TABLE DES MATIÈRES.

CHAPITRE 0.

INTRODUCTION TOPOLOGIQUE.

Pour ce Cours, il est bon de connaitre la Topologie Générale, de Bourbaki, particulièrement les CHAPITRES I, II, IV et IX, le Chapitre VI, §§ 1 et 2 (propriétés topologiques de R^n), le Chapitre VIII (nombres complexes) et, en particulier, le Chapitre III (groupes topologiques). Les groupes topologiques non abéliens ne sont pas utilisés. Du livre d'Algèbre, nous ferons usage des Chapitres I et II; noter que nous supposerons toujours que le corps de base est le corps réel R ou le corps complexe C.

Nous rappelons ici quelques points de Topologie Générale qui nous seront particulièrement utiles, et en particulier nous reprendrons une partie du Chap. X, de la Topologie Générale de Bourbaki.

La plupart des démonstrations, se réduisant à des vérifications, sont laissées au lecteur.

1. Borne supérieure d'une famille de topologies.

Considérons sur un ensemble E une famille non vide $(\tau_i)_{i \in I}$ de topologies. On sait qu'il existe une <u>topologie borne supérieure</u> des topologies τ_i, i.e., la moins fine des topologies sur E qui sont plus fines que chaque τ_i. En designant par ϑ_i l'ensemble des ouverts pour la topologie τ_i $(i \in I)$, la topologie borne supérieure est "engendrée" par la réunion des ϑ_i.

Soient E un ensemble quelconque et $(E_i)_{i \in I}$ une famille non vide d'espaces topologiques et, pour chaque $i \in I$,

f_i une application de E dans E_i $(i \in I)$. Il existe une topologie, appelée <u>topologie limite projective</u> des E_i par les applications f_i, qui est la moins fine des topologies pour lesquelles toutes les applications f_i sont continues: c'est la borne supérieure des topologies images réciproques des topologies des E_i par les f_i.

<u>Condition de séparation</u>. Pour que E, muni de la topologie limite projective d'espaces E_i par des applications f_i soit séparé, il faut, et il suffit si les E_i sont séparés, que pour $x, y \in E$, $x \neq y$, existe un f_i tel que $f_i(x) \neq f_i(y)$.

<u>Transitivité de la limite projective</u>. Si la topologie de E est la limite projective des E_i par les applications f_i et si la topologie de chaque E_i est aussi la limite projective d'espaces E_{ik} par les applications $\varphi_{i,k}$ de E_i dans des E_{ik} $(k \in A_i)$, alors la topologie de E est la limite projective des espaces E_{ik} par les applications $\varphi_{i,k} \circ f_i$ $(i \in I$ et $k \in A_i)$.

En particulier, si F est un sous ensemble de E, la topologie induite sur F par la topologie de E est la limite projective des E_i par les restrictions des f_i à F. Autre cas particulier: la topologie limite projective des E_i par les f_i est l'image réciproque de la topologie de l'espace produit $\prod_{i \in I} E_i$ par l'application $x \rightarrow f(x) = (f_i(x))_{i \in I}$ de E dans $\prod_{i \in I} E_i$; si quels que soient $x, y \in E$, $x \neq y$, il existe un $i \in I$ tel que $f_i(x) \neq f_i(y)$, alors f est un isomorphisme de E sur un sous-espace du produit $\prod_{i \in I} E_i$. (Noter, en effet, que par définition, la topologie de $\prod_{i \in I} E_i$ est la limite projective des E_i par les projections naturelles $E \longrightarrow E_i$).

Proposition 1. Soit E un espace topologique muni de la topologie limite projective d'espaces E_i par les applications f_i.

1) Soit φ une application d'un espace topologique F dans E. Pour que φ soit continue, il faut et il suffit que pour tout i l'application $f_i \circ \varphi$ de F dans E_i soit continue.

2) Pour q'un filtre Φ sur E converge vers $x \in E$, il faut et il suffit que pour tout i, la base de filtre $f_i(\Phi)$ sur E_i converge vers $f_i(x)$.

Si E est un ensemble quelconque, $(E_i)_{i \in I}$ une famille non vide d'espaces topologiques, et si les f_i sont des applications des E_i dans E, on peut considérer sur E la plus fine des topologies sur E rendant continues toutes les applications f_i. Les ensembles ouverts (resp. fermés) dans cette topologie sont les parties U de E tels que $\overset{-1}{f_i}(U)$ soit ouvert (resp. fermé) dans E_i pour tout $i \in I$.

On en conclut qu'une application f de E dans un espace topologique F est continue si et seulement si les applications $f o f_i$ sont toutes continues.

La topologie borne supérieure d'une famille de topologies rentre dans ce schéma.

Cas particulier. On se donne une famille $(A_i)_{i \in I}$ de parties de E, munie chacune d'une topologie τ_i. Alors, il existe sur E une topologie τ, la plus fine de celles qu'induisent sur les A_i des topologies moins fines que τ_i. Les parties ouvertes (resp. fermées) pour τ sont celles dont l'intersection avec chaque A_i est ouverte (resp. fermée) pour τ_i. Une application f de E dans un espace topologique est continue si et seulement si sa restriction à tout A_i est continue pour τ_i. Si on peut trouver sur E une topologie τ' qu'induise sur chaque A_i exactement τ_i, alors $\tau \geqslant \tau_i$, donc τ induit τ_i sur chaque A_i. Le cas le plus important de la situation décrite ici sera vu au Chap.IV, §2, N°3, th.2.

2. Borne supérieure d'une famille des structures uniformes.

Considérons sur un ensemble E une famille non vide $(\mathcal{U}_i)_{i \in I}$ de estructures uniformes. On sait qu'il existe une structure uniforme borne supérieure des structures uniformes $\mathcal{U}_i$, ie., la moins fine des structures uniformes sur E qui sont plus fines qui chaque $\mathcal{U}_i$. Le filtre des entourages de cette structure uniforme est le filtre engendré par la réunion des filtres d'entourages des $\mathcal{U}_i$. L'ensemble des intersections d'un nombre fini d'entourages W_i dans $\mathcal{U}_i$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ est un système fondamental d'entourages de $\mathcal{U}$. La topologie associée à $\mathcal{U}$ est la borne supérieure des topologies associées aux $\mathcal{U}_i$.

Si E est un ensemble quelconque, $(E_i)_{i \in I}$ une fa mille non vide d'espaces uniformes et, pour chaque $i \in I$, f_i une application de E dans E_i, il existe sur E une structure uniforme, appelée <u>structure uniforme limite projective</u> des E_i par les applications f_i, qui est la moins fine de celles rendant uniformément continues toutes les applications f_i; c'est la borne supérieure des structures uniformes images réciproques des structures des E_i par les f_i. La topologie déduite de cette structure uniforme est la moins fine sur E rendant continues les applications f_i. Inversement, la structure uniforme $\mathcal{U}$, borne supérieure d'une famille $(\mathcal{U}_i)_{i \in I}$ de structures uniformes peut être regardée comme la moins fine de celles rendant uniformément continues les applications identiques $E \longrightarrow E_i$, où E_i désigne E muni de $\mathcal{U}_i$.

<u>Condition de séparation</u>. Pour que E, muni de la structure uniforme limite projective d'espaces E_i par des applications f_i soit séparé, il faut et il suffit que, pour $x, y \in E$, $x \neq y$, existe un indice i et un entourage V_i de E_i, tels que $(f_i(x), f_i(y)) \notin V_i$. Si de plus les E_i sont espaces uniformes <u>séparés</u>, il faut et il suffit que, pour $x, y \in E$, $x \neq y$, il existe un indice i, tel que $f_i(x) \neq f_i(y)$.

<u>Transitivité de la limite projective</u>. Si la structure uniforme de E est la limite projective des E_i par les applications f_i et si la structure uniforme de chaque E_i est aussi la limite projective d'espaces uniformes E_{ik} par les applications $\varphi_{i,k}$ de E_i dans des E_{ik} $(k \in A_i)$, alors la structure uniforme de E est la limite projective des espaces E_{ik} par les applications $\varphi_{i,k} \circ f_i$ $(i \in I$ et $k \in A_i)$.

En particulier, si F est un sous-ensemble de E, la structure uniforme induite sur F par la structure uniforme de E est la limite projective des E_i par les restrictions des f_i à F. Autre cas particulier: la structure uniforme limite projective des espaces uniformes E_i par les f_i est l'image réciproque de la structure uniforme de l'espace uniforme produit $\prod_{i \in I} E_i$, par l'application $x \to f(x) = (f_i(x))$ de E dans $\prod_{i \in I} E_i$; si quels que soient $x, y \in E$, $x \neq y$, il existe un $i \in I$ tel que $f_i(x) \neq f_i(y)$, alors f est un isomorphisme de l'espace uniforme E sur un sous-espace du produit $\prod_{i \in I} E_i$.

Proposition 2. Soit E *un espace uniforme dont la structure uniforme est la moins fine de celles rendant uniformément continues des applications* f_i *de* E *dans des espaces uniformes* E_i $(i \in I)$.

1) *Pour qu'un filtre* Φ *sur* E *soit un filtre de Cauchy, il faut et il suffit que pour tout* $i \in I$, $f_i(\Phi)$ *soit une base de filtre de Cauchy sur* E_i.

2) *Soit* φ *une application d'un espace uniforme* F *dans* E. *Pour que* φ *soit* uniformément continue *il faut et il suffit que, pour tout* $i \in I$, *l'application* $f_i \circ \varphi$ *de* F *dans* E_i, *soit uniformément continue.*

3. *Espaces précompacts.*

Nous dirons qu'un espace uniforme E est *précompact* si le complété de l'espace *séparé* associé à E est compact.

(Contrairement à Bourbaki, un espace précompact peut ne pas être séparé). Une partie A de E est dite <u>précompacte</u> si le sous-espace uniforme A est précompact. Alors, il en est de même de son adhérence dans E.

<u>Proposition 3</u>. 1) <u>Pour qu'un espace uniforme</u> E <u>soit précompact il faut et il suffit que, pour tout entourage</u> V <u>de</u> E, <u>il existe un recouvrement fini de</u> E <u>par des ensembles petits d'ordre</u> V.

2) <u>Soit</u> f <u>une application uniformément continue d'un espace précompact</u> E <u>dans un espace uniforme</u> F, <u>alors</u> $f(E)$ <u>est une partie précompacte de</u> F.

3) <u>Soit</u> E <u>un espace uniforme dont la structure uniforme est la moins fine de celles rendant uniformément continues les applications</u> f_i <u>de</u> E <u>dans les espaces uniformes</u> E_i. <u>Pour que</u> E <u>soit précompact, il faut et il suffit que, pour tout</u> $i \in I$, <u>les</u> $f_i(E)$ <u>soient des parties précompactes de</u> E_i.

Sous les conditions de (3), on conclut de l'énoncé que pour qu'une <u>partie</u> A de E soit précompacte, il faut et il suffit que, pour tout $i \in I$, $f_i(A)$ soit une partie précompacte de E_i.

<u>Exercice</u>. Pour qu'un espace E soit précompact, il faut et il suffit que tout ultrafiltre sur E soit un filtre de Cauchy.

4. <u>La $\mathfrak{S}$-convergence</u>.

Soit E un ensemble quelconque et F un espace uniforme. Désignons par $\mathcal{F}(E,F)$ l'espace de toutes les applications de E dans F. Soit A une partie quelconque de E, U un entourage de F, soit $W(A,U)$ l'ensemble des couples (u,v) d'applications de E dans F, tels que $(u(x),v(x)) \in U$ pour tout $x \in A$. A étant fixé et U parcourant le filtre d' entourages de F (ou un système fondamental d'entourages de F) les ensembles $W(A,U)$ forment un système fondamental d'entourages d'une structure uniforme sur $\mathcal{F}(E,F)$, appelé <u>structure uniforme de la convergence uniforme sur</u> A, ou <u>structure uniforme de la A-convergence</u>. Un filtre Φ qui converge vers u_o pour la topologie déduite de cette structure uniforme est dit <u>uniformément convergent vers</u> u_o <u>dans</u> A.

Soit $\mathfrak{S}$ un ensemble quelconque de parties de E. La borne supérieure des structures uniformes de la A-convergence $(A \in \mathfrak{S})$ est appelée <u>structure uniforme de la</u> $\mathfrak{S}$-<u>convergence</u>. On indique par $\mathcal{F}_{\mathfrak{S}}(E,F)$ l'ensemble $\mathcal{F}(E,F)$ muni de cette structure uniforme. On a un système fondamental d'entourages, en prenant, pour chaque entourage U du filtre des entourages de F (ou d'un système fondamental d'entourages de F) et pour chaque suite <u>finie</u> $(A_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ d'éléments de $\mathfrak{S}$, l'entourage

$$W(\bigcup_{i=1}^{n} A_i, U) = \bigcap_{i=1}^{n} W(A_i, U).$$

Il est immédiat que la structure uniforme de la $\mathfrak{S}$-convergence est la moins fine des structures uniformes sur $\mathcal{F}(E,F)$ rendant uniformément continues toutes les applications

ρ_A $(A \in \mathfrak{S})$ de $\mathfrak{F}(E,F)$ dans les $\mathfrak{F}(A,F)$ munis de la A-convergence, où $\rho_A(u)$ $(u \in \mathfrak{F}(E,F))$ est la restriction de u à A.

La structure uniforme de la $\mathfrak{S}$-convergence ne change pas si on remplace $\mathfrak{S}$ par l'ensemble $\mathfrak{S}'$ de toutes les réunions finies d'ensembles de $\mathfrak{S}$ et aussi par l'ensemble $\mathfrak{S}''$ de toutes les parties d'ensembles $\in \mathfrak{S}'$. Si $\mathfrak{S} = \mathfrak{S}'$ on a un système fondamental d'entourages, en prenant les ensembles $W(A,U)$ pour tout $A \in \mathfrak{S}$ et pour tout U du filtre des entourages de F (ou d'un système fondamental d'entourages de F).

Exemples. 1) Prenons pour $\mathfrak{S}$ l'ensemble des parties de E réduites à un point ou, ce qui revient au même, l'ensemble des parties finies de E. La structure uniforme de $\mathfrak{S}$-convergence qu'on obtient sur $\mathfrak{F}(E,F)$ est appelée structure uniforme de la convergence simple; on désigne par $\mathfrak{F}_s(E,F)$ l'ensemble $\mathfrak{F}(E,F)$ muni de cette structure uniforme. Si, pour tout $x \in E$, on désigne par $\tilde{x}$ l'application de $\mathfrak{F}(E,F)$ dans F que à chaque $u \in \mathfrak{F}(E,F)$ fait correspondre $u(x)$ $(\tilde{x}(u) = u(x))$, la structure uniforme de la convergence simple est la moins fine des structures uniformes rendant uniformément continues les $\tilde{x}$, en d'autres termes $\mathfrak{F}(E,F)$ est l'espace produit F^E.

Si un filtre Φ sur $\mathfrak{F}(E,F)$ converge vers u_0 pour la topologie associée, on dit que Φ converge simplement vers u_0. Si $E_0 \subset E$, on appelera structure uniforme de la convergence simple dans E_0, la structure uniforme de $\mathfrak{S}$-

convergence sur $\mathfrak{F}(E,F)$, où $\mathfrak{S}$ est l'ensemble des parties finies de E_0.

2) Si $\mathfrak{S} = \{E\}$ la structure uniforme qu'on obtient est appelée <u>structure de la convergence uniforme</u>; on désigne par $\mathfrak{F}_u(E,F)$ l'ensemble $\mathfrak{F}(E,F)$ muni de cette structure. Si un filtre Φ converge vers u_0 pour la topologie correspondante, on dit que Φ <u>converge uniformément vers</u> u_0 <u>dans</u> E.

3) Supposons que E est un espace topologique et soit $\mathfrak{S}$, l'ensemble de toutes les parties <u>compactes</u> de E. La structure uniforme correspondante est appelée <u>structure uniforme de la convergence compacte</u>; on désigne par $\mathfrak{F}_c(E,F)$ l'ensemble $\mathfrak{F}(E,F)$ muni de cette structure uniforme. On dit d'un filtre Φ qui converge vers u_0 pour la topologie correspondante, qu'il <u>converge uniformément vers</u> u_0 <u>dans tout compact</u>.

E étant un espace topologique, la structure uniforme de la convergence simple est moins fine que la structure uniforme de la convergence compacte et celle-ci moins fine que la structure uniforme de la convergence uniforme.

<u>Proposition 4. Soit</u> $\mathfrak{S}$ <u>un ensemble de parties de</u> E, F <u>un espace uniforme</u>.

1) <u>Pour qu'un filtre</u> Φ <u>sur</u> $\mathfrak{F}_{\mathfrak{S}}(E,F)$ <u>converge vers</u> u_0, <u>il faut et il suffit que, pour tout</u> $A \in \mathfrak{S}$, Φ <u>converge vers</u> u_0 <u>uniformément dans</u> A.

2) <u>Pour que</u> Φ <u>soit un filtre de Cauchy, il faut il suffit que pour tout</u> $A \in \mathfrak{S}$, Φ <u>soit un filtre de</u>

<u>Cauchy pour la A-convergence.</u>

3) <u>Pour que</u> $M \subset \mathfrak{F}_{\mathfrak{S}}(E,F)$ <u>soit précompact, il faut et il suffit que pour tout</u> $A \in \mathfrak{S}$, M <u>soit précompact pour la A-convergence.</u>

4) <u>Pour qu'une application</u> f <u>d'un espace topologique (resp. uniforme)</u> H <u>dans</u> $\mathfrak{F}_{\mathfrak{S}}(E,F)$ <u>soit continue (resp. uniformément continue), il faut et il suffit que, pour tout</u> $A \in \mathfrak{S}$, f <u>soit continue (resp. uniformément continue) pour la A-convergence.</u>

Résulte immédiatement de la définition de la $\mathfrak{S}$-convergence comme borne supérieure et des prop. 1, 2, 3.

<u>Remarque.</u> Si on considère la $\mathfrak{S}$-convergence comme la moins fine des structures uniformes sur $\mathfrak{F}(E,F)$ rendant uniformément continues toutes les applications de restriction ρ_A $(A \in \mathfrak{S})$ de $\mathfrak{F}(E,F)$ dans les $\mathfrak{F}_u(A,F)$, alors, tenant compte des prop. 1, 2 et 3, on obtient des variantes pour les critères de prop. 4. Ainsi, au lieu de 1): un filtre Φ sur $\mathfrak{F}_{\mathfrak{S}}(E,F)$ converge vers u_0 si et seulement si, pour tout $A \in \mathfrak{S}$, la base de filtre $\Phi_A = \rho_A(\Phi)$ formée par les restrictions des $u \in \Phi$ à A) converge uniformément vers $\rho_A(u_0)$ (restriction de u_0 à A). On laisse au lecteur le soin de donner les variantes analogues pour les critères 2, 3 et 4 de prop. 4.

<u>Proposition 5. Pour que l'espace uniforme</u> $\mathfrak{F}_{\mathfrak{S}}(E,F)$ <u>soit séparé, il faut et il suffit que</u> F <u>soit séparé et que</u> $E = \bigcup_{A \in \mathfrak{S}} A$.

Pour voir que F est séparé quand $\mathcal{F}_{\mathfrak{S}}(E,F)$ l'est, on note que F est isomorphe au sous-espace de $\mathcal{F}_{\mathfrak{S}}$ formé des applications constantes de E dans F.

<u>Théorème 1. Pour que $\mathcal{F}_{\mathfrak{S}}(E,F)$ soit complet, il faut et il suffit que F soit complet.</u>

La necessité se démonstre en considerant F comme le sous-espace des applications constantes de E dans F. La suffisance résulte de la

<u>Proposition 6. Soit Φ un filtre sur $\mathcal{F}_{\mathfrak{S}}(E,F)$. Pour que Φ converge vers u_0 il faut et il suffit que Φ soit un filtre de Cauchy pour la $\mathfrak{S}$-convergence et que Φ converge vers u_0 pour la structure uniforme de la convergence simple dans $E_0 = \bigcup_{A \in \mathfrak{S}} A$</u> (c'est-à-dire que pour tout $x \in E_0$, $\Phi(x)$ converge vers $u_0(x)$ dans F).

Vérification immédiate. On en conclut:

<u>Corollaire. Soient $\mathfrak{S}_1$ et $\mathfrak{S}_2$ deux ensembles de parties de E tels que $\mathfrak{S}_1 \subset \mathfrak{S}_2$ et $\bigcup_{A \in \mathfrak{S}_1} A = \bigcup_{B \in \mathfrak{S}_2} B$ et soit H une partie de $\mathcal{F}(E,F)$.</u>

1) <u>Si H est complet pour la $\mathfrak{S}_1$-convergence, alors H est complet pour la $\mathfrak{S}_2$-convergence.</u>

2) <u>Si H est précompact pour la $\mathfrak{S}_2$-convergence, alors, sur H, la structure uniforme de la $\mathfrak{S}_1$-convergence et de la $\mathfrak{S}_2$-convergence coincident.</u>

1) résulte immédiatement de la prop.6. Pour prouver 2), on supposera $\bigcup_{B \in \mathfrak{S}_2} B = E$ et F séparé pour simplifier. On peut supposer F complet (sinon on passe au complété)

fermé dans $\mathcal{F}_{\mathfrak{S}_2}(E,F)$. Comme cet espace est séparé, H est même compact, donc sa structure uniforme identique à toute structure uniforme séparée moins fine, en particulier la structure de la $\mathfrak{S}_1$-convergence. En fait, il n'était pas nécessaire que $E = \bigcup_{B\in\mathfrak{S}_2} B$ et que F soit séparé, comme on verrait en utilisant l'exercice 1, qui suit.

<u>Proposition 6'</u>. <u>L'ensemble des</u> $u \in \mathcal{F}_{\mathfrak{S}}(E,F)$ <u>qui transforment les</u> $A \in \mathfrak{S}$ <u>en des parties</u> précompactes <u>de</u> F, <u>est fermé</u>.

C'est une conséquence facile du critère de précompacité usuel (prop. 3, 1)).

<u>Corollaire</u>. <u>Si</u> F <u>est séparé et complet</u>, <u>l'espace des applications de</u> E <u>dans</u> F <u>qui transforment les</u> $A\in\mathfrak{S}$ <u>en des parties relativement compactes, est complet pour la</u> $\mathfrak{S}$-<u>convergence</u>.

$\mathfrak{S}\times\mathfrak{T}$-<u>convergence sur un produit</u>.

<u>Proposition 6"</u>. <u>Soient</u> E, F <u>deux ensembles</u>, $\mathfrak{S}$ <u>un ensemble de parties de</u> E, $\mathfrak{T}$ <u>un ensemble de parties de</u> F, $\mathfrak{S}\times\mathfrak{T}$ <u>l'ensemble des parties de</u> $E\times F$ <u>de la forme</u> $A\times B$ $(A\in\mathfrak{S}, B\in\mathfrak{T})$, G <u>un espace uniforme</u>. <u>Alors, les espaces uniformes</u>: $\mathcal{F}_{\mathfrak{S}\times\mathfrak{T}}(E\times F,G)$ et $\mathcal{F}_{\mathfrak{S}}(E, \mathcal{F}_{\mathfrak{T}}(F,G))$ <u>sont isomorphes</u> (par l'application canonique du premier sur le second, définie en théorie des ensembles).

Résulte aussitôt des definitions des entourages respectifs.

<u>Exercices</u>. 1) L'espace séparé associé à $\mathfrak{F}_{\mathfrak{S}}(E,F)$ s'identifie à $\mathfrak{F}_{\mathfrak{S}}(E_0,F_0)$ où $E_0 = \bigcup_{A\in\mathfrak{S}} A$ et F_0 est l'espace séparé associé à F.

2) Si $\mathfrak{S}_1$ et $\mathfrak{S}_2$ sont deux ensembles de parties de E tels que sur $\mathfrak{F}(E,F)$ la structure uniforme de la $\mathfrak{S}_1$-convergence coincide avec la structure uniforme de la $\mathfrak{S}_2$-convergence, alors $\mathfrak{S}_1'' = \mathfrak{S}_2''$ (avec les notations du texte).

5. <u>La $\mathfrak{S}$-convergence dans les espaces d'applications continues</u>.

En général, on doit considérer divers sous-ensembles importants de l'espace de <u>toutes</u> les applications de E dans F. Soit E un <u>espace topologique</u> et F un espace uniforme, nous désignons par $\mathcal{C}(E,F)$ le sous-ensemble de $\mathfrak{F}(E,F)$ formé des applications <u>continues</u> de E dans F. Si on munit $\mathfrak{F}(E,F)$ de la $\mathfrak{S}$-convergence, on désigne par $\mathcal{C}_{\mathfrak{S}}(E,F)$ le sous-ensemble $\mathcal{C}(E,F)$ muni de la structure uniforme induite. On désignera par $\mathcal{C}_s(E,F)$, $\mathcal{C}_u(E,F)$ et $\mathcal{C}_c(E,F)$, l'ensemble $\mathcal{C}(E,F)$ muni de la structure de la convergence simple, resp. de la convergence uniforme, resp. de la convergence compacte.

A cause de la continuité des $u\in\mathcal{C}(E,F)$, on voit facilement que, si on remplace $\mathfrak{S}$ par l'ensemble des adhérences des $A\in\mathfrak{S}$, alors $\mathcal{C}_{\mathfrak{S}}(E,F)$ ne change pas.

<u>Proposition 7</u>. <u>Pour que $\mathcal{C}_{\mathfrak{S}}(E,F)$ soit séparé il faut que F le soit, et c'est suffisant, si $E_0 = \bigcup_{A\in\mathfrak{S}} A$</u>

est dense dans E.

Théorème 2. L'ensemble $\mathcal{C}(E,F)$ *est fermé dans* $\mathcal{F}_u(E,F)$.

En d'autres termes, toute limite uniforme d'applications continues est continue.

Corollaire 1. Pour que $\mathcal{C}_u(E,F)$ *soit complet il faut et il suffit que* F *le soit.*

Pour la suffisance, appliquer les th.1 et 2; pour la nécessité, procéder comme pour le th.1.

Corollaire 2. L'espace $\mathcal{C}_{\mathfrak{S}}(E,F)$ *est fermé dans* $\mathcal{F}_{\mathfrak{S}}(E,F)$ *chaque fois que toute application de* E *dans* F, *dont les restrictions aux* $A \in \mathfrak{S}$ *sont continues, est déjà continue. Dans ce cas,* $\mathcal{C}_{\mathfrak{S}}(E,F)$ *est complet si et seulement si* F *l'est.*

L'hypothèse du corollaire est satisfait par exemple quand E est localement compact ou métrisable, et $\mathfrak{S}$ l'ensemble des parties compactes de E.

Notons, enfin, la

Proposition 8. L'application $(u,x) \longrightarrow u(x)$ *de* $\mathcal{C}_u(E,F) \times E$ *dans* F *est continue.*

6. *Ensembles équicontinus et uniformément équicontinus.*

Soit E un espace topologique, F un espace uniforme, et H une partie de $\mathcal{F}(E,F)$. On dit que H est *équicontinu au point* x_0 de E, si pour tout entourage U de F, il existe un voisinage V de x_0 dans E, tel que $(u(x),u(x_0)) \in U$ pour tout $x \in V$ et pour tout $u \in H$. H

est dit <u>équicontinu dans</u> E, si H est équicontinu en chaque point de E. Évidemment, H est équicontinu au point x_0 (resp. équicontinu dans E), alors $u \in H$ est continue au point x_0 (resp. continue dans E). Dans le cas où E est un espace uniforme, on dit que H est <u>uniformément équicontinu</u>, si pour tout entourage U dans F, il existe un entourage V dans E tel que $(u(x),u(y)) \in U$, pour tout $(x,y) \in V$ et tout $u \in H$. Alors, tout $u \in H$ est uniformément ~~équi~~continue. De plus, l'uniforme équicontinuité implique évidemment l'équicontinuité.

<u>Exemples</u>. 1) Tout ensemble fini de fonctions continues (resp. uniformément continues) est équicontinu (resp. uniformément équicontinu); toute réunion finie d'ensembles équicontinus (resp. uniformément équicontinus) est équicontinue (resp. uniformément équicontinue).

2) Si E et F sont des espaces métriques, l'ensemble de toutes les isométries de E dans F est uniformément équicontinu.

Si H est une partie non vide quelconque de $\mathfrak{F}(E,F)$, on considère pour tout x de E, l'application $u \longrightarrow u(x)$ de H dans F qu'on désigne par $\tilde{x}$; c'est un élément de $\mathfrak{F}(H,F)$. Si on munit $H \subset \mathfrak{F}(E,F)$ de la topologie de la convergence simple, ou d'une topologie plus fine, l'application $u \longrightarrow u(x)$ est continue (Nº4, exemple 1), donc $\tilde{x}$ appartient à $\mathcal{C}(H,F)$.

<u>Proposition 9</u>. 1) <u>Soit</u> E <u>un espace topologique et</u> $H \subset \mathfrak{F}(E,F)$. <u>Pour que</u> H <u>soit équicontinu au point</u> x_0

de E (resp. équicontinu dans E), il faut et il suffit que l'application $x \longrightarrow \tilde{x}$ de E dans $\mathcal{E}_u(H,F)$ soit continue au point x_o (resp. continue dans E).

2) Soit E un espace uniforme et $H \subset \mathfrak{F}(E,F)$. Pour que H soit uniformément équicontinu, il faut et il suffit que l'application $x \longrightarrow \tilde{x}$ de E dans $\mathcal{E}_u(H,F)$ soit uniformément équicontinue.

3) Plus généralement, soit f une application, continue en chaque variable, d'un produit $H \times E$ de deux espaces topologiques dans un espace uniforme F. Si on désigne par $f_{u,.}$ l'application $x \longrightarrow f(u,x)$ de E dans F et par $f_{.,x}$ l'application $u \longrightarrow f(u,x)$ de H dans F, alors les deux affirmations suivantes sont équivalentes:

a) L'ensemble des $f_{u,.}$ $(u \in H)$ est une partie équicontinue (resp. uniformément continue) de $\mathcal{E}(E,F)$.

b) L'application $x \longrightarrow f_{.,x}$ de E dans $\mathcal{E}_u(H,F)$ est continue (resp. uniformément continue).

La démonstration résulte aussitôt des définitions.

Corollaire 1. Soit H un ensemble d'applications d'un espace compact E dans un espace uniforme F. Il revient au même que H soit équicontinu ou uniformément équicontinu.

Cela résulte du fait qu'une application continue d'un espace compact E dans un espace uniforme $\mathcal{E}_u(H,F)$ est uniformément continue.

Corollaire 2. Soit M un espace topologique (resp. uniforme), $\mathfrak{S}$ un ensemble de parties de E. Pour qu'une application f de M dans $\mathcal{F}_{\mathfrak{S}}(E,F)$ soit continue (resp. uniformément continue), il faut et il suffit que, pour tout $A \in \mathfrak{S}$, l'ensemble des applications $t \longrightarrow f(t)(x)$, où $x \in A$, soit un ensemble équicontinu (resp. uniformément équicontinu) d'applications de M dans F.

Théorème 3. Soient E et F deux espaces topologiques, G un espace uniforme et f une application de $E \times F$ dans G.

1) Si f est continue, alors:

a) pour tout $y \in F$, $f_{\cdot,y}$ est continue;

b) l'application $y \longrightarrow f_{\cdot,y}$ de F dans $\mathcal{C}_c(E,G)$ est continue.

b) est équivalente à

b') l'ensemble des $f_{x,\cdot}$ où x parcourt un compact de E est une partie équicontinue de $\mathcal{C}(F,G)$.

2) Si E est localement compact, les conditions a) et b) sont aussi suffisantes pour que f soit continue.

L'équivalence de b) et b') est un cas particulier de la prop.9, N°3. Si f est continue, il en est évidemment de même des fonctions $f_{\cdot,y}$. Prouvons b): Soit $y \in F$, K un compact dans E et U un entourage symétrique dans G. Pour tout $x \in K$, il existe un voisinage ouvert V_x de x, et un voisinage W_x de y, tel que, pour tout $x' \in V_x$ et $y' \in W_x$ on ait $(f(x',y'),f(x,y)) \in U$. Comme K est compact, il exis te un nombre fini de points $x_i \in K$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ tels que les V_{x_i} forment un recouvrement de K. En indiquant par W l'intersection des voisinages W_{x_i} de y, on a: pour tout $x' \in K$, il existe un $x_i \in K$ tel que $x' \in V_{x_i}$, donc $(f(x',y'),f(x_i,y)) \in U$, pour tout $y' \in W$, et, en particulier, $(f(x',y),f(x_i,y)) \in U$ d'où, on conclut que $(f(x',y'),f(x',y)) \in U$, quel que soit $x' \in K$, ce qui achève la preuve de 1). Pour démontrer 2) on peut se ramener au cas E compact et considérer f comme composée de l'application $(x,u) \longrightarrow u(x)$ de $E \times \mathcal{C}_u(E,G)$ dans G, qui est continue (prop.7) et de l'application $(x,y) \longrightarrow (x,f_{\cdot,y})$ de $E \times F$ dans $E \times \mathcal{C}_u(E,G)$ qui est aussi continue par hypothèse.

<u>Théorème 4</u>. <u>Soit</u> E <u>un espace topologique</u> (resp. <u>uniforme</u>) <u>et</u> H <u>une partie équicontinue</u> (resp. <u>uniformément équicontinue</u>) <u>de</u> $\mathcal{C}(E,F)$. <u>Sur</u> H, <u>la structure uniforme de la convergence simple dans</u> E, <u>de la convergence simple dans une partie dense</u> E_0 <u>de</u> E <u>et de la convergence compacte</u> (resp. <u>précompacte</u>), <u>sont identiques</u>.

Il suffit démontrer que sur H, convergence simple dans E_0 et convergence compacte (resp. précompacte) sont identiques. Supposons E espace topologique; il faut montrer que si U est un entourage dans F et K une partie compacte dans E, il existe une partie finie A de E_0 et un entourage U' dans F, tels que $W(A,U') \subset W(K,U)$. On prend pour U' un entourage symétrique tel que $U' \subset U$. À cause de l'équicontinuité de H, il existe pour tout $x_o \in K$, un voisinage ouvert V de x_o dans E tel que, pour tout $x \in V$ et $u \in H$, $(u(x),u(x_o)) \in U'$. Soit $(V_i)_{1 \leq i \leq n}$ une suite <u>finie</u> de tels voisinages recouvrant K, prenons dans chaque V_i un élément $x_i \in E_o$ et considérons l'ensembles A réunion des x_i $(1 \leq i \leq n)$. Soient $u,v \in H$ avec $(u,v) \in W(A,U')$, i.e. $(u(x_i),v(x_i)) \in U'$ quel que soit $x_i \in A$, on conclut aussitôt que $(u(x),v(x)) \in U' \subset U$ quel que soit $x \in K$, ce qui démontre la première partie. Dans le cas où E est un espace uniforme et H uniformément équicontinu, soit K une partie <u>précompacte</u> de E et U un entourage quelconque dans E, on prend U' comme ci-dessus. Il existe un entourage V dans E, tel que, pour tout $x,y \in K$, $(x,y) \in V$ et $u \in H$ on ait $(u(x),u(y)) \in U'$. On utilise, maintenant, la prop. 3, 1 et on construit A comme ci-dessus.

<u>Théorème 5. Si</u> H <u>est une partie équicontinue</u> (resp. <u>uniformément équicontinue</u>) <u>de</u> $\mathfrak{F}(E,F)$, <u>alors son adhérence dans</u> $\mathfrak{F}_s(E,F)$ <u>est équicontinue</u> (resp. <u>uniformément équicontinue</u>).

Vérification immédiate. Compte tenu du th.4, on obtient:

<u>Corollaire. Cette adhérence est alors identique à l'adhérence pour la convergence compacte</u> (resp. <u>précompacte</u>).

Proposition 10. Toute partie précompacte H de de $\mathcal{C}_u(E,F)$ est équicontinue; si de plus E est un espace uniforme et si les éléments de H sont des fonctions uniformément continues, alors H est uniformément équicontinu. Sur H les structures uniformes de la convergence simple dans une partie dense E_o de E et la structure de la convergence uniforme sont identiques.

Il faut prouver que l'application $x \longrightarrow \tilde{x}$ de E dans $\mathcal{C}_u(H,F)$ est continue (resp. uniformément continue). Or l'image $\tilde{E}$ de E dans $\mathcal{C}_u(H,F)$ est *uniformément équicontinue* (prop.8, corol.2), donc, H étant précompact, sur $\tilde{E}$ la structure uniforme de la convergence uniforme est identique à la structure uniforme de la convergence simple (th.4). Il suffit donc de vérifier que $x \longrightarrow \tilde{x}$ est continue (resp. uniformément continue) pour la convergence simple dans $\mathcal{C}(H,F)$, ce qui signifie précisement que les fonctions $x \longrightarrow \tilde{x}(u) = u(x)$ sont continues (resp. uniformément continues) sur E. Enfin, dans la dernière assertion de la proposition 10, on peut remplacer E_o par E en vertu du th.4 et alors il suffit d'appliquer la prop.6, cor. 2).

7. *Ensembles relativement compacts et précompacts de fonctions continues.*

Théorème 6 (Ascoli). Soit E un espace compact (respect. *précompact*) *et F un espace uniforme, H un ensemble d'applications continues* (resp. *uniformément continues*) *de E dans F.*

1) *Pour que* H *soit précompact dans* $\mathcal{C}_u(E,F)$ *il faut et il suffit que* H *soit équicontinu* (resp. *uniformément équicontinu*) *et que* $H(x)$ *soit précompact pour tout* $x \in E$.

2) *Supposons* F *séparé; pour que* H *soit relativement compact dans* $\mathcal{C}_u(E,F)$, *il faut et il suffit que* H *soit équicontinu* (resp. *uniformément équicontinu*) *et que* $H(x)$ *soit relativement compact pour tout* $x \in E$.

Dans le premier énoncé, la nécessité résulte de la proposition précédente et de l'uniforme continuité des $\tilde{x}$; la suffisance résulte du fait que sur H la structure uniforme et de la convergence simple seront identiques, et de la prop. 3, 3º. Dans le deuxième énoncé, on peut supposer H fermé. La nécessité se voit comme plus haut. Pour la suffisance, on peut supposer F complet (sinon on complète et H sera aussi fermé dans $\mathcal{C}_u(E,\hat{F})$), donc $\mathcal{C}_u(E,F)$ est complet, alors H sera précompact à cause de 1, donc compact puisque complet.

Corollaire 1. Soit E *un espace localement compact ou métrisable,* F *un espace uniforme séparé, et* H *une partie de* $\mathcal{C}(E,F)$. *Pour que* H *soit relativement compact* (resp. *précompact*) *dans* $\mathcal{C}_c(E,F)$, *il faut et il suffit que* H *soit équicontinu et que* $H(x)$ *soit relativement compact* (resp. *précompact*) *pour tout* $x \in E$.

Ces conditions sont suffisantes sans restriction sur l'espace E: on considère pour tout compact K dans E, l'ensemble H_K des restrictions de tous les éléments u de H à

K, et on utilise la remarque qui suit la prop.4. Pour la nécessité, on est aussitôt ramené au th.6, en notant qu'un ensemble H d'applications de E dans F est équicontinu si et seulement si pour tout compact $K \subset E$, l'ensemble H_K des restrictions à K des $u \in H$ est équicontinu.

<u>Corollaire 2</u>. <u>Soit E un espace topologique</u> (resp. <u>uniforme</u>), $\mathfrak{S}$ <u>un ensemble de parties de</u> E, F <u>un espace uniforme et</u> H <u>un ensemble d'applications continues</u> (resp. <u>uniformément continues</u>) <u>de</u> E <u>dans</u> F. <u>Pour</u> $A \in \mathfrak{S}$, <u>soit</u> H_A <u>l'ensemble des restrictions à</u> A <u>des</u> $u \in H$. <u>Pour que</u> H <u>soit précompact dans</u> $\mathcal{C}_{\mathfrak{S}}(E,F)$, <u>il faut que</u> H_A <u>soit équicontinu</u> (resp. <u>uniformément équicontinu</u>) <u>pour tout</u> $A \in \mathfrak{S}$, <u>et</u> $H(x)$ <u>précompact pour tout</u> $x \in E_0 = \bigcup_{A \in \mathfrak{S}} A$. <u>Se les</u> $A \in \mathfrak{S}$ <u>sont précompacts, ces conditions sont aussi suffisantes</u>.

La première partie résulte immédiatement de la prop. 9, et la deuxième du th.6, N°1, car il suffit de vérifier que les H_A sont précompacts pour la convergence uniforme.

<u>Remarque</u>. On a fréquemment à considérer des <u>sous-espaces</u> M d'un espace $\mathcal{C}_{\mathfrak{S}}(E,F)$, au lieu de $\mathcal{C}_{\mathfrak{S}}(E,F)$ tout entier. Ce qui précède permet de donner des critères de relative compacité pour des parties H de M. En effet, pour que H soit relativement compact <u>dans</u> M, il faut et il suffit qu'il soit relativement compact dans $\mathcal{C}_{\mathfrak{S}}(E,F)$, et que son adhérence dans cet espace soit contenue dans M.

CHAPITRE I.

PROPRIÉTÉS GÉNÉRALES.

Sauf dans le N°10 et une partie du N°9, la structure particulière du corps des reels ou des complexes n'intervient pas dans ce Chapitre, et on pourra remplacer ces corps par n'importe quel corps valué, moyennant certaines adaptations evidentes. Pour simplifier, nous supposerons néanmoins que le corps de base k est le corps reel R ou le corps complexe C. Nous supposerons une bonne connaissance de l'algèbre linéaire sur un corps k (voir Bourbaki, Algèbre, Chapitre 2) ainsi que de la Topologie Générale de Bourbaki.

Nous omettons les démonstrations des assertions qui résultent sans difficulté des énoncés antérieurs.

1. Définition générale d'un espace vectoriel topologique.

Définition 1. On appelle espace vectoriel topologique un espace vectoriel muni d'une topologie telle que les applications $(x,y) \longrightarrow x + y$ et $(\lambda,x) \longrightarrow \lambda x$ de $E\times E$ dans E et de $k\times E$ dans E soient continues (quand on prend sur $E\times E$ et sur $k\times E$ les topologies produits). Un telle topologie sur un espace vectoriel est dite compatible avec la strueture vectorielle.

