{i+1} \text{ pour } 1 \leq i \leq n-2. \tag{3}$$

Pour $n \geq 2$, notons A_n le sous-groupe de B_n engendré par $\sigma_1^2, \sigma_2, \ldots, \sigma_{n-1}$. Il existe une surjection canonique $\rho_n : B_n \to S_n$, où S_n est le groupe des permutations sur n lettres, obtenue en quotientant B_n par les relations $\sigma_i^2 = 1$; notons K_n le noyau de ρ_n. Rappelons que si on définit x_{ij} pour $1 \leq i < j \leq n$ par $x_{ij} = \sigma_{j-1}\cdots\sigma_2\sigma_1^2\sigma_2^{-1}\cdots\sigma_{j-1}^{-1}$, les x_{ij} forment un système de générateurs de K_n. On posera par convention $B_1 = K_1 = A_1 = \{1\}$. Soient $\hat{B}_n$, $\hat{K}_n$ et $\hat{A}_n$ les complétés profinis de B_n, K_n et A_n respectivement; il est connu que les présentations profinies sont identiques aux présentations discrètes de ces groupes (voir par exemple [M]). L'application ρ_n s'étend en un homomorphisme $\rho_n : \hat{B}_n \to S_n$ et $\hat{K}_n = \mathrm{Ker}\,\rho_n$.

Soit $\mathcal{T}$ la tour de groupes de tresses définie de la manière suivante: comme famille de groupes nous prenons les $\hat{B}_n$ et les $\hat{A}_n$ pour $n \geq 1$, et nous munissons cette famille des trois types d'homomorphismes de l'équation (1).

Le groupe des automorphismes de $\mathcal{T}$ est défini dans l'équation (2). Remarquons que la condition $g_n\phi'_n = \phi_{n+1}g_n$ implique que ϕ_{n+1} préserve le sous-groupe $g_n(\hat{A}_n) \subset \hat{B}_{n+1}$, et donc que g_n^{-1} est bien défini sur le sous-groupe $\phi_{n+1}g_n(\hat{A}_n)$. Les ϕ'_n sont entièrement déterminés par les ϕ_n via la formule $\phi'_n := g_n^{-1}\phi_{n+1}g_n$ pour $n \geq 1$. Nous écrirons donc les éléments de $\mathrm{Aut}(\mathcal{T})$ sous la forme $(\phi_n)_{n\geq 1}$, les ϕ'_n étant sous-entendus.

Notons $\mathrm{Int}(\mathcal{T})$ le sous-groupe des éléments de $\mathrm{Aut}(\mathcal{T})$ qui agissent sur tous les $\hat{B}_n$ et les $\hat{A}_n$ par conjugaison par une $\hat{\mathbf{Z}}$-puissance fixée de σ_1. Posons $\mathrm{Out}(\mathcal{T}) = \mathrm{Aut}(\mathcal{T})/\mathrm{Int}(\mathcal{T})$. Il m'a été indiqué par P. Lochak (voir [LS]) que pour tout $\Phi \in \mathrm{Out}(\mathcal{T})$, il existe $\phi = (\phi_n)_{n\geq 1} \in \mathrm{Aut}(\mathcal{T})$ dans la classe Φ tel que $\rho_n\phi_n = \rho_n$ soit vérifiée pour chaque $n \geq 1$; on dit que ϕ (et les ϕ_n) *fixe les permutations* des $\hat{B}_n$.

Passons maintenant à la définition de $\widehat{GT}$ donnée dans [D]. Soit F_2 le groupe libre à deux générateurs et $\hat{F}_2$ son complété profini. Si X, Y sont les générateurs de $\hat{F}_2$, nous écrivons $f(X,Y)$ pour un élément de $\hat{F}_2$ bien que $f(X,Y)$ ne soit généralement pas un mot en X et Y. Cette notation permet de donner un sens à l'élément $f(x,y)$ où x et y sont des éléments arbitraires d'un groupe profini.

Soit $\widehat{GT}_0$ l'ensemble des couples $(\lambda, f) \in \hat{\mathbf{Z}}^* \times [\hat{F}_2, \hat{F}_2]$, où $[\hat{F}_2, \hat{F}_2]$ désigne le sous-groupe dérivé (au sens topologique) de $\hat{F}_2$, tels que (λ, f) vérifie les deux relations suivantes:

(I) $f(X,Y)f(Y,X) = 1$

(II) $f(Z,X)Z^{(\lambda-1)/2}f(Y,Z)Y^{(\lambda-1)/2}f(X,Y)X^{(\lambda-1)/2} = 1$ où $Z := (XY)^{-1}$.