Un EVT est en particulier un groupe abélien topologique, et on pourrait utiliser dans la suite les resultat s généraux (d'ailleurs triviaux) sur les groupes topologiques. - Soit E un EVT. Alors les translations dans E sont des homéomorphismes, ainsi que les homothéties non nulles (qui sont donc même des automorphismes de E). Du premier fait resulte que si A et B sont des parties de E dont l'une est ouverte, alors A+B est une partie ouverte (car réunion de translatés d'un ouvert). - Si M est un espace topologique, et si f, g, λ, μ sont des applications continues de M dans E, E, k et k resp., alors les applications $f(t)+g(t)$, $\lambda(t)f(t)$ et plus généralement $\lambda(t)f(t)+\mu(t)g(t)$, sont des applications continues de M dans E.

Proposition 1. Pour qu'un EVT E soit séparé, il faut et il suffit que l'ensemble réduit à l'origine soit fermé.

Nécessité evidente; pour la suffisance, on note que la diagonale de $E \times E$ est l'image réciproque de $\{0\}$ par l'application continue $x-y$, donc fermée si $\{0\}$ est fermé.

La topologie d'un EVT est connue quand on connait le filtre des voisinages de l'origine, car le filtre des voisinages d'un point quelconque x s'en déduit par la translation x. De façon précise:

Proposition 2. Pour qu'un filtre $\mathcal{V}$ sur l'espace vectoriel E soit le filtre des voisinages de l'origine pour une topologie compatible avec la structure vectorielle, il faut et il suffit qu'il satisfasse aux conditions suivantes:

a. $\mathcal{V}$ admet une base formée d'ensembles cerclés (un ensemble V est dit cerclé si $\lambda V \subset V$ pour tout scalaire λ de norme $\leqslant 1$).

b. *ϑ est stable pour les homothéties non nulles.*

c. *Pour tout* $U \in \vartheta$, *il existe* $V \in \vartheta$ *tel que* $V + V \subset U$.

d. *Les* $V \in \vartheta$ *sont équilibrés* (i.e. pour tout $x \in E$, on a $\lambda x \in V$ pour les scalaires λ assez petits).

2. *Produits, sous-espaces, quotients.*

Soit E un espace vectoriel, (E_i) une famille d'EVT, soit pour tout i f_i une application linéaire de E dans E_i. Alors la topologie la moins fine sur E rendant continues les f_i est compatible avec la structure vectorielle, i.e. fait de E un EVT. Ainsi l'image réciproque par une application linéaire f de la topologie d'un EVT F est une topologie d'EVT sur E; en particulier un sous-espace vectoriel E d'un EVT F est un EVT pour la topologie induite (E sera appelé *sous-espace vectoriel topologique de* F). De même, le produit d'une famille (E_i) d'EVT, muni de la structure vectorielle produit et de la topologie produit, est un EVT, appelé *produit vectoriel topologique des* E_i.

L'essentiel sur les espaces quotients est résumé dans le

Théorème 1. 1) *Soit* E *un espace vectoriel topologique,* F *un sous-espace vectoriel,* φ *l'application canonique de* E *sur* E/F. *Alors la topologie quotient de la topologie de* E *fait de* E/F *un EVT.* φ *est une* application ouverte de E sur E/F. Un système fondamental de voisinages de 0 dans E/F est fermé par les images canoniques des voisinages de 0 dans E, parcourant un système fondamental de voisinages. E/F est séparé si et seulement si F est fermé.

2) Soit G un sous-espace vectoriel de E contenant F, considérons G/F comme un sous-espace vectoriel de E/F. Alors, sur G/F, la topologie induite par E/F est identique à la topologie quotient de G par F. L'isomorphisme canonique de $(E/F)/(G/F)$ avec E/G défini en algèbre, est aussi un isomorphisme d'EVT.

Démonstration. 1) On voit d'abord que φ est une application ouverte (cela signifie que si $U \subset E$ est ouvert, alors $U+F$ est ouvert, ce qui a été signalé au N°1). Alors, $(E/F)\times(E/F)$ s'identifie donc à $(E\times E)/(F\times F)$ et $k\times(E/F)$ s'identifie à $(k\times E)/(\{0\}\times F)$ (en tant qu'espaces topologiques), ce qui permet de prouver aussitôt pour E/F les axiomes d'un EVT. La caractérisation des voisinages de 0 dans E/F résulte aussitôt du fait que φ est ouverte, et le critère pour que E/F soit séparé est un cas particulier de la prop.1.

2) D'après ce qui précède, la topologie quotient sur G/F a comme ouverts les ensembles $\varphi(U\cap G)$, où U parcourt les ouverts de E, et la topologie induite par E/F sur G/F a comme ouverts les ensembles $\varphi(U)\cap(G/F)$. Or on vérifie aussitôt que $\varphi(U\cap G) = \varphi(U)\cap(G/F)$. La deuxième partie de 2) peut se voir de façon analogue, ou comme cas particulier

d'un résultat de topologie générale sur les espaces quotients quelconques.

Notons aussi que du fait que l'application canonique d'un EVT sur un espace quotient est ouverte, résulte que l'isomorphisme algébrique classique de $(E_1/F_1)\times(E_2/F_2)$ avec $(E_1\times E_2)/(F_1\times F_2)$ est un isomorphisme d'EVT (E_1 et E_2 étant des EVT, F_1 et F_2 des sous-espaces vectoriels).

Mais on fera garde que, si φ est l'application canonique d'un EVT E sur un espace quotient E/F, et G un sous-espace vectoriel de E ne contenant pas F, alors l'application canonique de $G/(G\cap F)$ sur le sous-espace $\varphi(G)$ de E/F n'est pas en général un isomorphisme d'EVT (bien que ce soit manifestement un isomorphisme algébrique, et une application continue). Cela signifie aussi que si φ est un homomorphisme de E sur un espace H (voir N°3), l'application induite sur un sous-espace G de E peut ne pas être un homomorphisme; or cela résulte de la remarque que toute application linéaire continue u de G dans H peut être induite par un homomorphisme de $G\times H$ sur H, savoir l'application $(g,h)\longrightarrow ug+h$.

3. Applications linéaires continues, homomorphismes.

Soient E, F deux EVT, u une application linéaire de E dans F. Pour que u soit continue, il faut et il suffit qu'elle soit continue à l'origine. Dans ce cas, si N désigne son noyau, u définit une application linéaire continue et biunivoque de E/N dans F. Mais cette application ne sera pas en général un isomorphisme de E/N sur $u(E)$ pour les structures d'EVT, i.e. l'application inverse n'est pas toujours continue.

Définition 2. Une application linéaire u d'un EVT E dans un autre F est dite un homomorphisme, si l'application de E/N (N, noyau de u) sur u(E) qui s'en déduit est un isomorphisme d'EVT.

Proposition 3. Soit u une application linéaire continue d'un EVT E dans un autre F. Les conditions suivantes sont équivalentes:

a. u est un homomorphisme.

b. u transforme les parties ouvertes de E en des parties ouvertes de u(E).

c. u transforme les voisinages de 0 de E en des voisinages de 0 de u(E).

(On montre aussitôt que a. implique b., b. implique c. et que c. implique a.).

Les applications linéaires continues de E dans F forment un espace vectoriel, noté L(E,F).

4. Structure uniforme d'un EVT.

Soit E un EVT. Pour tout voisinage U de 0, soit $\tilde{U}$ l'ensemble des couples $(x,y) \in E \times E$ tels que $x-y \in U$. Quand U varie, les $\tilde{U}$ forment la base d'un filtre d'entourages pour une structure uniforme sur E compatible avec la la topologie de E. E sera toujours implicitement considéré comme un espace uniforme grâce à cette structure uniforme.

Les translations, les homothéties non nulles, sont des automorphismes de E considéré comme un espace uniforme.

Si E et F sont deux EVT, toute application linéaire continue de E dans F est déjà uniformément continue. Plus généralement, <u>si un ensemble</u> A <u>d'applications linéaires de</u> E <u>dans</u> F <u>est équicontinu à l'origine, il est uniformément équicontinu</u> (et à fortiori équicontinu).

Soit E un EVT dont la topologie est la moins fine des topologies rendant continues des applications linéaires f_i de E dans des EVT E_i (Nº1). Alors la structure uniforme de E est la moins fine des structures uniformes rendant les f_i <u>uniformément</u> continues; en particulier, la structure uniforme d'un sous-espace vectoriel topologique d'un EVT est la structure induite, et la structure uniforme du produit vectoriel topologique d'une famille d'EVT est le produit des structures uniformes des espaces facteurs. Ainsi, une partie de E est précompacte si et seulement si ses images par les f_i sont des parties précompactes des E_i.

L'espace uniforme séparé associé à un EVT E est l'espace E/N, où N est l'adhérence de l'origine.

La définition même de la structure uniforme d'un EVT E montre que

<u>Proposition 4. Pour que la structure uniforme d'un EVT</u> E <u>soit métrisable, il faut et il suffit que</u> E <u>soit séparé et qu'il existe un systéme fondamental dénombrable de voisinages de</u> 0.

(Alors il existera en effet un système fondamental dénombrable <u>d'entourages</u>).

Un EVT étant aussi un espace uniforme, on sait ce que signifie la notion d'EVT complet. Pour les espaces non complets, on applique la

Proposition 5. Soit E un EVT séparé, et $\hat{E}$ l'espace uniforme complété. Alors l'application $(x,y) \longrightarrow x+y$ de $E \times E$ dans E se prolonge par continuité en une application continue de $\hat{E} \times \hat{E}$ dans $\hat{E}$, et l'application $(\lambda, x) \longrightarrow \lambda x$ de $k \times E$ dans E se prolonge par continuité en une application continue de $k \times \hat{E}$ dans $\hat{E}$. Les lois ainsi définies dans $\hat{E}$ font de $\hat{E}$ un espace vectoriel, et la topologie de $\hat{E}$ est compatible avec cette structure vectorielle. Enfin, la structure uniforme du complété de E n'est autre que la structure uniforme associé à l'EVT $\hat{E}$ qu'on vient de définir.

La démonstration est standart on commence par noter que l'application $(x,y) \longrightarrow x+y$ est uniformément continue sur $E \times E$, et l'application $(\lambda, x) \longrightarrow \lambda x$ uniformément continue sur le produit d'une partie quelconque bornée de k par E, d'où aussitôt les prolongements voulus. La dernière assertion se vérifie en désignant par F l'EVT $\hat{E}$, et en prolongeant par continuité uniforme l'isomorphisme identique de E dans F en un isomorphisme de l'espace uniforme $\hat{E}$ dans l'espace uniforme $\hat{F}$; cette dernière application ne peut être autre que l'application identique.

Proposition 6. Soit E un EVT métrisable et complet, F un sous-espace vectoriel fermé de E. Alors

E/F est métrisable et complet.

C'est un cas particulier de Bourbaki, Top. Gén. Chap. 9, §3, prop.4. - On fera attention qu'il existe des espaces localement convexes complets (non métrisables) pas du tout pathologiques, qui admettent des espaces quotients non complets. La validité de prop.6 est une des raisons de l'importance des EVT métrisables.

5. Topologie définie par une semi-norme.

Définition 3. On appelle *semi-norme* sur un espace vectoriel E, une fonction positive p sur E satisfaisant aux conditions:

$$p(x + y) \leqslant p(x) + p(y) \quad \text{pour} \quad x,y \in E;$$

$$p(\lambda x) = |\lambda| p(x) \quad \text{pour} \quad x \in E, \ \lambda \in \mathbf{k}.$$

On dit que p est une *norme*, si de plus $p(x)=0$ implique $x = 0$.

On appelle *espace semi-normé* (resp. *normé*) un espace vectoriel muni d'une semi-norme (resp. d'une norme).

Le plus souvent, si E est un espace semi-normé, sa semi-norme est notée $x \longrightarrow \|x\|$. On appelle *boule unité* de E l'ensemble des éléments de E tels que $\|x\| \leqslant 1$. Si V est cet ensemble, l'ensemble des éléments x de E tels que $\|x\| \leqslant \lambda$ (où $\lambda > 0$) est λV. V est manifestement cerclé et équilibré d'après le deuxième axiome des semi-normes, et on a $V + V \subset 2V$ d'après le premier axiome. Compte tenu de Nº 1, prop. 1, on trouve:

Proposition 6 bis. Soit E un espace semi-normé, V sa boule unité. Alors les homothétiques non nuls λV de V forment une base pour le filtre des voisinages d'une topologie d'EVT sur E. La fonction $\|x - y\|$ sur $E \times E$ est un écart, qui définit la structure uniforme de l'EVT E (qui est donc séparé si et seulement si E est un espace normé).

Un espace semi-normé sera donc toujours considéré comme un espace vectoriel topologique.

Sous-espaces, espaces quotients et espaces produits d'espaces semi-normés.

Soit E un espace semi-normé, F un sous-espace vectoriel. Alors la semi-norme de E induit une semi-norme sur F, et la topologie correspondante est la topologie induite par E. D'autre part:

Proposition 7. Considérons sur E/F la fonction $X \longrightarrow \|X\|$ qui, à tout $X \in E/F$ (i.e. une certaine partie de E, translatée de F) fait correspondre la distance de l'origine à X (relativement à la fonction écart $\|x - y\|$):

$$\|X\| = \operatorname*{Inf}_{x \in X} \|x\| .$$

Cette fonction est une semi-norme sur E/F, et la topologie correspondante est la topologie quotient de celle de E par F.

Dorénavant, un sous-espace vectoriel ou un espace quotient d'un espace semi-normé sera toujours regardé comme un espace semi-normé. En particulier, l'espace séparé E/N associé à un espace semi-normé E (voir Nº5) - où N est l'adhérence de l'origine, i.e. l'ensemble des $x \in E$ tels que $\|x\| = 0$ - peut être considéré comme un espace normé, qu'on appelle <u>l'espace normé associé à l'espace semi-normé</u> E. Ce qui précède conduit aussi à envisager la notion d'<u>homomorphisme métrique</u> d'un espace semi-normé dans un autre: c'est une application linéaire continue de E dans F telle que l'application de E/N sur le sous-espace $u(E)$ de F qui s'en déduit (où N désigne maintenant le noyau de l'application) soit un isomorphisme (pour les structures d'espaces semi-normés). À fortiori u sera-t-il un homomorphisme au sens du Nº 3.

Soit (p_i) une famille de semi-normes sur un espace vectoriel. Si $p(x) = \operatorname{Sup}_i p_i(x)$ est fini pour tout $x \in E$, alors $p(x)$ est encore une semi-norme sur E. Voici une manière plus générale de construire d'autres semi-normes à partir des p_i. Considérons l'application $x \longrightarrow \varphi(x) = (p_i(x))$ de E dans R^I, soit H un sous-espace vectoriel de R^I contenant $\varphi(E)$ et soit enfin α une semi-norme sur H qui est <u>croissante</u> pour la structure d'ordre naturelle induite sur H par R^I. <u>Alors</u> $\alpha((p_i(x))$ <u>est une semi-norme sur</u> E. Par exemple, si la famille (p_i) est finie, les fonctions

$$\sum_i p_i(x) \qquad \text{et} \qquad \left(\sum_i (p_i(x))^2\right)^{\frac{1}{2}},$$

sont des semi-normes, car on vérifie aussitôt que les expressions

$$\sum_i |\xi_i| \qquad \text{et} \qquad (\sum_i \xi_i^2)^{\frac{1}{2}}$$

sur R^n sont des normes. - Notons enfin que si F est un espace semi-normé, et u une application linéaire de l'espace vectoriel E dans F, alors $\|u(x)\|$ est une semi-norme sur E, et la topologie associée est l'image réciproque de la topologie de F par l'application u. Ces réflexions entrainent la

<u>Proposition 8</u>. <u>Soit E un espace vectoriel, (E_i) une famille fine d'espaces semi-normés, soit pour tout i, f_i une application linéaire de E dans E_i. Alors la topologie sur E la moins fine rendant continues les f_i peut être définie par une semi-norme. On peut par exemple prendre l'une quelconque des trois semi-normes</u>

$$\operatorname*{Sup}_i p_i(x), \qquad \sum_i p_i(x), \qquad (\sum_i (p_i(x))^2)^{\frac{1}{2}} .$$

Mais à priori, il n'y a pas lieu de préférer l'une des semi-normes possibles aux autres, et suivant les cas il pourra être plus commode de choisir l'une ou l'autre de ces semi-normes. - On voit qu'en particulier la topologie du produit d'un nombre fini d'espaces semi-normés (resp.normés) peut être définie par une semi-norme (resp. une norme).

<u>Complété d'un espace normé</u>. Un espace normé complet

est appelé un <u>espace de Banach</u> (ou simplement un Banach). Soit E un espace normé quelconque, on sait que $\|x\|$ (distance à l'origine) est une fonction uniformément continue, qui se prolonge donc par continuité à l'espace vectoriel complété $\hat{E}$ (Nº 4, prop. 5) en une fonction notée encore $\|x\|$, dont on constate immédiatement que c'est encore une semi-norme. D'autre part, la fonction $\|x - y\|$ sur $\hat{E}\times\hat{E}$, qui prolonge par continuité la fonction $\|x - y\|$ sur $E\times E$, est donc la distance dans l'espace métrique complété de l'espace métrique E, donc la topologie de $\hat{E}$ est celle définie par sa norme. Ainsi, <u>l'espace complété d'un espace normé peut être consideré comme un espace normé</u>.

<u>Applications linéaires continues entre espaces semi-normés</u>.

<u>Théorème 2. Soient E et F deux espaces semi-normés</u>.

1) <u>Soit u une application linéaire de E dans F. Pour que u soit continue, il faut et il suffit qu'il existe un $M \geqslant 0$ tel que</u>

$$\|ux\| \leqslant M\,\|x\| \quad \text{pour tout } x \in E,$$

<u>relation équivalente à</u>

$$\sup_{\|x\| \leqslant 1} \|ux\| \leqslant M$$

<u>ou à</u>

$$u(V) \subset M.W$$

<u>où V et W sont les boules unités de E et F.</u>

2) Soit, pour tout $u \in L(E,F)$,

$$\|u\| = \sup_{\|x\| \leqslant 1} \|ux\| .$$

La fonction ainsi définie sur $L(E,F)$ est une semi-norme, et une vrai norme si F est séparé. Muni de cette semi-norme, $L(E,F)$ est complet si F est complet.

Si E et F sont des espaces semi-normés, $L(E,F)$ est toujours considéré comme un espace semi-normé de la façon précédente. Dans tous les cas, $\|u\|$ sera appelé (par abus de langage) la norme de l'application u.

Démonstration. 1) Il est évident que la première formule implique les autres, et que ces dernières sont équivalentes. D'autre part, $u(V) \subset M.W$ implique $u(\varepsilon V) \subset \varepsilon MW$ pour tout $\varepsilon > 0$, donc la continuité de u à l'origine, donc la continuité de u (Nº 3); réciproquement, si u est continue, on aura $u(\varepsilon V) \subset W$ pour ε assez petit, d'où $u(V) \subset MW$, avec $M = 1/\varepsilon$. Enfin, on voit par des réflexions d'homogénéité que la deuxième des formules dans 1) implique la première.

2) Pour tout $x \in E$, $u \longrightarrow \|ux\|$ est une semi-norme sur $L(E,F)$, car image réciproque de la semi-norme de F par l'application linéaire $u \longrightarrow ux$. D'autre part on a dit que toute borne supérieure de semi-normes est une semi-norme, donc $\|u\|$ est une semi-norme sur $L(E,F)$. La fin est laissée au lecteur.

Corollaire. Pour que deux semi-normes p et q sur un même espace vectoriel E définissent la même topologie, il faut et il suffit qu'il existe deux nombres $0 < m \leqslant M < +\infty$, tels que l'on ait

$$m\, p(x) \leqslant q(x) \leqslant M\, p(x) \quad \text{pour} \quad x \in E.$$

En effet, il faut exprimer que l'application identique de E muni de p sur E muni de q, ainsi que l'application inverse, sont continues, et on applique alors le critère du th. précédent.

6. Généralités sur les espaces définis par des familles de semi-normes.

Soit E un espace vectoriel, soit (p_i) une famille de semi-normes sur E. Considérons sur E la topologie borne supérieure des topologies associées aux semi-normes p_i, topologie qui fait de E un EVT (Nº 2). La structure uniforme de E est la borne supérieure des structures uniformes associées aux p_i (Nº 4), donc définie par la famille des écarts $p_i(x-y)$. Une famille fondamentale de voisinages de 0 dans E est obtenue en prenant pour toute partie finie J de l'ensemble d'indices I, et pour tout $\varepsilon > 0$, l'ensemble des $x \in E$ tels que $p_i(x) \leqslant \varepsilon$ pour tout $i \in J$, i.e. l'ensemble des x tels que $p_J(x) \leqslant \varepsilon$, où on pose $p_J(x) = \operatorname{Sup}_{i \in J} p_i(x)$. Par suite, la topologie définie par la famille $(p_i)_{i \in I}$ de semi-normes ne change pas quand on y ajoute les bornes supérieures p_J d'un nombre fini de telles semi-normes. On peut manifestement y ajouter les semi-normes sur E qui sont majorées par un multiple d'une telle p_J; on constate qu'on a alors obtenu toutes les semi-normes sur E qui sont continues (donc en ra joutant d'autres semi-normes, la topologie de E deviendrait strictement plus fine).

<u>Définition</u> <u>4</u>. On appelle <u>espace</u> <u>localement</u> <u>convexe</u>, un EVT dont la topologie peut être définie par une famille de semi-normes (p_i) sur E comme ci-dessus (i. e. est borne supérieure des topologies semi-normées associées aux p_i). La famille (p_i) est dite une <u>famille de définition</u> pour la topologie de E. Une telle famille est dite <u>fondamentale</u>, si les boules unités associées aux p_i forment un système fondamental de voisinages de 0.

(Cela signifie aussi que pour toute partie finie J de I et pour tout $M > 0$, il existe une $p_i \geqslant M\, p_J$.)

Tous les espaces vectoriels topologiques utilisés en Analyse sont localement convexes, car ce sont les seuls espaces pour lesquels on ait un nombre suffisant de résultats profonds. Ils suffisent d'ailleurs amplement, car ils forment une famille d'espaces stable par toutes les opérations usuelles, comme on va voir maintenant.

Soit E un EVT dont la topologie est définie comme la moins fine rendant continues des applications linéaires f_i de E dans des espaces localement convexes E_i, alors E est lui-même localement convexe; de façon précise, sa topologie est définie par la famille des semi-normes $p.f_i$, où pour tout i, p parcourt une famille de définition pour la topologie de E_i (cela résulte d'une propriété évidente de transitivité, valable en topologie générale, pour la méthode de définition d'une topologie comme la moins fine qui ...). Ainsi, <u>un sous-espace vectoriel topologique d'un espace localement convexe, le produit vectoriel topologique d'une famille d'espaces localement convexes, est localement convexe</u>. Soit E un espace localement convexe, avec une famille <u>fondamentale</u> (p_i) de semi-normes, soit F un sous-espace vectoriel, considérons sur E/F les "semi-normes quotients" $\hat{p}_i$ des p_i (Nº 5, prop. 7). Il résulte aussitôt de la prop. 7 que ces semi-normes définissent précisément la topologie quotient de E/F; donc <u>un espace quotient d'un espace localement convexe est localement convexe</u>. En particulier, l'espace séparé associé à un espace localement convexe (Nº 4) est localement convexe. <u>Le complété d'un espace localement convexe est localement convexe</u>. En effet, si (p_i) est une famille de semi-normes sur E définissant la topologie de E, les p_i se prolongent par continuité uniforme en des semi-normes $\hat{p}_i$ sur le complété, et les écarts correspondants sur $\hat{E}$, qui prolongent les écarts $p_i(x-y)$ sur E par continuité, définissent donc la structure uniforme de $\hat{E}$ (Topologie Générale); la topologie de $\hat{E}$ est donc définie par les $\hat{p}_i$.

Voici une caractérisation utile des espaces localement convexes:

<u>Proposition 9</u>. <u>La topologie d'un espace localement convexe E peut être définie comme la topologie la moins fine rendant continues certaines applications linéaires f_i de E dans des espaces de Banach E_i. Si en particulier E est séparé, E est isomorphe à un sous-espa-</u>

<u>ce vectoriel topologique d'un produit vectoriel topologique d'espaces de Banach</u>.

En effet, si (p_i) est une famille de définition de la topologie de E, il suffit pour tout i de désigner par E_i l'espace de Banach complété de l'espace normé associé à la semi-norme p_i (Nº 5), et par f_i l'application canonique de E dans E_i.

7. <u>Ensembles bornés: critères généraux</u>.

<u>Définition</u> <u>5</u>. Soit E un EVT. Une partie A de E est dite <u>bornée</u>, si pour tout voisinage V de 0, il e<u>xiste un scalaire</u> $\lambda \neq 0$ <u>tel que</u> $\lambda A \subset V$.

Si A est borné, on aura même $\lambda A \subset V$ dès que λ est assez petit (prendre V cerclé). Une partie d'une partie bornée est bornée. Toute partie de E réduite à un point est bornée (car les voisinages de 0 sont équilibrés); il en résulte que toute partie finie de E est bornée, car: <u>la réunion, la somme d'un nombre fini d'ensembles bornés est bornée</u> (utiliser prop. 1, c.). En particulier, les translatés d'un ensemble borné sont bornés; il en est évidemment de même des homothétiques d'un ensemble borné. <u>L'adhérence d'une partie bornée est bornée</u> (utiliser le fait que E, étant uniformisable, admet un système fondamental de voisinages fermés de 0).

<u>Proposition</u> <u>10</u>. <u>Une partie précompacte d'un EVT est bornée</u>.

En effet, si V est un voisinage cerclé de 0, il existe une partie finie B de E telle que $A \subset B + V$ (cela exprime que A est précompact), puis un scalaire λ de norme $\leqslant 1$ tel que $\lambda B \subset V$, d'où $\lambda A \subset \lambda B + \lambda V \subset V + V$. V étant arbitraire, A est bien borné.

Proposition 11. Soit E un EVT dont la topologie est la moins fine des topologies rendant continues des applications linéaires f_i de E dans des EVT E_i. Pour qu'une partie A de E soit bornée, il faut et il suffit que pour tout i, $f_i(A)$ soit une partie bornée de E_i.

La nécessité est un cas particulier du fait (immédiat): *l'image d'un borné par une application linéaire continue est bornée*. Pour la suffisance, il suffit de tenir compte de la caractérisation des voisinages de 0 dans E. - Cas particuliers à expliciter: sous-espace, espace produit.

Soit E un espace semi-normé, V sa boule unité. Pour que $A \subset E$ soit borné, il faut qu'il existe un $\lambda \neq 0$ tel que $\lambda A \subset V$, et cela suffit, car on aura $\varepsilon \lambda A \subset \varepsilon V$ pour tout $\varepsilon > 0$. Comme $\lambda A \subset V$ s'écrit aussi $A \subset MV$, où $M = 1/\lambda$, ou encore $\| x \| \leqslant M$ pour tout $x \in A$, on voit que:

Proposition 12. Si E est un espace semi-normé, les parties bornées de E sont les parties bornées au sens de la métrique (plus exactement, au sens de l'écart $\| x - y \|$), i.e. les parties A telles que

$$\operatorname{Sup}_{x \in A} \| x \| < +\infty .$$

En particulier, la boule unité d'un espace semi-normé est un voisinage borné de 0. Réciproquement:

Corollaire 1. *Pour que la topologie d'un EVT E puisse être définie par une semi-norme, respectivement une norme (on dit alors que E est semi-normable, resp. normable), il faut et il suffit que E soit localement convexe (resp. localement convexe et séparé), et qu'il admette un voisinage borné de 0.*

En effet, si V est un voisinage borné de 0, et si p est une semi-norme continue sur E telle que la boule unité correspondante U soit contenue dans V, alors la topologie de E est celle définie par p. Car si W est un voisinage quelconque de 0, on aura $\lambda V \subset W$ pour $\lambda \neq 0$ convenable, et à fortiori $\lambda U \subset W$.

Corollaire 2. *Soit u une application linéaire d'un espace semi-normé E dans un EVT F. Pour que u soit continue, il faut et il suffit que u transforme la boule unité V de E en une partie bornée de F.*

La nécessité résulte du fait que V est borné. Réciproquement, si $u(V)$ est borné, soit W un voisinage de 0 dans F, on aura $\lambda u(V) \subset W$ pour $\lambda \neq 0$ convenable, d'où $u(\lambda V) \subset W$. Comme λV est un voisinage de 0 dans E, il suit que u est continue à l'origine, donc continue.

Soit maintenant E un espace localement convexe, dont la topologie est définie par une famille (p_i) des semi-normes. La conjonction des prop.11 et 12 montre qu'une partie A

de E est bornée si et seulement si pour tout i, on a

$$\sup_{x \in A} p_i(x) < +\infty .$$

On en conclut facilement:

<u>Proposition 13</u>. <u>Soit</u> E <u>un espace localement convexe</u>. <u>Alors</u> l'enveloppe disquée <u>d'une partie bornée de</u> E <u>est encore bornée</u>. (On appelle <u>enveloppe disquée</u> de A l'ensemble des sommes finies $\sum \lambda_i x_i$, où les x_i sont dans A, et $\sum |\lambda_i| \leqslant 1$).

Par suite, <u>l'enveloppe disquée fermée</u> d'un ensemble borné (i.e. l'adhérence de l'enveloppe disquée) est encore un ensemble borné.

<u>Définition</u>. Un EVT est dit <u>quasi-complet</u>, si ses parties bornées et fermées sont complètes.

<u>Exercice</u>. Soit E un EVT. Montrer: pour qu'une droite de E soit bornée, il faut et il suffit qu'elle soit contenue dans l'adhérence de l'origine. Donc E est séparé si et seulement si E ne contient pas de droite bornée.

8. <u>Ensembles bornés: utilisation pour les</u> $\mathfrak{S}$ <u>-convergences</u>.

La nécessité de considérer des ensembles bornés apparait dans le

<u>Théorème 3</u>. <u>Soit</u> M <u>un ensemble muni d'un ensemble</u> $\mathfrak{S}$ <u>de parties</u>, E <u>un EVT</u>, H <u>un sous-espace vectoriel de l'espace de toutes les applications de</u> M <u>dans</u> E,

muni de la topologie de la $\mathfrak{S}$-convergence. - Pour que cette topologie soit compatible avec la structure vectorielle, il faut et il suffit que pour tout $u \in H$, u transforme les $A \in \mathfrak{S}$ en des parties bornées de E. Alors la structure uniforme de l'EVT H est identique à la structure uniforme de la $\mathfrak{S}$-convergence. Si la topologie de E est définie par une famille (p_i) de semi-normes, alors la topologie de H est définie par les semi-normes $p_{i,A}(u) = \operatorname*{Sup}_{t \in A} p_i(u(t))$, où i parcourt I et A parcourt $\mathfrak{S}$ (donc H est localement convexe si E l'est). En particulier, si $\mathfrak{S}$ est réduit à l'unique élément M (cas de la convergence uniforme), et si E est semi-normé (resp. normé), alors la topologie de H est définie par la semi-norme (resp. la norme)

$$\| u \| = \operatorname*{Sup}_{t \in M} \| u(t) \|$$

(appelée norme uniforme).

La démonstration est immédiate, en utilisant par exemple la prop. 1 (Nº 1). Les 4 conditions sur le filtre des voisinages de 0 dans H sont manifestement toujours verifiées, à l'exception de la dernière qui signifie ici précisément que les $u(A)$ $(u \in H,\ A \in \mathfrak{S})$ sont des parties bornées de E.

Le théorème 3 conduit à envisager l'espace de toutes les applications u de M dans E qui transforment les $A \in \mathfrak{S}$ en des ensembles bornés. Muni de la topologie de la $\mathfrak{S}$-convergence, c'est un EVT noté $B_{\mathfrak{S}}(M,E)$. Les espaces vectoriels topologiques tels que H sont donc les sous-espaces vectoriels topologiques de $B_{\mathfrak{S}}(M,E)$. Si en particulier M est un espace topologique, on désigne par $C_{\mathfrak{S}}(M,E)$ le sous-espace vectoriel topologique de $B_{\mathfrak{S}}(M,E)$ formé des applications continues (bornées sur les $A \in \mathfrak{S}$). Quand en particulier $\mathfrak{S}$ est l'ensemble des parties compactes de M, on obtient l'espace de <u>toutes</u> les applications continues de M dans E (car les parties précompactes de E sont bornées (prop.10), muni de la topologie de la convergence compacte: cet espace est noté $C(M,E)$. Quand $\mathfrak{S}$ est réduit à l'unique élément M (cas de la convergence uniforme), on note $C^{\infty}(M,E)$ l'espace correspondant, i.e. l'espace des applications continues et bornées de M dans E, muni de la topologie de la convergence uniforme. Si E est un espace normé, $C^{\infty}(M,E)$ est toujours implicitement considéré comme un espace normé par la norme uniforme $\|u\| = \sup\limits_{t \in M} \|u(t)\|$. Quand M est compact, les espaces $C^{\infty}(M,E)$ et $C(M,E)$ coincident. Enfin, quand E est le corps des scalaires, on l'omet dans la notation, et on écrit $C_{\mathfrak{S}}(M)$, $C(M)$, $C^{\infty}(M)$ (ce dernier est toujours un <u>espace de Banach</u>: voir prop. qui suit).

<u>Proposition 14</u>. <u>Avec les notations précédentes, si E est complet, $B_{\mathfrak{S}}(M,E)$ et $C^{\infty}(M,E)$ sont complets. Il en est de même de $C(M,E)$ si p.ex. M est localement compact ou métrisable</u>.

Comme on sait que, lorsque E est complet, l'espace de <u>toutes</u> les applications de M dans E, muni de la stru cture de la $\mathfrak{S}$-convergence, est complet, il suffit de prouver que les espaces envisagés dans la proposition sont des sous-espaces <u>fermés</u> de l'espace précédent. Cela est bien connu pour $C(M,E)$, quand M est métrisable ou localement compact. On le vérifie de plus directement pour $B_{\mathfrak{S}}(M,E)$. Alors $C^{\infty}(M,E)$, intersection de l'espace $B_{\mathfrak{S}}(M,E)$ (où $\mathfrak{S}$ est réduit à M) et de l'espace (fermé lui aussi) de toutes les fonctions continues à valeurs dans E, et aussi fermé.

Si M et E sont des espaces semi-normés, et si on considère sur $L(M,E)$ la topologie de la convergence uniforme sur la boule unité V de M, cette topologie est définie par la norme $\sup_{\|x\| \leqslant 1} \| u(x) \|$, qui n'est autre que la norme définie dans le th.2, Nº 5. Comme toute limite pour la convergence simple (et à fortiori pour la convergence uniforme sur V) d'applications linéaires de M dans E est manifestement linéaire (du moins si E est séparé), la prop. 14 implique donc que $L(M,E)$ est complet lorsque E est un espace de Banach.

<u>Proposition 15</u>. <u>Sous les conditions du th.3, pour qu'une partie</u> P <u>de</u> H <u>soit borné, il faut et il suffit que pour tout</u> $A \in \mathfrak{S}$, <u>l'ensemble</u> $P(A) = \bigcup_{u \in P} u(A)$ <u>soit soit une partie bornée de</u> E.

<u>Exercice</u>. Montrer que si M est un espace localement compact non compact, la topologie de $C(M)$ ne peut être définie par une semi-norme (appliquer la prop.12, corollaire 2).

9. Exemples d'EVT: espaces de fonctions continues.

Un isomorphisme et un homomorphisme canonique. Soit M un espace normal, N un sous-espace fermé. L'application qui, à toute $f \in C^{\infty}(M)$, fait correspondre la restriction de f à N, est évidemment une application linéaire, de norme ≤ 1, de $C^{\infty}(M)$ dans $C^{\infty}(N)$. Le théorème d'Uryson implique qu'on a même là un homomorphisme métrique de $C^{\infty}(M)$ sur $C^{\infty}(N)$, identifiant donc ce dernier espace (en tant qu'espace normé) au quotient de $C^{\infty}(M)$ par le sous-espace J des fonctions qui s'annulent sur N.

Soient K et L deux espaces localement compacts, E un EVT. Alors les espaces $C(K \times L, E)$ et $C(K, C(L, E))$ sont canoniquement isomorphes en tant qu'espaces uniformes (c'est vrai chaque fois que E est un espace uniforme), et cet isomorphisme respecte les structures vectorielles. Ainsi $C(K \times L, E)$ s'identifie à $C(K, C(L, E))$ en tant qu'espace vectoriel topologique. Cet isomorphisme respecte les normes quand E est normé. En particulier, on a un isomorphisme canonique d'espaces normés:

$$C(K \times L) \approx C(K, C(L)).$$

On fera attention qu'en général, si L n'est pas compact, on aura $C^{\infty}(K \times L) \neq C^{\infty}(K, C^{\infty}(L))$; à priori, le deuxième espace est contenu dans le premier, mais en général strictement plus petit (le lecteur trouvera des exemples).

Une propriété d'approximation.

Théorème 4. *Soit M un espace compact, E un espace localement convexe. Alors les combinaisons linéaires de fonctions $\varphi.a$ (où $\varphi \in C(M)$, $a \in E$) sont denses dans $C(M,E)$.*

Démonstration. Soit $f \in C(M,E)$, il faut montrer que pour toute semi-norme continue p sur E, il existe une fonction $g = \sum \varphi_i a_i$ telle que $p(f(t) - g(t)) \leqslant 1$ pour tout $t \in M$. f étant uniformément continue, il existe un récouvrement finit (U_i) de M par des ouverts, et un point t_i dans chaque U_i, tels que $t \in U_i$ implique $p(f(t)-f(t_i)) \leqslant 1$. Posons $f(t_i) = a_i$, soit (φ_i) une "partition de l'unité subordonée à (U_i)", on prendra $g = \sum \varphi_i a_i$. On aura alors

$$f(t) - g(t) = \sum \varphi_i(t)(f(t) - f(t_i));$$

on peut se borner à sommer sur les i tels que $t \in U_i$, d'où aussitôt $p(f(t) - g(t)) \leqslant 1$.

Corollaire. *Soient K et L deux espaces compacts. Alors les fonctions combinaisons linéaires de fonctions du type $f(s)g(t)$ (où $f \in C(K)$, $g \in C(L)$), sont denses dans $C(K \times L)$.*

Il suffit d'écrire $C(K \times L) = C(K,C(L))$.

Du th. 4 résulte immédiatement que ce th. reste valable quand M est seulement localement compact.

Propriétés de séparabilité.

Proposition 16. Soit M un espace compact. Pour que M soit métrisable il faut et il suffit que C(M) soit séparable.

Suffisance: Soit f_i une suite partout dense dans C(M). Si s,t sont deux points de M tels que $f_i(s)=f_i(t)$ pout tout i, on aura par continuité $f(s) = f(t)$ pour toute $f \in C(K)$, d'où $s = t$. Sur M, la topologie la moins fine rendant continues les f_i est donc séparée, donc identique à la topologie de K puisque moins fine. Or elle est métrisable.

Nécessité: On considère une suite de récouvrements ouverts finis de K, de diamètres tendant vers zéro, et pour chacun de ces récouvrements une partition de l'unité subordonnée. La demonstration du th.4 montre que les combinaisons linéaires des fonctions φ_i correspondant à ces partitions de l'unité sont denses dans C(M). Il en est de même des combinaisons linéaires rationnelles de ces fonctions, d'où la conclusion.

Conjuguant la prop. 16 avec le th.4, on obtient le

Corollaire. Soit K un espace compact métrisable, E un espace localement convexe séparable. Alors C(K,E) est séparable.

L'espace $C_o(M)$. Soit M un espace localement compact, E un EVT. Une application f de M dans E, est dite "nulle à l'infini", si elle tend vers 0 suivant le filtre des complémentaires des parties compactes de M. On désigne par $C_o(M,E)$ l'espace des applications continues de M dans E qui sont nulles à l'infini, muni de la topologie de la convergence uniforme. C'est manifestement un sous-espace vectoriel topologique de $C^\infty(M,E)$. Soit $\hat{M}$ le compactifié d'Alexandroff de M (supposé non compact), soit ω le "point à l'infini" de $\hat{M}$ (i.e. le seul point de $\hat{M}$ non élément de M). Pour qu'une fonction continue sur M, à valeurs dans E, soit nulle à l'infini, il faut et il suffit que la fonction sur $\hat{M}$ qu'on obtient en prolongeant par la valeur 0 sur ω, soit continue. Par là, $C_o(M,E)$ est identifié au sous-espace fermé de $C(\hat{M},E)$ formé des fonctions nulles en ω. Cette identification respecte les topologies. Les applications constantes de M dans E forment un supplémentaire naturel de $C_o(M,E)$.

Proposition 17. Soit M un espace localement compact, E un espace localement convexe. Alors $C_o(M,E)$ est l'adhérence dans $C^\infty(M,E)$ de l'espace des applications continues à support compact de M dans E (le support d'une fonction à valeurs vectorielles est l'ensemble fermé, complémentaire de l'ensemble des points au voisinage desquels la fonction s'annule).

Exercice 1. Montrer que sous les conditions précédentes (M espace normal, N sous-espace fermé), si E est un espace de Banach, l'application canonique de $C^\infty(M,E)$ dans $C^\infty(N,E)$ est un homomorphisme métrique du premier espace sur un sous-espace fermé du second (utiliser le th. d'Uryson et la prop. 6, Nº 4). En conclure que c'est un homomorphisme métrique de $C^{\infty}(M,E)$ <u>sur</u> $C^{\infty}(N,E)$ si N est compact (utiliser le th.4 plus bas). Démontrer la proposition analogue quand E est un espace localement convexe métrisable et complet. Que peut-on dire quand E est un espace localement convexe quelconque?

<u>Exercice 2</u>. Soit M un espace complétement régulier. E un espace localement convexe. Montrer que les fonctions $f \in C^{\infty}(M,E)$ qui appartiennent à l'espace vectoriel fermé engendré par les fonctions $\varphi.a$ $(\varphi \in C^{\infty}(M),\ a \in E)$, sont exactement celles pour lesquelles $f(M)$ est précompact. (Procéder comme pour le th. 4, ou se ramener au cas du th. 4 en introduisant le "compactifié de Stone" de M - voir Bourbaki, Topologie Générale, Chap. 9, § 1, Exercice 6).