Si f vérifie (I) et (II), il les vérifie aussi quand X, Y et Z sont remplacés par n'importe quels éléments x, y et z d'un groupe profini, tels que $xyz = 1$.

L'ensemble $\widehat{GT}_0$ forme un groupe lorsqu'il est muni de la multiplication donnée par:

$$\big(\lambda_1, f_1(X,Y)\big)\big(\lambda_2, f_2(X,Y)\big) = \big(\lambda_1\lambda_2, f_2\big(f_1(X,Y)X^{\lambda_1}f_1(X,Y)^{-1}, Y^{\lambda_1}\big)f_1(X,Y)\big).$$

Soit $\widehat{GT}$ le sous-groupe de $\widehat{GT}_0$ des couples (λ, f) vérifiant la relation suivante, qui a lieu dans le groupe profini $\hat{K}_4$:

(III) $f(x_{12}, x_{23}x_{24})f(x_{13}x_{23}, x_{34}) = f(x_{23}, x_{34})f(x_{12}x_{13}, x_{24}x_{34})f(x_{12}, x_{23})$.

On peut maintenant énoncer le théorème principal de cette note:

Théorème: $\mathrm{Out}(\mathcal{T}) \simeq \widehat{GT}$.

Ce théorème sera démontré au §3. La démonstration utilise des résultats sur l'action des éléments de $\widehat{GT}$ sur les petits groupes de tresses provenant de [LS], qui seront esquissés dans le §2.

§2. $\widehat{GT}$ et les automorphismes des petits groupes de tresses.

Pour $N \in \mathbb{N}$, soit $\mathcal{T}_N$ la tour dont les groupes sont les $\hat{A}_n$ et les $\hat{B}_n$ pour $1 \leq n \leq N$, munis des homomorphismes f_n, g_n et h_n pour $1 \leq n \leq N-1$. On a donc

$$\mathrm{Aut}(\mathcal{T}_N) := \{(\phi_n)_{1\leq n\leq N} \mid f_n\phi_n = \phi_{n+1}f_n, g_n\phi'_n = \phi_{n+1}g_n \text{ et } h_n\phi'_n = \phi_{n+1}h_n \text{ pour } 1 \leq n \leq N-1\}.$$

Notons $\mathrm{Int}(\mathcal{T}_N)$ le sous-groupe des éléments de $\mathrm{Aut}(\mathcal{T}_N)$ qui agissent sur $\hat{B}_n$ par automorphisme intérieur par une $\hat{\mathbf{Z}}$-puissance de σ_1. Posons $\mathrm{Out}(\mathcal{T}_N) := \mathrm{Aut}(\mathcal{T}_N)/\mathrm{Int}(\mathcal{T}_N)$. Comme pour $\mathrm{Aut}(\mathcal{T})$, dans chaque classe de $\mathrm{Out}(\mathcal{T}_N)$, il y a un élément $(\phi_n)_{1\leq n\leq N}$ tel que les ϕ_n fixent les permutations des $\hat{B}_n$.

Proposition 1: $\widehat{GT}_0 \simeq \mathrm{Out}(\mathcal{T}_3)$.

Démonstration: On commence par définir un homomorphisme de $\widehat{GT}_0$ dans $\mathrm{Aut}(\mathcal{T}_3)$. Soit donc $(\lambda, f) \in \widehat{GT}_0$; on lui associe l'automorphisme ϕ_3 de $\hat{B}_3$ défini par $\phi_3(\sigma_1) = \sigma_1^\lambda$ et $\phi_3(\sigma_2) = f(\sigma_2^2, \sigma_1^2)\sigma_2^\lambda f(\sigma_1^2, \sigma_2^2)$. Posons $c := (\sigma_1\sigma_2)^3$; cet élément engendre le centre de $\hat{B}_3$. Posons $x = \sigma_1^2$, $y = \sigma_2^2$, $z' = \sigma_1\sigma_2^2\sigma_1^{-1}$ et $z = z'c^{-1}$: on a $xyz = 1$ dans $\hat{B}_3$. Le groupe $\langle x, y\rangle$ est un sous-groupe de $\hat{B}_3$ isomorphe à $\hat{F}_2$, donc un élément $f \in \hat{F}_2$ est entièrement déterminé par la donnée de $f(x,y) \in \hat{B}_3$. Dans le reste de cette note, nous identifions $\langle x, y\rangle$ avec $\hat{F}_2$, en identifiant x et y avec X et Y.