<u>Exercice 3</u>. <u>Soit M un espace compact</u>, E <u>un espace uniforme métrisable et séparable</u>. <u>Montrer que</u> $C(M,E)$ <u>est un espace métrisable et séparable</u>. (Prendre sur E une métrique, et démontrer d'abord le <u>lemme</u>: <u>un espace métrique séparable</u> E <u>est toujours isomorphe à un sous-espace d'un espace de Banach séparable</u>. - Pour le voir, prendre une suite dense (x_i) dans E, un $a \in E$ arbitraire, et montrer que l'application $x \longrightarrow \varphi(x) = (d(x,x_i) - d(a,x_i))_{i \in I}$ dans l'espace $C^{\infty}(N)$ des suites bornées est une isométrie; on prendra alors l'espace vectoriel fermé engendré par $\varphi(E)$).

<u>Exercice 4</u>. Si M est un espace complètement régu-

lier non compact, alors $C^{\infty}(M)$ n'est pas séparable. (Autrement M serait un sous-espace dense d'un espace compact métrisable $\hat{M}$ - son compactifié de Stone -, distinct de $\hat{M}$, et tel que toute fonction bornée continue sur M puisse se prolonger par continuité à tout M).

Exercice 5. Appliquer l'identification précédente pour caractériser les parties relativement compactes de $C_o(M,E)$. Cas de $C_o(M)$. - Etendre le th. 4 aux espaces $C_o(M,E)$.

Exercice 6. Soit I un ensemble d'indices, et soit $\ell^1(I)$ l'espace des familles sommables de scalaires sur l'ensemble d'indices I: a) Montrer que la fonction

$$\|(\lambda_i)\|_1 = \sum |\lambda_i|$$

sur $\ell^1(I)$ est une norme, qui fait de cet espace un espace de Banach; b) Soit E un EVT complet. Montrer que si (x_i) est une famille bornée dans E, alors pour tout $\lambda = (\lambda_i) \in \ell^1(I)$, la famille $(\lambda_i x_i)$ est une famille sommable dans E, et sa somme $u(\lambda)$ est une fonction linéaire continue de $\lambda = (\lambda_i) \in \ell^1(I)$. Montrer que l'on obtient ainsi exactement toutes les applications linéaires continues de $\ell^1(I)$ dans E. c) Si E est un espace de Banach, la norme de l'application linéaire de $\ell^1(I)$ dans E définie par la suite (x_i) est identique à $\sup_{i\in I} \|x_i\|$.

Exercice 7. Soit I un ensemble d'indices. On désigne par $\ell^{\infty}(I)$ et $c_o(I)$ les espaces $C^{\infty}(I)$ et $C_o(I)$

construits sur I considéré comme un espace localement compact discret; ce sont donc des espaces de Banach, $c_o(I)$ est un sous-espace normé de $\ell^\infty(I)$. D'autre part, $\ell^1(I)$ désigne l'espace des fonctions scalaires $i \longrightarrow \lambda_i$ sur I telles que $\sum |\lambda_i| < +\infty$, muni de la norme $\sum |\lambda_i|$ (voir exercice précédent). Quand I est sous-entendu, ou pris identique à l'ensemble des entiers positifs, on note les espaces précédents simplement ℓ^∞, c_o et ℓ^1. Si $(\lambda_i) \in \ell^\infty$ et $(\mu_i) \in \ell^1$, posons $\langle(\lambda_i),(\mu_i)\rangle = \sum \lambda_i \mu_i$. Monter que le dual (i.e. l'espace des formes linéaires continues, muni de la norme naturelle - voir Nº 5) de c_o s'identifie à ℓ^1, et le dual de ℓ^1 s'identifie à ℓ^∞ (pour le dual de ℓ^1, voir exercice précédent).

10. __Autres exemples__: __les espaces__ $\mathcal{E}^{(m)}$ __et__ $\mathcal{E}$ __de L.Schwartz__.

Nous renvoyons à "Théorie des Distribution" pour la notation D^p pour les opérateurs de dérivation sur R^n, où $p = (p_1,\dots,p_n)$ est un système quelconque de n nombres entiers $\geqslant 0$. D^p désigne l'opérateur

$$\frac{\partial^{|p|}}{\partial x_1^{p_1} \dots\dots \partial x_n^{p_n}},$$

où $|p| = p_1 + \dots + p_n$ est l'ordre de cet opérateur différentiel. On a D^0 = identité, $D^pD^q = D^{p+q}$.

Soit U une partie ouvert non vide de R^n, on désigne par $\mathcal{E}^{(m)}(U)$ ou simplement $\mathcal{E}^{(m)}$ l'espace des fonctions scalaires sur U qui sont m fois continûment différentiables, muni de la topologie la moins fine rendant continues les applications D^p ($|p| \leqslant m$) de cet espace dans $C(U)$ (espace des fonctions continues sur U, muni de la topologie de la convergence compacte). On obtient ainsi un espace <u>localement</u> <u>convexe</u> et <u>métrisable</u> (Nº 4, prop. 4), dont une suite fondamentale de semi-normes est obtenue en prenant une "suite fondamentale" (K_n) de parties compactes de U, et en posant $p_n(f) = n \sup_{|p| \leqslant m, t \in K_n} |D^p f(t)|$.

Pour qu'un filtre (f_i) dans $\mathcal{E}^{(m)}$ tende vers une $f \in \mathcal{E}^{(m)}$, il faut et il suffit que pour tout p avec $|p| \leqslant m$, $D^p f_i$ tende vers $D^p f$ uniformément sur tout compact. Soit (f_i) un filtre de Cauchy dans $\mathcal{E}^{(m)}$, alors pour tout p d'ordre $\leqslant m$, les $D^p f_i$ forment un filtre de Cauchy dans $C(U)$, donc convergent dans cet espace vers une $g_p \in C(U)$ (Nº 8, prop. 14). Montrons que g_o est m fois continûment différentiable et que $D^p g_o = g_p$, i.e. que f_i tend vers g_o dans $\mathcal{E}^{(m)}$. On est ramené à prouver que si des f_i continûment différentiables tendent vers une limite g_o uniformément sur tout compact, et si toute dérivée partielle $\frac{\partial}{\partial x} f_i$ tende vers une limite h uniformément sur tout compact, alors g_o est continûment différentiable, et ses dérivées sont les h_α. Pour ceci, on est manifestement ramené au cas d'une variable, où le résultat est classique.

Nous avons ainsi prouvé que $\mathcal{E}^{(m)}$ est <u>complet</u>.

On désigne par $\mathcal{E}(U)$ ou simplement $\mathcal{E}$ l'intersection des espaces $\mathcal{E}^{(m)}(U)$, muni de la topologie borne su périeure des topologies induites. C'est aussi la topologie la moins fine rendant continues les applications D^p de $\mathcal{E}(U)$ dans $C(U)$ (où maintenant p parcourt l'ensemble de <u>tous</u> les indices de dérivation). C'est encore un espace localement convexe et métrisable, et le raisonnement précédent prouve encore qu'il est complet. Cela résulterait aussi du lemme utile suivant

> <u>Lemme. Soit F un ensemble, soit (E_m) une famille filtrante décroissante de sous-ensembles munis de structures uniformes, telle que pour $E_m \subset E_n$, la structure uniforme de E_m soit plus fine que celle induite par E_n. Soit E l'intersection des E_m, muni de la structure uniforme borne supérieure des structures induites par les E_m. Si les E_m sont séparés et complets, il en est de même de E.</u>

Supposons maintenant que K soit un cube compact de R^n. On peut encore définir comme ci-dessus les espaces $\mathcal{E}^{(m)}(K)$, $\mathcal{E}(K)$, et les réflexions précédentes prouvent encore que ce sont des espaces localement convexes métrisables et complets. La différence essentielle consiste en ce que les espaces $\mathcal{E}^{(m)}(K)$ sont normables puisque $C(K)$ est un espace de Banach (voir N°5, prop. 8), tandis qu'on voit facilement que les $\mathcal{E}^{(m)}(U)$ ne sont pas normables (appliquer prop. 12, corollaire 1); $\mathcal{E}(U)$ et $\mathcal{E}(K)$ sont tous deux non normables.

Le N° 7, prop. 11, nous donne un critère pour les parties bornées de $\mathcal{E}^{(m)}(U)$ ou $\mathcal{E}(U)$: Pour que la partie

A de $\mathcal{E}^{(m)}(U)$ (resp. de $\mathcal{E}(U)$) soit bornée, il faut et il suffit que pour tout indice de dérivation p d'ordre $\leqslant m$ (resp. d'ordre quelconque), l'ensemble $D^p(A)$ soit une partie bornée de $C(U)$ (i.e. Nº 8, prop. 15 - un ensemble de fonctions continues sur U, <u>uniformément bornées sur tout compact dans</u> U). De même, une partie A de $\mathcal{E}^{(m)}(U)$ est relativement compacte si et seulement si elle est précompacte, donc si pour tout p d'ordre $\leqslant m$, l'ensemble $D^p(A)$ est une partie précompacte de $C(U)$. Appliquant le th. d'Ascoli, on trouve

<u>Proposition 18</u>. <u>Soit</u> A <u>une partie de</u> $\mathcal{E}^{(m)}(U)$. <u>Pour que</u> A <u>soit relativement compacte, il faut et il suffit que</u> A <u>soit bornée, et que pour tout indice de dérivation</u> p <u>d'ordre égal à</u> m, <u>l'ensemble de fonctions</u> $D^p(A)$ <u>soit équicontinu</u>.

Il suffit seulement de montrer qu'alors, pour <u>tout</u> p d'ordre $\leqslant m$, l'ensemble de fonctions $D^p(A)$ est équicontinu. Or cela résulte du

<u>Lemme</u>. <u>Soit</u> B <u>un ensemble de fonctions continûment différentiables sur</u> U, <u>uniformément bornées sur tout compact ainsi que leurs dérivées du premier ordre</u>. <u>Alors</u> B <u>est un ensemble équicontinu</u>. (Formule des accroissements finis).

Conjuguant la prop. 18 et le lemme, on trouve

<u>Corollaire</u>. <u>Toute partie bornée de</u> $\mathcal{E}^{(m+1)}(U)$ <u>est relativement compacte dans</u> $\mathcal{E}^{(m)}(U)$.

À fortiori, toute partie bornée de $\mathcal{E}(U)$ est relativement compacte dans tous les $\mathcal{E}^{(m)}(U)$, d'où l'important

<u>Théorème 5</u>. <u>Dans</u> $\mathcal{E}(U)$, <u>parties bornées et relativement compactes sont les mêmes</u>.

Ce qui précède peut se répéter mot pour mot pour les espaces $\mathcal{E}^{(m)}(K)$ et $\mathcal{E}(K)$, en particulier toute partie bornée de $\mathcal{E}(K)$ est relativement compacte. Comme $\mathcal{E}^{(m+1)}(K)$ est normable, le corollaire de proposition 18 montre même que l'application identique de $\mathcal{E}^{(m+1)}(K)$ dans $\mathcal{E}^{(m)}(K)$ transforme un voisinage convenable de 0 en une partie relativement compacte de $\mathcal{E}^{(m)}(K)$. On dit que c'est une <u>application compacte</u>.

<u>Exercice 1</u>. Définir les espaces $\mathcal{E}^{(m)}(U,E)$, $\mathcal{E}(U,E)$, $\mathcal{E}^{(m)}(K,E)$, $\mathcal{E}(K,E)$ quand E est un EVT quelconque. Montrer que ces espaces sont complets quand E est localement convexe et complet (se ramener au cas où E est un espace de Banach au moyen de Nº 6, prop. 9). - Montrer que si V est un ouvert dans $R^{n'}$, L un cube compacte de $R^{n'}$, alors on a un isomorphisme d'EVT:

$$\mathcal{E}^{(m)}(U \times V) = \mathcal{E}^{(m)}(U, \mathcal{E}^{(m)}(V)) \quad \text{et}$$
$$\mathcal{E}^{(m)}(K \times L) = \mathcal{E}^{(m)}(K, \mathcal{E}^{(m)}(L))$$

(et de même pour $\mathcal{E}(U \times V)$ et $\mathcal{E}(K \times L)$).

<u>Exercice 2</u>. Caractériser les parties relativement compactes de $\mathcal{E}^{(m)}(U,E)$ et de $\mathcal{E}(U,E)$, lorsque E est un espace localement convexe séparé et complet. Sous quelle con

dition toute partie bornée de $\mathcal{E}(U,E)$ est-elle relativement compacte?

<u>Exercice 3</u>. Si $m > m'$, l'application identique de $\mathcal{E}^{(m)}(U)$ dans $\mathcal{E}^{(m')}(U)$ n'est pas un isomorphisme vectoriel topologique.

11. <u>Supplémentaires topologiques</u>.

Rappelons que deux sous-espaces F, G d'un espace vectoriel E sont dits supplémentaires, si l'application naturelle $(x,y) \longrightarrow x + y$ de $F \times G$ dans E est un isomorphisme du premier espace sur le second, ce qui signifie aussi que $F \cap G = \{0\}$, $F + G = E$. Alors, la projection de $F \times G$ sur le facteur F définit une application linéaire p de E sur F; considérée comme endomorphisme de E, elle satisfait aux conditions

$$p^2 = p, \qquad p(E) = F \qquad \text{et} \qquad \overset{-1}{p}(0) = G.$$

L'application analogue de E sur G est alors $1-p$. Réciproquement, si p est un endomorphisme de E tel que $p^2 = p$, on voit aussitôt que p peut s'obtenir comme ci-dessus, et de façon évidemment unique puisque on aura $F = p(E)$, $G = \overset{-1}{p}(0)$. Un endomorphisme p d'un espace vectoriel E, tel que $p^2 = p$, est appelé un <u>projecteur</u>. Les projecteurs de E correspondent donc exactement aux décompositions de E en somme directe de deux sous-espaces supplémentaires F, G.

Supposons maintenant que E soit un EVT. Si F et G sont deux sous-espaces supplémentaires de E, l'isomorphis me algébrique de $F \times G$ sur E est manifestement continu, mais pas toujours un isomorphisme d'EVT, i.e. l'application inverse n'est pas forcément continue. Si on a un isomorphisme d'EVT, on dit que F et G sont supplémentaires topologiques.

Proposition 19. Soit E un EVT, F un sous-espace vectoriel.

1) Pour qu'un projecteur p de E sur F définisse un supplémentaire topologique G, il faut et il suffit que p soit continu. Alors $1 - p$ est un homomorphisme topologique de E sur G, i.e. définit un isomorphisme vectoriel topologique de E/F sur G. (À tout élément du quotient E/F correspond son unique représentant dans G, et à tout élément de G son image canonique dans E/F).

2) L'application de E/F sur G envisagée dans 1) est une application linéaire continue de E/F dans E, faisant correspondre à tout élément du quotient un représentant de cet élément dans E. Réciproquement toute application ψ de E/F dans E ayant ces propriétés peut s'obtenir de cette manière (et évidemment de façon unique, puisqu'on aura $G = \psi(E/F)$).

La démonstration est évidente.

Corollaire 1. Deux supplémentaires topologiques d'un même espace F sont isomorphes canoniquement.

En effet, ils sont tous deux isomorphes canoniquement à E/F.

Corollaire 2. Si E est un EVT séparé, et F et G deux sous-espaces vectoriels supplémentaires topologiques, alors F et G sont fermés.

En effet, ce sont resp. les noyaux de l'application linéaire continue $1-p$ ou p.

On fera attention que même un sous-espace vectoriel fermé d'un espace de Banach n'admet pas toujours de supplémentaire topologique, comme nous verrons plus tard, ce qui est une source de nombreuses difficultés. Signalons que si D est un opérateur différentiel à coefficients constants elliptique sur R^n, $n \geqslant 2$, d'ordre non nul, alors c'est un homomorphisme de $\mathcal{E}(R^n)$ sur $\mathcal{E}(R^n)$ qui n'admet pas d'inverse à droite continu (vois plus bas), i.e. dont le noyau n'a pas de supplémentaire.

Soit u une application linéaire continue d'un EVT E dans un autre F. Une application linéaire continue v de F dans E est dite inverse à droite (resp. inverse à gauche) de u, si on a $u \circ v = 1$ (resp. $v \circ u = 1$).

Proposition 20. Soit u une application linéaire continue d'un EVT E dans un autre F.

1) Pour que u admette une application inverse à droite continue, il faut et il suffit que ce soit un homomorphisme de E sur F dont le noyau admette un supplémentaire topologique dans E.

2) Pour que u admette un inverse à gauche continu,

il faut et il suffit que ce soit un isomorphisme *de* E *dans* F, *dont l'image admette un supplémentaire topologique dans* F.

La démonstration est laissée au lecteur.

Soit E un EVT, soient $E_1, \ldots, E_n$ un nombre fini des sous-espaces vectoriels de E. E est dite *somme directe topologique des sous-espaces* E_i, si l'application linéaire continue naturelle $(x_i) \longrightarrow \sum x_i$ de $\prod E_i$ dans E est un isomorphisme vectoriel topologique du premier sur le second. Alors les projections de $\prod E_i$ sur les espaces facteurs définissent des endomorphismes continus p_i de E, satisfaisant aux conditions:

$$p_i^2 = p_i; \qquad p_i \circ p_j = 0 \quad \text{pour} \quad i \neq j;$$

$$\sum p_i = 1; \qquad p_i(E) = E_i.$$

Réciproquement, on vérifie immédiatement que si on a une suite finie de *projecteurs continus* p_i dans E, dont les produits deux à deux sont nuls, et dont la somme est l'identité, ils correspondent à une décomposition de E en somme directe topologique de sous-espaces $E_i = p_i(E)$.

Exercice 1. Soit E un EVT. Pour que tout sous-espace vectoriel de dimension finie de E admette un supplémentaire topologique, il faut et il suffit que pour tout élément non nul x de E, existe une forme linéaire continue sur E qui ne s'annule pas sur x.

Exercice 2. Soit F un sous-espace vectoriel fermé d'un espace de Banach E, tel que E/F soit isomorphe en tant qu'espace vectoriel topologique à l'espace ℓ^1 des suites sommables (muni de la norme $\|\lambda\|_1 = \sum_i |\lambda_i|$). Montrer que F admet un supplémentaire topologique (utiliser la prop. 19, 2) et l'exercice 6 du Nº 9).

<u>Exercice 3</u>. Soit M un espace localement compact non compact, $\hat{M}$ son compactifié d'Alexandroff, E un EVT. Montrer que $C(\hat{M},E)$ est somme directe topologique de $C_0(M,E)$ et de l'espace des applications constantes de $\hat{M}$ dans E.

<u>Exercice 4</u>. Soit M un espace topologique, somme topologique d'une suite finie de sous-espaces M_i. Montrer que $C(M)$ (voir définition au Nº 8) est la somme directe topologique d'une suite des sous-espaces isomorphes aux espaces $C(M_i)$. Expliciter les projecteurs correspondants.

<u>Exercice 5</u>. Soit M un espace métrisable, N un sous-espace fermé non vide dont la frontière est séparable. Montrer qu'il existe une application linéaire canonique de $C^\infty(N)$ dans $C^\infty(M)$, inverse à droite de l'application linéaire canonique de $C^\infty(M)$ sur $C^\infty(N)$ (Kakutani). (Soit (x_i) une suite dense dans la frontière de N, soit $V_{i,n}$ l'ensemble des points $x \in M$ tels que $d(x_i,x) < 1/n$ et $d(x,N) > 1/2n$, soit (V_α) le recouvrement ouvert de $\complement N$ formé par les $V_{i,n}$ et par $\complement N$. Construire une famille (φ_α) de fonctions continues positives sur $\complement N$, avec support $\varphi_\alpha \subset V$, uniformément sommable au voisinage de chaque point de $\complement N$, et ayant pour somme 1. Prendre enfin, pour toute

$f \in C^{\infty}(N)$, la fonction $\tilde{f}$ sur M qui est identique à f sur N, et à $\sum_{i,n} f(x_i)\varphi_{i,n}$ dans $\complement N$). Etendre ce resultat au cas de $C^{\infty}(N,E)$:

1º) quand E est un espace de Banach;

2º) quand E est un espace localement convexe et complet quelconque.

Remarque: Même si M est compact, N un sous-espace compact, il n'est pas vrai en général (si M n'est pas métrisable) que l'application naturelle de $C(M)$ sur $C(N)$ admette une application inverse à droite linéaire continue (c'est faux p.ex. si M est le compactifié de Stone de l'ensemble des entiers, et N le complémentaire dans M, de l'ensemble des entiers).

12. Sous-espaces vectoriels de dimension ou codimension finie.

Proposition 21. *Soit E un EVT, F un sous-espace vectoriel. Alors l'adhérence de F est un sous-espace vectoriel.*

Corollaire. *Un hyperplan V dans E est soit dense, soit fermé* (i.e. si le complémentaire de V a un point intérieur, alors V est fermé).

Théorème 6. *Soit E un EVT, x' une forme linéaire non nulle sur E. Pour que x' soit continue, il faut et il suffit que l'hyperplan noyau de x' soit fermé.*

Démonstration: Soit V cet hyperplan, il suffit de montrer que V fermé implique x' continue. Cela signifie que, en posant $F = E/N$ (F est un EVT séparé de dimension 1), la forme linéaire sur F obtenue par passage au quotient, est continue. Mais cette forme est du type $\lambda e \longrightarrow \lambda$, où e est un élément convenable de F, de sorte qu'on doit montrer exactement le

Lemme: *Soit F un EVT séparé de dimension 1, e un élément non nul de F. Alors l'application $\lambda \longrightarrow \lambda e$ de k sur F est un isomorphisme d'EVT.*

Soit en effet V un voisinage cerclé de 0 dans F tel que $e \notin V$. Il faut montrer que $\lambda e \longrightarrow \lambda$ est continue à l'origine, donc que pour $\varepsilon > 0$ existe un voisinage W de 0 dans F tel que $\lambda e \in W$ implique $|\lambda| < \varepsilon$. Or il suffit de prendre $W = \varepsilon V$, car $\lambda e \in W$ s'écrit $e \in \frac{\varepsilon}{\lambda} V$, or V étant cerclé, on aurait $\frac{\varepsilon}{\lambda} V \subset V$ si on avait $\left| \frac{\varepsilon}{\lambda} \right| \leqslant 1$, ce qui serait absurde.

Théorème 7. *Soit E un EVT séparé de dimension finie, soit $(e_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ une base de E. Alors l'application $(\lambda_i) \longrightarrow \sum \lambda_i e_i$ de k^n sur E est un isomorphisme vectoriel topologique du premier espace sur le second (k^n étant muni de la topologie produit).*

C'est vrai si $n = 1$ (lemme précédent), procédons par récurrence sur n, en supposant le th. démontré pour la dimension $n-1$. Alors l'hyperplan dans E engendré par $e_1, \ldots, e_{n-1}$ est donc isomorphe à k^{n-1}, donc complet, donc fermé puisque E est séparé. Par suite (th. 6) la forme linéaire $\sum \lambda_i e_i \longrightarrow \lambda_n$ sur E est continue. De même les autres λ_i seront continues, d'où le théorème.

Corollaire 1. Soit E un EVT séparé de dimension finie. Toute application linéaire de E dans un EVT F est continue. Tout sous-espace vectoriel de E est fermé.

Pour la première partie, il suffit de prendre $E=k^n$. La seconde est contenue dans le

Corollaire 2. Soit E un EVT séparé. Alors tout sous-espace vectoriel de dimension finie de E est fermé.

(Il est en effet complet d'après le th. 7).

Corollaire 3. Soit E un EVT, F un sous-espace vectoriel fermé de codimension finie. Alors toute application linéaire de E dans un EVT G, qui s'annule sur F, est continue. Tout supplémentaire de F est aussi supplémentaire topologique.

En effet, E/F est de dimension finie et séparé, donc la première assertion résulte du corollaire 1. Si H est un supplémentaire de F, le projecteur correspondant de E sur H est continu (car nul sur F), donc H est un supplémentaire topologique.

Corollaire 4. Soit E un EVT, F un sous-espace vectoriel fermé, G un sous-espace de dimension finie. Alors F + G est aussi fermé.

Soit en effet φ l'application canonique de E sur l'espace <u>séparé</u> E/F, $\varphi(G)$ est un sous-espace <u>fermé</u> de E/F (corollaire 2), donc son image réciproque par φ, qui n'est autre que $F + G$, est fermée.

13. <u>EVT localement précompacts</u>.

<u>Théorème 8 (Banach). Soit E un EVT séparé admettant un voisinage V de 0 qui est précompact. Alors E est de dimension finie.</u>

On prouve d'abord le

<u>Lemme. Soient E un EVT, F un sous-espace vectoriel, V un voisinage de 0 tel que</u> $F + V \neq E$ (p. ex. F <u>fermé et distinct de</u> E, <u>et</u> V <u>borné</u>). <u>Alors, pour</u> $0 < k < 1$, <u>on a</u> $V \not\subset F + k\,V$.

Supposons en effet $V \subset F + k\,V$, i.e. en introduisant $G = E/F$ et l'image canonique W de V dans E/F (qui est encore un voisinage de 0 dans G): $W \subset k\,W$. On en conclut $W \subset kW \subset k^2W \subset \ldots \subset k^nW$, d'où $W \supset \frac{1}{k^n} W$ pour tout n. Comme la réunion des $\frac{1}{k^n} W$ est G (W étant équilibré), on aurait donc $W = G$, i.e. $F + V = E$, contrairement à l'hypothèse. Si p.ex. F est fermé et distinct de E, et V borné, alors W est une partie bornée d'un espace séparé non nul G, donc $W \neq G$.

Démontrons le th. 8 par l'absurde; prenons un $0 < k < 1$; si E était de dimension infinie, on pourrait construire par récurrence (lemme) une suite (x_i) de points de V tel le que, E_n étant l'espace engendré par $x_1,\dots,x_n$, on ait $x_{n+1} \notin E_n + kV$. On aurait donc $x_i - x_j \notin kV$ pour $i \neq j$, ce qui est contradictoire avec la précompacité de V (kV étant un voisinage de 0).

14. Théorème des homomorphismes, du graphe fermé.

Théorème 9, dit Théorème des homomorphismes (Banach). Une application linéaire et continue u d'un EVT métrisable et complet E sur un autre F est un homomorphisme.

En considérant le quotient de E par le noyau de u, quotient qui est encore un EVT métrisable et complet (Nº4, prop. 6), le th. précédent équivaut au cas particulier suivant (théorème des isomorphismes): une application linéaire, continue et biunivoque u d'un EVT métrisable et complet E sur un autre F, est un isomorphisme du premier sur le second (i.e. l'application inverse est continue). Ou encore: Si on a, sur un espace vectoriel, deux topologies compatibles avec la structure vectorielle, et qui en font un EVT métrisable et complet, alors ces topologies sont incomparables, ou identiques. - La démonstration se fait en deux parties.

1. Sous les conditions du th. 9, pour tout voisinage U de 0 dans E, l'adhérence de u(U) est un voisinage

<u>de</u> 0 <u>dans</u> F. (N'utilise que l'hypothèse sur F).Comme u(E) = F, la réunion des ensembles n u(U) = u(n U) (n entier positif) est F, et comme F est un <u>espace</u> <u>de</u> <u>Baire</u>, un des n u(U) n'est pas rare. Donc u(U) n'est pas rare, i.e. son adhérence contient une partie ouverte non vide W. Soit U' = U - U, alors W - W est un voisinage de 0 dans F, contenu dans l'adhérence de u(U'). Donc l'adhérence d'un ensemble u(U') est un voisinage de 0, d'où notre assertion.

2. Le th. 9 résulte maintenant du

<u>Lemme</u>. <u>Soit</u> u <u>une application linéaire continue d'un EVT</u> E <u>dans un autre</u> F. <u>On suppose que</u> E <u>est métrisable et complet, et que pour tout voisinage</u> U <u>de</u> 0 <u>dans</u> E, <u>l'adhérence</u> $\overline{u(U)}$ <u>de</u> u(U) <u>est un voisinage de</u> 0 <u>dans</u> F. <u>Alors</u> u <u>est un</u> homomorphisme <u>de</u> E sur F.

(Cela implique donc à posteriori que F est métrisable et complet). De façon précise, soit U un voisinage de 0 dans E, nous montrons que tout $y \in \overline{u(U)}$ est de la forme ux, où $x \in \overline{U+V}$, V étant un voisinage arbitraire de 0 dans E (ce qui impliquera le lemme). Soit (U_i) une suite fondamentale de voisinages de 0 dans E, telle que $U_1 = U$, $U_2 + U_2 \subset U \cap V$, et $U_n + U_n \subset U_{n-1}$ pour $n \geqslant 3$. On en conclut que $U_{n+1} + \ldots + U_{n+k} \subset U_n$ si $n \geqslant 1$, et $U_1 + \ldots + U_k \subset \subset U + V$. Construisons par récurrence une suite (y_i) de points de F, telle que

$$y_i \in u(U_i) \qquad \text{et} \qquad y - (y_1 + \ldots + y_n) \in \overline{u(U_{n+1})}.$$

(La possibilité de la récurrence est immédiate). Soit $x_i \in U_i$ tel que $ux_i = y_i$. La suite (x_i) dans E est sommable, car E est complet et la somme d'un nombre fini des x_i pour des indices $i > n$, est toujours $\in U_n$. Soit $x = \sum x_i$, un passage à la limite immédiat prouve que $x \in \overline{V+U}$ et que $ux = \sum ux_i = y$. Le lemme est par là démontré.

Corollaire 1. Soient E et F deux espaces de Banach, U et V leurs boules unités, u une application linéaire de E dans F telle que $u(U)$ soit une partie dense de V. Alors u est un homomorphisme métrique de E sur F.

On a en effet démontré que tout élément de $\overline{u(U)} = V$ est l'image par u d'un élément de $\overline{U+ \varepsilon U} = (1 + \varepsilon)\overline{U}$, où $\varepsilon > 0$ est donné.

Corollaire 2. Soit E un EVT métrisable et complet, soient F et G deux sous-espaces vectoriels. Pour que F et G soient supplémentaires topologiques, il faut et il suffit qu'ils soient fermés, et supplementaires au sens algébrique.

(Appliquer le th. des isomorphismes à $F \times G$ et E).

Corollaire 3. Soient E et F deux EVT, E métrisable et complet, u une application linéaire et continue de E dans F. Si $u(E) \neq F$, $u(E)$ est maigre.

En effet, il résulte du lemme que si $u(E) \neq E$, il existe un voisinage U de 0 dans E tel que $\overline{u(U)}$ n'ait pas d'intérieur, or $u(E) = \bigcup_i n\, u(U)$.

Une autre forme importante du th. des homomorphismes est le

__Théorème 10, dit théorème du graphe fermé. Soit u une application linéaire d'un EVT métrisable et complet E dans un autre F. Pour que u soit continue, (il faut et) il suffit que son graphe soit fermé, ou encore qu'il n'existe pas de suite dans E tendant vers 0, telle que la suite des transformées tende vers une limite non nulle.__

Soit H le graphe de u, i.e. l'ensemble des couples $(x,ux) \in E \times F$, où x parcourt E. Si H est fermé, c'est un EVT métrisable et complet, et comme sa projection sur E est une application linéaire continue biunivoque de H sur E, c'est un isomorphisme d'EVT d'après le théorème des isomorphismes. Donc l'application inverse est continue, donc aussi u, qui s'obtient en composant l'application précédente avec la projection de H sur F. - Dire que le graphe H est fermé signifie que si (x_i) est une suite dans E tendant vers une limite x, et si la suite des $u(x_i)$ tend vers une limite y, alors $y = ux$. Remplaçant x_i par $x_i - x$, on voit aussitôt qu'on peut se borner au cas $x = 0$.

__Corollaire. Soient E et F deux EVT métrisables et complets, u une application linéaire de E dans F. Pour que u soit continue, il suffit déjà que u soit continue pour une topologie sur F séparée et moins fi-__

<u>ne que la topologie donnée de</u> F.

<u>Remarques</u>. Pratiquement, le th.10 signifie qu'une application linéaire d'un EVT E métrisable et complet E dans un autre F, définie "<u>de façon naturelle</u>", est toujours continue. En fait, on ne connait pas d'exemple <u>explicite</u> (i. e. ne faisant pas appel à l'axiome du choix) d'une application linéaire non continue d'un EVT métrisable et complet dans un autre. Cependant, il est facile de voir que si E est un EVT métrisable de dimension infinie, il existe des formes linéaires non continues sur E: prendre une suite (x_i) dans E tendant vers 0, les x_i linéairement indépendants, prendre sur l'espace vectoriel engendré par les x_i la forme linéaire qui est égale à 1 sur les x_i, et prolonger arbitrairement cette forme à tout E. - On notera que dans le th. des isomorphismes comme dans le th. du graphe fermé, le fait que les deux espaces soient <u>complets</u> est essentiel. Contre-exemple quand F n'est pas complet: l'application identique de $\mathcal{E}^{(m+1)}(K)$ dans $\mathcal{E}^{(m)}(K)$ (Nº 10) est une application linéaire continue et biunivoque de l'espace de Banach $E = \mathcal{E}^{(m+1)}(K)$ sur le sous-espace $F = u(E)$ de $\mathcal{E}^{(m)}(K)$, mais ce n'est pas un isomorphisme d'espace vectoriel topologique de E sur F. Contre-exemple quand E n'est pas complet: Soit F un EVT métrisable et complet de dimension infinie, v une forme linéaire non continue sur F (voir ci-dessus), E l'espace F muni de la topologie la moins fine rendant continues l'application identique et v (E est donc un EVT métrisable), soit u l'application identique de E sur F: u est

une application linéaire continue biunivoque de E sur F dont l'inverse n'est pas continue.

<u>Exercice 1</u>. Tout espace de Banach séparable E est isomorphe à un espace quotient de l'espace ℓ^1 des suites sommables (isomorphismes pour la structure normée). (Prendre une suite dense (x_i) dans la boule unité de E, et prouver que l'application $(\lambda_i) \longrightarrow \sum \lambda_i x_i$ est un homomorphisme métrique de ℓ^1 sur E). Tout espace de Banach E (séparable ou non) est isomorphe à un espace quotient d'un espace $\ell^1(I)$ (prendre pour I une partie dense de la boule unité de E).

<u>Exercice 2</u>. Soit M un espace compact, E un espace localement convexe métrisable et complet (resp. un espace de Banach), F un sous-espace vectoriel fermé de E, φ l'application canonique de E sur E/F. Montrer que l'application $f \longrightarrow \varphi \circ f$ de $C(M,E)$ dans $C(M,E/F)$ est un homomorphisme (resp. un homomorphisme métrique) du premier espace sur le second. (Utiliser le lemme du Nº 14 - resp. le corollaire 1 du th. 9 - et la démonstration du th. 4, Nº 9). Si M est seulement localement compact et dénombrable à l'infini, prouver l'analogue pour $C(M,E/F)$ et $C_0(M,E/F)$.

<u>Exercice 3</u>. Soit K un cube compact de R^n, soit F un espace de Banach dont les éléments sont des fonctions scalaires sur K, avec une topologie plus fine que la convergence simple. Si F contient les fonctions indéfiniment différentiables sur K, il existe un entier $m \geqslant 0$ tel que F

contient aussi les fonctions m fois continûment différentiables sur K. (Montrer que l'application identique de l'espace $\mathcal{E}(K)$ - voir Nº 10 - dans F est continue).

Exercice 4. Soient E et F deux EVT métrisables et complets, soit u une application linéaire continue de E dans F telle que $u(E)$ soit de codimension finie. Montrer que u est un homomorphisme. Plus généralement, deux sous-espaces vectoriels de E, images d'espaces vectoriels topologiques métrisables et complets par des applications linéaires continues, et qui sont supplémentaires algébriques, sont supplémentaires topologiques.

15. Le théorème de Banach-Steinhaus.

Théorème 11 (Théorème de Banach-Steinhaus). *Soit E un EVT métrisable et complet, F un EVT quelconque, M un ensemble d'applications linéaires continues de E dans F. Pour que M soit équicontinu, il faut et il suffit que pour tout $x \in E$, l'ensemble $M(x)$ des transformés de x par les $u \in M$ soit une partie bornée de F (i.e. que M soit une partie de $L(E,F)$ bornée pour la topologie de la convergence simple* - voir Nº 8, prop.15).

La nécessité est immédiate, on vérifie que, plus généralement

Proposition 22. *Si M est un ensemble équicontinu d'applications linéaires d'un EVT E dans un autre F, alors pour toute partie bornée A de E, l'ensemble*

$M(A) = \bigcup_{u \in M} u(A)$ *est une partie bornée de* F (*i.e.* M *est une partie bornée de* $L(E,F)$ *pour la topologie de la convergence uniforme sur les parties bornées de* E - voir Nº 8, th. 3 et prop.15).

Réciproquement, si sous les conditions générales du th. 11, l'ensemble $M(x)$ est une partie bornée de F pour tout $x \in E$, montrons que M est équicontinu. Il suffit de prouver l'équicontinuité à l'origine, i.e. que pour tout voisinage V de 0 dans F, l'ensemble $U = M^{-1}(V) = \bigcap_{u \in M} u^{-1}(V)$ est un voisinage V de 0 dans E. On peut supposer V fermé, alors U est fermé, de plus l'hypothèse sur M signifie exactement que les ensembles U sont équilibrés absorbants. Or il résulte du théorème de Baire qu'une partie fermée équilibré U de E a un intérier non vide (voir première partie de la démonstration du th. 9), donc que $U - U$ est un voisinage de 0 dans E. Il en résulte que $M^{-1}(V-V)$ est un voisinage de 0 dans E, d'où la conclusion voulue, car quand V varie, $V - V$ parcourt un système fondamental de voisinages de 0 dans F.

Corollaire du Théorème de Banach-Steinhaus. *Soit* E *un EVT métrisable et complet*, F *un EVT séparé quelconque*, (u_i) *une suite d'applications linéaires et continues de* E *dans* F, *convergeant pour tout* $x \in E$ *vers une limite* $u(x)$. *Alors* (u_i) *est une suite équicontinue, donc* u *est une application continue* (*et évidemment linéaire*) *de* E *dans* F, *et* (u_i) *tend vers* u

uniformément sur tout compact.

L'énoncé analogue pour un filtre à base dénombrable dans $L(E,F)$ est d'ailleurs encore valable, car on se ramène immédiatemment au cas d'une suite.

Une application particulièrement importante du th. de Banach-Steinhaus est le théorème suivant, qui redonne le précédent en faisant F = corps des scalaires:

<u>Théorème 12. Soient</u> E <u>et</u> F <u>deux EVT métrisables et complets,</u> G <u>un EVT quelconque. Pour qu'une application bilinéaire</u> u <u>de</u> $E \times F$ <u>dans</u> G <u>soit continue,</u> (il faut et) <u>il suffit qu'elle soit continue par rapport à chaque variable séparément. Plus généralement, pour qu'un ensemble</u> M <u>d'applications bilinéaires de</u> $E \times F$ <u>dans</u> G <u>soit équicontinu,</u> (il faut et) <u>il suffit que les</u> $u \in M$ <u>soient séparément continues, et que pour tout</u> $(x,y) \in E \times F$, <u>l'ensemble</u> $M(x,y)$ <u>des transformés</u> $u(x,y)$ <u>par les</u> $u \in M$, <u>soit une partie bornée de</u> G.

La nécessité des conditions est immédiate. La suffisance résultera du

<u>Lemme. Soit</u> E <u>un EVT métrisable et complet,</u> T <u>un espace topologique métrisable,</u> G <u>un EVT,</u> M <u>un ensemble d'applications</u> $(x,t) \longrightarrow u(x,t)$ <u>de</u> $E \times T$ <u>dans</u> G, <u>linéaires par rapport à</u> x. <u>Pour que</u> M <u>soit équicontinu, il faut et il suffit que les trois conditions suivantes soient satisfaites:</u> 1) <u>les</u> $u \in M$ <u>sont continues par rapport à</u> x; 2) <u>l'ensemble</u> M <u>est équicontinu par</u>

rapport à t, i.e. pour tout $x_o \in E$, l'ensemble des applications $t \longrightarrow u(x_o,t)$ de T dans G est équicontinu; 3) M est borné pour la topologie de la convergence simple, i.e. pour tout $(x,t) \in E\times T$, l'ensemble $M(x,t)$ des $u(x,t)$ pour $u \in M$ est une partie bornée de G. (Ce lemme a été pris dans un manuscript de N. Bourbaki).

Le lemme implique bien le th. 12, car les conditions du th. 12 impliquent les conditions du lemme (la condition 2) du lemme sera en effet vérifiée grâce au théorème de Banach-Steinhaus). Pour démontrer le lemme, on peut se ramener au cas où T est compact, grâce au fait suivant (dont la vérification est immédiate): Soit P un espace métrisable, M un ensemble d'applications de P dans un espace uniforme G: pour que M soit équicontinu au point $p \in P$, il faut et il suffit que pour toute suite (p_n) tendant vers p, l'ensemble des restrictions des $u \in M$ à l'ensemble des (p_n) et de p soit équicontinu au point p. - Quant T est compact, les hypothèses 2) et 3) impliquent que pour tout $x_o \in E$, l'ensemble des $u(x_o,t)$ pour $u \in M$ et $t \in T$ est une partie bornée de G (petit raisonnement de compacité). Mais en vertu du l'hypothèse 1) et du th. de Banach-Steinhaus, cela implique que l'ensemble de toutes les applications $x \longrightarrow u(x,t)$, quand u varie dans M et t dans T, est un ensemble équicontinu d'applications de E dans G. Si donc W est un voisinage de 0 dans G, et $(x_o,t_o) \in E\times T$, il existe un voisinage U de x_o tel que $u(x,t) - u(x_o,t) \in W$, dès que $x \in U$, quels que soient $t \in T$ et $u \in M$, et d'autre par en vertu de l'hypothèse 2) il existe un voisinage V de t_o dans T tel que $u(x_o,t) - u(x_o,t_o) \in W$ pour tout $t \in V$, quel que soit $u \in M$. On a donc $u(x,t) - u(x_o,t_o) \in W + V$ pour $x \in U$, $t \in V$, quel que soit $u \in M$. Comme W était un voisinage de 0 arbitraire dans G, il en résulte bien que M est équicontinu.