Posons $\phi_1 = \phi'_1 = \mathrm{id}$. Définissons ϕ_2 sur $\hat{B}_2$ par $\phi_2(\sigma_1) = \sigma_1^\lambda$ et ϕ'_2 sur $\hat{A}_2$ par $\phi'_2(\sigma_1^2) = \sigma_1^{2\lambda}$. Définissons ϕ'_3 sur $\hat{A}_3$ par $\phi'_3(\sigma_1^2) = \phi_3(\sigma_1)^2$ et $\phi'_3(\sigma_2) = \phi_3(\sigma_2)$. Il est immédiat que $\rho_n\phi_n = \rho_n$ pour $n \in \{1, 2, 3\}$ car ϕ_3 fixe les permutations des générateurs de $\hat{B}_3$, et que $f_n\phi_n = \phi_{n+1}f_n$ et $g_n\phi'_n = \phi_{n+1}g_n$ pour $n = 1$ et $n = 2$. La relation $h_n\phi'_n = \phi_{n+1}h_n$ est évidente pour $n = 1$: pour $n = 2$, c'est une conséquence immédiate d'un calcul élémentaire (voir [LS]) qui montre que $\phi_3(\sigma_2\sigma_1^2\sigma_2) = (\sigma_2\sigma_1^2\sigma_1)^\lambda$. On voit donc que $(\phi_n)_{1\leq n\leq 3} \in \mathrm{Aut}(\mathcal{T}_3)$. On constate en se servant de la formule de multiplication dans $\widehat{GT}_0$, que l'application de $\widehat{GT}_0$ dans $\mathrm{Aut}(\mathcal{T}_3)$ ainsi définie est un homomorphisme de groupes que l'on note $\tilde{\eta}$. Il induit donc un homomorphisme de $\widehat{GT}_0$ dans $\mathrm{Out}(\mathcal{T}_3)$ que l'on note η. Esquissons la démonstration du fait que η soit un isomorphisme. Pour tout groupe G et tout $g \in G$, nous écrivons $\mathrm{Int}(g) \in \mathrm{Aut}(G)$ pour l'automorphisme intérieur défini par la conjugaison par l'élément $g \in G$.

Injectivité de η: Si $(\lambda, f) \in \widehat{GT}_0$ est tel que $\eta(\lambda, f) = 1$ dans $\mathrm{Out}(\mathcal{T}_3)$, alors il existe $\delta \in \hat{\mathbf{Z}}$ tel que $\tilde{\eta}(\lambda, f) = \mathrm{Int}(\sigma_1^\delta)$; ceci montre que $\lambda = 1$ et que $f(x,y) \in \mathrm{Centr}(\sigma_2) \subset \hat{B}_3$. Comme $f(x,y)$ est dans le sous-groupe dérivé de $\hat{F}_2$, on a forcément $f = 1$.

Surjectivité de η. Soit $\Phi \in \mathrm{Out}(\mathcal{T}_3)$ et soit $(\phi_n)_{1\le n\le 3} \in \mathrm{Aut}(\mathcal{T}_3)$ dans la classe de Φ tel que ϕ_3 fixe les permutations. L'action de ϕ_2 détermine un $\lambda \in \hat{\mathbf{Z}}^*$. De plus, puisque ϕ_3 fixe les permutations, il existe $\alpha \in \hat{\mathbf{Z}}$ et $g \in \hat{F}_2$ tels que $\phi_3(\sigma_1\sigma_2\sigma_1) = \sigma_1\sigma_2\sigma_1 c^\alpha g(x,y)$. En appliquant ϕ_3 à la relation $(\sigma_1\sigma_2\sigma_1)^{-1}\sigma_1(\sigma_1\sigma_2\sigma_1) = \sigma_2$ dans $\hat{B}_3$, on obtient $\phi_3(\sigma_2) = g(x,y)^{-1}\sigma_2^\lambda g(x,y)$. Soient γ, δ les uniques éléments de $\hat{\mathbf{Z}}$ tels $y^\gamma g(x,y)x^\delta \in [\hat{F}_2,\hat{F}_2]$ (où $\hat{F}_2$ est identifié à $\langle x,y\rangle$). On associe ainsi un couple $(\lambda,f) \in \hat{\mathbf{Z}}^* \times [\hat{F}_2,\hat{F}_2]$ à ϕ_3. Montrons que ce couple est dans $\widehat{GT}_0$, c'est-à-dire qu'il vérifie les relations (I) et (II). Posons $T = \mathrm{Int}(\sigma_1\sigma_2\sigma_1)$ et $U = \mathrm{Int}(\sigma_1\sigma_2)$ dans $\mathrm{Aut}(\hat{B}_3)$.

Calculons $\mathrm{Int}(f(y,x)^{-1})T\phi_3T^{-1} \in \mathrm{Aut}(\hat{B}_3)$. Sous cet automorphisme on a $\sigma_1 \mapsto \sigma_1^\lambda$ et $\sigma_2 \mapsto f(y,x)\sigma_2^\lambda f(y,x)^{-1}$. Comme $f(y,x) \in [\hat{F}_2,\hat{F}_2]$, cet automorphisme est égal à $\tilde{\eta}\big(\lambda, f(y,x)^{-1}\big)$; il est donc en particulier dans $\mathrm{Aut}(\mathcal{T}_3)$. Calculons de même $\mathrm{Int}\big(f(z,x)\big)U^2\phi_3U^{-2}$ sur σ_1 et σ_2: on obtient $\sigma_1 \mapsto \sigma_1^\lambda$ et $\sigma_2 \mapsto f(z,x)z^m f(z,y)^{-1}\sigma_2^\lambda f(z,y)z^{-m}f(x,z)$, donc $\mathrm{Int}\big(f(z,x)\big)U^2\phi_3U^{-2}$ est équivalent dans $\mathrm{Out}(\mathcal{T}_3)$ à $\tilde{\eta}\big(\lambda, y^{-m}f(z,y)z^{-m}f(x,z)x^{-m}\big)$ où $z = (xy)^{-1} \in \hat{F}_2$.

Un argument facile montre que si (λ,f) et $(\mu,g) \in \widehat{GT}_0$ et leurs images sous η sont égales dans $\mathrm{Out}(\hat{B}_3)$, alors $\eta(\lambda,f) = \eta(\mu,g)$ dans $\mathrm{Out}(\mathcal{T}_3)$. Ceci montre que $f(x,y) = f(y,x)^{-1}$ et $f(x,y) = y^{-m}f(z,y)z^{-m}f(x,z)x^{-m}$, c'est-à-dire que (λ,f) vérifie les relations (I) et (II). Donc $(\lambda,f) \in \widehat{GT}_0$, et $\Phi = \eta(\lambda,f)$.

Proposition 2: $\mathrm{Out}(\mathcal{T}_4) \simeq \widehat{GT}$.

Démonstration: Soit $M(0,5)$ le groupe modulaire en genre 0 avec 5 points marqués; ce groupe est engendré par des éléments σ_1, σ_2, σ_3 et σ_4 vérifiant les relations suivantes: $\sigma_i\sigma_{i+1}\sigma_i = \sigma_{i+1}\sigma_i\sigma_{i+1}$ pour $1 \le i \le 3$, $\sigma_i\sigma_j = \sigma_j\sigma_i$ pour $|i-j| \ge 2$, $\sigma_4\sigma_3\sigma_2\sigma_1^2\sigma_2\sigma_3\sigma_4 = 1$ et $(\sigma_1\sigma_2\sigma_3\sigma_4)^5 = 1$. Soit $V = \mathrm{Int}(\sigma_4\sigma_3\sigma_2\sigma_1)^{-3}$ dans $\mathrm{Aut}\big(\widehat{M(0,5)}\big)$; on a $V^5 = 1$. Posons $\sigma_5 := \sigma_4\sigma_3\sigma_2\sigma_1\sigma_2^{-1}\sigma_3^{-1}\sigma_4^{-1}$ et, pour $1 \le i < j \le 5$, posons $x_{ij} := \sigma_{j-1}\cdots\sigma_{i+1}\sigma_i^2\sigma_{i+1}^{-1}\cdots\sigma_{j-1}^{-1}$. La démonstration se fait en deux étapes: d'abord on construit une application de $\widehat{GT}$ dans $\mathrm{Aut}(\widehat{M(0,5)})$, et ensuite on en déduit des résultats sur $\hat{B}_4$ modulo son centre et sur $\hat{B}_4$.