Exercice - Soit E un espace topologique, F une partie de E; on dit que F est maigre par rapport à E en un point x de E, s'il existe un voisinage V de x tel que $V \cap F$ soit partie maigre de E. a) Montrer que si E est un espace de Baire, et si F n'est maigre en aucun point $x \in F$, alors F est un espace de Baire. b) Montrer que si F est un espace de Baire et dense dans E, alors E est un espace de Baire et pour aucun point $x \in F$, F n'est maigre en x (par rapport à E). (Donc, si F est un sous-espace topologique dense de E, pour que F soit un espace de Baire, il faut et il suffit que E le soit, et que F ne soit maigre par rapport à E en aucun point $x \in F$). c) Soit E un EVT, F un sous-espace vectoriel dense. Pour que F soit un espace de Baire, il faut et il suffit que E le soit, et que F ne soit pas maigre dans E. En particulier, si F est un EVT métrisable, pour que ce soit un espace de Baire, il faut et il suffit qu'il ne soit pas maigre dans son complété. d) Soit E un EVT. Pour que E soit un espace de Baire, il faut et il suffit que E ne soit pas la réunion d'une suite d'ensembles fermés sans intérieur.

CHAPITRE 2.

LES THÉORÈMES GÉNÉRAUX DE DUALITÉ DANS LES ESPACES LOCALEMENT CONVEXES. OU: LE THÉORÈME DE HAHN-BANACH ET SES PRÈMIERES CONSEQUENCES.

1. Introduction.

Comme le titre l'indique, nous groupons dans ce Chapitre toutes les propriétés de dualité qui se groupent immédiatement autour du théorème de Hahn-Banach, pour autant qu'elles se rapportent aux espaces localement convexes les plus généraux. Des catégories particulières d'espaces seront étudiées dans les Chapitres suivants.

Contrairement au Chapitre précédent, la structure particulière du corps du réels, et en particulier sa structure d'ordre, vont maintenant intervenir de façon essentielle. Comme le corps des réels $\mathbf{R}$ est un sous-corps du corps des complexes C, tout espace vectoriel complexe E est aussi muni d'une structure d'espace vectoriel réel, soit E_o cet espace vectoriel réel. Pour une topologie sur E, il revient au même qu'elle soit compatible avec la structure vectorielle sur les réels, ou sur les complexes; si E est un EVT complexe, on peut donc considérer l'espace vectoriel topologique réel associé E_o. (Alors l'application $x \longrightarrow ix$ est un endomorphisme continu de l'EVT réel E_o, dont le carré est égal à -1, et il est facile de voir que réciproquement, si on se donne sur un EVT réel E_o un endomorphisme continu u de carré -1, E_o est l'EVT réel associé à une structure d'EVT complexe bien déterminée sur E_o; mais nous n'aurons pas besoin de celà).

Appelons <u>dual</u> d'un EVT E (réel ou complexe), et notons E', l'espace des formes linéaires <u>continues</u> sur cet espace. On a alors la

<u>Proposition 1. Soit E un EVT complexe, E_o l'EVT réel associé. Si à toute forme linéaire continue x' sur E, on fait correspondre la fonction $x \longrightarrow \mathcal{R}\langle x,x'\rangle$ sur l'ensemble $E = E_o$, on obtient une application biunivoque du dual E' de E sur le dual $(E_o)'$ de E_o, qui est un isomorphisme pour les structures vectorielles réelles de E' et $(E_o)'$. Si x' est la forme linéaire complexe correspondant à la forme linéaire continue réelle y', alors le noyau de x' est $V \cap iV$, où V est le noyau de y'.</u>

Pour le premier point, on note que $\mathcal{R}\langle x,x'\rangle$ est bien une forme linéaire <u>réelle</u> continue sur E, soit y', que x' s'exprime à l'aide de y' par

$$\langle x,x'\rangle = \langle x,y'\rangle - i\,\langle ix,y'\rangle$$

et que réciproquement, si y' est une forme linéaire <u>réelle</u> continue donnée sur E, la formule précédente définit x' comme une forme linéaire complexe continue. La caracterisation du noyau de x' est aussi immédiate sur cette formule.

2. Ensembles convexes, ensembles disqués.

Définition 1. Soit A une partie d'un espace vectoriel E. A est dite *convexe* si avec deux points x et y, A contient aussi le segment qui les joint.

Rappelons que le segment qui joint les points x et y est l'ensemble des points $x + (1 - \lambda)y$, où $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$. - Un ensemble réduit à un point, une sous-variété linéaire, un segment, sont des exemples d'ensembles convexes. Si F est un sous-espace vectoriel de E contenant A, il revient au même de dire que A est convexe dans F, ou dans E.

Proposition 2. *Soit E un espace vectoriel de dimension 1. Les parties convexes de E sont les intervalles (finis ou infinis, fermés ou ouverts ou semi-ouverts) de E.*

Démonstration immédiate.

Proposition 3. *Toute intersection, toute réunion filtrante croissante de convexes est convexe; l'image directe ou inverse d'un ensemble convexe par une applica- linéaire est convexe; si les E_i sont des espaces vectoriels et les $A_i \subset E_i$ des parties convexes, alors le produit des A_i est une partie convexe du produit des E_i; la somme d'une famille d'ensembles convexes A_i d'un espace vectoriel E est convexe; un translaté, un homothétique d'un ensemble convexe est convexe.*

Tout est trivial: Les cinq premières propriétés de stabilité se vérifient directment; le cas de la somme se ramène alors au cas d'une somme finie, puis on regarde $\sum A_i$ comme l'image du convexe $\prod A_i$ par l'application linéaire $(x_i) \longrightarrow \sum x_i$ de E^n dans E. En particulier, si A est convexe, $A + x$ est convexe pour tout $x \in E$, car $\{x\}$ est convexe.

Comme E est convexe, et qu'une intersection de convexes est un convexe, il existe un plus petit ensemble convexe contenant un ensemble A donné, on l'appelle l'*enveloppe convexe* de A. On le désigne par la notation $\Gamma(A)$.

Proposition 4. Soit A une partie d'un espace vectoriel. Alors son enveloppe convexe $\Gamma(A)$ est l'ensemble des sommes $\sum_{1 \leqslant i \leqslant n} \lambda_i x_i$, où les x_i sont des éléments de A et les λ_i des scalaires positifs de somme égale à 1.

Pour prouver la proposition 4, il suffit de montrer que l'ensemble de ces sommes $\sum \lambda_i x_i$ est bien convexe (ce qui est immédiat), et qu'une telle somme $\sum \lambda_i x_i$ est contenue dans tout convexe B contenant A. Or cela est trivial pour une somme de 1 ou 2 termes, et se vérifie par récurrence sur le nombre de termes dans le cas général.

Définition 2. Soit A une partie d'un espace vectoriel E. On dit que A est *disquée*, ou que A est un *disque*, si avec deux points x et y il contient aussi tous les points $\lambda x + \mu y$, où λ et μ sont deux scalaires tels que $|\lambda| + |\mu| \leqslant 1$.

Un tel ensemble est donc à fortiori convexe, et de plus cerclé, i.e. stable par les homothéties de norme $\leqslant 1$; la réciproque est vraie, on a même:

Proposition 5. Soit A une partie d'un espace vectoriel E. Les conditions suivantes sont équivalentes:

a) A est disqué;

b) A est convexe et cerclé;

c) A est convexe, et $\lambda A \subset A$ pour $|\lambda| = 1$.

Il suffit de prouver que c) implique b) et b) implique a). Admettons c) et prouvons que $\lambda A \subset A$ pour $|\lambda| \leqslant 1$; écrivant $\lambda = |\lambda| \dfrac{\lambda}{|\lambda|}$ quand λ n'est pas nul, on voit qu'on est ramené au cas $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$, or si $x \in A$, on a $-x \in A$, donc (A étant convexe) le segment $(-x,x)$ et en particulier les λx avec $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$ sont dans A. Admettons b), soient x et y dans A, et $|\lambda| + |\mu| \leqslant 1$, prouvons que $\lambda x + \mu y \in A$: on peut supposer λ et μ non nuls, et en écrivant encore $\lambda = |\lambda| \dfrac{\lambda}{|\lambda|}$, $\mu = |\mu| \dfrac{\mu}{|\mu|}$, se ramener au cas où λ et μ sont > 0; il suffit alors d'écrire

$$\lambda x + \mu y = (\lambda + \mu)\left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu} x + \frac{\mu}{\lambda+\mu} y\right).$$

Les propriétés de stabilité énoncées dans la proposition 3 sont toutes encore vraies pour les ensembles disqués, sauf qu'un translaté d'un ensemble disqué n'est en général plus disqué. On le montre soit directement comme dans prop.3, soit comme corollaire de la prop. 3, en utilisant le critère c) de la prop. 5. Comme un sous-espace vectoriel de E, et en particulier E lui-même, est manifestement disqué, on conclut encore qu'il existe une plus petite partie disquée de E contenant une partie A donnée; on l'appelle l'<u>enveloppe disquée</u> de A. On montre comme pour la proposition 5 que <u>l'enveloppe disquée de A est l'ensemble des sommes $\sum \lambda_i x_i$, où les x_i sont des points de A, et les λ_i des scalaires tels que</u> $\sum |\lambda_i| \leq 1$.

Dans le cas où le corps des scalaires est **R**, il n'existe que +1 et -1 comme scalaires de norme = 1, donc (prop. 5, critère c)) <u>les ensembles disqués sont alors les ensembles convexes symétriques</u> (A est dit <u>symétrique</u> si A=-A).

3. <u>Cônes convexes et espaces vectoriels ordonnés</u>.

Bien que la théorie élémentaire qui suit ne soit pas nécessaire au développment de la théorie des EVT elle-même, nous la donnons en raison de son intérêt dans les applications.

<u>Définition 3</u>. Une partie A d'un espace vectoriel E est appelée un <u>cône</u>, si $\lambda A \subset A$ pour tout $\lambda > 0$.

A peut contenir ou non l'origine; la définition signifie aussi que A est la réunion de demi-droites "ouvertes" d'origine O. L'ensemble vide, ou un sous-espace vectoriel, sont des cônes particuliers.

<u>Proposition 6. Soit A une partie d'un espace vectoriel. Pour que A soit un cône convexe, il faut et il suffit qu'il satisfasse aux deux conditions:</u>

$$A + A \subset A \quad \underline{\text{et}} \quad \lambda A \subset A \quad \underline{\text{pour}} \quad \lambda > 0.$$

Pour la nécessité, on écrit $x + y = 2(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y)$, qui montre que si $x, y \in A$, alors $x + y \in A$. La suffisance, est encore plus triviale.

On a encore pour les cônes convexes des <u>propriétés de stabilité</u> exactement identiques à celles de la proposition 3, sauf qu'un translaté d'un cône convexe n'est pas un cône convexe en général; ces propriétés se voient encore soit directement, soit comme corollaire de la prop. 3. Si A est une partie quelconque de E, il existe encore un plus petit cône convexe contenant A, qu'on appelle le <u>cône convexe engendré par</u> A. On voit aussitôt que <u>le cône convexe engendré par</u> A <u>est l'ensemble de toutes les sommes</u> $\sum \lambda_i x_i$, <u>où les</u> x_i <u>sont dans</u> A <u>et les</u> λ_i <u>des scalaires</u> >0.

<u>Définition 4</u>. Soit E un espace vectoriel. Une structure de pré-ordre sur E est dite <u>compatible avec la structure vectorielle de</u> E, si elle est invariante par translations et par homothéties strictement positives. Un espace vectoriel E muni d'une structure de (pré) ordre compatible avec la structure vectorielle est appelé <u>espace vectoriel (pré)ordonné</u>.

Les axiomes signifient donc que $x \leqslant y$ implique $x + z \leqslant y + z$ pour tout $z \in E$, et $\lambda x \leqslant \lambda y$ pour tout $\lambda > 0$. On en déduit aussitôt que $x_1 \leqslant y_1$ et $x_2 \leqslant y_2$ impliquent $x_1 + x_2 \leqslant y_1 + y_2$. - En particulier, $x \leqslant y$ équivaut à $y - x \geqslant 0$, donc le préordre est connu quand on connait l'ensemble P des éléments $\geqslant 0$ (appelés encore <u>éléments positifs</u>). D'après la prop. 6, on voit aussitôt que P est un cône convexe, contenant évidemment l'origine. Réciproquement, soit P un cône convexe dans E contenant 0, on vérifie immédiatement que la relation $y-x \in P$ définit sur E une relation de préordre (elle est réflexive parce que $0 \in P$, transitive parce que $P + P \subset P$), compatible avec la structure vectorielle (parce que $\lambda P \subset P$ pour $\lambda > 0$). On obtient ainsi la première partie de la

<u>Proposition 7</u>. 1) <u>Soit E un espace vectoriel. Alors il y a correspondance biunivoque entre les préordres sur E compatibles avec la structure vectorielle, et les cônes convexes dans E contenant l'origine. À un préordre compatible avec la structure vectorielle correspond le cône P des éléments positifs de E, et à P correspond le préordre défini par: $x \leqslant y$ équivaut à $y - x \in P$.</u>

2) <u>Pour qu'un espace vectoriel préordonné E soit ordonné, il faut et il suffit que $P \cap (-P) = \{0\}$; pour qu'il soit filtrant croissant, il faut et il suffit que</u> $P - P = E$. (P désignant le cône des éléments positifs).

La deuxième partie est laissée au lecteur.

4. <u>Correspondance entre semi-normes et disques equilibrés. Caractérisations des espaces localement convexes.</u>

<u>Théorème 1</u>. <u>Soit E un espace vectoriel, et soit</u> p <u>une semi-norme sur E. Alors l'ensemble U des</u> $x \in E$ <u>tels</u>

que $p(x) \leqslant 1$ ("boule unité" associée à p) est un disque équilibré, et p est connu quand on connait U, grâce à

$$p(x) = \inf_{\lambda > 0, x \in \lambda U} \lambda \; .$$

Réciproquement, si U est un disque équilibré dans E, la formule précedente (qui définit bien une fonction positive p, U étant équilibré) définit une semi-norme p sur E (appelée jauge de U). Sa boule unité est U augmenté des extrémités des intervalles découpés par U sur les droites réelles passant par 0.

Partie directe triviale. Pour la réciproque, il est d'abord immédiat que $p(\lambda x) = |\lambda| \, p(x)$ pour tout scalaire λ (parce que U est cerclé). Pour prouver $p(x+y) \leqslant p(x)+p(y)$, on note que $p(x) < \lambda$ et $p(y) < \mu$ implique $p(x+y) \leqslant \leqslant \lambda+\mu$, car

$$\lambda U + \mu U = (\lambda+\mu)\left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu} U + \frac{\mu}{\lambda+\mu} U\right) \subset (\lambda+\mu) U$$

(U étant convexe). La caractérisation de la boule unité associée à p est de nouveau triviale. - On a donc une correspondance biunivoque entre les semi-normes sur E d'une part, et les disques équilibrés dont l'intersection avec toute droite homogène réelle est fermée d'autre part. En particulier:

Corollaire 1. Soit E un EVT. Alors les semi-normes continues sur E correspondent biunivoquement aux voisinages disqués et fermés de 0 dans E.

<u>Théorème 2. Soit E un EVT. Les conditions suivantes sont équivalentes:</u>

a) E <u>est localement convexe</u> (voir Chapitre I, Nº 6, Définition 4);

b) E <u>admet un système fondamental de voisinages disqués de</u> 0;

c) E <u>admet un système fondamental de voisinages convexes de</u> 0.

L'équivalence de a) et b) résulte du corollaire 1, car dire que E est localement convexe signifie que les boules unités associées aux semi-normes continues sur E forment un système fondamental de voisinages de 0. Il suffit donc de montrer que c) implique b), et pour cela on note que si V est un voisinage convexe de 0, alors $\bigcap_{|\lambda|=1} \lambda V$ est un <u>voisinage</u> de 0 <u>convexe</u> (car intersection de convexes) et stable par homothéties de norme 1, donc disqué (prop. 5).

Soit E un espace vectoriel. La borne supérieure de toutes les topologies localement convexes sur E est une topologie localement convexe, qui est manifestement la topologie localement convexe la plus fine sur E. Pour qu'une partie <u>convexe</u> V de E soit un voisinage de 0, il faut et il suffit qu'elle soit équilibrée. La necessité est triviale, et pour voir qu'elle est suffisante, on peut encore supposer V disqué (sinon on le remplace par $\bigcap_{|\lambda|=1} \lambda V$); alors V contient l'intérieur de la boule unité définie par la semi-norme p jauge de V, donc est un voisinage de 0 pour la topologie semi-normée définie par p, d'où notre assertion. - Un point $x \in E$ est dit point interne d'un ensemble V, si $V-x$ est équilibré; on voit donc que si V est convexe, il revient au même de dire que x est intérieur à V pour la topologie localement convexe la plus fine, ce qui ramène une notion de nature purement algébrique à une notion topologique.

5. Ensembles convexes dans les EVT.

Proposition 8. *Soit E un EVT. Alors l'adhérence d'un ensemble convexe (resp. un disque, un cône convexe) est un ensemble convexe (resp. un disque, un cône convexe).*

L'adhérence de l'enveloppe convexe $\Gamma(A)$ d'un ensemble A est appelée *enveloppe convexe fermée de* A, et notée $\overline{\Gamma}(A)$. On définit de même l'enveloppe disquée fermée de A (ou disque fermé engendré par A), et le cône convexe fermé engendré par A.

Proposition 9. *Soit E un EVT, A une partie convexe de E. Alors $\mathring{A}$ est convexe, et s'il n'est pas vide, son adhérence est identique à l'adhérence de A. Si x_0 est un point intérieur de A, alors l'intérieur de A (resp. l'adhérence de A, respectivement la frontière de A) est la réunion des intervalles ouverts (resp. des intervalles fermés, resp. des extrémités finies des intervalles) définis par l'intersection de A avec les droites réelles passant par x_0.*

La démonstration résulte immédiatement du

<u>Lemme</u>. <u>Soit</u> A <u>une partie convexe d'un EVT</u> E, x <u>un point intérieur à</u> A, y <u>un point adhérent à</u> A; <u>alors le segment</u> (x,y) <u>privé de</u> y <u>est intérieur à</u> A.

Soit en effet $0 < \lambda \leqslant 1$, prouvons que $\lambda x + (1-\lambda)y$ est intérieur à A. Soit $U = \overset{\circ}{A}$. Considérons l'ensemble des $z \in E$ tels que $\lambda U + (1-\lambda)z \ni \lambda x + (1-\lambda)y$, i.e. l'ensemble $y + \frac{\lambda}{1-\lambda}(x - U)$; c'est un ensemble <u>ouvert</u> contenant y (car $x \in U$), donc (y étant adhérent à A) il contient un $z \in A$. Mais comme $U \subset A$, $\lambda U + (1-\lambda)z$ est alors un ensemble ouvert contenu dans A, et contenant $\lambda x + (1-\lambda)y$, d'où la conclusion.

<u>Corollaire</u>. <u>L'intérieur d'un disque est un disque, l'intérieur d'un cône convexe est un cône convexe.- Soit</u> p <u>une semi-norme continue sur</u> E, U <u>la boule unité associée</u>. U <u>est fermé, son intérieur est l'ensemble des</u> $x \in E$ <u>tels que</u> $p(x) < 1$, <u>sa frontière l'ensemble des</u> $x \in E$ <u>tels que</u> $p(x) = 1$.

<u>Exercice 1</u>. Soit A un ensemble convexe dans un espace vectoriel de dimension finie E; si la variété linéaire affine engendrée par A est E, alors A a un intérieur non vide.

<u>Exercice 2</u>. Soit A une partie d'un espace vectoriel E de dimension finie n. Montrer que l'enveloppe convexe

de A est l'ensemble des sommes à n termes $\sum \lambda_i x_i$, où $x_i \in A$, $\lambda_i \geqslant 0$, $\sum \lambda_i = 1$. En conclure que si A est compact, $\Gamma(A)$ est compact.

<u>Exercice 3</u>. Soit A une partie convexe compacte d'un espace vectoriel réel de dimension n, on suppose que l'intérieur de A n'est pas vide. Montrer que A est homéomorphe à la boule unité de R^n.

<u>Exercice 4</u>. Soient A e B deux parties convexes d'un EVT séparé E. Montrer que l'enveloppe convexe de $A \cup B$ est l'ensemble des sommes $\lambda x + (1 - \lambda)y$, avec $x \in A$, $y \in B$, $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$. <u>Corollaire</u>: Si A et B sont convexes compacts, alors $\Gamma(A \cup B)$ est compact. b) Soit A une partie convexe de E, contenant 0, montrer que son enveloppe disquée est contenue dans $A - A$ dans le cas des scalaires réels, dans $(A - A) + i(A - A)$ dans le cas des scalaires complexes. <u>Corollaire</u>: Si A est un ensemble convexe relativement compact, son enveloppe disquée est relativement compacte.

<u>Exercice 5</u>. Soit E un espace <u>localement convexe</u>. <u>Montrer que l'enveloppe disquée fermée d'une partie précompacte de</u> E <u>est précompacte</u>. Cas où toute partie bornée fermée de E est complète.

<u>Exercice 6</u>. Soit E un EVT, A une partie convexe de E, V un sous-espace vectoriel, alors $\overline{\Gamma}(A \cup V) = \overline{A+V}$. En conclure que si E est séparé, A est convexe <u>compact</u>, et V un sous-espace <u>fermé</u>, alors $\overline{\Gamma}(A \cup V) = A + V$. (Montrer que si A et B sont deux parties de E, A compacte,

B fermée, alors A+B est fermée).

6. Le théorème de Hahn-Banach.

Dans les deux numéros qui suivent, un *hyperplan* désigne un sous-variété linéaire affine de codimension 1, *non nécessairement homogène*. Si E est un EVT, on a vu au Chap. 1, Nº 12 (prop. 21 et th. 6) qu'un hyperplan V dans E est fermé si et seulement si son complémentaire a au moins un point intérieur, ou encore si et seulement si, V étant donné par l'équation $x \in V \Longleftrightarrow \langle x,x' \rangle = \alpha$, la forme linéaire x' sur E est *continue*. Notons qu'il y a donc correspondance biunivoque entre les hyperplans *non* homogènes fermés de E et les formes linéaires continues non nulles sur E, à la forme linéaire x' correspondant l'hyperplan V d'équation $\langle x,x' \rangle = 1$. Dire que V ne rencontre pas un ensemble A, signifie que x' ne prend pas la valeur 1 sur cet ensemble ; si A est disqué, cela signifie aussi que $|\langle x,x' \rangle| < 1$ pour $x \in A$. Si A est de plus ouvert, donc l'intérieur de la boule unité associée à une semi-norme continue p sur E, cela signifie aussi que $|\langle x,x' \rangle| \leqslant 1$ pour $x \in A$, i.e. $|\langle x,x' \rangle| \leqslant 1$ pour $p(x) \leqslant 1$, c'est à dire que x', considéré comme forme linéaire sur l'espace E semi-normé par p, est de *norme* $\leqslant 1$ (Chapitre 1, Nº 5).

Théorème de HAHN-BANACH I. Soit E un EVT réel ou complexe, soit U une partie de E, convexe, ouverte et non vide, soit V une sous-variété linéaire de E ne rencontrant pas U. Alors il existe un hyperplan fermé passant par V, et ne rencontrant pas U.

<u>Théorème de HAHN-BANACH I. Soit</u> E <u>un EVT réel ou complexe, soit</u> U <u>une partie de</u> E, convexe, ouverte <u>et non vide, soit</u> V <u>un sous-variété linéaire de</u> E <u>ne rencontrant pas</u> U. <u>Alors il existe un hyperplan fermé passant par</u> V, <u>et ne rencontrant pas</u> U.

<u>Démonstration</u>. En faisant une translation, on peut toujours supposer que $0 \in V$, donc que V est un sous-espace vectoriel. De plus, on peut se borner au cas des scalaires réels, car dans le cas complexe, si W désigne un hyperplan réel passant par V, ne rencontrant pas U, alors $W \cap iW$ est un hyperplan complexe satisfaisant à la même condition. Soit M l'ensemble des sous-espaces vectoriels de E contenant V et ne rencontrant pas U. Ordonné par inclusion, M est manifestement inductif, soit W un élément maximal, il suffit de prouver que W est un hyperplan qui sera nécessairement fermé puisque U est ouvert et contenu dans $\complement W$. Montrons que si alors W était de codimension $\geqslant 2$, W ne serait pas maximal. En effet, $F = E/W$ serait un EVT de dimension $\geqslant 2$, et l'image U' de U par l'application canonique φ de E sur F serait une partie ouverte, convexe, de F ne contenant pas 0; si nous construisons alors une droite homogène D dans F ne rencontrant pas U', la proposition sera établie, car $\overset{-1}{\varphi}(D)$ sera dans M, contiendra W et sera distinct de W. On est donc ramené à trouver une droite homogène D dans F ne rencontrant pas une partie convexe ouverte U' donnée, ne contenant pas l'origine. Comme dim.F $\geqslant 2$, on est aussitôt ramené au cas où F est de dimension 2 et on peut supposer F

séparé. De plus, on constate aussitôt que $C = \bigcup_{\lambda > 0} \lambda U'$ est un cône convexe ouvert ne contenant pas l'origine, et contenant U', de sorte qu'on peut remplacer U' par C. Comme le complémentaire de $\{0\}$ est connexe et manifestement distinct de C, C a au moins un point frontière x dans ce complémentaire. C étant ouvert, et un cône, les λx avec $\lambda > 0$ sont aussi points frontière, donc non contenus dans C. De même, si $\lambda \leqslant 0$, λx ne peut être élément de U, car alors tous les points du segment $(\lambda x, x)$ privé de x seraient dans U (Nº 4, lemme), ce qui n'est pas. Ainsi, la droite homogène passant par x répond à la question. CQFD.

Supposons maintenant que l'ensemble U du théorème précédent soit disqué. Il contient donc l'origine, donc la variété linéaire V n'est pas homogène; elle est donc, dans l'espace vectoriel F engendré par V, un hyperplan non homogène de F. Utilisant les remarques du début du Nº, on trouve: toute forme linéaire x' sur un sous-espace F, telle que $|\langle x,x'\rangle| < 1$ pour $x \in U \cap F$, est la restriction d'une forme linéaire y' sur E, telle que $|\langle x,y'\rangle| < 1$ pour $x \in U$. En d'autres termes:

<u>Théorème de HAHN-BANACH II</u>. <u>Soit</u> E <u>un EVT</u>, p <u>une semi-norme continue sur</u> E, F <u>un sous-espace vectoriel de</u> E, x' <u>une forme linéaire sur</u> F, <u>de norme</u> $\leqslant 1$ (<u>pour la semi-norme induite par</u> p). <u>Alors</u> x' <u>est la restriction à</u> F <u>d'une forme linéaire</u> y' <u>sur</u> E, <u>de norme</u> $\leqslant 1$ (<u>pour la semi-norme</u> p <u>sur</u> E).

Dans cet énoncé, nous avons omis de dire que x' et y' sont continues, car elles le sont automatiquement. Bien entendu, la topologie de E n'intervient pas en fait dans cet énoncé, mais seulement la donnée de la semi-norme p.

Corollaire 1. Soit E un espace vectoriel localement convexe, F un sous-espace vectoriel. Alors toute forme linéaire continue sur F est la restriction d'une forme linéaire continue sur E. Tout ensemble équicontinu de formes linéaires sur F est l'ensemble des restrictions d'un ensemble équicontinu de formes linéaires sur E.

Il suffit de noter qu'un ensemble A de formes linéaires, sur un espace localement convexe (F par exemple) est équicontinu si et seulement si il existe un voisinage U de 0 tel que toutes les $x' \in A$ soient majorées par 1 en module sur U; ou encore qu'il existe une semi-norme continue p sur F telle que toutes les $x' \in A$ soient de norme $\leqslant 1$ (quand E est semi-normé par p). - En particulier:

Corollaire 2. Soit E un espace localement convexe séparé. Alors pour tout élément non nul x de E, il existe $x' \in E'$ telle que $\langle x,x' \rangle = 1$.

Il suffit de considérer la forme linéaire $\lambda x \longrightarrow \lambda$ sur la droite F engendrée par x, forme linéaire continue car E donc F est séparé, et d'appliquer le cor.1 - Plus généralement, on prouve ainsi le

Corollaire 3. *Soit E un espace localement convexe séparé, soient $x_1,\dots,x_n$ des éléments linéairement indépendants de E, et $c_1,\dots,c_n$ des scalaires quelconques. Alors il existe une forme linéaire continue x' sur E telle que $\langle x_i,x'\rangle = c_i$ pour tout i.*

En particulier, soit, pour tout i, x'_i une forme linéaire continue sur E telle que $\langle x_j,x'_i\rangle = \delta_{ij}$ (indice de Kronecker) pour tout j; alors l'opérateur $\sum_i x'_i \otimes x_i$ dans E est une projection continue de E sur l'espace vectoriel engendré par les x_i, d'où (Chap. 1, Nº 11):

Corollaire 4. *Soit E un espace localement convexe séparé. Tout sous-espace vectoriel de dimension finie de E admet un supplémentaire topologique.*

Exercice. Soit E un EVT, P un cône convexe dans E contenant l'origine et ayant un intérieur non vide (c'est donc l'ensemble des éléments positifs de E pour une certaine structure d'espace vectoriel pré-ordonné filtrant sur E, (voir Nº 3); soit F un sous-espace vectoriel de E rencontrant l'intérieur de P. Montrer que toute forme linéaire "positive" sur E, i.e. qui prend des valeurs positives sur P, est continue, et que toute forme linéaire positive sur F est la restriction d'une forme linéaire positive sur E.

7. Séparation des ensembles convexes. Caracterisation de l'adhérence d'un ensemble convexe.

Dans ce Nº, nous n'envisageons que des espaces vectoriels *réels*.

Soit E un EVT de dimension $\geqslant 1$, x' une forme linéaire continue sur E, et α un scalaire. Alors l'ensemble M des $x \in E$ tels que $\langle x,x'\rangle \leqslant \alpha$ est un ensemble convexe fermé dont l'intérieur $\overset{\circ}{M}$ est l'ensemble des points $x \in E$ tels que $\langle x,x'\rangle < \alpha$, et dont la frontière est l'hyperplan V d'équation $\langle x,x'\rangle = \alpha$. Un ensemble tel que M est appelé un *demi-espace fermé*, et l'intérieur d'un tel ensemble un *demi-espace ouvert*. Comme les inégalités $\langle x,x'\rangle \geqslant \alpha$ et $\langle x,x'\rangle > \alpha$ s'écrivent $\langle x,-x'\rangle \leqslant -\alpha$ et $\langle x,-x'\rangle < -\alpha$, elles définissent aussi un demi-espace fermé M_1, resp. un demi-espace ouvert $\overset{\circ}{M}_1$. On constate qu'il existe exactement deux demi-espaces fermés dont la frontière soit l'hyperplan fermé V, a savoir les ensembles M et M_1 précédents; on les appelle les *demi-espaces fermés définis par l'hyperplan* (fermé) V. Leur intersection est V, tandis que les demi-espaces ouverts correspondants ne se rencontrent pas.

On dit qu'*un hyperplan fermé* V *sépare* (resp. *sépare strictement*) *deux parties* A *et* B *de* E, si A est contenu dans l'un et B dans l'autre des demi-espaces fermés (resp. ouverts) définis par V. Cela signifie donc qu'en mettant V sous forme d'une équation $\langle x,x'\rangle = \alpha$, x' prend des valeurs $\leqslant \alpha$ sur A et des valeurs $\geqslant \alpha$ sur B (resp. des valeurs $< \alpha$ sur A et des valeurs $> \alpha$ sur B), ou vice-versa; ou encore que le point α (dans $\mathbf{R}$) sépare (resp. sépare strictement) les ensembles $x'(A)$ et $x'(B)$. Si donc x' est donné, pour qu'il existe un α tel que l'hyperplan

$\langle x,x' \rangle = \alpha$ sépare A et B, il faut et il suffit qu'il existe α séparant $x'(A)$ et $x'(B)$; si en particulier A et B sont convexes, $x'(A)$ et $x'(B)$ sont convexes, donc des intervalles (prop. 2), et il est évident qu'il suffit que ces intervalles ne se rencontrent pas, i.e. que x' ne s'annule pas sur $A - B$, c'est à dire que l'hyperplan homogène W défini par x' ne rencontre $A - B$. Appliquant le th.de Hahn Banach I, on trouve la première partie de la

Proposition 10. *Soit E un EVT localement convexe, soient A et B deux parties convexes disjointes de E.*

1) *Si A ou B est ouvert, il existe un hyperplan fermé séparant A et B.*

2) *Si A est fermé, B compact, il existe un hyperplan fermé séparant strictement A et B.*

La deuxième partie se déduit aussitôt de la première: il résulte de l'hypothèse qu'il existe un voisinage U de 0 tel que $A + U$ et $B + U$ ne se rencontrent pas (cela résulte d'une propriété bien connue des ensembles compacts dans les espaces uniformes), et E étant localement convexe, on peut prendre U convexe. Alors $A + U$ et $B + U$ sont des ouverts disjoints, aux quels on applique 1).

Appliquant 2) au cas d'un convexe fermé et d'un ensemble réduit à un point, on trouve le

Théorème 3. *Soit A une partie convexe d'un espace localement convexe E. Pour que A soit fermé, il faut et il suffit qu'il soit l'intersection d'une famille de demi-espaces fermés.*

On en conclut aussitôt le résultat plus général en apparence:

<u>Corollaire 1</u>. <u>Soit</u> E <u>un espace localement convexe</u>, A <u>une partie de</u> E. <u>Alors l'enveloppe convexe fermée</u> $\overline{\Gamma}(A)$ <u>est l'intersection des demi-espaces fermés qui contiennent</u> A.

Dire que $x_0 \in E$ appartient à $\overline{\Gamma}(A)$ signifie donc aussi que pour toute $x' \in E'$ et tout scalaire α tels que $\langle x,x'\rangle \leqslant \alpha$ pour $x \in A$, on a $\langle x_0,x'\rangle \leqslant \alpha$.

<u>Corollaire 2</u>. <u>Soit</u> E <u>un espace localement convexe</u>, A <u>une partie de</u> E. <u>Alors l'espace vectoriel fermé engendré par</u> A <u>est l'intersection des hyperplans fermés qui contiennent</u> A.

On est en effet ramené à prouver que si V est un sous-espace vectoriel fermé, et $x \in \complement V$, il existe un hyperplan fermé contenant V, et non x, ce qui résulte aussitôt du th. 3 (mais encore plus rapidement de l'application directe du th. de Hahn-Banach I, en prenant un voisinage convexe U de x ne rencontrant pas V). - Explicitement, <u>un</u> $x \in E$ <u>appartient à l'espace vectoriel fermé engendré par</u> A <u>si et seulement si toute forme linéaire continue qui est nulle sur</u> A <u>est nulle au point</u> x.

<u>Définition 5</u>. Une partie A d'un EVT E est dite <u>totale</u>, si l'espace vectoriel fermé engendré par A est identique à E.

Le corollaire 2 précédent donne en particulier:

Corollaire 3. Soit E un espace localement convexe, A une partie de E. Pour que A soit totale, il faut et il suffit que toute forme linéaire continue sur E qui s'annule sur A soit identiquement nulle.

La proposition suivante est parfois utile:

Proposition 11. Soit E un EVT. Pour que E soit séparable, il faut et il suffit qu'il existe dans E une partie dénombrable totale.

La condition est manifestement nécessaire; soit réciproquement A une partie dénombrable totale, donc telle que l'espace vectoriel V engendré par A soit dense dans E. Comme l'ensemble des combinaisons linéaires rationnelles des éléments de A est dense dans V, et dénombrable, notre assertion suit.

Notons que le th. de Hahn-Banach II et le th. 3 précédent sont les formes les plus commodes pour utiliser le théorème de Hahn-Banach I (le plus général en fait). Les deux numéros qui suivent consistent essentiellement à exprimer le th. 3 dans un algorithme particulièrement maniable.

Exercice. Prouver le th. de Hahn-Banach I en admettant soit la proposition 10, soit le th. 3. (Se ramener, dans l'énoncé du th. de Hahn-Banach I, au cas où V est réduit à un point x; dans le cas où on admet le th. 3, distinguer d'abord le cas où $x \notin \overline{U}$, et traiter le cas où x est un point frontière de U par un passage à la limite, en supposant $0 \in U$; comparer Nº 8, exercice).

8. Système dual, topologie faible.

Définition 5. On appelle système dual un couple de deux espaces vectoriels E, E' muni d'une forme bilinéaire sur le produit $E \times E'$.

La valeur de cette forme au couple (x,x') est notée $\langle x,x' \rangle$. On dit aussi que les espaces E, E' sont mis en dualité par la forme $\langle x,x' \rangle$. La donnée d'une dualité entre E, E' équivaut aussi à la donné d'une application linéaire de E' dans le dual algébrique E^* de E, à $x' \in E'$ correspondant la forme $x \longrightarrow \langle x,x' \rangle$ sur E; il revient encore au même de se donner une application linéaire de E dans le dual algébrique E'^* de E'. - La dualité entre E et E' est dite séparée dans E' (resp. dans E) si l'application de E' dans E^* (resp. de E dans E'^*) qui lui correspond, est biunivoque. Alors n identifie d'ordinaire E' à un sous-espace vectoriel de E^* (resp. E à un sous-espace vectoriel de E'^*). Réciproquement, la donné d'un espace vectoriel E et d'un sous-espace vectoriel E' de son dual algébrique E^* définit un système dual (E,E'), séparé en E'; il est séparé en E si et seulement si tout $x \in E$ sur lequel s'annulent toutes les $x' \in E'$ est nul. - La dualité (E,E') est dite séparée si elle est séparée en E et E'.

Exemple important: Soit E un ELC, soit E' son dual, E et E' forment un système dual, séparé en E'. Il est séparé en E si et seulement si E est un espace topologique séparé (appliquer le th. de Hahn-Banach II, corollaire 2).

<u>Définition</u> <u>6</u>. Soit (E,E') un système dual. On appelle <u>topologie</u> <u>faible</u> sur E la topologie la moins fine sur E rendant continues les fonctions $x \longrightarrow \langle x,x'\rangle$, où $x' \in E'$. On définit de façon symétrique la topologie faible de E'. Ces deux topologies sont notées respectivement $\sigma(E,E')$ et $\sigma(E',E)$.

En particulier, si E est un ELC, E' son dual, alors (E,E') est un système dual, il lui correspond donc une topologie faible sur E et une topologie faible sur E'; quand on parlera de "la topologie faible" sur E ou E', il s'agira sauf spécification du contraire des topologies faibles précédentes.

Les topologies faibles de E et E' en font des espaces localement convexes. Pour que E soit séparé pour la topologie faible, il faut et il suffit que la dualité entre E et E' soit séparée en E. (On a le même critère pour E'; nous nous dispensons par la suite de répéter pour E' tous les énoncés donnés pour E). Notons que la topologie faible de E ne dépend que de l'image de E' dans E^*, donc c'est aussi la topologie faible définie par ce sous-espace de E^*.

Une partie de E est dite <u>faiblement</u> <u>fermée</u> (resp. <u>faiblement</u> <u>ouverte</u>, <u>faiblement</u> <u>compacte</u>, etc.) si elle est fermée (resp. ouverte, compacte, etc.) pour la topologie faible. On fera attention que si on part d'un ELC E, la notion de partie faiblement fermée, ou faiblement ouverte, de E est plus restrictive que la notion de partie fermée, ou ouverte; c'est l'inverse pour faiblement compact et compact.

Un système fondamental de voisinages faibles de 0 dans E est formé des ensembles des $x \in E$ tels que

$$|\langle x,x_i'\rangle| \leqslant 1$$

pour tout i, où (x_i') est un ensemble fini d'éléments de E'. Ce voisinage V contient le sous-espace vectoriel H formé des x tels que $\langle x,x_i'\rangle = 0$ pour tout i, d'où on conclut aussitôt que toute forme linéaire sur E qui est majorée en module sur V, est nulle sur H, donc une combinaison linéaire des formes linéaires définies par les x_i'. Donc

Proposition 12. Soit (E,E') un système dual. Alors les formes linéaires faiblement continues sur E sont exactement les formes provenant des $x' \in E'$.

Bien entendu, par raison de symétrie, la caractérisation analogue des formes linéaires faiblement continues sur E' est encore valable.

Corollaire. Soit E un ELC. Alors les formes linéaires sur E, continues pour la topologie initiale ou pour la topologie faible, sont les mêmes.

Théorème 4. Soit E un ELC, A une partie convexe de E. Pour que A soit fermée, il faut et il suffit que A soit faiblement fermée.

On peut d'abord se ramener au cas des scalaires réels, car on vérifie immédiatement à l'aide de la prop.1 que si E est un ELC complexe, sa topologie faible est identique à la topologie faible de l'espace vectoriel topologique réel associé. Si maintenant A est fermé, A est l'intersection d'une famille de demi-espaces fermés (th. 3); or un demi espace fermé est défini par une équation $\langle x,x'\rangle \leqslant \alpha$, où $x' \in E'$, donc c'est aussi un ensemble faiblement fermé, d'où résulte que A est faiblement fermé.

Corollaire. *Soit E un ELC, A une partie de E. Alors l'enveloppe convexe fermée de A est identique à son enveloppe convexe faiblement fermée. En particulier, son adhérence est identique à son adhérence faible.*

Théorème 4 bis. *Soit E un ELC, A une partie de E. Pour que A soit bornée, il faut et il suffit que A soit faiblement bornée.*

Il suffit de montrer que si A est faiblement bornée, elle est déjà bornée. Si d'abord E est un espace normé, alors l'application naturelle de E dans le dual E'^{*}, où E' est considéré comme un espace normé (voir Chap. 1, Nº 5), est un isomorphisme métrique (en vertu du th. de Hahn-Banach II, quand on prend pour F la droite engendrée par un $x \in E$). La topologie faible de E est alors celle induite par la topologie de la convergence simple dans le dual de E'. En vertu du théorème de Banach-Steinhaus (Chap. 1, Nº 15, th. 11) A est donc un ensemble *équicontinu* de formes linéaires sur E', puisque borné pour la convergence simple, donc A est aussi borné au sens de la norme. - Dans le cas où E est quelconque, on considère la topologie de E comme la moins fine des topologies rendant continues des applications linéaires données u_i de E dans des espaces normés E_i (Chap. 1, Nº 6, prop. 9) et prouver que A est bornée revient à prouver que les $u_i(A)$ sont des parties bornées de E_i (Chap. 1, Nº 7, prop. 11). Mais les u_i sont aussi manifestement continues pour les topologies faibles sur E et E_i, donc les $u_i(A)$ sont des parties faiblement bornées des E_i. On est ainsi ramené au cas particulier envisagé d'abord. Grâce au th. 4 bis, il n'y a pas d'inconvenient, si (E,E') est un système dual, de dire simplement "parties bornées", au lieu de "parties faiblement bornées" dans l'espace E ou E'.

La proposition 12, et surtout les ths. 4 et 4 bis, ramenant un grand nombre de questions relatives à un espace localement convexe E, à des questions relatives à sa topologie faible, il y a souvent intérêt à substituer cette dernière topologie à la topologie initiale, et raisonner en termes de systèmes duals. - On fera attention que la topologie faible d'un ELC E en fait rarement un espace complet. De façon precise:

<u>Proposition 13</u>. <u>Soit</u> (E,E') <u>un système dual séparé. Alors le dual algébrique</u> E'^* <u>de</u> E', <u>muni de la topologie faible</u> $\sigma(E'^*,E')$, <u>est l'espace complété de</u> E <u>muni de la topologie faible</u>.

En effet, E faible s'identifie à un sous-espace vec toriel topologie de E'^*, il faut seulement montrer que E'^* est complet et que E y est dense. Or E'^* est complet, car c'est un sous-espace <u>fermé</u> de l'espace de <u>toutes</u> les fonctions scalaires sur E' muni de la convergence simple, espace qui est complet. Et E est dense dans E'^*, car il suffit de montrer que toute forme linéaire continue sur E'^* qui est nulle sur E est nulle (Nº 7, th. 3, corollaire 3), or en vertu de prop. 12 toute forme linéaire continue sur E'^* provient d'un élément de E', d'où aussitôt la conclusion. -Notons que si (E,E') est seulement séparé en E, alors le complété de E faible s'identifie encore à l'adhérence de E dans l'espace complet E'^*, muni de la topologie $\sigma(E'^*,E')$.

<u>Exercice</u> <u>1</u>. Soit E un ELC. Pour qu'une suite (x_i) dans E tende faiblement vers une limite $a \in E$, il faut et il suffit que pour toute suite extraite de (x_i), a soit adhérent à l'enveloppe convexe de cette dernière.

<u>Exercice</u> <u>2</u>. Soit A une partie convexe d'un ELC . Pour que A soit faiblement compact, il faut et il suffit que toute base de filtre sur A formée d'ensembles convexes fermés, ait une intersection non vide.

(Pour la suffisance, montrer d'abord que A est faiblement précompact, car faiblement borné; puis montrer que A est faiblement complet. Pour ceci, si φ est un filtre de Cauchy faible sur A, noter que l'ensemble des enveloppes convexes fermées de $B \in \varphi$ est encore une base de filtre de Cauchy faible, et admet un point faiblement adhérent, qui est donc un point limite de ce filtre, et à fortiori de φ).

Exercice 3. Soit E un espace normé de dimension infinie. Montrer que E n'est pas faiblement complet (noter qu'il y a sur E' des formes linéaires non continues pour la topologie normée de E' - Voir Chap. 1, Nº 14, remarques -, et à fortiori non continues pour $\sigma(E',E)$).

9. Polarité.

Définition 7. Soit (E,E') un système dual, et soit A une partie de E. On appelle polaire de A et on note A^o, l'ensemble des $x' \in E'$ tels que $\mathcal{R}\langle x,x'\rangle \geqslant -1$ pour tout $x \in A$. On définit de façon analogue le polaire d'une partie de E'.

Les propriétés les plus immédiates de cette notion sont résumées dans la

Proposition 14. Soit (E,E') un système dual.

1) Le polaire d'une partie A de E est une partie de E' convexe, contenant l'origine, et faiblement fermée. Il ne change pas si on remplace A par l'enveloppe convexe faiblement fermée de $A \cup \{0\}$.

2) La transformation $A \longrightarrow A^o$ est décroissante. On a $(\lambda A)^o = \frac{1}{\lambda}(A^o)$ pour tout scalaire réel λ. Si A et B sont deux parties de E, on a $(A \cup B)^o = A^o \cap B^o$.

3) Si A est disqué, alors A^o est disqué, et identique à l'ensemble des $x' \in E'$ tels que $|\langle x,x'\rangle| \leqslant 1$ pour tout $x \in A$. Si A est un cône, A^o est un cône,

et identique à l'ensemble des $x' \in E'$ tels que $\mathcal{R}\langle x,x'\rangle \geqslant 0$ pour tout $x \in A$. Si A est un espace vectoriel, A^o est le sous-espace vectoriel de E' orthogonal à A, i.e. l'ensemble des $x' \in E'$ tels que $\langle x,x'\rangle = 0$ pour tout $x \in A$.

Si A est une partie de E, on pourra appeler *polaire absolu* de A l'ensemble des $x' \in E'$ tels que

$$|\langle x,x'\rangle| \leqslant 1$$

pour tout $x \in A$, et *cône supplémentaire* de A l'ensemble des $x' \in E'$ tels que $\mathcal{R}\langle x,x'\rangle \geqslant 0$ pour tout $x \in A$. La proposition 14, 3), nous dit que le polaire d'un disque est identique à son polaire absolu, que le polaire d'une cône est identique au cône supplémentaire. Comme on constate immédiatement que le polaire absolu d'un ensemble A ne change pas quand on remplace A par son eveloppe disquée, on voit que c'est aussi le polaire de l'enveloppe disquée de A; de même, le cône supplémentaire de A est identique au polaire du cône engendré par A.

Théorème 5 (dit "théorème des bipolaires"). Soit (E,E') un système dual, et soit A une partie convexe faiblement fermée de E contenant 0. Alors $A=(A^o)^o$.

Cela signifie que si $x_o \notin A$, il existe une $x' \in E'$ telle que $\mathcal{R}\langle x,x'\rangle \geqslant -1$ pour $x \in A$, et $\mathcal{R}\langle x_o,x'\rangle < -1$. Dans cette assertion, seule intervient en fait la structure de E considéré comme espace vectoriel topologique faible

<u>réel</u> (voir Nº 1). L'existence d'une forme linéaire x' telle que ci-dessus résulte alors immédiatement du Nº 7, th. 3.- Si A est une partie quelconque de E, alors son polaire A^o, donc son bipolaire $(A^o)^o$, ne change pas si on remplace A par l'enveloppe convexe faiblement fermée de $A \cup \{0\}$, d'où

<u>Corollaire 1. Soit A une partie quelconque de E. Alors l'enveloppe convexe faiblement fermée de $A \cup \{0\}$ est identique au "bipolaire" $(A^o)^o$ de A.</u>

De même, l'enveloppe disquée faiblement fermée de A est identique au polaire du polaire absolu de A; le cône convexe faiblement fermé engendré par A est identique au cône supplémentaire du cône supplémentaire de A.

Le mécanisme de la polarité, tel qu'il résulte de la prop. 14 et du th. 5, est résumé dans le

<u>Scholie. Soit (E,E') un système dual. Soit $K(E)$ l'ensemble des parties de E convexes, contenant l'origine et faiblement fermées, soit $K(E')$ l'ensemble analogue des parties de E'. $K(E)$ et $K(E')$ sont ordonnés par inclusion. Si à tout $A \in K(E)$ on fait correspondre son polaire A^o, et à tout $A' \in K(E')$ son polaire A'^o, on obtient une application biunivoque de $K(E)$ sur $K(E')$, et son application réciproque. L'application $A \longrightarrow A^o$ est un isomorphisme de l'ensemble ordonné $K(E)$ sur l'ensemble $K(E')$ muni de l'ordre inverse de son ordre naturel: Si $A,B \in K(E)$ alors $A \subset B$ équivaut à $A^o \supset B^o$. Le polaire de $\overline{\Gamma}(A \cup B)$ est $A^o \cap B^o$, le polaire de $A \cap B$</u>

est $\overline{\Gamma}(A^{\circ} \cup B^{\circ})$. On a $(\lambda A)^{\circ} = \frac{1}{\lambda}(A^{\circ})$ pour tout scalaire réel λ.

Enfin, la correspondance précédante entre $K(E)$ et $K(E')$, induit une correspondance biunivoque entre les disques faiblement fermés de E et les disques faiblement fermés de E', entre les cônes convexes faiblement fermés de E', et entre les sous-espaces vectoriels faiblement fermés de E et les sous-espaces vectoriels faiblement fermés de E'. Ces correspondances peuvent aussi s'obtenir comme il est dit dans la prop. 14, 3).

Notons que des deux formules $(\overline{\Gamma}(A \cup B))^{\circ} = A^{\circ} \cap B^{\circ}$ et $(A \cap B)^{\circ} = \overline{\Gamma}(A^{\circ} \cup B^{\circ})$, dont la première est triviale(prop. 14), la deuxième est un résultat non trivial à priori. Elle résulte ici du début du scholie (donc du th. 5) et de la première formule appliquée à A° et B° au lieu de A et B. On peut aussi remarquer que dans $K(E)$, $A \cap B$ et $\overline{\Gamma}(A \cup B)$ sont respectivement la borne inférieure et la bornue supérieure de A et B, donc doivent se transformer par polarité en la borne supérieure, resp. inférieure de A° et B°, en vertu du début du scholie. - Dans le cas où A et B sont des espaces vectoriels V et W, les formules précédentes deviennent

$$\overline{(V + W)}^{\circ} = V^{\circ} \cap W^{\circ}; \qquad (V \cap W)^{\circ} = \overline{V^{\circ} + W^{\circ}}$$

dont la première est triviale à priori, mais non la seconde.

Le th.5 est manifestement équivalent au th.3 énoncé pour un espace vectoriel muni d'une topologie faible (on peut toujours supposer en effet que l'ensemble convexe de l'énoncé du th. 3 contient 0). Par suite, la conjonction des théorèmes 4 et 5 est exactement équivalent au th. 3. Suivant les applications, c'est l'une ou l'autre de ces deux faces du th.3 qui est utilisée; ces énoncés particuliers sont le plus souvent maniables que le th. 3 lui-même. - Dans la suite, c'est surtout le théorème des bipolaires (th. 5) que nous aurons à utiliser.

Par la suite, la notion de <u>polaire absolu</u> nous sera plus utile que la notion de polaire de la définition 7 (utile par exemple dans les espaces vectoriels ordonnés). Dans tous les travaux utilisant la polarité, on appelle d'ailleurs polaire de A ce que nous appelons ici son polaire absolu; mais tant qu'on se borne aux ensembles disqués, ce qui ne présente pas d'inconvénient en pratique, on a vu que les deux notions coincident. - La notion de polaire absolu, introduite indépendamment par divers auters, a été exploitée systématiquement par Dieudonné-Schwartz. La notion plus générale de polaire (définition 7) est due à N.Bourbaki.

<u>Exercice</u>. Soit M un espace localement compact. Pour tout $t \in M$, soit ε_t la forme linéaire $f \longrightarrow f(t)$ sur $C(K)$. Montrer que la boule unité du dual $\mathcal{M}(M)$ de $C(M)$ est l'enveloppe disquée faiblement fermée de l'ensemble des ε_t. Une $\mu \in \mathcal{M}(M)$ est dite <u>positive</u> si $\langle f, \mu \rangle \geqslant 0$ pour $f \geqslant 0$. Montrer que l'ensemble des $\mu \in \mathcal{M}(M)$ qui sont positives est le cône convexe faiblement fermé engendré par les ε_t, et que l'ensemble des μ positives telles que $\|\mu\| \leqslant 1$

est l'enveloppe convexe faiblement fermée de l'ensemble des ε_t et de 0. En conclure que l'ensemble des μ positives de norme =1 est l'enveloppe convexe faiblement fermée de l'ensemble des ε_t (Montrer que si $\mu \geqslant 0$, alors $\|\mu\| = \mu(1)$).

10. Les topologies de $\mathfrak{S}$-convergence sur un dual.

Proposition 15. *Soit (E,E') un système dual, A une partie de E. Les conditions suivantes sont équivalentes:*

a) A est faiblement bornée;

b) Pour tout $x' \in E'$ l'ensemble des $\langle x,x'\rangle$, où $x \in A$, est borné;

c) A est faiblement précompacte.

L'équivalence de a) et b) est un cas particulier de Chap. 1, § 7, prop. 11. D'autre part, l'équivalence de b) et c) résulte de la caractérisation usuelle des parties précompactes dans un espace uniforme dont la structure uniforme est la moins fine de celles qui rendent uniformément continues certaines applications f_i de E dans des espaces uniformes E_i (ici les f_i sont les applications $x \longrightarrow \langle x,x'\rangle$ de E dans le corps des scalaires $\mathbf{k}$; on sait que les parties précompactes de $\mathbf{k}$ sont identiques à ses parties bornées.

Proposition 16. *Soit (E,E') un système dual, soit $\mathfrak{S}$ un ensemble de parties de E. Pour que sur E' la topologie de la $\mathfrak{S}$-convergence soit compatible avec la structure vectorielle, il faut et il suffit que les $A \in \mathfrak{S}$*

soient des parties faiblement bornées de E. S'il en est ainsi, E' muni de la $\mathfrak{S}$-convergence est un espace localement convexe; un système fondamental de voisinages de 0 pour cette topologie est obtenu en prenant les polaires abosolus des $A \in \mathfrak{S}$, et les intersections finies des homothétiques non nuls de tels polaires.

La première assertion résulte de la prop. 15 et du Chap. 1, Nº 18, th. 3; la deuxième assértion résulte du même théorème, et de la définition des polaires absolus. - On voit donc en particulier que la topologie de la $\mathfrak{S}$-convergence sur E' ne change pas si on remplace les $A \in \mathfrak{S}$ par leurs enveloppes disquées faiblement fermées; ni si de plus on adjoint à $\mathfrak{S}$ les enveloppes disquées faiblement fermées B de réunions finies d'homothétiques d'ensembles $A_i \in \mathfrak{S}$, et enfin tout disque faiblement fermé contenu dans un ensemble tel que B. On est alors ramené à un ensemble $\mathfrak{S}_0$ de disques faiblement bornés et faiblement fermés de E, invariant par homothéties non nulles, filtrant croissant et contenant tous les disques faiblement fermés qui sont contenus dans quelque ensemble $A \in \mathfrak{S}$. Alors on obtient évidemment un système fondamental de voisinages de 0 dans E', pour la topologie de la $\mathfrak{S}_0$-convergence, en prenant les polaires des $A \in \mathfrak{S}_0$. Mais alors il résulte du théorème des bipolaires qu'on ne peut plus adjoindre à $\mathfrak{S}_0$ d'autres disques faiblement fermés sans changer la topologie correspondante sur E'; de façon générale:

Proposition 17. Soit (E,E') un système dual, soit un ensemble de parties faiblement disquées et fai-

blement fermées de E, invariant par homothéties non nulles, filtrant croissant, et contenant avec tout ensemble A tous les disques faiblement fermés contenus dans A. Soit $\mathfrak{T}$ un ensemble quelconque de disques faiblement bornés et faiblement fermés de E. Pour que sur E' la topologie de la $\mathfrak{S}$-convergence soit plus fine que la topologie de la $\mathfrak{T}$-convergence, il faut et il suffit que $\mathfrak{T} \subset \mathfrak{S}$.

En effet, si $A \in \mathfrak{T}$, alors A^0 est un voisinage de 0 dans E' pour la $\mathfrak{T}$-convergence, donc (si cette topologie est moins fine que la $\mathfrak{S}$-convergence) contient un ensemble B^0, où $B \in \mathfrak{S}$, d'où on conclut $A \subset B$, d'où $A \in \mathfrak{S}$.

Corollaire 1. Sous les conditions de la prop.17, en supposant que $\mathfrak{T}$ satisfait aux mêmes conditions que $\mathfrak{S}$, pour que sur E' les topologies de la $\mathfrak{S}$-convergence et de la $\mathfrak{T}$-convergence soient identiques, il faut et il suffit que $\mathfrak{S} = \mathfrak{T}$.

Corollaire 2. Soit (E,E') un système dual, soient $\mathfrak{S}$ et $\mathfrak{T}$ deux ensembles de parties bornées de E. Pour que sur E' la topologie de la $\mathfrak{S}$-convergence soit plus fine que la topologie de la $\mathfrak{T}$-convergence, il faut et il suffit que tout $A \in \mathfrak{T}$ soit contenu dans l'enveloppe disquée faiblement fermée de la réunion d'un nombre fini d'homothétiques d'ensembles $A_i \in \mathfrak{S}$.

Ce corollaire est en effet équivalent à la prop.17, en vertu des remarques qui précédaient cette proposition.

Définition 8. Soit (E,E') un système dual. On appelle topologie forte, ou topologie de la convergence bornée sur E', la topologie de la convergence uniforme sur les parties bornées de E. Si E est un espace localement convexe, on appelle dual fort de E l'espace dual E' muni de la topologie de la convergence uniforme sur les parties bornées de E.

Comme les parties faiblement bornées d'un ELC E sont déjà bornées pour la topologie initiale (th. 4 bis), la topologie forte de E' ne dépend que du système dual (E,E'). D'après la définition 8, la topologie forte de E' est la plus fine des topologies localement convexes de $\mathfrak{S}$-convergence envisagées précédemment.

Proposition 17 bis. Soit (E,E') un système dual. Pour qu'une topologie localement convexe sur E' soit une topologie de $\mathfrak{S}$-convergence, pour un ensemble convenable $\mathfrak{S}$ de parties bornées de E, il faut et il suffit qu'il admette un système fondamental de voisinages V_i de 0 disqués et fermés pour $\sigma(E',E)$.

C'est nécessaire en vertu de la caractérisation des voisinages de 0 pour la $\mathfrak{S}$-convergence qu'on vient de donner; c'est suffisant, car si A_i est le polaire de V_i, on a $V = A_i^o$, donc la topologie envisagée sur E' est la topologie de la $\mathfrak{S}$-convergence, où $\mathfrak{S}$ est la famille des A_i. - Si on part d'un ELC E, on voit donc déjà, en permutant les rôles de E et E' dans la proposition, que la topologie de E

est une topologie de $\mathfrak{S}$-convergence pour un ensemble $\mathfrak{S}$ convenable de parties de E' (en utilisant le th. 4 bis) On va préciser $\mathfrak{S}$.

11. Les ELC comme duals munis d'une topologie de $\mathfrak{S}$-convergence.

Proposition 18. *Soit E un espace localement convexe, E' son dual, E^* son dual algébrique. Pour qu'une forme linéaire x' sur E soit continue, il faut et il suffit qu'il existe un voisinage disqué V de 0 dans E sur lequel x' soit majorée par 1 en module, i.e. tel que x' appartienne au polaire de V dans E^*. Pour qu'un ensemble A' de formes linéaires sur E soit équicontinu, il faut et il suffit qu'il existe un voisinage disqué V de 0 dans E tel que toutes les $x' \in A'$ soient majorées par 1 en module sur V, i.e. tel que A soit contenu dans le polaire de V dans E^*.*

La démonstration est immédiate.

Corollaire 1. *Soit E un ELC, et soit A une partie équicontinue du dual de E. Alors l'enveloppe disquée faiblement fermée de A est encore équicontinue.*

Corollaire 2. *Soit E un espace localement convexe. Alors il y a correspondance biunivoque, par polarité, entre les voisinages disqués et fermés de 0 dans E, et les parties équicontinues disquées faiblement fermées de E'.*

En effet, le polaire d'un voisinage de 0 dans E est une partie équicontinue de E' (prop. 18), et le polaire d'une partie équicontinue de E' est manifestement un voisinage de 0 dans E. Le corollaire résulte donc du théorème des bipolaires. - Tenant compte de la prop. 16, on trouve maintenant:

Corollaire 3. Soit E *un espace localement convexe, soit* E' *son dual. Alors la topologie de* E *est la topologie de la* $\mathfrak{S}$*-convergence, où* $\mathfrak{S}$ *est l'ensemble des parties équicontinues de* E' (*ou aussi l'ensemble des parties équicontinues disquées faiblement fermées de* E').

En particulier, si E est séparé, E apparait comme le dual de E' faible, avec la topologie de la $\mathfrak{S}$-convergence, où $\mathfrak{S}$ est comme ci-dessus. La méthode de topologisation étudiée au Nº 10 donne donc essentiellement *tous* les espaces localement convexes. La topologie d'un espace localement convexe est connue quand on connait les ensembles équicontinus de formes linéaires pour cette topologie.

Théorème 6. Soit E *un ELC. Alors les parties équicontinues de son dual* sont *des parties faiblement relativement compactes.*

D'après la proposition 18, on peut se borner à prouver que si V est un voisinage disqué de 0 dans E, alors le polaire V^{o} de V *dans* E^* est faiblement compact. Or V^{o} est une partie *fermée* de E^* faible, qui est un espace *complet* (voir prop. 13), donc V^{o} est faiblement complet. D' autre part, il résulte aussitôt de la prop. 15 que V^o est faiblement précompact, d'où la conclusion.

Exercice 1. Prouver le théorème de Hahn-Banach II comme conséquence du théorème des bipolaires (et du théorème 6 plus élémentaire). Prouver d'abord que toute forme linéaire continue x' sur le sous-espace F est la restriction d'une forme linéaire continue sur E, en appliquant le théorème des bipolaires au disque A formé des $x \in F$ tels que $|\langle x,x'\rangle| \leqslant 1$: il existe une $y' \in A^o \subset E'$ non identiquement nulle sur F, et sa restriction à F sera alors proportionnelle à x'; puis appliquer le théorème des bipolaires et Nº 5, exercice 6, pour calculer le polaire dans E' de $V \cap F$, où V est la boule unité associée à la semi-norme donnée sur E).

Exercice 2. a) Soit E un ELC séparable. Montrer que les parties faiblement compactes de E' sont métrisables.

b) Soit E un ELC métrisable; pour que E soit séparable, il faut et il suffit que les parties équicontinus de E' soient faiblement métrisables (utiliser a) pour la nécessité; et Chap. 1, Nº 9, prop. 16, pour la suffisance). Montrer que cela implique que E' est faiblement séparable.

c) Soit E un espace normé. Pour que E soit séparable, il faut et il suffit que la boule unité de E' soit faiblement métrisable.

Exercice 3. Soit E un espace vectoriel, E^* son dual algébrique. Il y a correspondance biunivoque entre les semi-normes p sur E et les disques faiblement compacts A de

E^*: à p correspond le polaire de la "boule unité" qui correspond à p, et inversement, à A correspond la semi-norme

$$p(x) = \sup_{x' \in A} \langle x, x' \rangle .$$

Si on part d'un espace vectoriel topologique E, alors dans la correspondence ci-dessus, les semi-normes <u>continues</u> sont celles qui correspondent à des disques faiblement compacts <u>contenus dans</u> E'.

12. <u>Le théorème de Mackey: formulation générale. Bidual d'un ELC.</u>

<u>Théorème 7</u> (<u>Mackey</u>). <u>Soit</u> (E,E') <u>un sytème dual séparé en</u> E, <u>et soit</u> $\mathfrak{S}$ <u>un ensemble de parties bornées disquées de</u> E, <u>filtrant croissant et stable par homothéties. Munissons</u> E' <u>de la topologie de la</u> $\mathfrak{S}$-<u>convergence. Alors le dual de</u> E' <u>est identique au sous-espace du complété faible</u> $\hat{E}$ <u>de</u> E, <u>réunion des adhérences faibles, dans</u> $\hat{E}$, <u>des ensembles</u> $A \in \mathfrak{S}$. <u>Pour qu'une partie de</u> $\hat{E}$ <u>soit un ensemble équicontinu de formes linéaires sur</u> E', <u>il faut et il suffit qu'elle soit contenue dans l'adhérence faible, dans</u> $\hat{E}$, <u>d'un ensemble</u> $A \in \mathfrak{S}$.

Il suffit de prouver la deuxième assertion. Or les parties équicontinues du dual de E' sont les parties du dual algébrique E'^* contenues dans le polaire, dans E'^*, d'un voisinage disqué de 0 (prop. 18), qu'on peut supposer de la forme A^0, où $A \in \mathfrak{S}$ (Nº 10). Or, d'après le théorème des bipolaires, le polaire de A^o dans E'^* est identique à l'adhérence faible du disque A, d'où la conclusion.

Corollaire 1. *Soit (E,E') un système dual, séparé en E, soit $\mathfrak{S}$ un ensemble de parties bornées de E, munissons E' de la topologie de la $\mathfrak{S}$-convergence. Alors le dual de E' est le sous-espace vectoriel du complété faible $\hat{E}$ de E engendré par les enveloppes disquées faiblement fermées, dans $\hat{E}$, des $A \in \mathfrak{S}$.*

On peut supposer les $A \in \mathfrak{S}$ disqués, il suffit de montrer que si on a un ensemble fini d'éléments A_i de $\mathfrak{S}$ et de scalaires λ_i, alors l'enveloppe disquée faiblement fermée de $\bigcup \lambda_i A_i$ dans $\hat{E}$ est contenue dans l'espace envisagé dans le corollaire; mais soit $\bar{A}_i$ l'adhérence faible de A_i dans $\hat{E}$, c'est un disque faiblement compact dans $\hat{E}$, d'où suit facilement que $\sum \lambda_i \bar{A}_i$ est un disque faiblement compact dans $\hat{E}$. Il contient $\bigcup \lambda_i A_i$, donc aussi l'enveloppe disquée faiblement fermée de cet ensemble dans $\hat{E}$, enveloppe qui est bien contenue dans l'espace vectoriel engendré par les $\bar{A}_i$.

Corollaire 2. *Soit (E,E') un système dual séparé en E, et soit $\mathfrak{S}$ un ensemble de parties bornées de E, munissons E' de la topologie de la $\mathfrak{S}$-convergence. Alors: 1) pour que le dual de E' soit contenu dans E, il faut et il suffit que les enveloppes disquées faiblement fermées (dans E) des $A \in \mathfrak{S}$ soient faiblement compactes; 2) pour que le dual de E' contienne E, il* faut et il suffit que l'espace vectoriel engendré par les enveloppes disquées faiblement fermées (dans E) des $A \in \mathfrak{S}$ soit identique à E; 3) donc pour que le dual de E' soit identique à E, il faut et il suffit que les deux conditions précédentes soient vérifiées.

Le cas de la topologie forte sur E' est particulièrement important.

Définition 9. Soit E un ELC. On appelle bidual de E et on note E", le dual de son dual fort E' (voir Nº10, définition 8), muni de la topologie de la convergence uniforme sur les parties équicontinues de E'.

On vérifie immédiatement que les parties équicontinues de E' sont fortement bornées, donc la topologie mise sur E" est bien localement convexe. - Comme le dual fort de E ne dépend que du système dual (E,E'), il s'ensuit que le bidual est connu, sauf sa topologie, quand on connait le système dual (E,E'). Ainsi, si on part d'un système dual (E,E'), il y a lieu d'appeler encore bidual de E le dual de E' fort (sans topologie explicitée à priori). Si E est un ELC séparé, il s'identifie à un sous-espace vectoriel de E", la topologie de E est manifestement celle induite par E"; et E" à son tour s'identifie à un sous-espace vectoriel du complété faible $\hat{E}$ de E (mais bien entendu la topologie de E" ne sera pas en général celle induite par $\hat{E}$). De façon precise, d'après le théorème de Mackey, E" est la réunion des adhérences faibles dans $\hat{E}$ des parties bornées de E, et plus généralement, les parties équicontinues de E" (considéré comme dual de E' fort) sont les parties de E" contenues dans l'adhérence faible d'une partie bornée de E.

Définition 10. Soit E un ELC. E est dit réflexif, s'il est séparé et identique à son bidual.

De même, si (E,E') est un système dual, il y a lieu de l'appeler réflexif en E si E faible est réflexif(et on part d'un ELC E, le fait qu'il soit réflexif ne dépend que du système dual (E,E'), d'après les remarques précédentes). La dernière partie du corollaire 2 du th. 7 donne ici le

Théorème 8. Soit E un ELC séparé. Pour que E soit réflexif, il faut et il suffit que ses parties bornées soient faiblement relativement compactes.

Corollaire. Soit E un ELC réflexif, F un sous-espace vectoriel fermé. Alors F est réflexif.

En effet, comme toute forme linéaire continue sur F est la restriction d'une forme linéaire continue sur E, la topologie faible de F est induite par la topologie faible de E. D'autre part, F est faiblement fermé (Nº 8, th.4),le corollaire résulte alors du critère du th. 8.

13. Topologies compatibles avec une dualité. La topologie de Mackey.

Dans ce Nº, nous mettons simplement la dernière partie du corollaire 2 du théorème 7 (théorème de Mackey) dans un langage différent.

<u>Définition</u> <u>11</u>. Soit (E,E') un système dual séparé en E'. Une topologie sur E est dite compatible avec la dualité (E,E') si elle est localement convexe, et si le dual de E pour cette topologie est identique à E'.

Ainsi la topologie faible $\sigma(E,E')$ est compatible avec la dualité (Nº 8, prop. 12) et c'est manifestement la moins fine des topologies sur E compatibles avec la dualité.

<u>Théorème</u> <u>9</u>. <u>Soit</u> (E,E') <u>un système dual séparé en</u> E'. <u>Pour qu'une topologie sur</u> E <u>soit compatible avec la dualité</u> (E,E'), <u>il faut et il suffit que ce soit la topologie de la</u> $\mathfrak{S}$-<u>convergence, où</u> $\mathfrak{S}$ <u>est un ensemble de disques faiblement compacts dans</u> E' <u>recouvrant</u> E'.

La condition est nécessaire en vertu de prop. 18, corollaire 3; elle est suffisante en vertu du théorème (de Mackey) 7, corollaire 3 (où on renverse seulement les rôles de E et E'). - Il y a donc, parmi les topologies sur E compatibles avec la dualité, une plus fine de toutes, savoir celle qui correspond à $\mathfrak{S}$ = ensemble de <u>tous</u> les disques faiblement compacts dans E'.

<u>Définition</u> <u>12</u>. Soit (E,E') un système dual, séparé en E'; on appelle <u>topologie de Mackey</u> sur E, et on note $\tau(E,E')$, la topologie de la convergence uniforme sur les disques faiblement compacts de E'. On appelle <u>topologie de Mackey associée</u> à la topologie d'un ELC donné E, la topologie $\tau(E,E')$ (où E' est le dual de E).

Le théorème 9 peut alors se formuler aussi ainsi:

Corollaire. *Les topologies sur E compatibles avec la dualité (E,E') sont exactement les topologies localement convexes comprises entre la topologie faible $\sigma(E,E')$ et la topologie de Mackey $\tau(E,E')$.*

En effet, pour une telle topologie, le dual de E' est compris entre les duals pour la topologie faible et la topologie de Mackey, i.e. identique à E'.

En la suite, nous référons à l'un quelconque des théorèmes 7, 8, 9, comme "théorème de Mackey". - Nous verrons au Chap. 3 qu'un ELC métrisable a toujours la topologie de Mackey.

Proposition 19. *Soit E un ELC. Pour qu'une partie disquée équilibrée V de E soit un voisinage de 0 pour la topologie de Mackey $\tau(E,E')$, il faut et il suffit que toute forme linéaire sur E, majorée par 1, en module, sur V, soit continue.*

La nécessité résulte immédiatement du th. de Mackey, car la forme linéaire considerée sera continue pour $\tau(E,E')$. Réciproquement, si la polaire de V dans E^* est contenu dans E', montrons que V est un voisinage de 0 pour $\tau(E,E')$. On peut supposer que V est la boule unité associée à une semi-norme convenable sur E (Nº 4, th.1), donc (théorème des bipolaires appliqué à V dans l'espace E muni de la semi-norme précédente) que V est le polaire dans E de V^0. Comme V^0 est un disque faiblement compact dans E' (appliquer le th.6 du N°11 à E considéré comme espace semi-normé), il s'ensuit que V est bien un voisinage de 0 pour $\tau(E,E')$.

Exercice 1. Montrer que dans l'énoncé du th.9 et de la définition 12, on peut remplacer le mot "disque" par "ensemble convexe" (voir N° 5, exerc. 4).

Exercice 2. Soit E un ELC séparé complet, (x_i) une suit bornée dans E, soit u l'application linéaire continue de ℓ^1 dans E qu'elle définit (voir Chap. 1, N° 9, exerc. 6). Montrer que pour que u soit continue pour la topologie $\sigma(\ell^1,c_o)$ (voir Chap. 1, N° 9, exercice 7) et la topologie faible de E, il faut et il suffit que (x_i) tende faiblement vers zéro. En conclure que si (x_i) est une suite tendant faiblement vers zéro dans un ELC séparé et complet, alors son eveloppe convexe fermée (resp. son enveloppe disquée fermée) est l'ensemble des sommes $\sum\lambda_i x_i$, où (λ_i) parcourt l'ensemble des suites positives telles que $\sum\lambda_i = 1$ (resp. où (λ_i) parcourt la boule unité de ℓ^1). (Montrer que les deux ensembles précédents sont faiblement compacts donc fermés, en appliquant le th. 6 à c_o et sont dual ℓ^1).

Exercice 3. a) Soit E un ELC métrisable complet, F un sous-espace vectoriel, x un point adhérent à F. Montrer que l'on peut trouver une suite bornée (x_i) dans F, et une suite positive sommable de scalaires (λ_i), telles que l'on ait $x = \sum\lambda_i x_i$ (cette série converge, voir Chap.1, N° 9, exerc. 6). Montrer que si (μ_i) est une suite quelconque de scalaires >0, on peut supposer ci-dessus que $\lambda_i \leq \mu_i$

pour tout i. b) En conclure que si x est un point adhérent à F, on a $x \in \overline{\Gamma}(K)$, où K est une partie compacte convenable de F (prendre pour K une suite tendant vers 0 dans F, contenant l'origine). c) Conclure de b) que si E est un ELC métrisable, pour que E soit complet, il faut et il suffit que l'enveloppe convexe fermée d'une partie compacte de E soit compacte (pour la necessité, voir Nº 5, exerc. 5). d) Conclure de a) que si E est un espace normé, E est complet si et seulement si toute série absolument convergente dans E est convergente.

<u>Exercice 4</u>. a) Soit E un ELC séparé complet, plus généralement un ELC dont les parties bornées et fermées sont complètes. On munit E' de la topologie de la convergence compacte. Montrer que le dual de E' est identique à E (appliquer le th. de Mackey et Nº 5, exerc. 5). b) Soit E un ELC métrisable, munissons son dual E' de la topologie de la convergence compacte. Montrer que le dual de E' s'identifie au complété de E (voir exercice 3), et est donc identique à E si et seulement si E est complet. En conclure que le th. 9 devient faux si on y supprime le mot "disqué".

<u>Exercice 5</u>. Soit E un espace localement convexe dont la topologie est identique à la topologie de Mackey associé . Montrer qu'il en est de même du complété de E.

<u>Exercice 6</u>. Soit μ une mesure bornée sur un espace localement compact M, soit A une partie convexe de $L^\infty = L^\infty(\mu)$. Montrer que si f est adhérente à A pour la to-

pologie faible de L^∞ considéré comme dual de L^1, il existe une suite (f_i) dans A telle que pour tout p, $1 \leqslant p < +\infty$, f_i tende vers f au sens de la topologie induite par L^p. (Noter que la topologie induite par L^p est la topologie de la convergence uniforme sur la boule unité de $L^{p'}$, qui est une partie faiblement compacte de L^1, $L^{p'}$ étant réflexif(si, comme il est loisible, on suppose $p > 1$); donc la topologie induite par L^p est moins fine que la topologie de Mackey $\tau(L^1,L^\infty)$, de sorte qu'il suffit d'appliquer le th. de Mackey et le th. 4 du Nº 9). Montrer que, réciproquement, si A est borné dans l'espace normé L^∞, alors l'adhérence de A dans l'espace normé L^1 est identique à son adhérence faible dans L^∞ (appliquer le th. 6 à A).

Exercice 7. Soit M un espace localement compact, soit $E = C_0(M)$, alors E' est l'espace des mesures bornées sur M. Identifions $\ell^1(M)$ à l'espace des mesures bornées discrètes sur M, et M à une partie de $\ell^1(M)$ en faisant correspondre à tout $t \in M$ la masse +1 au point t. Pour toute $X \in E''$, soit f_X la restriction de X à M, c'est une fonction bornée sur X i.e. un élément $f_X \in \ell^\infty(M)$. La restriction de X à $\ell^1(M)$ n'est autre que f_X quand on identifie $\ell^\infty(M)$ au dual de $\ell^1(M)$ (Chap. 1, Nº 9, exerc. 7).
1. Montrer que toute fonction bornée sur M, $f \in \ell^\infty(M)$, est de la forme f_X, où X est un élément de E" de norme $\|f\|$. (Identifier f à une forme linéaire sur les sous-espace de $\ell^1(M)$ de E', et appliquer Hahn-Banach; ou procéder directement, en prouvant que la boule unité de $E = C_0(M)$ est dense

pour la convergence simple dans la boule unité de $\ell^\infty(M)$). En conclure que si M est infini, i.e. E de dimension infinie, alors E n'est pas réflexif. 2. Un espace $L^1(\mu)$ (construit sur une mesure positive μ sur un espace localement compact) n'est réflexif que s'il est de dimension finie, i.e. μ somme d'un nombre fini de masses ponctuelles. (Noter que le dual de L^1, qui est L^∞ comme il est bien connu, est isomorphe en vertu d'un classique théorème de Stone-Gelfand à un espace $C(M)$, M compact, et que si $L^1(\mu)$ est réflexif, son dual l'est, ce qui permet de conclure à l'aide de 1º.)

14. Complété d'un espace localement convexe.

Théorème 10. *Soit (E,E') un système dual séparé, soit $\mathfrak{S}$ un ensemble filtrant croissant de disques bornés de E tel que l'espace vectoriel engendré par leur réunion soit identique à E. Munissons E' de la topologie de la $\mathfrak{S}$-convergence, et soit $\hat{E}'$ l'ensemble des formes linéaires sur E dont les restrictions à tous les $A \in \mathfrak{S}$ sont faiblement continues. Alors $\hat{E}'$ est un espace localement convexe séparé complet, et E' est un sous-espace vectoriel topologique dense de $\hat{E}'$; en d'autres termes, l'EVT $\hat{E}'$ est l'espace complété de E' (pour la topologie de la $\mathfrak{S}$-convergence).*

Signalons tout de suite les corollaires suivants:

Corollaire 1. *Sous les conditions du théorème 10, pour que E' muni de la topologie de la $\mathfrak{S}$-convergence* *soit complet, il faut et il suffit que toute forme linéaire sur* E *dont les restriction aux* $A \in \mathfrak{S}$ *sont faiblement continues, soit faiblement continue.*

Corollaire 2. Soit E *un ELC séparé; alors le complété de* E *s'identifie à l'espace des formes linéaires sur* E' *dont les restrictions aux parties équicontinues sont faiblement continues, quand cet espace est muni de la topologie de la convergence uniforme sur les parties équicontinues de* E'.

Corollaire 3. Soit E *un ELC séparé. Pour que* E *soit complet, il faut et il suffit que toute forme linéaire sur* E' *dont les restrictions aux parties équicontinues sont faiblement continues, soit déjà faiblement continue, i.e. soit élément de* E.

(C'est ce dernier énoncé qui est le plus utile).

Démonstration. 1) On considère d'abord le cas particulier (le plus important en pratique, car il contient le corollaire 3) où les $A \in \mathfrak{S}$ sont faiblement compacts. Alors pour tout $x' \in \hat{E}'$, et $A \in \mathfrak{S}$, $x'(A)$ est un ensemble compact donc borné du corps des scalaires, donc E' est bien localement convexe pour la $\mathfrak{S}$-convergence. De toutes façons, $\hat{E}'$ est complet, car c'est un sous-espace uniforme *fermé* de l'espace de *toutes* les applications de E dans le corps **k**, muni de la $\mathfrak{S}$-convergence, espace qui est complet. La topologie de E' est évidemment celle induite par $\hat{E}'$, et enfin E' est dense dans $\hat{E}'$; en effet cela signifie que toute forme linéaire continue sur $\hat{E}'$ qui est nulle sur E' est identiquement nulle (Nº 7, th. 3, corollaire 3), or les $A \in \mathfrak{S}$ sont évidemment encore compacts pour $\sigma(E,\hat{E}')$ (puisque les $x' \in E'$ ont des restrictions aux $A \in \mathfrak{S}$ qui sont déjà continues pour $\sigma(E,E')$) de sorte que le dual de $\hat{E}'$ est identique à E (th. de Mackey), d'où aussitôt la conclusion.

2) Cas général. - On utilise le lemme suivant, ayant son intérêt propre:

<u>Lemme</u>. <u>Soit</u> E <u>un ELC</u>, A <u>une partie convexe symétrique de</u> E, u <u>une application linéaire de</u> E <u>dans un ELC</u> F. <u>Pour que la restriction de</u> u <u>à</u> A <u>soit uniformement</u> continue, <u>il suffit déjà que cette restriction soit</u> continue <u>à</u> l'origine.

En effet, il faut trouver pour tout voisinage V de 0 dans F un voisinage U de 0 dans E tel que $x,y \in A$, $x-y \in U$ implique $u(x) - u(y) \in V$, soit $u(x-y) \in V$. Or on aura $x-y \in A-A = 2A$, donc il suffit que $u(2A \cap U) \subset V$, soit $u(A \cap \frac{1}{2}U) \subset \frac{1}{2}V$, et d'après l'hypothèse un tel U existe en effet.

Appliquant le lemme à la situation du th. 10, on voit que pour tout $x' \in \hat{E}'$, la restriction de x' à tout $A \in \mathfrak{S}$ est uniformément faiblement continue, donc se prolonge par uniforme continuité en une fonction x'_A sur l'adhérence faible $\bar{A}$ de A dans E'^*. Soit E_1 l'espace vectoriel engendré par les $\bar{A}$, soit $\mathfrak{S}_1$ l'ensemble des disques faiblement compacts $\bar{A}$ dans E_1. Si $x \in E_1$, on a $\lambda x \in \bar{A}$ pour un sca laire $\lambda > 0$ et un $A \in \mathfrak{S}$ convenables, et on verifie aussitôt que $\frac{1}{\lambda} x'_A(\lambda x)$ ne dépend pas du choix du couple (λ, A) (car $\mathfrak{S}$ est filtrant), soit $\langle x,x'\rangle$ sa valeur, et que la fonction $\langle x,x'\rangle$ ainsi définie sur $E_1 \times \hat{E}'$ est bilinéaire. Enfin, pour cet accouplement de E_1 et $\hat{E}'$, $\hat{E}'$ s'identifie à l'espace des formes linéaires sur E_1 dont les restrictions aux $A_1 \in \mathfrak{S}_1$ sont continues, et l'ancienne topologie de la $\mathfrak{S}$-convergence est identique à la topologie de la $\mathfrak{S}_1$-convergence. Comme le système $(E_1, \hat{E}')$, $\mathfrak{S}_1$, $\hat{E}'$ satisfait aux conditions de la première partie de la démonstration, il s'ensuit donc bien que $\hat{E}'$ est localement convexe, et le complété de E'.