Lemme 3: *Soit $(\lambda,f) \in \widehat{GT}$ et associons-lui une application ϕ envoyant σ_1, σ_2, σ_3, σ_4 et σ_5 dans $\widehat{M(0,5)}$ comme suit:*

$$\phi(\sigma_1) = \sigma_1^\lambda,\quad \phi(\sigma_2) = f(x_{23},x_{12})\sigma_2^\lambda f(x_{12},x_{23}),\ \phi(\sigma_3) = f(x_{34},x_{45})\sigma_3^\lambda f(x_{45},x_{34}),$$

$$\phi(\sigma_4) = \sigma_4^\lambda,\ \phi(\sigma_5) = f(x_{23},x_{12})f(x_{51},x_{45})\sigma_5^\lambda f(x_{45},x_{51})f(x_{12},x_{23}).$$

Alors ϕ s'étend par multiplicativité en un automorphisme de $\widehat{M(0,5)}$ et l'application $(\lambda,f) \mapsto \phi$ définit un homomorphisme injectif de groupes que l'on note $\tilde{\imath} : \widehat{GT} \to \mathrm{Aut}(\widehat{M(0,5)})$.

La démonstration découle essentiellement du résultat suivant, qui se démontre par un calcul direct:

Lemme 4: *Soit ϕ l'application du lemme 3. Alors sur les σ_i, on a $\phi = \mathrm{Int}\big(f(x_{12},x_{23})\big)V^{-1}\phi V$.*

Le sous-groupe de $\widehat{M(0,5)}$ engendré par σ_1, σ_2 et σ_3 est isomorphe, non pas à $\hat{B}_4$, mais à $\hat{B}_4' := \hat{B}_4$ modulo son centre (car on a la relation $(\sigma_1\sigma_2\sigma_3)^4 = 1$ dans $\widehat{M(0,5)}$). Il est immédiat que si ϕ est l'automorphisme de $\widehat{M(0,5)}$ associé à un couple $(\lambda,f) \in \widehat{GT}$ comme dans le lemme 3, alors ϕ induit un automorphisme de $\hat{B}_4'$ puisque ϕ préserve ce sous-groupe de $\widehat{M(0,5)}$. L'application $\tilde{\imath} : \widehat{GT} \to \mathrm{Aut}(\widehat{M(0,5)})$ du lemme 3 induit donc une application $\tilde{\imath} : \widehat{GT} \to \mathrm{Aut}(\hat{B}_4')$, elle aussi injective. C'est encore un lemme élémentaire de vérifier que l'image de $\tilde{\imath}(\widehat{GT})$ dans $\mathrm{Aut}(\hat{B}_4')$ est isomorphe à $\mathrm{Out}(\mathcal{T}_4)$ et qu'on obtient un homomorphisme injectif $\iota : \widehat{GT} \to \mathrm{Out}(\mathcal{T}_4)$. On montre que ι est surjectif en appliquant encore une fois le lemme 4, selon un argument de Nakamura ([N]) qui fonctionne de la façon suivante. Soit $(\phi_n)_{1\le n\le 4}$ dans $\mathrm{Aut}(\mathcal{T}_4)$. Nous savons par la proposition 1 que le couple (λ,f) déterminé par ϕ_3 est dans $\widehat{GT}_0$. Pour montrer que f vérifie la relation (III) on remarque que le résultat du lemme 4 permet de calculer $V^i\phi V^{-i}$ pour

$1 \leq i \leq 5$; en particulier $V^5 \phi V^{-5} = \phi = \mathcal{F}\phi$, où $\mathcal{F} = f(x_{34}, x_{45}) f(x_{51}, x_{12}) f(x_{23}, x_{34}) f(x_{45}, x_{51}) f(x_{12}, x_{23})$, puisque $V^5 = 1$. Or, ϕ est un automorphisme de $\widehat{M(0,5)}$, et puisque $\phi = \mathcal{F}\phi$, $\mathcal{F}$ doit donc être dans le centre de ce groupe, qui est trivial. On obtient donc $\mathcal{F} = 1$, ce qui équivaut à la relation (III) grâce aux formules $x_{15} = x_{23}x_{24}x_{34}$ et $x_{45} = x_{12}x_{13}x_{23}$ valables dans $\widehat{M(0,5)}$ (voir [N], appendice).