<u>Exercice 1</u>. Soit E un ELC, A une partie disquée de E, $x' \in E^*$. a) Pour que la restriction de x' à A soit continue, il faut et il suffit que pour tout $\varepsilon > 0$, l'intersection de A avec l'hyperplan d'équation $\langle x,x'\rangle = \varepsilon$ soit relativement fermée dans A. (Utiliser le lemme, et montrer que si U est un voisinage disqué de 0 dans E tel que $U \cap A$ ne rencontre pas V, alors $|\langle x,x'\rangle| < \varepsilon$ pour $x \in U \cap A$; noter qu'on ne se sert que du fait que $0 \notin \overline{A \cap V_\varepsilon}$). b) Conclure de a) que pour que la restriction de x' à A soit continue, il faut et il suffit qu'elle soit continue pour la topologie induite par la topologie faible de E.

<u>Exercice 2</u>. Soit E un ELC séparé, A une partie convexe de E. Montrer que le complété de A s'identifie à l'ensemble des $x \in E'^*$ qui sont faiblement adhérents à A

et définissent des formes linéaires sur E' dont les restrictions aux parties équicontinues de E' sont faiblement continues (se ramener au corollaire 2 du th. 10, en utilisant le th. 4, corollaire, appliqué au complété de E).

Exercice 3. Déduire la prop. 13 du th. 10.

Exercice 4. Soit E un ELC séparé et complet. Si E' fort est réflexif, alors E est réflexif (montrer que toute forme linéaire fortement continue sur E' est faiblement continue, en utilisant le corollaire 3 du th. 10). Montrer qu'il suffit de supposer seulement les parties bornées et fermées de E soient complètes (procéder comme avant, mais en utilisant le th. 7 et l'exercice 2). - Remarque: ces résultats sont aussi des cas particuliers de résultats plus généraux, que nous étudions au §18).

Exercice 5. Soit E un espace vectoriel, A une partie convexe symétrique. Montrer que si deux topologies localement convexes sur E induisent sur A le même système de voisinages de 0, elles induisent aussi les mêmes structures uniformes. (C'est un corollaire du lemme de ce Nº).

15. La dualité pour les sous-espaces, quotients, produits, limites projectives.

Soit E un ELC, F un sous-espace vectoriel. Si à toute $x' \in E'$ on fait correspondre sa restriction à F, on obtient une application linéaire de E' dans F' dont le noyau est l'orthogonal F^o de F dans E'; cette application applique même E' sur F' (th. de Hahn-Banach II, corollaire 1), donc F' peut s'identifier à E'/F^o: alors, les parties équicontinues de F' sont les images canoniques des parties équicontinues de E' (même référence). De l'identité $F' = E'/F^o$ résulte aussi trivialement que la topologie faible $\sigma(F,F')$ de F est identique à la topologie induite par la topologie faible $\sigma(E,E')$ de E. - D'autre part, il est trivial que le dual de E/F s'identifie à l'espace des formes linéaires sur E s'annulant sur F, et qui sont continues, i.e. à F^o; les parties équicontinues du dual de E/F s'identifient alors aux parties équicontinues de E' contenues dans F^o. Si E_s désigne E muni de $\sigma(E,E')$, et si on applique la dernière assertion à E_s/F, on trouve que les parties équicontinues du dual de E_s/F sont les parties de F^o qui sont contenues et bornées dans un sous-espace vectoriel de dimension finie, i.e. exactement les parties équicontinues du dual de $(E/F)_s$; par suite, la topologie faible associée à l'ELC E/F est identique à la topologie quotient de la topologie faible de E. En résumé:

<u>Proposition 20</u>. <u>Soit E un ELC, F un sous-espace vectoriel. Munissons F de la topologie induite par E, E/F de la topologie quotient. Alors le dual de F, s'identifie à E'/F^o, les parties équicontinues de ce dual sont les images canoniques des parties équicontinues de E', la topologie faible de F est identique à la topologie induite par la topologie faible de E. Le dual de E/F s'identifie à F^o, les parties équicontinues de ce</u>

dual sont les parties équicontinues de E' *contenues dans* F^o, *enfin la topologie faible de* E/F *est identique à la topologie quotient de la topologie faible de* E.

Ce qui concerne les topologies sur les duals est résumé dans la

Proposition 21. Soit E *un ELC,* F *un sous-espace vectoriel,* $\mathfrak{S}$ *un ensemble de parties bornées de* E, $\mathfrak{S}_1$ *l'ensemble des intersections* $A \cap F$, *où* A *parcourt* $\mathfrak{S}$, $\varphi(\mathfrak{S})$ *l'ensemble des images canoniques dans* E/F *des* $A \in \mathfrak{S}$.

1) *La topologie de la* $\varphi(\mathfrak{S})$*-convergence dans le dual* F^o *de* E/F *est identique à la topologie induite par la* $\mathfrak{S}$*-convergence dans* E'.

2) *Supposons* E *séparé,* F *fermé,* $\mathfrak{S}$ *filtrant croissant et les* $A \in \mathfrak{S}$ *disqués et faiblement compacts. Alors dans le dual* E'/F^o *de* F, *la topologie de la* $\mathfrak{S}_1$*-convergence est identique à la topologie quotient de la topologie de la* $\mathfrak{S}$*-convergence dans* E'.

1) est trivial. Pour prouver 2), on peut supposer évidemment $\mathfrak{S}$ stable par homothéties; considérons sur E'/F^o la topologie quotient de la $\mathfrak{S}$-convergence, d'après la prop. 21 le dual de cet espace est l'orthogonal de F^o dans le dual de E'; or le dual de E' est l'espace vectoriel réunion des $A \in \mathfrak{S}$ (th. de Mackey) et l'orthogonal de F^o dans cet espace est la trace de F sur cet espace (car F est fermé); de plus, les parties équicontinues du dual de E'/F^o sont les

parties du dual qui sont équicontinues dans le dual de E', (prop. 20), i.e. contenues dans un $A \in \mathfrak{S}$. Ce sont donc aussi les ensembles contenus dans un $A_1 \in \mathfrak{S}_1$, donc exactement les ensembles qui sont équicontinus quand E'/F^o est muni de la $\mathfrak{S}_1$-convergence; d'où l'identité des deux topologies envisagées sur E'/F^o.

Corollaire 1. Soit E *un ELC,* F *un sous-espace vectoriel. Alors la topologie faible du dual de* E/F *est identique à la topologie sur* F^o *induite par la topologie faible de* E'*; si* F *est fermé, la topologie faible de* $F' = E'/F^o$ *est identique à la topologie quotient de la topologie faible de* E'.

Corollaire 2. Soit E *un ELC réflexif,* F *un sous-espace vectoriel fermé. Alors* F *est réflexif, et le dual fort de* F *s'identifie au quotient du dual fort* E' *de* E *par le sous-espace* F^o.

Il suffit de conjuguer la prop. 21 et le théorème 8, corollaire.

Remarquons que dans le cas général où les $A \in \mathfrak{S}$ ne sont pas supposés faiblement compacts, la topologie de la $\mathfrak{S}_1$-convergence sur le dual de F est moins fine que la topologie quotient de la $\mathfrak{S}$-convergence dans E', et peut être strictement moins fine; ainsi, on peut trouver un espace E métrisable et complet, et un sous-espace vectoriel fermé F, tels que le dual fort de F ne s'identifie pas à un quotient de E' fort. Remarquons aussi qu'en vertu de prop. 21 et de

Nº 1, prop. 17, corollaire 2, la topologie du dual fort de E/F, à priori plus fine que la topologie induite par E' fort, lui est identique si et seulement si toute partie bornée de E/F est contenue dans l'adhérence de l'image canonique d'une partie bornée de E; cette condition peut être infirmée même en prenant pour E un espace métrisable et complet réflexif. Cependant, nous verrons au Nº 17, prop. 32 que les topologies fortes se comportent bien chaque fois que E est un espace <u>normé</u>.

Considérons une famille finie (E_i) d'ELC; une forme linéaire x' sur le produit est déterminée biunivoquement par le système (x'_i) de ces restrictions aux sous-espaces E_i, car on aura

$$\langle (x_i), x' \rangle = \sum_i \langle x_i, x'_i \rangle .$$

Il est manifeste que x' est continue si et seulement si les x'_i sont des formes linéaires continues sur les E_i, et que x' parcourt un ensemble équicontinu se et seulement si il en est ainsi de chaque x'_i. Donc

<u>Proposition 22. Soit (E_i) une famille finie d'ELC, alors le dual de $\prod E_i$ s'identifie, par l'accouplement écrit ci-dessus, au produit $\prod E'_i$ des duals. Les parties équicontinues du dual de $\prod E_i$ sont celles contenues dans un produit $\prod A_i$, où pour tout i, A_i est une partie équicontinue de E'_i.</u>

Corollaire 1. *Soit* (E_i) *une famille quelconque d'ELC; alors le dual du produit* $\prod E_i$ *s'identifie à la somme directe* $\sum E_i'$ *des duals. Les parties équicontinues du dual de* $\prod E_i$ *sont celles contenues dans la somme d'un nombre fini de parties équicontinues dans les* E_i'.

On a en effet une application linéaire évidente de $\sum E_i'$ dans le dual de $E = \prod E_i$, dont on vérifie triviale- qu'elle est biunivoque; montrons qu'elle est sur. Mais une forme linéaire continue sur $\prod E_i$ est majorée par 1 en module sur un ensemble V défini par des conditions: $x_i \in V_i$ pour tout $i \in J$, où J est une partie finie de I et où les V_i sont des voisinages de 0 dans les E_i. Il s'ensuit que x' est nulle sur le sous-espace vectoriel $\prod_{i \notin J} E_i$ de E, donc provient d'une forme linéaire continue sur l'espace quotient, qui s'identifie à $\prod_{i \in J} E_i$. La prop. 22 donne alors le résultat voulu. On procède de même pour les ensembles équicontinus de formes linéaires.

Corollaire 2. *Soit* (E_i) *une famille quelconque d'ELC, alors la topologie faible de* $\prod E_i$ *est le produit des topologies faibles des* E_i.

Compte tenu du th. 8 (th. de Mackey), on obtient ainsi:

Corollaire 3. *Sous les conditions du corollaire 2,* $\prod E_i$ *est réflexif si et seulement si les* E_i *le sont.*

Corollaire 4. Soit (E_i) *une famille finie d'ELC,* E *leur produit; soit pour tout* i, $\mathfrak{S}_i$ *un ensemble de parties bornées de* E_i, *et soit* $\mathfrak{S}$ *l'ensemble de parties* $\prod_i A_i$ *de* E, *avec* $A_i \in \mathfrak{S}_i$ *pour tout* i. *Alors le dual de* E, *muni de la* $\mathfrak{S}$*-convergence, s'identifie au produit des duals des* E_i, *munis de la* $\mathfrak{S}_i$*-convergence.*

Ce corollaire est très facile. Il implique en particulier que *le dual faible de* $\prod E_i$ *est le produit des duals faibles des* E_i, et que *le dual fort de* $\prod E_i$ *est le produit des duals forts des* E_i (I fini).

Le cas du produit infini est surtout intéressant pour prouver le

Théorème 11. Soit E *un espace vectoriel,* (E_i) *une famille d'ELC, et pour tout* i, u_i *une application linéaire de* E *dans* E_i. *On muni* E *de la topologie la moins fine rendant continues les* u_i. *Alors le dual de* E *est identique à l'ensemble des formes linéaires de la forme* $\sum_{i \in J} x'_i \circ u_i$, *où* J *est une partie* f i n i e *de l'ensemble d'indices, et où pour tout* $i \in J$, x'_i *est un élément du dual de* E_i. *On obtient les parties équicontinues du dual de* E *en prenant ci-dessus* J *fixe, et en faisant parcourir à* x'_i *une partie équicontinue du dual de* E_i *(pour tout* $i \in J$*).*

En effet, on se ramème immédiatement au cas où E est séparé, donc s'identifie à un sous-espace vectoriel topologique de $\prod E_i$. Alors les ensembles équicontinus de formes linéaires sur E sont les restrictions à E des ensembles équicontinus de formes linéaires sur $\prod E_i$ (prop. 20), et ces derniers sont caractérisés par le corollaire 1 de la prop. 22. Le théorème 11 en résulte aussitôt.

Voici un cas particulier utile du th. 11. Soient E et F deux ELC, soit L un espace vectoriel quelconque d'applications linéaires de E dans F, soit L_s l'espace L muni de la topologie de la convergence simple, i.e. la moins fine des topologies sur L rendant continues les applications $u \longrightarrow u(x)$ de L dans F (où $x \in E$). D'après le th. 11, les formes linéaires continues sur L_s sont donc les formes du type $u \longrightarrow \sum \langle u(x_i), y'_i \rangle$, où (x_i) est une suite finie dans E, (y'_i) une suite finie dans F'. Interprétant les $u \in L$ comme des formes bilinéaires sur $E \times F'$, i.e. des éléments ~~du dual algébrique de~~ $E\otimes F'$, et introduisant $v = \sum x_i \otimes y'_i \in E \otimes F'$, on voit que les formes linéaires continues sur L_s sont les formes du type $u \longrightarrow \langle u,v \rangle$, où $v \in E \otimes F'$. En d'autres termes, $E \otimes F'$ s'applique canoniquement *sur* le dual de L_s; cette application est d'ailleurs biunivoque pourvu que L contienne $E' \otimes F$ et E séparé, comme on le vérifie facilement. Ainsi:

Proposition 23. Soient E, F deux ELC, E séparé, et soit L un espace vectoriel d'applications linéaires de E dans F, contenant $E' \otimes F$. Alors le dual de L pour la topologie de la convergence simple s'identifie à $E \otimes F'$.

<u>Corollaire</u>. <u>Le dual de L_s ne change pas quand on remplace la topologie de F par une autre donnant le même dual, par exemple par la topologie faible associée à la topologie initiale de F.</u>

Il en résulte par exemple que pour une partie convexe de L, l'adhérence pour la topologie de la convergence simple est identique à l'adhérence pour la topologie de la convergence "simple-faible" (i.e. la topologie de la convergence simple quand on prend sur F la topologie faible).

<u>Exercice 1</u>. a) Soit E un espace localement convexe métrisable et complet, F un sous-espace vectoriel fermé. Montrer que sur le dual de E/F, la topologie de la convergence compacte est identique à la topologie sur F^o induite par la topologie de la convergence compacte dans E'. (Utiliser Chap. 1, Nº 14, exerc. 2). b) Soit E un ELC dont les parties bornées et fermées sont complètes, F un sous-espace vectoriel fermé. Montrer que sur le dual de F, la topologie de la convergence compacte est identique à la topologie quotient, par F^o, de la topologie de la convergence compacte dans E' (utiliser Nº 5, exerc. 5).

<u>Exercice 2</u>. Soit E un ELC séparé et complet dont la topologie est définie comme la moins fine des topologies rendant continues des applications linéaires u_i de E dans des espaces <u>réflexifs</u> E_i. Montrer que E est réflexif (conjuger prop. 21, corollaire 2, et prop. 22, corollaire 3). Montrer que le résultat reste vrai quand on suppose seulement que

les parties bornées et fermées de E sont complétes.

16. Transposée d'une application linéaire; caracterisation des homomorphismes.

Proposition 24. Soient E et F deux ELC, u une application linéaire de E dans F. Pour que u soit con- continue pour les topologies faibles, il faut et il suffit que pour toute $y' \in F'$, la forme $y' \circ u$ sur E soit continue.

La proposition est triviale.

Corollaire 1. Soit u une application linéaire d'un ELC E dans un autre F. Si u est continue, u est aussi continue pour les topologies faibles.

Ce qui intervient en réalité dans la proposition 24 sont les systèmes duals (E,E') et (F,F'). La condition obtenue pour que u soit faiblement continue signifie aussi que la transposée algébrique de u (qui est une application linéaire u^* du dual algébrique F^* de F dans le dual algébrique E^* de E, définie par la formule classique $u^*y' = y' \circ u$, ou, de façon explicite

$$\langle x, u^*y' \rangle = \langle ux, y' \rangle \text{)}$$

applique le dual F' de E dans le dual E' de E. Dorénavant, nous appelerons transposée d'une application linéaire faiblement continue u de E dans F, l'application linéaire u' de F' dans E' induite par la transposée algébrique de u.

Corollaire 2. Soient (E,E') *et* (F,F') *deux systèmes duals séparés en* E' *et* F', u *une application linéaire faiblement continue de* E *dans* F; *alors la transposée* u' *de* u *est une application linéaire faiblement continue de* F' *dans* E', *dont la transposée, quand* E *et* F *sont séparés (et quand* E', F' *sont considérés comme munis de leurs topologies faibles), est* u.

Il en résulte que, dans le cas de systèmes duals séparés (E,E'), (F,F'), *l'application* $u \longrightarrow u'$ *définit un isomorphisme de l'espace vectoriel* $L(E,F)$ *des applications linéaires faiblement continues de* E *dans* F, *sur l'espace vectoriel* $L(F',E')$ *des applications linéaires faiblement continues de* F' *dans* E'; nous verrons que pour l'essentiel, ce qui se passe pour les éléments, parties, etc., de $L(E,F)$ peut s'interpréter de façon simple, par transposition, en termes d'éléments, parties, etc., de $L(F',E')$.

Rappelons que si on considère le transposé du composé d'une séquence d'opérateurs faiblement continus:

$$E \longrightarrow F \longrightarrow \dots \longrightarrow G,$$

cela revient à prendre le composé de la séquence des transposés

$$G' \longrightarrow \dots \longrightarrow F' \longrightarrow E'.$$

En particulier, la transposition définit un isomorphisme de l'*algèbre* $L(E,E)$ des endomorphismes faiblement continus de E sur l'*algèbre opposée* de l'algèbre $L(E',E')$ des endomorphismes faiblement continus de E': $(uv)' = v' \circ u'$.

Soit M un ensemble d'applications linéaires d'un espace vectoriel E dans un autre F, A une partie de E, B une partie de F, nous poserons

$$M(A) = \bigcup_{u \in M} u(A), \qquad M^{-1}B = \bigcap_{u \in M} \overset{-1}{u}(B).$$

Avec ces notations, on a la proposition triviale suivante:

Proposition 25. Soient (E,E'), (F,F') *des systèmes duals séparés en* E' *et* F', u *une application linéaire faiblement continue de* E *dans* F, A *une partie* de E B *de* F'. *Alors on a*

$$(u(A))^{\circ} = \overset{-1}{u'}(A^{\circ}), \qquad \overset{-1}{u}(B^{\circ}) = (u'(B))^{\circ}.$$

Plus généralement, si M *est un ensemble quelconque d'applications linéaires faiblement continues de* E *dans* F, M' *l'ensemble des transposées, on a*

$$(M(A))^{\circ} = M'^{-1}(A^{\circ}), \qquad M^{-1}(B^{\circ}) = (M'(B))^{\circ}$$

(le signe $^{\circ}$ désigne ici le polaire absolu).

Corollaire. Sous les conditions de la proposition 25, l'enveloppe disquée faiblement fermée de $u(A)$ (*resp. de* $M(A)$) *est identique au polaire de* $\overset{-1}{u'}(A^{\circ})$ (*resp. de* $M'^{-1}(A^{\circ})$).

Cela résulte en effet de la proposition 25 et du th.

des bipolaires. En particulier, prenant $A = E$, on trouve:

Proposition 26. Soient (E,E') et (F,F') deux systèmes duals séparés en E' et F', soit u une application faiblement continue de E dans F. Alors, l'adhérence faible de $u(E)$ est l'orthogonal du noyau de u'; si E et F sont séparés, le noyau de u est l'orthogonal de $u'(F')$.

(La deuxième assertion s'obtient en échangeant les rôles de E et E', et de F et F'). En particulier:

Corollaire. Soient (E,E') et (F,F') deux systèmes duals séparés, u une application linéaire faiblement continue de E dans F. Pour que $u(E)$ soit faiblement dense dans F, il faut et il suffit que u' soit biunivoque; pour que u soit biunivoque, il faut et il suffit que $u'(F')$ soit faiblement dense dans E'.

Ce corollaire ne permet pourtant pas d'interpréter par transposition la situation $u(E) = F$; une telle interprétation est incluse dans la

Proposition 27. Soient (E,E') et (F,F') deux systèmes duals séparés en E' et F', soit u une application linéaire faiblement continue de E dans F. Pour que u soit un homomorphisme faible, il faut et il suffit que $u'(F')$ soit un sous-espace faiblement fermé de E'.

En effet, soit N le noyau de u, v l'application de E/N dans F déduite de u; comme le dual faible de E/N s'identifie au sous-espace vectoriel topologique fermé N^o de E' faible, et que u' s'obtient en composant v' avec l'application identique de N^o dans E', l'hypothèse que $u'(F')$ soit faiblement fermé équivaut à la même hypothèse sur v; d'autre part, la topologie quotient de E faible par N étant identique à la topologie faible correspondante sur E/N (prop. 20), dire que u est un homomorphisme faible signifie que v est un isomorphisme faible. On est ainsi ramené à démontrer la proposition pour l'application <u>biunivoque</u> v au lieu de u. Mais dans ce cas la proposition est immédiate (car si u est un isomorphisme faible, alors u' applique F' sur E' en vertu de la prop. 20, i.e. le th. de Hahn-Banach; et la réciproque est triviale en vertu de la définition des topologies faibles).

<u>Corollaire</u>. <u>Soient</u> (E,E'), (F,F') <u>deux systèmes duals séparés, et soit</u> u <u>une application linéaire faiblement continue de</u> E <u>dans</u> F. <u>Pour que</u> u <u>soit un isomorphisme faible, il faut et il suffit que</u> $u'(F')=E'$; <u>pour que</u> $u(E) = F$, <u>il faut et il suffit que</u> u' <u>soit un isomorphisme faible</u>.

Jusqu'à maintenant, il n'était question que de systèmes duals et de topologies faibles. Maintenant nous faison intervenir d'autres topologies localement convexes sur les espaces vectoriels envisagés.

Proposition 28. Soient (E,E') *et* (F,F') *deux systèmes duals séparés en* E', F'. *Munissons* E (*resp.* F) *de la topologie de la convergence uniforme sur un ensemble* $\mathfrak{S}$ (*resp.* $\mathfrak{T}$) *de parties faiblement bornées de* E' (*resp.* F'). *On suppose que tout ensemble contenu dans un homothétique de l'enveloppe disquée faiblement fermée d'un nombre fini d'ensembles éléments de* $\mathfrak{S}$, *appartenant à* $\mathfrak{S}$. *Soit* u *une application linéaire faiblement continue de* E *dans* F. *Pour que* u *soit continue, il faut et il suffit que* $u'(\mathfrak{T}) \subset \mathfrak{S}$, *i.e. que pour tout* $B \in \mathfrak{T}$, *on ait* $u'(B) \in \mathfrak{S}$. *Plus généralement, pour qu'un ensemble* M *d'applications linéaires faiblement continues de* E *dans* F *soit équicontinu, il faut et il suffit que pour tout* $B \in \mathfrak{T}$ *on ait* $M'(B) \in \mathfrak{S}$ (*où* M' *est l'ensemble des transposés des* $u \in M$).

En effet dire que M est équicontinu signifie que pour tout voisinage V de 0 dans F, $M^{-1}(V)$ est un voisinage de 0 dans E. On peut évidemment supposer que V est de la forme B^{0}, où $B \in \mathfrak{T}$. En vertu de la dernière formule de la proposition 25, cela signifie que tout $(M'(B))^{0}$ est un voisinage de 0 dans E, donc (Nº 8) que $M'(B) \in \mathfrak{S}$, d'où la conclusion.

Corollaire 1. Soient E *et* F *deux ELC*, u *une application linéaire de* E *dans* F. *Pour que* u *soit continue, il faut et il suffit que pour toute partie équicontinue* B *de* F', *l'ensemble des* $y'ou$, *où* y' *par-*

court B, soit un ensemble équicontinu de formes linéaires sur E (i.e. que u soit faiblement continue, et que u' transforme les parties équicontinues de F' en des parties équicontinues de E').

Corollaire 2. Soient E et F deux ELC, on suppose que la topologie de E est identique à la topologie de Mackey $\tau(E,E')$. Alors les applications linéaires de E dans F qui sont continues, ou faiblement continues, sont les mêmes.

En effet, si u est continue, elle est faiblement continue (prop. 24, corollaire 1) et si réciproquement u est continue, sa transposée est faiblement continue, donc transforme les disques faiblement compacts, et à fortiori les parties équicontinues disquées faiblement fermées de F', en des disques faiblement compacts de E', donc en des parties équicontinues de E'.

Corollaire 3. Soit u une application linéaire continue d'un ELC séparé E dans un autre F. Alors sa transposée u' est continue quand on munit E' et F': a) des topologies fortes; b) des topologies de Mackey $\tau(E',E)$ et $\tau(F',F)$; c) des topologies de la convergence compacte; d) des topologies faibles.

Il suffit d'appliquer la prop. 28 en intervertissant les rôles de E et E', et de F et F'.

Proposition 29. *Soient E et F deux espaces localement convexes, u une application linéaire continue de E dans F. Pour que u soit un homomorphisme, il faut et il suffit que ce soit un homomorphisme faible (i. e. - prop. 27 - que u'(F') soit un sous-espace faiblement fermé de E') et que toute partie équicontinue de E' contenue dans u'(F') soit l'image par u' d'une partie équicontinue de F'.*

Soit N le noyau de u, M son image, soit v l'application linéaire continue de E/N sur M définie par u; tenant compte de la proposition 20, on constate facilement que chacune des deux hypothèses dont il faut prouver l'équivalence est équivalente à la même hypothèse, faite sur v au lieu de u. On est ainsi ramené au cas où u est une application biunivoque de E sur F, et on achève en remarquant que deux topologies sur un ELC sont identiques si et seulement si elles donnent le même dual et les mêmes parties équicontinues dans le dual (Nº 11), ou aussi en appliquant à u le corollaire 1 de prop. 28.

Corollaire 1. *Soient E et F deux ELC, u une application linéaire continue de E dans F. Pour que u soit un isomorphisme, il faut et il suffit que toute partie équicontinue de E' soit l'image par u' d'une partie équicontinue de F'.*

Corollaire 2. *Soient E et F deux ELC, u une application linéaire continue de E dans F. Pour que u* soit un homomorphisme de E sur un sous-espace dense de F, il faut et il suffit que $u'(F')$ soit un sous-espace faiblement fermé de E', et que l'image réciproque par u' d'une partie équicontinue de E' soit équicontinue.

On en conclut:

Corollaire 3. Soient E et F deux ELC, on suppose que la topologie de F est la topologie de Mackey $\tau(F,F')$. Soit u une application linéaire continue de E sur F. Pour que u soit un homomorphisme, il faut et il suffit que u soit un homomorphisme faible.

Conjuguant prop. 29 avec la prop. 27, on obtient les conditions sur u' pour que u soit un homomorphisme de E sur F, etc. Signalons encore le

Corollaire 4. Soient E et F deux espaces localement convexes, u une application linéaire continue de E dans F, E_0 un sous-espace vectoriel dense de E. Si u induit un homomorphisme de E_0 dans F, u est homomorphisme.

En effet, les duals de E_0 et E peuvent s'identifier, aux parties équicontinues de l'un correspondant exactement les parties équicontinues de l'autre; le corollaire résulte alors du fait qu'un sous-espace de E' fermé pour $\sigma(E',E_0)$ est à fortiori fermé pour $\sigma(E',E)$. - On fera attention que l'inverse du corollaire 3 est faux: u peut être un homomorphisme, sans induire un homomorphisme de E_0 (voir exercice 2).

Au Nº suivant, nous donnerons une caracterisation, par la transposée, d'un homomorphisme <u>métrique</u> d'un espace de Banach dans un autre.

<u>Bitransposée</u>: Soient (E,E') et (F,F') deux systèmes duals séparés, u une application linéaire faiblement continue de E dans F. Alors u' est une application continue de F' fort dans E' fort (prop. 28, corol. 4) et à ce titre sa transposée $(u')'$ est une application linéaire de E'' dans F'', d'ailleurs continue pour $\sigma(E'',E')$ et $\sigma(E'',F')$ (même référence). On l'appelle <u>bitransposée</u> de u, et on la note u''. <u>C'est aussi l'application obtenu à partir de</u> u <u>par prolongement par continuité faible à</u> E'' (se rappeler que E est faiblement dense dans E'') et il y a le plus souvent intérêt à raisonner directement sur u'' avec cette interprétation.

<u>Exercice 1</u>. Soient E un espace vectoriel, (u_i) une famille d'applications linéaires de E dans des ELC E_i, soit pour tout i, u_i^* la transposée algébrique de u_i. Soit $\mathfrak{S}$ l'ensemble des parties du dual algébrique E^* de E qui sont de la forme $u_i(A_i)$, où i peut varier et où A_i parcourt l'ensemble des disques équicontinus faiblement compacts dans E_i'. Montrer que sur E, la topologie de la $\mathfrak{S}$-convergence est identique à la topologie la moins fine rendant continues les u_i. En utilisant le th. 7, corollaire 1 (Nº 12), en déduire une nouvelle démonstration du th. 11 (Nº 15).

<u>Exercice 2</u>. Soit E un ELC métrisable complet et

séparable, F un sous-espace vectoriel fermé, de codimension infinie. Montrer qu'il existe un supplémentaire algébrique E_o de F partout dense dans E, et que pour un tel E_o, l'homomorphisme canonique de E sur E/F induit sur E_o une application linéaire qui n'est pas un homomorphisme.

Exercice 3. Soit K un espace compact, E un ELC, F un sous-espace vectoriel fermé de E. Montrer que l'application linéaire naturelle de C(K,E) dans C(K,E/F) est un homomorphisme du premier espace sur un sous-espace dense du second. (Grâce à la prop. 29, corollaire 3, remplacer C(K,E) par $C(K)\otimes E$, et utiliser alors Chap. 1, Nº 14, exerc. 2).

17. Récapitulation et compléments dans le cas des espaces normés.

Soit E un espace normé. Alors E' est muni d'une norme naturelle

$$\| x' \| = \sup_{\| x \| \leqslant 1} | \langle x,x' \rangle | .$$

qui en fait un espace de Banach (Chap. 1, Nº 5, th. 2). On voit immédiatement que la topologie correspondante sur E' est identique à la topologie forte du dual, i.e. la topologie de la convergence uniforme sur la boule unité de E (qui est identique à la topologie forte, en vertu de la caractérisation métrique des parties bornées de E). Par définition de la norme de E', la boule unité de E' est le polaire de la boule unité de E. Par suite, la boule unité de E' est une partie faiblement compacte de E' ("faible" référant bien entendu à la topologie $\sigma(E',E)$).

Les parties équicontinues de E' sont les parties bornées de l'espace normé E', par suite la topologie du bidual E" de E (définition 9 du Nº 12) est identique à la topologie forte du dual de E', i.e. la topologie définie par la norme du dual de l'espace normé E'. On a de plus:

Proposition 30. Soit E un espace normé. Alors l'application identique de E dans son bidual est un isomorphisme métrique de E dans E".

En effet, si $x \in E$, il est trivial à partir des définitions que la norme de x dans E" est au plus égale à sa norme dans E; l'inégalité inverse résulte du fait plus fort qu'il existe une $x' \in E'$, de norme ≤ 1, telle que $\langle x,x'\rangle = \|x\|$: c'est en effet trivial quand on remplace E par la droite F engendrée par x, et alors il suffit de prolonger la forme linéaire obtenue sur F en une forme linéaire de norme ≤ 1 définie sur tout E, grâce au th. de Hahn-Banach II.

Corollaire. Tout espace normé est isomorphe (avec sa norme) à un sous-espace vectoriel d'un espace C(K) construit sur un espace compact K convenable.

Il suffit en effet de prendre pour K la boule unité de E', muni de la topologie faible, et considérer pour tout $x \in E$ la restriction à K de la forme linéaire sur E'.

définie par x; la prop. 30 signifie précisément que l'application linéaire de E dans $C(K)$ ainsi obtenue est un isomorphisme métrique.

Le th. 8 du Nº 12 donne ici la

Proposition 31. *Soit E un espace normé. Pour que E soit réflexif, il faut et il suffit que sa boule unité soit faiblement compacte.*

Dans le cas général, le théorème des bipolaires nous montre aussitôt que *la boule unité de E'' est l'adhérence faible de la boule unité de E* (l'adjectif faible se référant bien entendu à la topologie $\sigma(E'',E')$). Notons le

Corollaire. *Soit E un espace normé réflexif, F un sous-espace vectoriel fermé. Alors F et E/F sont réflexifs.*

Il suffit de le voir pour le quotient (pour le sous espace, inutile que E soit normé, voir prop. 21, corollaire 2). Mais la boule unité de E étant faiblement compacte, son image canonique dans E/F est faiblement compacte, donc fermée et comme elle est dense dans la boule unité de E/F, elle est identique à cette boule unité. Ainsi E/F satisfait au critère de la prop. 31.

La théorie de la dualité pour sous-espaces et quotients est particulièrement agréable, car:

Proposition 32. *Soit E un espace normé, F un sous-espace vectoriel fermé. Alors l'application linéaire na-*

turelle du dual de E/F dans le dual de E est un isomorphisme métrique du premier espace dans le second. L'application linéaire naturelle du dual de E dans le dual de F est un homomorphisme métrique du premier espace sur le second.

La première affirmation résulte trivialement des définitions, la deuxième est incluse aussitôt dans le th. de Hahn Banach II (dont c'est même une formulation équivalente, compte tenu du th. 6, Nº 11). - Ainsi, les isomorphismes canoniques $(E/F)' \approx F^{o}$, $F' \approx E'/F^{o}$, sont même des isomorphismes pour les structures normées, et à fortiori pour les diverses topologies fortes naturelles.

Corollaire 1. Soit u une application linéaire continue d'un espace normé E dans un autre F. Si u est un homomorphisme (resp. homomorphisme métrique) alors sa transposée u' est un homomorphisme (resp. homomorphisme métrique).

En effet, les deux parties de la prop. 32 nous ramènent aussitôt au cas où u est une application biunivoque de E sur F, et alors c'est trivial.

Corollaire 2. Soit u une application linéaire continue d'un espace normé complet E dans un espace normé F. Pour que u soit un homomorphisme métrique de E sur F (resp. un isomorphisme métrique de E dans F), il faut que sa transposée u' soit un isomorphisme métrique de F' dans E' (resp. un homomorphisme métrique de

F' <u>sur</u> E').

Ce n'est qu'une autre formulation du corollaire 1. Signalons que nous verrons au Chap. IV, § 2, nº 4, que les réciproques des corollaires 1 et 2 sont valables.

A l'occasion du mécanisme de la transposition, il reste à signaler encore la

<u>Proposition 33</u>. <u>Soient</u> E <u>et</u> F <u>deux espaces normés</u>, u <u>une application linéaire continue de</u> E <u>dans</u> F. <u>Alors la norme de</u> u <u>est égale à la norme de sa transposée</u>.

En effet, on a $\|u\| = \sup\limits_{\|x\| \leqslant 1} \|ux\|$, or en vertu de prop. 30 on a $\|ux\| = \sup |\langle ux, x'\rangle|$, d'où

$$\|u\| = \sup_{\substack{\|x\| \leqslant 1 \\ \|x'\| \leqslant 1}} |\langle ux, x'\rangle| = \sup |\langle x, u'x'\rangle| = \sup_{\|x'\| \leqslant 1} \|u'x'\| =$$

$$= \|u'\| .$$

<u>Exercice 1</u>. Soit E un espace normé, F un sous-espace vectoriel fermé de E. Montrer que si F et E/F sont réflexifs, E est réflexif (prouver directement que toute forme linéaire continue sur E' provient d'un élément de E, en montrant d'abord qu'elle coincide sur F^o avec une forme linéaire définie par un élément de E).

<u>Exercice 2</u>. Montrer qu'un espace normé <u>séparable</u> est isomorphe à un sous-espace vectoriel normé d'un espace $C(K)$,

où K est un espace compact <u>métrisable</u> (utiliser le Nº 11, exercice 2). En conclure qu'on peut même prendre pour K l'ensemble triadique de Cantor (utiliser Bourbaki, Top. Gén., Chapitre IX, § 2, exercice 18), ou aussi l'intervalle $I = (0,1)$ (montrer qu'en prolongeant par linéairité dans les composantes de $\complement_I K$ toute fonction continue donnée sur l'ensemble triadique de Cantor K, on obtient un isomorphisme métrique de $C(K)$ dans $C(I)$). - Comparer ces résulta avec Chap. I, Nº 14, exercice 1).

<u>Exercice 3</u>. Soit E un ELC, et soit u une application linéaire continue de E dans un espace de Banach F. Montrer que l'image de la boule unité de F' par la transposée u' de u est un disque équicontinu faiblement compact dans E'. Réciproquement, pour tout disque équicontinu faiblement compact A' dans E', ou peut trouver une application linéaire continue u de E dans un espace de Banach F, telle que A' soit l'image de la boule unité de F' par la transposée u' de u; on peut supposer u' biunivoque. (Considérer sur E la semi-norme associée au disque polaire de A', et prendre pour F l'espace de Banach associé).

<u>Exercice 4</u>. a) Considérons l'espace de Banach $\underline{c}_0$ des suites de scalaires qui tendent vers 0 (voir Chap.1, Nº 9, exercice 7). Soit e_i l'élément de $\underline{c}_0$ dont toutes les "coordonnées" sont nulles, sauf la i.ème qui est égale à 1. Montrer que la suite (e_i) tend vers 0 faiblement, mais non fortement. Montrer que la suite des $u_n = \sum_{1 \leq i \leq n} e_i$ est

une suite de Cauchy faible dans $\underline{c}_o$, qui ne converge pas faiblement vers un limite dans $\underline{c}_o$ (montrer que (u_n) converge faiblement dans le bidual ℓ^∞ de $\underline{c}_o$ vers la limite u dont toutes les coordonnées sont égales à 1). b) Considérons l'espace de Banach ℓ^1 des suites sommables de scalaires, construit sur un ensemble I d'indices. Montrer que dans cet espace, toute suite de Cauchy faible est une suite de Cauchy forte, et par suite fortement convergente.

<u>Exercice 5</u>. Soit E un espace de Banach séparable dans lequel il existe des suites de Cauchy faibles non faiblement convergentes, ou des suites faiblement convergentes non fortement convergentes (voir exerc. 4, a)), et soit u un homomorphisme de ℓ^1 sur E (voir Chap. 1, Nº 14, exercice 1). Montrer que le noyau de u n'admet pas de supplémentaire topologique dans ℓ^1 (utiliser exercice 4, b)).

18. <u>Propriétés élémentaires de compacité et faible compacité</u>.

Nous nous bornons ici aux propriétés les plus élémentaires de compacité, en liaison avec la technique de dualité. Des résultats plus profonds seront donnés au Chap. 5.

<u>Proposition 34</u>. <u>Soit A une partie d'un ELC E. Pour que A soit précompacte, il faut et il suffit qu'elle soit bornée, et que sur A la structure uniforme induite par E soit identique à la structure uniforme faible induite</u>.

La condition est suffisante, car un borné est faiblement précompact (Nº 10, prop. 15). Elle est nécessaire, car on a dit qu'un ensemble précompact est borné (Chap. 1, Nº 7, prop. 10); d'autre part, pour montrer l'identité des deux structures uniformes induites, on peut manifestement supposer que E est séparé, donc que E s'identifie à un espace de fonctions sur E', muni d'une topologie de $\mathfrak{S}$-convergence, la topologie faible étant alors, la topologie de la convergence simple. Cela ramène à une situation générale déjà connue de topologie générale (voir Chap. 0, prop. 6, corol. 2).

<u>Proposition 35</u>. <u>Soit</u> A <u>une partie précompacte d'un ELC</u> E, <u>alors l'enveloppe disquée de</u> A <u>est encore précompacte</u>.

La démonstration est immédiate, grâce au critère usuel de précompacité.

<u>Corollaire</u>. <u>Soit</u> A <u>une partie précompacte d'un ELC séparé</u> E. <u>Pour que l'enveloppe disquée fermée de</u> A <u>soit compacte, il faut et il suffit qu'elle soit complète (c'est le cas notamment si dans</u> E <u>toute partie bornée et fermée est complète, à fortiori si</u> E <u>est complet</u>).

D'ailleurs, pour vérifier qu'une partie B d'un espace localement convexe est complète, le critère suivant est souvent utile:

<u>Proposition 36</u>. <u>Soit</u> E <u>un ELC</u>, A <u>une partie complète de</u> E. <u>Alors</u> A <u>est aussi complète pour toute to-</u>

pologie localement convexe T sur E plus fine que la topologie initiale T_o, et admettant un système fondamental de voisinages de 0 qui sont fermés pour T_o.

On se ramène en effet aussitôt au cas où T est séparé, donc s'identifie à un espace de formes linéaires sur E', muni d'une topologie de $\mathfrak{S}_o$-convergence. Alors T_o est une topologie de $\mathfrak{S}$-convergence, avec $\mathfrak{S} \supset \mathfrak{S}_o$, de sorte qu'on est ramené à une proposition connue de Topologie Générale (Chapitre 0, prop. 6, corol. 1). - On peut aussi démontrer le résultat plus général de Topologie: Soit F un ensemble muni de deux structures uniformes T_o et T, T étant plus fine que T_o et admettant un système fondamental d'entourages fermés dans $F \times F$ pour la topologie qui correspond à T_o. Alors toute partie A de F qui est complète pour T_o est complète pour T.

Il faut montrer qu'un filtre de Cauchy Φ pour T admet un point limite pour T. En vertu de l'hypothèse sur T, les adhérences $\bar{B}$, pour T_o, dans A, des $B \in \Phi$, forment encore une base de filtre de Cauchy Ψ pour T, il suffit de montrer qu'elle converge, ou encore que $\bigcap_{B \in \Phi} \bar{B}$ n'est pas vide. Or Ψ est aussi une base de filtre de Cauchy pour T_o, formée d'ensembles fermés pour T_o, et comme A est complet pour T_o, elle admet un point d'adhérence pour T, i.e. $\bigcap_{B \in \Phi} \bar{B}$ n'est pas vide.

Corollaire 1. Soit E un ELC séparé, alors toute partie faiblement compacte de E est complète.

Elle est en effet faiblement complète, et il suffit d'appliquer la prop. 36 avec T_o = topologie faible, T = topologie donnée. - Compte tenu de la prop. 35, on trouve:

Corollaire 2. *Soit A une partie précompacte d'un ELC séparé. Pour que son enveloppe disquée fermée B soit compacte, il faut et il suffit que B soit faiblement compacte.*

La nécessité est évidente, la suffisance résulte du corollaire 1 et de proposition 35, corollaire. - Signalons enfin le

Corollaire 3. *Soit E un ELC. Toute partie faiblement compacte de E' est fortement complète.*

Elle est en effet faiblement complète, et il suffit d'appliquer la prop. 36 à E', avec T_o = topologie faible, T = topologie forte.

Proposition 37. 1) *Soit E un ELC séparé, A une partie compacte de E, B une partie fermée de E. Alors A + B est fermé.*

2) *Soient A, B deux parties convexes compactes de E, alors $\Gamma(A \cup B)$ est compact.*

1) Soit en effet $x \notin A + B$, cela signifie aussi que l'ensemble compact $x - A$ et l'ensemble fermé B ne se rencontrent pas. Il est bien connu qu'il existe alors un entourage $(x - A) + U$ du compact qui ne rencontre pas B, alors $x + U$ est un voisinage de x qui ne rencontre pas A + B.

2) Voir Nº 5, exerc. 4.

Théorème 12. Soient (E,E') et (F,F') deux systèmes duals, $\mathfrak{S}$ un ensemble de parties bornées de E, $\mathfrak{T}$ un ensemble de parties bornées de F', u une application linéaire faiblement continue de E dans F, u' transposée. Les conditions suivantes sont équivalentes:

1. u transforme les $A \in \mathfrak{S}$ en des parties précompactes de F muni de la topologie de la $\mathfrak{T}$-convergence.

1'. u' transforme les $B \in \mathfrak{T}$ en des parties de E' précompactes pour la topologie de la $\mathfrak{S}$-convergence.

2. Les restrictions de u aux $A \in \mathfrak{S}$ sont uniformément continues quand on munit E de la topologie faible, F de la topologie de la $\mathfrak{S}$-convergence.

2'. Les restrictions de u' aux $B \in \mathfrak{T}$ sont uniformément continues quand on muni F' de la topologie faible, E' de la topologie de la $\mathfrak{S}$-convergence.

3. La restriction de la fonction $\langle ux,y'\rangle = \langle x,u'y'\rangle$ aux ensembles $A \times B$, avec $A \in \mathfrak{S}$, $B \in \mathfrak{T}$, sont uniformément continues pour le produit des structures uniformes faibles. Il suffit même déjà de supposer ces fonctions uniformément continues, pour le produit de la structure uniforme faible de A

<u>par la structure uniforme forte de</u> B, <u>ou inversement</u>.

<u>De plus, quand les</u> $A \in \mathfrak{S}$ (<u>resp. les</u> $B \in \mathfrak{T}$) <u>sont disqués, on peut remplacer dans la condition 2 (resp. 2') l'uniforme continuité par la continuité, et même par la continuité à l'origine. - Les conditions précedentes impliquent que pour tout</u> $A \in \mathfrak{S}$, $B \in \mathfrak{T}$, <u>l'ensemble des</u> $u(x,y')$, <u>avec</u> $x \in A$, $y' \in B$, <u>est borné</u>.

<u>Démonstration</u>. 1. $\Rightarrow$ 2'., car comme les $B \in \mathfrak{T}$ sont des ensembles uniformément équicontinus de fonctions sur F (muni de la $\mathfrak{T}$-convergence), sur un tel B la structure uniforme faible est identique à la structure de la convergence précompacte, et d'autre part, 1. signifie précisément que u' est continue, donc uniformément continue, pour la convergence précompacte sur F' et la $\mathfrak{S}$-convergence sur E' (Nº 16, prop. 28). 2'. $\Rightarrow$ 1'. par raison d'uniforme continuité, car les $B \in \mathfrak{T}$ sont des parties faiblement précompactes de F'. Par raison de symétrie, on aura de même les implications: 1'. $\Rightarrow$ 2. et 2'. $\Rightarrow$ 1, ce qui prouve que les conditions 1., 2'., 1'., 2. sont équivalentes.

De plus, 2. et 2'. impliquent 3., comme on voit aussitôt en écrivant

$$\langle ux_1,y_1'\rangle - \langle ux_2,y_2'\rangle = \langle u(x_1-x_2),y_1'\rangle + \langle ux_2,y_1'-y_2'\rangle ,$$

et inversement, la première formulation affaiblie de 3., implique évidemment 2, car elle implique que pour $\varepsilon > 0$ donné existe un entourage faible U dans A tel que

$$|\langle ux_1,y'\rangle - \langle ux_2,y'\rangle| \leq \varepsilon$$

pour $x_1,x_2 \in A$, $y' \in B$, $(x_1,x_2) \in U$, i.e. $ux_1-ux_2 \in \varepsilon B^0$, ce qui signifie précisément qu'on a 2. Ainsi 3. et ses variantes est équivalent aux conditions précédentes. Comme $A \times B$ est précompact pour le produit des structures uniformes faibles, 3. implique que l'ensemble des $\langle ux,y'\rangle$, avec $x \in A$, $y' \in B$ est une partie précompacte donc bornée du corps des scalaires. Enfin, que l'on puisse dans 2. (resp. 2') remplacer la condition d'uniforme continuité par la continuité à l'origine est un cas particulier de Nº 14, lemme.

Corollaire 1. Soit u une application linéaire continue d'un ELC E dans un autre F, $\mathfrak{S}$ un ensemble de parties bornées de E engendrant E. Pour que u transforme les $A \in \mathfrak{S}$ en des parties précompactes de F, il faut et il suffit que sa transposée u' transforme les parties équicontinues de F' en des parties relativement compactes de E' muni de la $\mathfrak{S}$-convergence.

En effet, dans la deuxième condition on peut supposer que la partie équicontinue B de F' envisagée est faiblement compacte, alors son image dans E' est faiblement compacte, donc faiblement complète et à fortiori complète pour la $\mathfrak{S}$-convergence (prop. 37), par suite dire qu'elle est précompacte revient à dire qu'elle est relativement compacte. Par suite le corollaire 1 n'est autre qu'un cas particulier de l'équivalence des conditions 1. et 1'. du th. 12. Notons qu'on voit de la même façon que, lorsque les $A \in \mathfrak{S}$ sont faiblement compacts et F séparé, alors la condition envisagée dans le corollaire 1 signifie aussi que u transforme les $A \in \mathfrak{S}$ en des parties relativement compacts de F. Un simple changement de notations donne alors le

Corollaire 2. Soient E et F deux ELC séparés, soit u une application linéaire faiblement continue de E' dans F, u' l'application linéaire faiblement continue de F' dans E transposée de u. Pour que u transforme les parties équicontinues de E' en des parties relativement compactes de F, il faut et il suffit que u' ait la propriété analogue.

Remarquons d'ailleurs que la première condition signifie aussi que u' est continue quand F' est muni de la topologie de la convergence uniforme sur les disques compacts de F (Nº 16, prop. 28); il revient donc encore au même de dire que u a la propriété de continuité analogue.

Corollaire 3. Soit u une application linéaire continue d'un espace de Banach E dans un autre F. Pour que u transforme la boule unité de E en une partie relativement compacte de F, il faut et il suffit que sa transposée u' transforme la boule unité de F' en une partie relativement compacte de l'espace de Banach E'.

(Prendre $\mathfrak{S}$ réduit à la boule unité de E, $\mathfrak{T}$ réduit à la boule unité de F').

<u>Corollaire 4</u>. <u>Soit</u> (E,E') <u>un système dual</u>, $\mathfrak{S}$ <u>un ensemble de parties bornées de</u> E, $\mathfrak{T}$ <u>un ensemble de parties bornées de</u> E'. <u>Les conditions suivantes sont équivalentes</u>:

a) <u>Les parties</u> $A \in \mathfrak{S}$ <u>sont précompactes pour la</u> $\mathfrak{T}$-<u>convergence</u>;

a') <u>Les parties</u> $A' \in \mathfrak{T}$ <u>sont précompactes pour la</u> $\mathfrak{S}$-<u>convergence</u>;

b) <u>Pour tout</u> $A \in \mathfrak{S}$, $A' \in \mathfrak{T}$, <u>la restriction de la fonction</u> $\langle x,x'\rangle$ <u>à</u> $A \times A'$ <u>est uniformément continue pour le produit des structures uniformes faibles.</u>

Il suffit d'appliquer le th. 12 à l'application identique de E sur lui-même. - En particulier, quand $\mathfrak{S}$ est l'ensemble des parties bornées d'un ELC E, $\mathfrak{T}$ l'ensemble des parties équicontinues de E', on obtient le

<u>Corollaire 5</u>. <u>Soit</u> E <u>un ELC</u>. <u>Pour que les parties bornées de</u> E <u>soient précompactes</u>, <u>il faut et il suffit que les parties équicontinues de</u> E' <u>soient fortement relativement compactes</u>.

C'est aussi un cas particulier du corollaire 1, relatif à l'application identique de E sur lui-même et à l'ensemble de toutes les parties bornées de E.

<u>Définition 13</u>. Soit E un ELC. On dit que E est un espace de <u>Montel</u>, en abrégé un espace $(\mathcal{M})$, s'il est sé -

paré et si toute partie bornée de E est relativement compacte.

À fortiori, un tel espace est réflexif. On a vu que les espaces $\mathcal{E}(U)$ et $\mathcal{E}(K)$ de Schwartz (Chap. 1, Nº 10) sont des espaces de Montel. Un espace de Banach qui est du type $(\mathcal{M})$ est de dimension finie, en vertu de Chap. 1, Nº 13. Le corollaire 4 du th. 12 donne donc immédiatement:

Proposition 38. Soit E un ELC séparé. Pour que E soit du type $(\mathcal{M})$, il faut et il suffit que ses parties bornées et fermées soient complètes, et que les parties équicontinues de E' soient fortement relativement compactes.

Corollaire. Soit E un ELC dont les parties bornées et fermées sont complètes, et tel que les parties fortement bornées du dual soient équicontinues (p.ex. un espace métrisable et complet - voir Chap. 1, Nº15, th.11). Pour que E soit du type $(\mathcal{M})$, il faut et il suffit que son dual fort le soit.

(Nous étudierons au Chap. 3, Nº 3, sous le nom d'espaces quasi-tonnelés, les ELC tels que les parties fortement bornées du dual soient équicontinues).

Définition 14. Soit u une application linéaire d'un ELC E dans un autre F. On dit que u est compacte (respect. précompacte, resp. faiblement compacte, resp. bornée) si elle transforme un voisinage convenable V de 0 dans E en une partie relativement compacte (resp. précompacte, ...)

de F.

Quand E est un espace de Banach, on peut prendre pour V la boule unité de E. Dire que u est bornée signifie alors aussi que u est continue (Chap. 1, Nº 7, prop. 12, corol. 2). Le corollaire 3 du th. 12 signifie qu'une application linéaire u d'un espace de Banach dans un autre est compacte si et seulement si sa transposée l'est.

Nous arrivons aux propriétés de compacité faible. Rappelons que, les parties bornées d'un ELC E étant exactement ses parties faiblement précompactes, une partie A de E est faiblement compacte si et seulement elle est bornée, et faiblement séparée et faiblement complète.

L'analogue du th. 12 est ici le

Théorème 13. *Soit u une application linéaire continue d'un ELC séparé E dans un autre F. Soit $\mathfrak{S}$ un ensemble de parties bornées dans E, soit H l'espace vectoriel engendré par les adhérences faibles dans E" des $A \in \mathfrak{S}$; on suppose $H \supset E$. Les conditions suivantes sont équivalentes:*

1. *u transforme les $A \in \mathfrak{S}$ en des parties faiblement relativement compactes de F.*
2. *La bitransposée u" de u applique H dans F.*

Cela implique la condition

3. *La transposée u' transforme les parties équicontinues faiblement fermées de F' en des parties de E' relativement compactes pour $\sigma(E',H)$.*

<u>Et quand F est quasi-complet, la condition 3. implique aussi les conditions 1. et 2.</u>

<u>Démonstration</u>. - Comme u'' est une application faiblement continue de E'' dans F'', et que les adhérences faibles dans E'' des $A \in \mathfrak{S}$ sont des ensembles faiblement compacts, l'équivalence de 1. et 2. apparait aussitôt. D'ailleurs, 2. signifie aussi que u' est continue pour les topologies $\sigma(F',F)$ et $\sigma(E',H)$, et comme une partie équicontinue faiblement fermée B de F' est faiblement compacte, 2. implique qu'elle est transformée en une partie compacte donc relativement compacte de E' muni de $\sigma(E',H)$. Réciproquement, s'il en est ainsi, alors sur $u'(B)$ la topologie $\sigma(E',H)$ sera identique à $\sigma(E',E)$, par suite la restriction de u' à une partie équicontinue B de F' sera continue pour les topologies $\sigma(F',F)$ et $\sigma(E',H)$, donc pour toute $x \in H$, la restriction de la forme linéaire $u''x = x \circ u'$ aux parties équicontinues de F est faiblement continue. Elle appartient donc au complété de F (Nº 14, th. 10, corollaire 2), donc à F quand F est complet. Dans tous les cas $u''x$ appartient de plus à l'adhérence faible, dans le complété $\hat{F}$ de F, d'une partie bornée de F. On peut évidemment supposer cette partie disquée, donc que son adhérence faible dans $\hat{F}$ soit identique à son adhérence pour la topologie naturelle du complété; par suite, si F est quasi-complet, on aura $u''x \in F$ pour tout $x \in H$.

Le cas le plus important est celui où $\mathfrak{S}$ est l'ensemble de toutes les parties bornées de E:

Corollaire 1. Soient E, F, deux ELC séparés, soit u une application linéaire continue de E dans F. Les deux conditions suivantes sont équivalentes:

1. u transforme les parties bornées de E en des parties faiblement relativement compactes de F;
2. la bitransposée u'' applique E'' dans F.

Elles impliquent:

3. la transposée u' transforme les parties équicontinues de F' en des parties de E' relativement compactes pour $\sigma(E',E'')$; - et la réciproque est vraie si F est quasi-complet.

Corollaire 2. Soient E, F deux ELC séparés, u une application linéaire faiblement continue de E dans F', u' l'application faiblement continue de F dans E', transposée de u. Pour que u transforme les parties bornées de E en des parties de F' relativement compactes pour $\sigma(F',F'')$, il faut et il suffit que u' jouisse de la propriété analogue.

En effet, il suffit de montrer que la première condition implique la seconde, ce qui résulte aussitôt du corollaire 1, appliqué à E et F' fort, car les parties bornées de F sont des parties équicontinues du dual de F' fort.

Corollaire 3. Soit u une application linéaire continue d'un espace de Banach E dans un autre F. Pour que u soit faiblement compacte (voir définition 14), il faut et il suffit que sa transposée u' soit une application faiblement compacte de l'espace de Banach F' dans l'espace de Banach E'.

Corollaire 4. Soit E un ELC séparé. a) Si E est réflexif, et si les parties fortement bornées du dual sont équicontinues, alors E' fort est réflexif. b) Si E est quasi-complet, et E' fort réflexif, alors E est réflexif. c) Par suite, si les parties fortement bornées de E' sont équicontinues, alors E est réflexif si et seulement si il est quasi-complet, et son dual fort réflexif. (En particulier, un ELC métrisable et complet est réflexif si et seulement si son dual fort est réflexif).

a) est conséquence immédiate du th. 8, et b) résulte du corollaire 1 pour l'application identique.

Exercice 1. Soient A, B deux ensembles, u une fonction scalaire bornée sur $A \times B$. Pour tout $x \in A$, on désigne par $\tilde{x}$ la fonction $y \longrightarrow u(x,y)$ sur B, et pour tout $y \in B$, on désigne par $\tilde{y}$ la fonction $x \longrightarrow u(x,y)$ sur A. Soit $\tilde{A}$ la partie de l'espace de Banach $C^{\infty}(B)$ des fonctions bornées sur B, formée des $\tilde{x}$ $(\tilde{x} \in A)$, soit $\tilde{B}$ la partie analogue de $C^{\infty}(A)$. Montrer que pour que $\tilde{A}$ soit partie relativement compacte (resp. faiblement relativement compacte) de $C^{\infty}(B)$, il faut et il suffit que $\tilde{B}$ soit une partie relativement compacte (resp. faiblement relativement compacte) de $C^{\infty}(A)$. Application: Soit G un monoide, f une fonction bornée sur G, pour tout $s \in G$, soit $U_s f$ (resp. $V_s f$) la fonction $t \longrightarrow f(st)$ (resp. $t \longrightarrow f(ts)$) sur G. Montrer que pour que l'ensemble des translatées à gauche $U_s f$ de f soit une partie relativement compacte (resp. faiblement relativement compacte) de $C^{\infty}(G)$, il faut et il suffit qu'il en soit ainsi de l'ensemble des "translatées à droite" $V_s f$. -On dit alors que f est une fonction presque-périodique (resp. faiblement presque-périodique) sur G. Montrer que si f est presque-périodique, alors l'ensemble des $U_s V_t f$, où $s \in G, t \in G$, est une partie relativement compacte de $C^{\infty}(G)$.

<u>Exercice</u> <u>2</u>. On considère les espaces de Banach $\underline{c}_0$, ℓ^1, ℓ^{∞} (Chap. 1, Nº 9, Ex. 6,7). a) Montrer que $\underline{c}_0$ et ℓ^1 sont séparables, en conclure que la boule unité de $\underline{c}_0$ est faiblement métrisable, que la boule unité de ℓ^1 est métrisable pour $\sigma(\ell^1, \underline{c}_0)$. Montrer que ℓ^{∞} n'est pas séparable (pour toute partie A de l'ensemble des entiers, soit $x_A \in \ell^{\infty}$ sa fonction caractéristique, montrer que $A \neq B$ implique $\|x_A - x_B\| \geqslant 1$, et que l'ensemble des x_A n'est pas dénombrable). b) Montrer que toute partie faiblement compacte de l'espace de Banach ℓ^1 est compacte (utiliser Nº 17, exerc. 4, b; il suffit de montrer que de toute suite faiblement relativement compacte de ℓ^1 on peut extraire une suite qui converge fortement, on utilise a) pour en extraire une suite qui converge pour $\sigma(\ell^1, \underline{c}_0)$, donc pour $\sigma(\ell^1, \ell^{\infty})$).c)Soit u une application linéaire continue de $\underline{c}_0$ dans un ELC E, montrer que pour que u soit compacte, il faut et il suffit qu'elle soit faiblement compacte (utiliser b)). d) Généraliser b) et c) aux espaces $\ell^1(I)$ etc. construits sur un ensemble d'indices I quelconque.

Exercice 3. Soit E un ELC séparé, soit u une application linéaire faiblement continue du dual ℓ^∞ de ℓ^1 dans E (u transforme donc la boule unité de ℓ^∞ en une partie faiblement compacte de E). Montrer que u transforme même la boule unité de ℓ^∞ en une partie compacte de E (voir exercice 2). Soit e_i l'élément de ℓ^∞ dont toutes les coordonnées sont nulles, sauf la i.ème, égale à 1, montrer que la suite des ue_i est une série commutativement convergente dans E, ainsi que son produit par toute suite bornée, et que $u((x_i)) = \sum x_i ue_i$ pour toute $(x_i) \in \ell^\infty$. Montrer que réciproquement, si E est quasi-complet, toute famille sommable dans E est obtenue ainsi. Par suite, il y a correspondance biunivoque entre les applications linéaires faiblement continues de ℓ^∞ dans E, les applications linéaires compactes (ou faiblement compactes) de $\underline{c}_0$ dans E, et les séries commutativement convergentes dans E. (Les espaces $\underline{c}_0$, ℓ^1, ℓ^∞ peuvent encore être pris sur un ensemble quelconque I d'indices).

Exercice 4. a) Soit u une forme bilinéaire sur le produit E F de deux ELC, soit A (resp. B) un disque dans E (resp. F). Montrer que si la restriction de u à $A \times B$ est continue à l'origine, alors cette restriction est continue. Si de plus A est précompact, B compact, alors u est continue sur $A \times B$. b) Soit u une application linéaire faiblement continue d'un ELC E dans un autre F, $\mathfrak{S}$ un ensemble de disques bornés de E recouvrant E. Pour que u transforme les parties $A \in \mathfrak{S}$ en des parties précompactes de F, il faut et il suffit que pour tout $A \in \mathfrak{S}$ et toute partie équicontinue B de F', la restriction à $A \times B$ de la fonction $\langle ux, y' \rangle$ soit continue à l'origine pour le produit des topologies faibles (voir th. 12, conditions 1. et 3.).c) Soit E un espace de Banach séparable. Montrer que, pour que pour toute suite (x_i) dans E convergeant faiblement vers 0, et toute suite (x'_i) dans E' convergeant faiblement vers 0, on ait

$$\langle x_i, x' \rangle \longrightarrow 0,$$

il faut et il suffit que les parties faiblement compactes de E soient compactes (utiliser b), en notant que la boule unité de E' est faiblement métrisable, que par suite E' est faiblement séparable, et les parties faiblement compactes de E sont faiblement métrisables).

<u>Exercice</u> 5. Soit E un ELC dont le dual fort est séparable (par exemple $\underline{c}_0$ - voir exerc. 2, a), ou un sous-espace vectoriel de $\underline{c}_0$). a) Soit u une application linéaire faiblement continue de E dans un espace localement convexe F. Montrer que pour que u transforme les parties bornées en des parties précompactes, il faut et il suffit que u transforme les suites qui convergent faiblement vers 0, en des suites convergentes pour la topologie donnée (il suffit d'exprimer que la restriction de u à un borné A de E est continue pour la topologie faible sur E et la topologie donnée de F, et on note que A est faiblement métrisable). b) Soit F un ELC dont les parties faiblement compactes sont compac-

tes. Montrer que toute application linéaire faiblement continue de E dans F transforme les parties bornées en des parties précompactes (et est par suite précompacte si E est un espace normé). (En particulier, on peut prendre pour E un sous-espace vectoriel de $\underline{c}_0$, et $F = \ell^1$ - voir exercice 2). c) En conclure que si E est un espace normé dont le dual fort est séparable, et dont les parties faiblement compactes sont compactes, alors E est de dimension finie. d) Conclure de c) et de l'exercice 4, c), que si E est un espace de Banach de dimension infinie dont le dual fort est séparable, on peut trouver dans E une suite (x_i) qui converge faiblement vers 0, telles que $\langle x_i, x'_i \rangle = 1$ pour tout i. e) E étant toujours un ELC dont le dual fort est séparable, montrer que tout élément de E'' est limite d'une suite de Cauchy faible dans E (noter que les parties bornées de E sont faiblement métrisables). En conclure qu'une application linéaire faiblement continue u de E dans un ELC F transforme les parties bornées en des parties faiblement relativement compactes, si et seulement si elle transforme suites de Cauchy faibles en suites faiblement convergentes.

CHAPITRE III.

ESPACES D'APPLICATIONS LINÉAIRES.

Dans ce Chapitre, nous continuons à developper le formalisme mis au point dans le Chapitre précédent, en nous attachant aux espaces d'applications linéaires. Le développement est toujours facile, et nous ne rencontrerons pas ici de théorème véritablement nouveau. On notera que, contrairement à la présentation de ce Chapitre, l'hypothèse de locale convexité (et le théorème de Hahn-Banach) n'intervient que de façon fortuite. L'essentiel relève de la Topologie Générale, et de l'application du th. de Banach-Steinhaus (donc le théorème de Baire).

1. Généralités sur les espaces d'applications linéaires.

Soient E et F deux ELC, rappelons qu'on désigne par $L(E,F)$ l'espace des applications linéaires continues de E dans F. Soit y un élément de F, n'appartenant pas à l'adhérence de l'origine, i.e. tel que la droite engendrée par y soit séparée, donc isomorphe au corps des scalaires. Si alors on fait correspondre à tout $x' \in E'$ l'application

$$x \longrightarrow \langle x,x' \rangle y$$

de E dans F, on obtient manifestement un isomorphisme algébrique de E' dans $L(E,F)$. Si $\mathfrak{S}$ est un ensemble quelconque de parties de E, l'isomorphisme précédent est aussi un homéomorphisme de E' dans $L(E,F)$ quand on munit ces espaces de la topologie de la $\mathfrak{S}$-convergence. - Il en résulte (compte tenu de Chap. 2, Nº 10, prop. 16) que pour que sur $L(E,F)$ la topologie de la $\mathfrak{S}$-convergence soit compatible avec la structure vectorielle, il faut que les $A \in \mathfrak{S}$ soient des parties bornées de E. La condition est aussi suffisante en vertu du critère général du Chapitre 1, Nº 8, th. 3. Par la suite, si nous considérons sur $L(E,F)$ une topologie de la $\mathfrak{S}$-convergence, $\mathfrak{S}$ sera toujours supposé un ensemble de parties <u>bornées</u> de E.

On désignera par $L_{\mathfrak{S}}(E,F)$ l'espace $L(E,F)$ des applications linéaires continues de E dans F, muni de la topologie de la $\mathfrak{S}$-convergence. En particulier, $L_s(E,F)$ et $L_b(E,F)$ désignent l'espace $L(E,F)$ muni, respectivement, de la topologie de la convergence simple, ou de la topologie de la convergence sur les parties bornées de E. Si pour tout $A \in \mathfrak{S}$ et tout voisinage V de 0 dans F, on désigne par $W(A,V)$ l'ensemble des $u \in L(E,F)$ tels que $u(A) \subset V$, les ensembles $W(A,V)$ et les homothétiques d'intersections d'un nombre fini de tels ensembles forment un système fondamental de voisinages de 0 dans $L_{\mathfrak{S}}(E,F)$. Il en résulte que la topologie de la $\mathfrak{S}$-convergence ne change pas quand on adjoint à $\mathfrak{S}$ les enveloppes disquées fermées de réunions finies d'ensembles éléments de $\mathfrak{S}$, les homothétiques de telles enveloppes et enfin tous les ensembles contenus dans des ensembles du type précédent. Cependant, quand F n'est pas identique à l'adhérence de l'origine, l'immersion de E' dans $L(E;F)$ signalée au début montre qu'on ne peut augmenter plus l'ensembles de parties sans que la topologie correspondante sur $L(E;F)$ ne devienne strictement plus fine (Chap. 2, N°10, prop. 17). Enfin dans l'étude d'une topologie de $\mathfrak{S}$-convergence, on peut toujours se ramener, d'après ce qui précède, au cas où $\mathfrak{S}$ est un ensemble de disques fermés de E, stable par homothéties, contenant toujours avec un nombre fini de disques A_i leur enveloppe disquée fermée, et avec un disque A tous les disques contenus dans A.

Il arrive qu'on considère aussi l'espace de toutes les applications linéaires <u>faiblement</u> continues de E dans F, muni de la topologie de la $\mathfrak{S}$-convergence (pour la topologie donnée sur F); cet espace est identique à $L_{\mathfrak{S}}(E_\tau;F)$, où E_τ désigne E muni de la topologie de Mackey $\tau(E,E')$ (car les applications linéaires faiblement continues de E dans F sont celles continues pour la topologie $\tau(E,E')$ sur E et la topologie donnée de F, voir Chap. 1, N° 16, prop. 28, corollaire 2). Plus généralement, considérons deux systèmes duals (E,E') et (F,F'), soit $\mathfrak{S}$ un ensemble de parties bornées de E, $\mathfrak{T}$ un ensemble de parties bornées de F' ("bornées" signifiant, suivant notre convention générale, faiblement bornées). On peut munir F de la topologie de la $\mathfrak{S}$-convergence, d'où résulte sur l'espace des applications linéaires <u>faiblement</u> continues de E dans F une topologie de la $\mathfrak{S}$-convergence; elle est localement convexe si par exemple les $A \in \mathfrak{S}$ sont <u>fortement</u> bornés, ou les $B \in \mathfrak{T}$ fortement bornés, comme on vérifie facilement. De toutes façons:

Proposition 1. Soient (E,E') et (F,F') deux systèmes duals séparés, soit $\mathfrak{S}$ (resp. $\mathfrak{T}$) un ensemble de parties bornées de E (resp. F). Munissons E' de la topologie de la $\mathfrak{S}$-convergence, F de la topologie de la $\mathfrak{T}$-convergence, puis l'espace des applications linéaires faiblement continues de E dans F de la topologie de la $\mathfrak{S}$-convergence, l'espace des applications linéaires faiblement continues de F' dans E' de la topologie de la $\mathfrak{T}$-convergence. Alors l'opération de transposition est un homéomorphisme du premier espace d'applications linéaires sur le second.

En effet, d'après la caractérisation des voisinages de 0 dans les deux espaces envisagés, il suffit de montrer que pour $A \in \mathfrak{S}$, $B \in \mathfrak{T}$ donnés, les relations $u(A) \subset B^{\circ}$ et $u'(B) \subset A^{\circ}$ pour une application linéaire faiblement continue u de E dans F (de transposée u') sont équivalentes. Or la première relation s'écrit $A \subset \overset{-1}{u}(B^{\circ})$, or $\overset{-1}{u}(B^{\circ}) = (u'(B))^{\circ}$ (Chap. 2, Nº 16, prop. 25) et d'après le th. des bipolaires $A \subset (u'(B))^{\circ}$ équivaut à $A^{\circ} \supset u'(B)$, cqfd.

Corollaire. Soient (E,E') et (F,F') deux systèmes duals séparés, on considère sur les espaces E, E', F, F' les topologies faibles. Alors l'opération de transposition $u \longrightarrow u'$ est un isomorphisme vectoriel-topologique de $L_s(E;F)$ sur $L_s(F';E')$.

Proposition 2. Soient E et F deux ELC non nuls, on suppose que la topologie de E est la topologie

$\tau(E,E')$ (*de sorte que les applications linéaires de* E *dans* F *continues ou faiblement continues sont les mêmes et que* F *est séparé. Soit* $\mathfrak{S}$ *un ensemble de parties bornées dans* E *tel que l'espace vectoriel engendré par leur réunion soit identique à* E. *Pour que* $L_{\mathfrak{S}}(E;F)$ *soit complet, il faut et il suffit que* F *soit complet et que* E' *soit complet pour la topologie de la* $\mathfrak{S}$-*convergence*.

La nécessité résulte du fait que E' muni de la $\mathfrak{S}$-convergence est isomorphe à un sous-espace vectoriel-topologique *fermé* de $L(E;F)$ (voir début de ce Nº), et que de même F est isomorphe à un sous-espace vectoriel-topologique fermé de $L_{\mathfrak{S}}(E;F)$ (prendre une $x' \in E'$ non nulle, et associer à tout $y \in F$ l'application $x \longrightarrow \langle x,x'\rangle y$ de E dans F). Réciproquement, si E' (muni de la $\mathfrak{S}$-convergence) et F sont complets, montrons que $L_{\mathfrak{S}}(E;F)$ est complet. Comme l'espace de *toutes* les applications de E dans F est complet pour la $\mathfrak{S}$-convergence, il suffit de montrer que $L_{\mathfrak{S}}(E;F)$ en est un sous-espace *fermé*, i.e. que toute application u de E dans F qui est limite pour la $\mathfrak{S}$-convergence d'applications linéaires et continues, est linéaire et continue. Qu'elle soit linéaire est trivial de toutes façons. Pour vérifier qu'elle est continue, il suffit de vérifier la continuité faible, donc que pour toute $y' \in F'$, $y' \circ u$ est une forme linéaire *continue* sur E. Or il est immédiat que $y' \circ u$ est limite pour la $\mathfrak{S}$-convergence de formes linéaires du type $y' \circ u_i$, où les u_i sont dans $L(E;F)$, donc est limite pour la $\mathfrak{S}$-convergence de formes linéaires continues. Comme E' est complet pour la $\mathfrak{S}$-convergence, il en résulte que $y'\circ u$ est elle-même continue. - Rappelons que nous avons obtenu au Chapitre 2, Nº 14, un critère pour que E' (muni de la $\mathfrak{S}$-convergence) et F soient complets, critère qui peut être utilisé pour expliciter la condition de la proposition 2.

<u>Exercice 1</u>. Soient E et F deux ELC séparés, soit $\mathfrak{S}$ un ensemble de disques faiblement compacts dans E dont la réunion engendre E, soit F_s l'espace F muni de la topologie faible. Montrer que le dual de $L_{\mathfrak{S}}(E;F_s)$ est identique à $E\otimes F'$ (utiliser prop. 1 et Chap. 2, § 15, prop. 23). Montrer que l'on obtient encore le même dual en mettant sur $L(E;F_s) = L(E_\tau;F)$ la topologie borne supérieure de la topologie précédente, et de la topologie de l'espace $L_s(E_\tau;F)$ (utiliser Chap. 2, § 15, th. 11).

2. <u>Ensembles bornés dans les espaces d'applications linéaires</u>.

<u>Définition 1</u>. Soit E un ELC, $\mathfrak{S}$ un ensemble de parties bornées de E. Une partie U de E est dite <u>$\mathfrak{S}$-bornivore</u>, si pour tout $A\in\mathfrak{S}$, on a $\lambda U\supset A$ pour λ positif assez grand. Quand $\mathfrak{S}$ est l'ensemble de toutes les parties bornées de E, on dit aussi simplement que U est <u>bornivore</u>.

Quand U ou les $A\in\mathfrak{S}$ sont cerclés, il suffit dans la définition précédente de supposer qu'il existe, pour tout $A\in\mathfrak{S}$, un $\lambda\geqslant 0$ tel que $\lambda U\supset A$. Notons que dans le cas où $\mathfrak{S}$ est l'ensemble des parties de E réduites à un point, dire que U est $\mathfrak{S}$-bornivore signifie que U est équilibré.

Proposition 3. Soient E et F deux ELC, $\mathfrak{S}$ un ensemble de parties bornées de E, M un ensemble d'applications linéaires de E dans F (non nécessairement continues). Pour que $M(A)$ soit une partie bornée de F pour tout $A \in \mathfrak{S}$, il faut et il suffit que pour tout voisinage V de 0 dans F, l'ensemble $M^{-1}(V)$ soit une partie $\mathfrak{S}$-bornivore de E.

(On rappelle que $M(A) = \bigcup_{u \in M} u(A)$, $M^{-1}(V) = \bigcap_{u \in M} u^{-1}(V)$).

Démonstration triviale.

Corollaire 1. Soient E et F deux ELC, soit $\mathfrak{S}$ un ensemble de parties bornées de E. Pour une partie M de $L_{\mathfrak{S}}(E;F)$, les conditions suivantes sont équivalentes:

a) M est borné;

b) pour tout $A \in \mathfrak{S}$, $M(A)$ est une partie bornée de F;

c) pour tout voisinage de 0 dans F, $M^{-1}(V)$ est une partie $\mathfrak{S}$-bornivore de E.

En effet, l'équivalence de a) et b) est un cas particulier de Chap. 1, № 8, prop. 15, l'équivalence de b) et c) un cas particulier de la prop. 3.

Corollaire 2. Soit E un ELC muni d'un ensemble $\mathfrak{S}$

de parties bornées. Pour qu'une partie A' *de* E' *soit bornée pour la topologie de la* $\mathfrak{S}$*-convergence, il faut et il suffit que son polaire* A'° *soit une partie* $\mathfrak{S}$*-bornivore de* E.

Par suite, cela équivaut aussi au fait que l'envelop pe disquée faiblement fermée de A' est bornée pour la topologie de la $\mathfrak{S}$-convergence et de plus le corollaire 2 nous montre qu'*il y a correpondance biunivoque, par polarité, entre les disques fermés* $\mathfrak{S}$*-bornivores dans* E, *et les disques faiblement fermés de* E' *qui sont bornés pour la* $\mathfrak{S}$*-convergence*. On en déduit le

Corollaire 3. Soit E *un ELC, soient* $\mathfrak{S}_1$ *et* $\mathfrak{S}_2$ *deux ensembles de parties bornées de* E. *Alors les conditions suivantes sont équivalentes*:

a) *dans* E, *tout disque fermé qui est* $\mathfrak{S}_1$*-bornivore est* $\mathfrak{S}_2$*-bornivore*;

b) *dans* E', *toute partie bornée pour la* $\mathfrak{S}_1$*-convergence est bornée pour la* $\mathfrak{S}_2$*-convergence*;

c) *tout* $A \in \mathfrak{S}_2$ *est borné pour la topologie de la* $\mathfrak{S}'_1$*-convergence, où* $\mathfrak{S}'_1$ *est l'ensemble des parties de* E' *bornées pour la* $\mathfrak{S}_1$*-convergence*;

d) *pour tout ELC* F, *toute partie de* $L(E;F)$ *bornée pour la* $\mathfrak{S}_1$*-convergence est bornée pour la* $\mathfrak{S}_2$*-convergence*.

L'équivalence de a) et b) est évidente par polarité, grâce à la remarque qui précédait, d'autre part a) implique d) en vertu du corollaire 1, et b) est une spécialisation de d), donc a), b), d) sont équivalentes. Enfin b) signifie aussi (en vertu du critère de la prop. 3) que pour toute partie $A' \in \mathfrak{S}'_1$ de E', et toute partie $A \in \mathfrak{S}_2$ de E, l'ensemble $\langle A,A' \rangle$ des produits scalaires $\langle x,x' \rangle$, avec $x \in A$, $x' \in A'$, est borné. Mais cela équivaut aussi à c). Notons d'ailleurs que la condition b) est déjà vérifiée si on suppose d) valable pour <u>un</u> ELC F qui n'est pas l'adhérence de l'origine, comme il résulte de l'immersion de E' dans L(E;F) signalée au début du Nº 1. D'après le corollaire 3, si $\mathfrak{S}_1$ est un ensemble de parties donné de E, il existe un plus grande ensemble $\mathfrak{S}_2$ de parties bornées de E telles que, pour tout ELC F, toute partie de L(E;F) bornée pour la $\mathfrak{S}_1$-convergence est bornée pour la $\mathfrak{S}_2$-convergence: c'est l'ensemble des parties de E' bornées pour la $\mathfrak{S}_1$-convergence. En particulier, quand $\mathfrak{S}_1$ est l'ensemble des parties uniponctuelles de E (ce qui est le cas le plus intéressant), donc la topologie correspondante sur E' est la topologie faible on trouve pour $\mathfrak{S}_2$ l'ensemble des parties <u>fortement</u> <u>bornées</u> de E (on rappelle qu'on désigne par topologie forte sur E la topologie de la convergence uniforme sur les parties faiblement bornées de E', topologie ne dépendant que du système dual (E,E')). Enonçons en particulier la

<u>Proposition 3 bis</u>. <u>Soient</u> E <u>et</u> F <u>deux ELC, alors toute partie de</u> L(E;F) <u>bornée pour la convergence simple, est bornée pour la convergence uniforme sur les parties</u> f o r t e m e n t b o r n é e s <u>de</u> E.

Le théorème suivant dégage une classe importante de parties fortement bornées de E:

Théorème 1 (Banach-Steinhaus-Mackey). *Soit E un ELC séparé. Alors tout disque* borné *complet de E est fortement borné.*

En d'autres termes:

Corollaire 1. Soient E et F deux ELC, E séparé, alors toute partie de L(E;F) bornée pour la convergence simple, est bornée pour la convergence uniforme sur les disques bornés *complets de E.*

Cela signifie aussi que dans E, tout disque fermé équilibré est $\mathfrak{S}$-bornivore, où $\mathfrak{S}$ est l'ensemble des disques bornés complets de E. Signalons tout de suite que le th. 4 bis du Chapitre 2, Nº 8, est un cas particulier du théorème 1: on se ramène en effet aussitôt au cas d'un ELC *séparé* E, qu'on regarde alors comme le dual de E' faible pour la topologie de la convergence uniforme sur un ensemble convenable $\mathfrak{S}$ de disques faiblement compacts (donc faiblement complets) de E': dire qu'une partie de E est faiblement bornée signifie qu'elle est bornée pour la topologie de la convergence simple, donc d'après le th. 1, elle est aussi bornée pour la $\mathfrak{S}$-convergence. - Plus généralement, on a le

Corollaire 2. Soient E et F deux ELC, E séparé. Soit M un ensemble d'applications linéaires continues de E dans F, borné pour la convergence simple, alors M est borné pour la topologie de la convergence uniforme sur les disques faiblement compacts de E.

En effet, on peut remplacer la topologie de E par la topologie faible, et une partie faiblement compacte de E étant à fortiori bornée et faiblement complète, on peut appliquer le théorème 1.

Corollaire 3. *Soit E un ELC séparé, on suppose que est complet, ou plus généralement que les parties bornées et fermées de E soient complètes. Alors pour tout ELC F, tout ensemble d'applications linéaires continues de E dans F, borné pour la topologie de la convergence simple, est déjà borné pour la topologie de la convergence bornée.*

Définition 2. On dit que E est *quasi-complet* si ses parties bornées et fermées sont complètes.

Ainsi, si E est quasi-complet, les parties de $L(E;F)$ bornées pour les diverses topologies de $\mathfrak{S}$-convergence, où $\mathfrak{S}$ est un ensemble de parties bornées de E dont la réunion engendre E, sont les mêmes.

Démonstration du théorème 1. Il faut montrer que si M est un ensemble d'applications linéaires continues de E dans F, borné pour la convergence simple, et si A est un disque borné et complet dans E, alors $M(A)$ est une partie bornée de F. Soit E_A l'espace vectoriel engendré par A, muni de la semi-norme *jauge* de A:

$$\|x\|_A = \operatorname*{Inf}_{x \in \lambda A} |\lambda| ;$$

c'est une vraie norme, comme il résulte immédiatement du fait que A est borné. Prenant les restrictions des $u \in M$ à E_A, on est ramené à prouver que l'ensemble d'applications de E_A dans F ainsi obtenu est borné pour la A-convergence. Mais cet ensemble est borné pour la convergence simple, et il suffit maintenant de prouver que E_A est complet, et d'appliquer ensuite le théorème de Banach-Steinhaus (Chap. 1, Nº 15, th. 11). Nous sommes ramenés au lemme suivant, ayant sont intérêt propre:

<u>Lemme 1</u>. <u>Soit</u> E <u>un ELC séparé</u>, <u>soit</u> A <u>un disque borné et complet dans</u> E. <u>Alors l'espace normé</u> E_A <u>correspondant est un espace de Banach i.e. est complet</u>.