§3. Démonstration du théorème.

On commence par définir un homomorphisme injectif de $\widehat{GT}$ dans $\mathrm{Aut}(\mathcal{T})$, en associant à chaque $(\lambda, f) \in \widehat{GT}$ et pour tout $n \geq 1$, l'application $\phi_n = \phi_{n,(\lambda,f)}$ donné comme suit:

$$\phi_n(\sigma_1) = \sigma_1^\lambda, \quad \phi_n(\sigma_i) = f(\sigma_i^2, y_i)\sigma_i^\lambda f(y_i, \sigma_i^2) \text{ for } 2 \leq i \leq n-1, \tag{4}$$

où $y_i = \sigma_{i-1} \cdots \sigma_1^2 \cdots \sigma_{i-1}$. Pour montrer que $(\phi_n)_{n\geq 1}$ définit un élément de $\mathrm{Aut}(\mathcal{T})$, il faut montrer que pour tout $n \geq 1$, ϕ_n détermine un élément de $\mathrm{Aut}(\hat{B}_n)$, et que ces ϕ_n vérifient les relations de compatibilité de la définition de $\mathrm{Aut}(\mathcal{T})$, à savoir: pour tout $n \geq 1$, en posant $\phi'_n := g_n^{-1}\phi_{n+1}g_n$ sur $\hat{A}_n$, on doit vérifier que $f_n\phi_n = \phi_{n+1}f_n$, $g_n\phi'_n = \phi_{n+1}g_n$ et $h_n\phi'_n = \phi_{n+1}h_n$. Pour voir que ϕ_n s'étend par multiplicativité à un automorphisme de $\hat{B}_n$, il faut montrer que ϕ_n respecte les relations (3) de la définition de B_n données ci-dessus. En ce qui concerne les premières, il suffit de constater que les éléments $y_i \in \hat{B}_n$ commutent entre eux (cela se comprend aisément en termes géométriques), ce qui montre que $\phi_n(\sigma_i)\phi_n(\sigma_j) = \phi_n(\sigma_j)\phi_n(\sigma_i)$ puisque les facteurs de $\phi_n(\sigma_j)$ ne comportent que des y_j et des σ_j et commutent donc avec ceux de $\phi_n(\sigma_i)$ qui, eux, ne comportent que des y_i et des σ_i. Pour les autres et les relations de compatibilité, nous allons procéder par récurrence sur n. Tout d'abord, on sait par la proposition 2 que $(\phi_n)_{1\leq n\leq 4} \in \mathrm{Aut}(\mathcal{T}_4)$. Supposons que $(\phi_i)_{1\leq i\leq n} \in \mathrm{Aut}(\mathcal{T}_n)$ et considérons ϕ_{n+1}. Par définition de ϕ'_n, on sait que $g_n\phi'_n = \phi_{n+1}g_n$ sur $\hat{A}_n$. Il est aussi immédiat que $f_n\phi_n = \phi_{n+1}f_n$ sur $\hat{B}_n$, ce qui implique que ϕ_{n+1} restreint à $f_n(\hat{B}_n) \subset \hat{B}_{n+1}$ est un automorphisme. Pour montrer que $\phi_{n+1} \in \mathrm{Aut}(\hat{B}_{n+1})$ il suffit donc de vérifier que ϕ_{n+1} respecte la relation $\sigma_{n-1}\sigma_n\sigma_{n-1} = \sigma_n\sigma_{n-1}\sigma_n$ dans $\hat{B}_{n+1}$. Posons $\psi_n := g_nh_n^{-1}$; alors $\psi_n : h_n(\hat{A}_n) \to g_n(\hat{A}_n)$ est l'isomorphisme naturel défini par $\psi_n(\sigma_2\sigma_1^2\sigma_2) = \sigma_1^2$ et $\psi_n(\sigma_i) = \sigma_{i-1}$ pour $3 \leq i \leq n$. Sur les générateurs $\sigma_2\sigma_1^2\sigma_2, \sigma_3, \ldots, \sigma_n$ de $h_n(\hat{A}_n) \subset \hat{B}_{n+1}$, on constate que ϕ_{n+1} agit comme $\psi_n^{-1}\phi_{n+1}\psi_n = \psi_n^{-1}\phi_{n+1}g_nh_n^{-1} = \psi_n^{-1}g_n\phi'_nh_n^{-1}$ par hypothèse de récurrence. Mais cette dernière expression est une composition d'homomorphismes de groupes et respecte donc la relation $\sigma_{n-1}\sigma_n\sigma_{n-1} = \sigma_n\sigma_{n-1}\sigma_n$, ce qui montre que $\phi_{n+1} \in \mathrm{Aut}(\hat{B}_{n+1})$. On voit que $\rho_{n+1}\phi_{n+1} = \rho_{n+1}$ puisque c'est vrai sur chaque générateur de $\hat{B}_{n+1}$. Il reste à vérifier que $h_n\phi'_n = \phi_{n+1}h_n$. Or on sait que $g_n\phi'_n = \phi_{n+1}g_n$, donc $\psi_nh_n\phi'_n = \phi_{n+1}\psi_nh_n$, donc $h_n\phi'_n = \psi_n^{-1}\phi_{n+1}\psi_nh_n$; comme on a vu que $\psi_n^{-1}\phi_{n+1}\psi_n = \phi_{n+1}$ sur $h_n(\hat{A}_n)$, on obtient la relation voulue.

Ceci démontre que nous avons bien défini une application de $\widehat{GT}$ dans $\mathrm{Aut}(\mathcal{T})$; par définition de la multiplication sur $\widehat{GT}$ on vérifie que c'est bien un homomorphisme de groupes, et par la proposition 2 on sait qu'il est injectif, car le couple (λ, f) est déterminé par la donnée de $(\phi_n)_{n\geq 1}$ et même par la donnée de ϕ_4. Il induit un homomorphisme injectif de $\widehat{GT}$ dans $\mathrm{Out}(\mathcal{T})$. Montrons que cet homomorphisme est surjectif. Soit $(\psi_n)_{n\geq 1} \in \mathrm{Aut}(\mathcal{T})$. Soit $(\lambda, f) \in \widehat{GT}$ le couple déterminé par ψ_4. Soit $(\phi_n)_{1\leq n\leq 4} := \tilde{\imath}(\lambda, f)$; ϕ_4 ne diffère donc de ψ_4 que par conjugaison par une puissance de σ_1. Montrons que pour $n > 4$, ϕ_n doit vérifier les equations (4). On procède par récurrence: supposons que ce soit vrai pour ϕ_n. Il faut déterminer comment ϕ_{n+1} agit sur σ_n. On calcule donc $\phi_{n+1}(\sigma_n)$:

$$\phi_{n+1}h_n(\sigma_{n-1}) = h_n\phi'_n(\sigma_{n-1}) = h_n\Big(f(y_{n-1}, \sigma_{n-1}^2)^{-1}\sigma_{n-1}^\lambda f(y_{n-1}, \sigma_{n-1}^2)\Big) = f(y_n, \sigma_n^2)^{-1}\sigma_n^\lambda f(y_n, \sigma_n^2)$$

car pour $2 \leq i \leq n-1$, on a $h_n(y_i) = y_{i+1}$. Ceci montre que pour tout $n \geq 1$, ϕ_n est donné par (4).

Je tiens à remercier Pierre Lochak d'avoir accepté que je cite quelques résultats provenant de notre travail commun [LS]. Je remercie également Jean-Marc Couveignes pour ses suggestions utiles et le Technion à Haïfa pour son hospitalité pendant la préparation de cette note.

Références

[D] V.G. Drinfel'd, On quasitriangular quasi-Hopf algebras and a group closely connected with $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$, Leningrad Math. J. Vol. 2 (1991), No. 4, 829-860.

[LS] P. Lochak et L. Schneps, The Grothendieck-Teichmüller group and automorphisms of braid groups, prépublication.

[M] B.H. Matzat, Zöpfe und Galoissche Gruppen, J. Crelle **420** (1991), 99-159.

[N] N. Nakamura, Galois rigidity of pure sphere braid groups and profinite calculus, à paraître dans J. Fac. Sci. Univ. of Tokyo, Sect. IA.

UA 741 du CNRS, Laboratoire de Mathématiques, Faculté des Sciences de Besançon, 25030 Besançon Cedex