En effet, A étant fermé dans E, donc contenant les extrémités des intervalles découpés par A sur les droites réelles passant par l'origine, la boule unité de E_A est A. D'autre part, il est immédiat qu'un espace normé est complet si et seulement si sa boule unité est complète. Il suffit donc de prouver que la boule unité A de E est complète pour la topologie normée de E_A. Cela résulte en effet de Chap. 2, Nº 18, prop. 36, appliqué à E_A et la topologie induite par E sur E_A.

<u>Exercice 1</u>. Soit E un ELC séparé, A une partie convexe complète (non nécessairement disquée) de E. Montrer que tout ensemble d'applications linéaires continues de E dans un ELC F, borné pour la convergence simple, est borné pour la A-convergence. (Se ramener au cas où $0 \in A$, et procé

der par l'absurde: si M n'était pas borné sur A, il existerait une suite (x_n) extraite de A telle que M ne soit pas borné sur la suite des x_n/n; envisager alors l'enveloppe convexe fermée K de la suite des x_n/n, et noter que $K - K$ est une partie compacte convexe symétrique de E sur laquelle M ne serait pas borné).

Exercice 2. Une suite de scalaires (λ_i) est dite à décroissance rapide si son produit par toute suite-monôme $i \longrightarrow i^n$ est borné. Soit E un ELC, une suite (x_i) dans E est dite à décroissance rapide si pour toute semi-norme continue p sur E, la suite des $p(x_i)$ est à décroissance rapide. Montrer que pour ceci, il faut et il suffit que pour tout entier $n > 0$, la suite $(i^n x_i)$ dans E soit bornée. En conclure que la suite (x_i) dans E est à décroissance rapide si et seulement si pour toute $x' \in E'$, la suite $(\langle x_i, x' \rangle)$ est à décroissance rapide. - Généraliser ces résultats à une categorie générale de classes de suites.

Exercice 3. Soit u une application linéaire continue d'un ELC E dans un autre F. Montrer que u est continue pour les topologies fortes (appliquer Chap. 2, Nº16, proposition 28, corollaire 4), et transforme donc les parties fortement bornées en des parties fortement bornées. En particulier, si u est une application linéaire continue d'un espace de Banach E dans un ELC F, alors elle transforme la boule unité de E en une partie fortement bornée de F, i.e. elle est continue pour la topologie forte sur F. b) Soit F un

ELC, muni de la topologie T, soit T' une autre topologie localement convexe sur F admettant un système fondamental de voisinages de 0 fermés pour T. Montrer que toute application linéaire u d'un espace de Banach E dans F, continue pour T, est continue pour T' (noter que la topologie T est la topologie de la convergence uniforme sur un ensemble de parties faiblement bornées du dual E' de F muni de T).

c) Cas particulier: Soient E et F des ELC, soit u une application linéaire continue d'un espace de Banach H dans $L_s(E;E_s)$, alors u est aussi une application continue de H dans $L_b(E;F)$.

Exercice 4. Soit (E,E') un système dual. Pour que toute partie bornée de E soit fortement bornée, il faut et il suffit qu'il en soit ainsi dans E'.

3. Rélations entre ensembles bornés et ensembles équicontinus. Espaces tonnelés.

Soient E et F deux ELC, M un ensemble d'applications linéaires de E dans F. M est équicontinu si et seulement si pour tout voisinage V de 0 dans F, l'ensemble $M^{-1}(V)$ est un voisinage de 0 dans E. On peut supposer V disqué fermé, alors $M^{-1}(V)$ est un disque, qui est d'ailleurs fermé si on suppose déjà les $u \in M$ continues. Remarquons que si M est équicontinu, alors les ensembles $M^{-1}(V)$ sont à fortiori $\mathfrak{S}$-bornivores pour tout ensemble $\mathfrak{S}$ de parties bornées de E, d'où (prop. 3):

<u>Proposition 4</u>. <u>Soient</u> E <u>et</u> F <u>deux</u> <u>ELC</u>, M <u>un</u> <u>ensemble</u> <u>équicontinu</u> <u>d'applications</u> <u>linéaires</u> <u>de</u> E <u>dans</u> F. <u>Alors</u> M <u>est</u> <u>borné</u> <u>pour</u> <u>toute</u> <u>topologie</u> <u>de</u> $\mathfrak{S}$-<u>convergence</u> (<u>où</u> $\mathfrak{S}$ <u>est</u> <u>un</u> <u>ensemble</u> <u>de</u> <u>parties</u> <u>bornées</u> <u>de</u> E).

On avait déjà vu cette proposition au Chap. 1, Nº15, prop. 22. Nous examinons les cas ou on a une réciproque. Signalons d'abord le

<u>Lemme</u>. <u>Soit</u> E <u>un</u> <u>ELC</u>, $\mathfrak{S}$ <u>un</u> <u>ensemble</u> <u>de</u> <u>parties</u> <u>bornées</u> <u>de</u> E. <u>Les</u> <u>conditions</u> <u>suivantes</u> <u>sont</u> <u>équivalentes</u>:

a) <u>Dans</u> E, <u>tout</u> <u>disque</u> <u>fermé</u> $\mathfrak{S}$-<u>bornivore</u> <u>est</u> <u>un</u> <u>voisinage</u> <u>de</u> 0.

b) <u>Toute</u> <u>partie</u> <u>de</u> E' <u>bornée</u> <u>pour</u> <u>la</u> $\mathfrak{S}$-<u>convergence</u> <u>est</u> <u>équicontinue</u>.

c) <u>Dans</u> L(E;F), <u>toute</u> <u>partie</u> <u>bornée</u> <u>pour</u> <u>la</u> $\mathfrak{S}$-<u>convergence</u> <u>est</u> <u>équicontinue</u>, <u>quel</u> <u>que</u> <u>soit</u> <u>l'ELC</u> F.

(Comparer prop. 3, corollaire 3). L'équivalence de a) et b) est immédiate par polarité, car on peut se borner dans b) aux parties disquées faiblement fermées de E', et appliquer prop. 3, corollaire 2. b) implique c), à cause de la caractérisation des parties bornées resp. équicontinues de L(E;F) par la nature des ensembles $M^{-1}(V)$ (V voisinage disqué fermé de 0 dans F). Enfin c) implique b): il suffit même de supposer c) vraie pour <u>un</u> espace F différent de l'adhérence de l'origine, grâce à l'immersion de E' dans L(E;F) signalée au début du Nº 1.

Définition 3. Soit E un ELC. On dit que E est tonnelé (resp. quasi-tonnelé) si toute partie faiblement bornée (resp. fortement bornée) de E' est équicontinue.

En vertu du lemme qui précède, cela signifie donc aussi que dans E, tout disque fermé équilibré (resp. tout disque fermé bornivore) est un voisinage de 0; ou encore:

Proposition 5. L'espace localement convexe E est tonnelé (resp. quasi-tonnelé) se et seulement si la proposition suivante est vrai: Pour tout espace localement convexe F, toute partie de L(E;F) bornée pour la topologie de la convergence simple (resp. bornée pour la topologie de la convergence bornée) est équicontinue.

Corollaire. Soit E un ELC tonnelé, F un ELC séparé quelconque, (u_i) une suite d'applications linéaires continues de E dans F telle que $u_i(x)$ tende vers un limite $u(x)$ pour tout $x \in E$. Alors la suite (u_i) est équicontinue, donc u est une application linéaire continue de E dans F, et u_i tend vers u uniformément sur tout compact.

Bien entendu, un espace tonnelé est quasi-tonnelé , de façon précise dire que E est tonnelé, signifie que E est quasi-tonnelé et satisfait à l'hypothèse supplémentaire suivante: toute partie faiblement bornée de E' est fortement bornée. Nous avons vu (Nº 1, th. 1) que cette dernière propri été est vérifiée dans des cas très étendus, par exemple chaque fois que E est quasi-complet. Ainsi, *si E est quasi-complet, dire qu'il est tonnelé ou quasi-tonnelé revient au même*. Signalons encore qu'*un espace quasi-tonnelé a forcément la topologie de Mackey* $\tau(E,E')$, car cela signifie que les disques faiblement compacts de E' sont équicontinus, or ils sont fortement bornés.

Le théorème de Banach-Steinhaus (Chap. 1, Nº 15), exprimé pour les espaces métrisables complets *localement convexes*, signifie précisément que

Théorème 2. *Un ELC métrisable et complet est tonnelé*.

Il est facile de voir qu'il est essentiel que l'espace envisagé soit bien complet. Nous verrons cependant au Nº suivant qu'un ELC métrisable, même non complet, est toujours quasi-tonnelé.

Exercice 1. a) un espace quotient d'un espace tonnelé (resp. quasi-tonnelé) est tonnelé (resp. quasi-tonnelé).
b) Soit (E_i) une famille d'ELC, alors $\prod E_i$ est tonnelé (resp. quasi-tonnelé) si et seulement si chaque E_i est tonnelé (resp. quasi-tonnelé) (voir Chap. 3, § 1, nº 4, exerc. 7).
c) Un sous-espace vectoriel, facteur direct topologique d'espace tonnelé (resp. quasi-tonnelé) est tonnelé (resp. quasi-tonnelé).

Exercice 2. Soit E un ELC. Considérons sur E' une topologie compatible avec la dualité (E,E'). Montrer que pour que E soit tonnelé, il faut et il suffit que la topologie de E soit $\tau(E,E')$, et que E' soit réflexif.

<u>Exercice 3</u>. Déduire de l'exercice 2 un exemple d'un ELC complet, muni d'une topologie de Mackey, et non tonnelé (donc aussi non quasi-tonnelé). (Prendre le dual E' d'un espace métrisable et complet E non réflexif, et munir E' de la topologie de Mackey $\tau(E',E)$). En utilisant l'exercice 1, b), en déduire un exemple d'un sous-espace vectoriel fermé non tonnelé d'un espace tonnelé complet (se rappeler que tout espace localement convexe séparé est isomorphe à un sous-espace vectoriel topologique d'un produit d'espaces de Banach).

<u>Exercice 4</u>. Le complété d'un espace quasi-tonnelé est tonnelé.

<u>Exercice 5</u>. Soit E un ELC qui est un espace de Baire. Montrer que E est tonnelé (noter que la demonstration du théorème de Banach-Steinhaus est valable dans ce cas). - On notera qu'il existe des espaces normés tonnelés qui ne sont pas des espaces de Baire, voir Nº 5, exercice 11.

<u>Exercice 5 bis</u>. Soit E un ELC. 1) Pour que E soit quasi-tonnelé, il faut et il suffit que l'application canonique de E dans le dual fort de E' fort soit un isomorphisme dans. Pour que ce soit un isomorphisme sur, il faut et il suffit que E soit quasi-tonnelé et réflexif. Montrer que alors E est même tonnelé. 2) Soit E un ELC tonnelé et quasi-complet. Pour que E soit réflexif, il faut et il suffit

que E' fort le soit (voir Chap. 2, Nº 18, th. 13, corol.4).

<u>Exercice</u> <u>6</u>. Montrer que le lemme du Chap. 1, Nº 15, reste vrai quand E est un ELC métrisable tonnelé, G un ELC quelconque. En déduire que si E et F sont deux ELC métrisables dont l'un est tonnelé, toute application bilinéaire de E F dans un ELC G, continue par rapport à chacune des variables, est continue; et si E et F sont tous deux tonnelés, tout ensemble M d'applications bilinéaires séparément continues de $E \times F$ dans G, tel que $M(x,y)$ soit une partie bornée de G pour tout $x \in E$, $y \in F$ est équicontinu.

<u>Exercice</u> <u>7</u>. Soit K un espace complet. a) Soit H un ensemble non borné de mesures sur K, montrer qu'il existe un $x \in K$ tel que pour tout voisinage V de x et tout $n>0$, existe $\mu \in H$ et une partie A de V, tels que $|\mu(A)| > n$ (noter qu'il suffit que x soit tel que pour tout V et n, on puisse trouver $\mu \in H$ telle que $|\mu|(V) > n$; et pour prouver qu'il existe un tel x, procéder par l'absurde, en utilisant Borel-Lebesgue). b) Sous ces conditions, où bien il existe un voisinage V de x tel que $|\mu|(V \cap \complement x)$ reste borné pour $\mu \in H$ (alors $\mu(x)$ ($\mu \in H$) ne reste pas borné). Ou bien on peut construire par récurrence une suite de voisinages ouverts V_n de x et une suite d'ouverts U_n, enfin une suite (μ_n) extraite de H, telles que:

$$\overline{V_{n+1}} \subset V_n \cap \complement \bigcup_{1 \leq i \leq n} U_i, \qquad \overline{U_{n+1}} \subset V_{n+1} \cap \complement x,$$

$$\mu_i(U_{n+1}) \leqslant 2^{-n-1} \quad \text{pour} \quad i \leqslant n, \quad \mu_{n+1}(U_{n+1}) > n+1.$$

c) En conclure qu'il existe un ouver U tel que $\mu(U)$ ($\mu \in H$) ne reste pas borné (prendre $U = K \cap \complement x$ dans le premier cas de b), ou aussi pour U un voisinage assez petit de x, et $U = \bigcup_i U_i$ dans le deuxième cas). d) Supposons que les $\mu \in H$ soient toutes de mesures de base μ_o, où μ_o est une mesure positive telle que tout point de K ait une mesure nulle pour μ_o. Si H n'est pas borné, il existe un ouvert U, dont la frontière est de mesure nulle pour μ_o, et tel que $\mu(U)$ ($\mu \in H$) ne reste pas borné. (Montrer que dans la construction faite dans b), on peut supposer $\mu_o(U_n) \leqslant \frac{1}{n}$, et de plus que chaque U_n a une frontière de mesure nulle, en utilisant le résultat général, supposé connu: tout point a de K a un système fondamental de voisinages ouverts dont la frontière est de mesure nulle - résultat indépendant de toute hypothèse sur μ_o - d'où on conclut que le même énoncé reste vrai en remplaçant a par une partie compacte arbitraire de K). En considérant la suite des mesures $\varepsilon_o + n(\varepsilon_{1/n} - \varepsilon_{-1/n})$ sur l'intervalle compact $(-1,1)$, montrer que l'hypothèse restrictive sur μ_o est essentielle: H peut même être tel que $\mu(U)$ ($\mu \in H$) reste borné chaque fois que U est réduit à un point, sans que H soit borné.

<u>Exercice 8</u>. Soit I un ensemble d'indices, soit E le sous-espace vectoriel de $\ell^\infty(I)$ engendré par les fonctions caractéristiques φ_A de parties $A \subset I$. a) Montrer que

E (qui est dense dans $\ell^\infty(I)$) est tonnelé, i.e. que toute partie H du dual de $\ell^\infty(I)$, bornée sur les φ_A, est bornée. (Utiliser l'exercice précédent, a) et b), en notant que l'on est dans le deuxième cas de b) et qu'on peut y supposer les U_n ouverts et fermés - bien entendu, K est le compactifié de Stone de I, de sorte que C(K) s'identifie à $\ell^\infty(I)$ de la manière usuelle - . Les parties ouvertes et fermées U_i de K correspondent aux parties A_i de I, et en variant le raisonnement de Chap. 3, Nº 7, ex. 2, c, se ramener au cas où $I = \mathbf{N}$ (ensemble des entiers naturels) et où A_i serait réduit à i. En conclure qu'on aurait $\mu_n(\mathbf{N}) \longrightarrow \infty$, ce qui est absurde). b) Montrer que si I est infini, l'espace tonnelé E précédent n'est pas un espace de Baire. (pour tout entier $n > 0$, soit E_n la partie de E formée des

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \varphi_{A_i},$$

avec $|\lambda_i| \leqslant n$. Montrer par un argument de compacité faible que E_n est fermé dans $\ell^\infty(I)$ et à fortiori dans E, puis remarquer que E est la réunion de la suite (E_n), mais que tout E_n a un intérieur vide dans E). c) Soit K un espace compact <u>stonien</u> i.e. dans lequel l'adhérence d'un ouvert est ouverte. Soit E le sous-espace vectoriel de C(K) engendré par les fonctions caractéristiques des ensembles à la fois ouverts et fermés de K. Montrer que E (qui est dense dans C(K)) est tonnelé, donc que tout ensemble H de mesures sur K, tel que $\mu(A)$ $(\mu \in H)$ soit borné pour toute partie A de

K à la fois ouverte et fermée, est borné.(Se ramener à a), en admettant le fait connu suivant: Il existe une projection de norme 1 de $\ell^\infty(K)$ sur C(K), qui est un homomorphisme pour les structures d'algèbre, et transforme donc idempotents, i. e. fonctions caractéristiques d'ensemble, en idempotents).

4. Espaces bornologiques.

Définition 4. Soit E un ELC. On dit que E est *bornologique* si tout disque bornivore de E est un voisinage de 0.

A fortiori, un disque bornivore fermé est alors un voisinage de 0, donc *un espace bornologique est quasi-tonnelé*, à fortiori sa topologie est la topologie de Mackey. L'intérêt de la notion d'espace bornologique apparait dans ses formulations équivalentes:

Proposition 6. Soit E un ELC. Les conditions suivantes sont équivalentes:

a) *E est bornologique;*

b) *Tout ensemble M d'applications linéaires de E dans un ELC F, tel que M(A) soit une partie bornée de F pour toute partie bornée A de E, est équicontinu;*

c) *Toute application linéaire u de E dans un ELC F, transformant bornés en bornés, est continue.*

d) *Tout ensemble de formes linéaires sur E, uni -*

formément borné sur les parties bornées de E, est équicontinu.

e) e) Toute forme linéaire sur E, bornée sur les bornés, est continue, et la topologie de E est la topologie de Mackey $\tau(E,E')$.

a) implique b) car l'hypothèse sur M signifie que pour tout voisinage disqué V de 0 dans F, $M^{-1}(V)$ est un disque bornivore dans E (Nº 2, prop. 3), donc un voisinage de 0 puisque E est bornologique, donc M est équicontinu. b) implique trivialement c), montrons que c) implique a). Soit en effet V un disque bornivore dans E, soit F l'espace E muni de la semi-norme jauge de V, nous voulons montrer que V est un voisinage de 0, i.e. que l'application identique de E sur F est continue. Mais dire que V est bornivore signifie que l'application identique de E sur F transforme bornés en bornés (prop. 3), elle est donc bien continue par hypothèse. Ainsi a),b),c) sont équivalentes, et elles impliquent manifestement d), qui implique e) (car tout disque faiblement compact de E' sera équicontinu). Enfin e) implique c) car la topologie de E étant $\tau(E,E')$, pour verifier que u est continue, il suffit de vérifier qu'elle est faiblement continue (Chap. 2, Nº 16, prop. 28, corollaire 2), donc que pour toute $y' \in F'$, $y' \circ u$ est une forme linéaire continue sur E. Or cette forme linéaire est en effet bornée sur les parties bornées de E.

L'utilité des espaces bornologiques tient surtout à ce qu'ils permettent d'utiliser le critère donné dans la prop.

6, c), pour décider si une application linéaire u de l'espace bornologique E dans l'ELC F est continue. En effet, le fait que u transforme les parties bornées de E en des parties bornées de F peut se vérifier sans difficulté le plus souvent (en utilisant au besoin le th. du graphe fermé, quand les espaces E_A - où A est un disque borné fermé dans E - sont complets).

Donnons une caractérisation, parfois commode, des applications linéaires d'un ELC E dans un autre qui transforment les parties bornées en des parties bornées. Nous aurons besoin de la

<u>Définition</u> <u>5</u>. Soit E un ELC, (x_i) une suite dans E. On dit que (x_i) tend vers une limite $x \in E$ <u>au sens de Mackey</u>, s'il existe un disque borné A dans E tel que (x_i) tende vers x dans l'espace normé E_A.

Cela signifie aussi que $x_i - x$ tend vers 0 au sens de Mackey; et dire que (x_i) tend vers 0 au sens de Mackey signifie aussi, manifestement, qu'il existe une suite de scalaires $\lambda_i > 0$, tendant vers 0, telle que la suite des x_i/λ_i reste bornée; remplaçant alors (λ_i) par la suite $(\sqrt{\lambda_i})$, on voit que l'on peut même supposer que (x_i/λ_i) tend vers zéro. Bien entendu, la convergence au sens de Mackey entraine la convergence au sens de la topologie de E.

<u>Proposition</u> <u>7</u>. <u>Soit</u> u <u>une application linéaire d'ELC</u> E <u>dans un autre</u> F. <u>Les conditions suivantes sont équivalentes</u>:

a) u transforme les parties bornées de E en des parties bornées de F.

b) u transforme les suites qui convergent vers 0 au sens de Mackey, en des suites qui convergent vers 0 au sens de Mackey.

c) u transforme les suites qui convergent vers 0 au sens de Mackey en des suites qui convergent vers 0 (pour la topologie de F).

d) u transforme les suites qui convergent vers 0 au sens de Mackey en des suites bornées.

En effet, les implications a) $\Rightarrow$ b) $\Rightarrow$ c) $\Rightarrow$ d) sont immédiates. Pour prouver d) $\Longrightarrow$ a), on suppose que a) n'est pas vérifié, donc qu'il existe une partie bornée A de E et un voisinage V de 0 dans F tel que u(A) ne soit contenu dans aucun homothétique de V. Donc pour tout entier $n > 0$, il existerait $x_n \in A$ tel que $u(x_n) \notin n^2 V$, d'où $u(x_n/n) \notin nV$ donc (x_n/n) serait une suite dans E convergente vers 0 au sens de Mackey, dont l'image dans F ne serait pas bornée. - La proposition 7 permet de mettre sous d'autres formes la condition b) de la proposition 6. On obtient par exemple:

Corollaire. Soit E un ELC bornologique, u une application linéaire de E dans un ELC F. Pour que u soit continue, il faut et il suffit que u soit continue pour les suites (ou aussi: que u transforme les suites qui convergent vers zéro en des suites b o r n é e s ; et il suffit même que cela soit vrai pour les suites qui congents vers 0 au sens de Mackey.

Notons maintenant le

Lemme. Soit E un ELC métrisable, (x_i) une suite dans E qui converge vers 0, alors elle converge vers 0 au sens de Mackey.

En effet, soit (p_n) une suite fondamentale de semi-normes continues de E, l'hypothèse signifie que pour tout n, la suite $(p_n(x_i))$ tend vers 0, il faut en conclure l'existence d'une suite de scalaires $\lambda_i > 0$ tendant vers 0 telle que x_i/λ_i reste bornée, donc telle que pour tout n, la suite $(p_n(x_i)/\lambda_i)$ reste bornée. Il suffit pour cela de poser

$$M_n = \operatorname{Sup} p_n(x_i), \quad \text{et prendre} \quad \lambda_i = \sum_n \frac{1}{2^n M_n} p_n(x_i).$$

Conjugant le lemme avec le critère c) de la prop. 7, on voit que les applications linéaires bornées de E dans un ELC quelconque F sont exactement celles qui sont continues pour les suites, i.e. (E étant métrisable) celles qui sont continues. Par suite (prop. 6, critère c)

Théorème 3. Un ELC métrisable (non nécessairement complet) est bornologique.

Corollaire. Un ELC métrisable est quasi-tonnelé, et à fortiori sa topologie est la topologie de Mackey.

De ce dernier fait, on conclut (voir Chap. 2, Nº 16, prop. 28, corollaire 2) les corollaires suivants:

Corollaire 1. *Soit u une application linéaire d'un ELC métrisable E dans un ELC quelconque F. Pour que u soit continue, il faut et il suffit qu'elle soit faiblement continue.*

Corollaire 2. *Soit u une application linéaire continue d'un ELC quelconque F dans un ELC métrisable E. Pour que u soit un homomorphisme, il faut et il suffit que ce soit un homomorphisme faible.*

Exercice 1. a) Un espace quotient d'un espace bornologique est bornologique. b) Soit (E_i) une famille *finie* d'ELC. Pour que leur produit soit bornologique, il faut et il suffit que les E_i les soient. c) Un espace facteur direct topologique d'un espace bornologique est bornologique.

Exercice 2. Soit $(E_i)_{i \in I}$ une famille d'ELC. Montrer que pour que le produit $\prod E_i$ soit bornologique, il suffit, et il faut si les E_i soient séparés et $\neq 0$, que les E_i soient bornologiques, et que le produit $\mathbf{R}^I$ soit bornologique. En conclure que le produit d'une *suite* d'espaces bornologiques est bornologique.

Exercice 3. Soit E un ELC quelconque. Montrer qu'il existe sur E une topologie T la moins fine des topologies bornologiques plus fines que la topologie donné; un système fondamental de voisinages de 0 pour T est formé des disques bornivores de E.

Exercice 4. Montrer que les résultats de Nº 2, exercice 3, restent valables quand on y remplace l'espace de Banach E resp. H par un espace bornologique quasi-complet quelconque.

Exercice 5. Soit E un ELC séparé. Les conditions suivantes sont équivalentes:

a) Pour tout disque borné fermé A de E, E_A est complet.

b) Pour tout disque borné A dans E, existe un disque borné B dans E, contenant A, tel que E_B soit complet.

c) Pour toute application linéaire continue u d'un espace normé H dans E, il existe une application linéaire continue du complété de H dans E qui prolonge u.

d) L'enveloppe convexe formé de toute suite dans t qui converge vers zéro au sens de Mackey est compacte. (Pour ce dernier point, utiliser Chap. 2, Nº 3, exercice 3).

Alors toute partie bornée de E est fortement bornée, donc tout ensemble d'applications linéaires continues de E dans un ELC F, borné pour la convergence simple, est borné pour la convergence bornée.

Exercice 6. Soit E un ELC métrisable. Les conditions suivantes sont toutes équivalentes:

a) E est tonnelé;

b) toute partie faiblement bornée de E' est fortement bornée;

c) toute suite faiblement convergente vers 0 dans E' est équicontinue (ou, ce qui est la même chose, fortement bornée);

d) toute suite faiblement convergente vers 0 dans E' converge uniformément sut tout compact;

e) E n'est pas la réunion d'une suite de disques fermés dont aucun n'est un voisinage de 0.

Exercice 7. Soit E un espace bornologique (resp. quasi-tonnelé), F un ELC complet (resp. quasi-complet). Montrer que $L_b(E;F)$ est complet (resp. quasi-complet).

5 Fonctions bilinéaires: modes de continuité. Continuité et continuité séparée.

Définition 6. Soient E, F, G trois espaces topologiques, u une application de $E\times F$ dans G. u est dite séparément continue si elle es continue par rapport à chaque variable. Si G est même un espace uniforme, on dit qu'un ensemble M d'applications $u(x,y)$ de $E\times F$ dans G est équicontinu en x (resp. en y) si pour tout $y\in F$, l'ensemble des applications $x \longrightarrow u(x,y)$, où u parcourt M, est un ensemble équicontinu d'applications de E dans G (resp. si ...). M est dit séparément équicontinu, s'il est équicontinu à la fois en x et en y.

Interpretant les applications de $E\times F$ dans G comme des applications de E dans l'ensemble des applications de F dans G, dire que u est séparément continue signifie qu' il lui correspond une application de E dans l'espace $C(F,G)$ des applications <u>continues</u> de F dans G, qui est <u>continue</u> quand on munit $C(F,G)$ de la topologie de la convergence simple. De même dire que M est un ensemble d'applications séparément continues de E F dans G <u>équicontinu par rapport à</u> x, signifie que l'ensemble des applications de E dans $C_s(F,G)$ qui lui correspond est <u>équicontinu</u>; et dire que M est <u>équicontinu par rapport à</u> y, signifie que pour tout $x \in E$, l'ensemble $M(x)$ des transformés de x par les applications $E \longrightarrow C_s(F,G)$ correspondants aux $u \in M$ est une partie équicontinue de $C(F,G)$. D'autre part, si E, F, G sont des ELC, dire qu'une application de $E \times F$ dans G est bilinéaire signifie que l'application de E dans l'espace des applications de F dans G qui lui correspond, applique E dans l'espace des applications <u>linéaires</u> de F dans G et est <u>linéaire</u>. Par suite on a le fait fondamental et trivial suivant:

<u>Théorème 4</u>. <u>Soient</u> E, F, G <u>trois ELC</u>. <u>Alors les applications bilinéaires séparément continues de</u> $E \times F$ <u>dans</u> G <u>correspondent biunivoquement aux applications linéaires continues de</u> E <u>dans l'espace</u> $L_s(F,G)$ <u>des applications linéaires continues de</u> E <u>dans</u> G, <u>muni de la topologie de la convergence simple</u>.

<u>Corollaire</u>. <u>Soient</u> E <u>et</u> F <u>deux ELC</u>. <u>Alors les formes bilinéaires séparément continues sur</u> $E \times F$ <u>correspondent biunivoquement aux applications linéaires continues de</u> E <u>dans le dual faible</u> F'_s <u>de</u> F.

On notera d'ailleurs que la notion de <u>forme</u> bilinéaire séparément continue sur $E \times F$ ne dépend que des duals de E et F. Bien entendu, dans cet que précède, on obtiendra des énoncés symétriques en échangeant les rôles de E et F. Notons maintenant la

<u>Proposition 8. Soient E, F, G des espaces localement convexes, u une application bilinéaire de $E \times F$ dans G. Pour que u soit continue, il faut et il suffit que u soit continue à l'origine. Si G est normable, il faut et il suffit aussi que l'application correspondante de E dans $L(F,G)$ transforme un voisinage convenable de 0 dans E en une partie équicontinue de $L(F,G)$. Enoncés analogues pour les ensembles équicontinus d'applications bilinéaires de $E \times F$ dans G.</u>

La démonstration est immédiate. En particulier:

<u>Corollaire 1. Soient E et F deux ELC. Alors les formes bilinéaires continues sur $E \times F$ correspondent biunivoquement aux applications linéaires de E dans F' qui transforment un voisinage convenable de 0 en une partie équicontinue de F'. Les ensembles équicontinus de formes bilinéaires correspondent aux ensembles d'applications linéaires de E dans F' appliquant un voisinage fixe convenable de 0 dans une partie équicontinue fixe de F'.</u>

<u>Corollaire 2. Soit E un ELC, munissons E' de la topologie forte. Alors la forme bilinéaire canonique sur $E \times E'$ est continue si et seulement si E est semi-normable.</u>

En effet, en vertu du corollaire 1, cette forme bilinéaire est continue si et seulement si il existe un voisinage de 0 dans E qui est équicontinu en tant que partie du dual de E', i.e. qui est borné. Or cela signifie que E est semi-normable (Chap. I, Nº 7, prop. 12, corol. 1). Le corollaire 2 nous montre qu'il y a des formes bilinéaires fort importantes qui ne sont pas continues mais seulement séparément continues. Rappelons pourtant qui se E et F sont métrisables et complets, alors toute application bilinéaire séparément continue de $E\times F$ est continue (Chap. 1, Nº15, th. 12). Nous verrons un autre cas important analogue au Chap. 5, § 3, Nº 2.

Hypocontinuité. On est conduit à chercher des modes de continuité des formes bilinéaires moins fortes que la continuité pure et simple, et plus fortes que la continuité séparé.

Lemme. Soient E, F deux espaces topologiques, G un espace uniforme, $\mathfrak{S}$ un ensemble de parties de E, u une application séparément continue de $E\times F$ dans G. Alors les deux conditions suivantes sont équivalentes: a) l'application $E \longrightarrow C_s(F,G)$ qui correspond à u transforme les $A\in\mathfrak{S}$ en des parties équicontinues de $C(F,G)$; b) l'application $F \longrightarrow C_s(E,G)$ qui correspond à u est aussi une application continue de E dans l'espace $C_{\mathfrak{S}}(E,G)$ des applications continues de E dans G, muni de la topologie de la $\mathfrak{S}$-convergence.

Quand ces conditions sont vérifiées, alors pour tout $A\in\mathfrak{S}$, la restriction de u à $A\times F$ est continue. Quand de plus les conditions analogues, relativement à un ensemble $\mathfrak{T}$ de parties de F, sont vérifiées, alors pour tout $A \in \mathfrak{S}$, $B \in \mathfrak{T}$, la restriction de u à $A \times B$ est uniformément continue.

La démonstration est triviale (voir Chap. 0, prop. 9, 3º). On laisse au lecteur le soin d'énoncer la généralisation du lemme relative à la donnée d'un <u>ensemble</u> d'applications séparément continues de $E \times F$ dans G, et une variante de ce dernier énoncé, relative au cas où on suppose que F est aussi un espace uniforme, et où on remplace dans l'énoncé des conditions a) et b), "continu" par "uniformément continu", "équicontinu" par "uniformément équicontinu".

<u>Définition 6 bis</u>. Soient E, F deux espaces topologiques, G un espace uniforme, $\mathfrak{S}$ un ensemble de parties de E. On dit qu'une application u de $E \times F$ dans G est <u>hypocontinue</u> par rapport à $\mathfrak{S}$, si elle est séparément continue et satisfait aux conditions du lemme précédent. On définit de même pour un <u>ensemble</u> d'applications de $E \times F$ dans G, la notion de <u>équihypocontinuité</u> de M par rapport à $\mathfrak{S}$. De même, si F est un espace uniforme, on a les variantes évidentes: application u uniformément <u>hypocontinue</u> par rapport à $\mathfrak{S}$, ensemble M d'applications <u>uniformément</u> <u>équihypocontinu</u> par rapport à $\mathfrak{S}$.

Quand E, F, G sont des ELC et qu'on ne considère que des applications <u>bilinéaires</u> de $E \times F$ dans G, comme les parties équicontinues de $L(F;G)$ sont déjà uniformément équicontinues, il n'y a plus lieu de distinguer entre la notion d'application bilinéaire hypocontinue et uniformément hypocontinue, ou ensemble d'applications bilinéaires équihypocontinu ou uniformément équihypocontinu (par rapport à un $\mathfrak{S}$ donné). Dans ce cas, la notion n'a d'intérêt que si $\mathfrak{S}$ est un ensemble de parties <u>bornées</u> de E. Bien entendu, les notions précédentes pourraient se répéter en échangeant les rôles de E et F; ainsi, si $\mathfrak{T}$ est un ensemble de parties de F, on a la notion d'application de $E\times F$ hypocontinue par rapport à $\mathfrak{T}$, etc. Si on se donne simultanément un ensemble $\mathfrak{S}$ de parties de E et un ensemble $\mathfrak{T}$ de parties de F, on a la notion d'application hypocontinue par rapport à $\mathfrak{S}$ et $\mathfrak{T}$, etc. - Rappelons la significations des notions introduites dans le cas d'applications bilinéaires:

<u>Proposition 9</u>. Soient E, F, G des ELC, soit $\mathfrak{S}$ un ensemble de parties bornées de E. Pour qu'une application bilinéaire séparément continue u de $E\times F$ dans G soit hypocontinue par rapport à $\mathfrak{S}$, il faut et il suffit que u satisfasse à l'une des hypothèses équivalentes suivantes:

a) l'application $E \longrightarrow L(F,G)$ qui correspond à u transforme les $A\in\mathfrak{S}$ en des parties équicontinues de $L(F,G)$;

b) l'application $F \longrightarrow L(E,G)$ qui correspond à u est continue quand on muni $L(E,G)$ de la topologie de la $\mathfrak{S}$-convergence.

Alors pour tout $A\in\mathfrak{S}$, la restriction de u à $A\times F$ est continue. - Énoncé analogue pour un ensemble de applications bilinéaires séparément continues, équihypocontinu par rapport à $\mathfrak{S}$.

<u>Corollaire 1</u>. Soient E, F, G des ELC, u une application bilinéaire séparément continue de $E\times F$ dans G (resp. M un ensemble simplement borné d'applications bilinéaires continues de $E\times F$ dans G). Si F est tonnelé, alors u est hypocontinue par rapport aux parties bornées de E (resp. M est équihypocontinu par rapport aux parties bornées de E).

En effet, cela résulte du critère a) de la prop. 9, et du fait que dans $L_s(F,G)$ toute partie bornée est équicontinue. - Une application bilinéaire de $E\times F$ dans G est dite <u>hypocontinue</u>, si elle est hypocontinue par rapport aux parties <u>bornées</u> de E <u>et</u> de F; même définition pour un ensemble <u>équihypocontinu</u> d'applications bilinéaires de $E\times F$ dans G. On notera que pour une <u>forme</u> ou un ensemble de formes bilinéaires séparément continues sur $E\times F$, l'hypocontinuité par rapport à un ensemble $\mathfrak{S}$ de parties de E ne dépend pas de la topologie de E, mais seulement du dual de E, de sorte qu'on peut prendre sur E la topologie faible. Ainsi:

<u>Corollaire 2</u>. Soit u une forme bilinéaire hypocontinue sur $E\times F$. Alors pour toute partie bornée A dans E et toute partie bornée B dans F, la restriction de u à (A faible) F et à E (B faible) est continue. Il en est de même pour la restriction de u à (A faible)$\times$ $\times$(B faible), pourvu que A ou B soit précompact.

La dernière assertion résulte du fait que sur une partie précompacte d'un ELC, la topologie induite est identique à la topologie *faible* induite (Chap. 2, Nº 18, prop.33).

L'impression à retenir, c'est que dans les situations naturelles aux-quelles on pourra être conduit dans des questions d'Analyse, on arrivera à peu près toujours à démontrer par les techniques standart, que les applications bilinéaires séparément continues qu'on rencontre possèdent les propriétés d'hypocontinuité dont on aura besoin. A titre d'exemple, voir corollaire 1 de la prop. 9, et les exercices 7, 8, 9, ci-dessous. L'utilité de la notion d'hypocontinuité apparait d'une part dans la remarque (évidente) que *si u est une application bilinéaire séparément continue de $E \times F$ dans G, hypocontinue par rapport aux compacts de E (ou de F), alors u est continue par rapport aux suites convergentes*; la continuité par rapport aux suites convergentes de $E \times F$ suffit dans beaucoup de questions pour se substituer à la continuité (voir par exemple exercice 6). D'autre part, l'hypocontinuité d'une application bilinéaire intervient dans les questions de prolongement.

Prolongement d'applications bilinéaires hypocontinues.

Proposition 10. Soient E, F, G des ELC, E_1 (respect. F_1) un sous-espace vectoriel dense de E (resp. F), $\mathfrak{S}$ (resp. $\mathfrak{T}$) un ensemble filtrant de parties bornées de E_1 (resp. F_1) engendrant l'espace vectoriel E_1 (resp. F_1), $\overline{\mathfrak{S}}$ (resp. $\overline{\mathfrak{T}}$) l'ensemble des adhérences dans E (resp. F) des parties éléments de $\mathfrak{S}$ (respect. $\mathfrak{T}$). On suppose que $\overline{\mathfrak{S}}$ engendre E, que $\overline{\mathfrak{T}}$ engendre F, que G est séparé et quasi-complet. Alors toute application bilinéaire u de $E_1 \times E_1$ dans G, hypocontinue par rapport à $\mathfrak{S}$ et $\mathfrak{T}$, se prolonge de façon unique en une application bilinéaire $\tilde{u}$ de $E \times F$ dans G, hypocontinue par rapport à $\overline{\mathfrak{S}}$ et $\overline{\mathfrak{T}}$. Si u est continue, $\tilde{u}$ est continue; si u parcourt un ensemble d'applications bilinéaires, équihypocontinu par rapport à $\mathfrak{S}$ et $\mathfrak{T}$, alors $\tilde{u}$ parcourt un ensemble d'applications bilinéaires, équihypocontinu par rapport à $\overline{\mathfrak{S}}$ et $\overline{\mathfrak{T}}$. Si u parcourt un ensemble équicontinu d'applications bilinéaires, il en est de même de $\tilde{u}$.

La démonstration est immédiate, et laissée au lecteur, ainsi que la variante suivante de la proposition 10:

<u>Proposition 11</u>. Soient E, F deux ELC séparés, alors toute forme bilinéaire hypocontinue sur $E \times F$ se prolonge de façon unique en une forme bilinéaire séparément faiblement continue sur $E \times F''$. Quand u parcourt un ensemble équihypocontinu de formes bilinéaires, alors $\tilde{u}$ parcourt un ensemble de formes bilinéaires sur $E \times F''$ équihypocontinu par rapport aux ensembles bornés de E et aux ensembles équicontinus de F" (considérés comme duals de E' fort et F' fort). Quand u parcourt un ensemble équicontinu de formes bilinéaires sur $E \times F$, alors $\tilde{u}$ parcourt un ensemble équicontinu de formes bilinéaires

sur $E \times F"$. (Rappelons que sauf spécification du contraire, la topologie faible du bidual $E"$ signifie la topologie $\sigma(E",E')$, tandis que la topologie "naturelle" de $E"$, qu'on a toujours en vue quand on ne spécifie pas d'autre topologie sur $E"$, est la topologie de la convergence uniforme sur les parties équicontinues de E').

<u>Exercice 1</u>. Soient E, F, G des espaces localement convexes, soit M un ensemble d'applications bilinéaires de $E \times F$ dans G. Pour que M soit équicontinu (resp. équi-hypocontinu par rapport à un ensemble $\mathfrak{S}$ de parties bornées de E ou F; resp. séparément équicontinu), il faut et il suffit que pour toute partie équicontinue C' de G', l'ensemble $M_{C'}$ des formes bilinéaires $\langle u(x,y),z'\rangle$ sur $E \times F$, où $u \in M$ et $z' \in C'$, ait la même propriété. (Identifier G a un espace fonctionele sur G' muni de la topologie de la convergence uniforme sur l'ensemble $\mathfrak{T}$ des parties équicontinues; on est alors ramené à une situation de Topologie Générale, independant des structures vectorielles).

<u>Exercice 2</u>. Soient E, F, G des ELC, soit $\mathfrak{S}$ un ensemble de <u>disques</u> <u>bornés</u> dans E, soit M un ensemble d'applications bilinéaires séparément continues de $E \times F$ dans G. Pour que M soit équihypocontinu par rapport à $\mathfrak{S}$, il suffit déjà (et il faut évidemment) que pour tout $A \in \mathfrak{S}$, l'ensemble des restrictions des $u \in M$ à $A \times F$ soit équicontinu au point $(0,0)$.

<u>Exercice 3</u>. Soient E, F, G des ELC, u une ap-

plication bilinéaire de $E \times F$ dans G, hypocontinue par rapport aux parties compactes de E (ou de F). Soit T un espace topologique métrisable, f une application continue de T dans E, g une application continue de T dans F. Montrer que l'application $t \longrightarrow u(f(t),g(t))$ de T dans G est continue.

<u>Exercice</u> <u>4</u>. Soient E, F, G trois espaces localement convexes, M un ensemble d'applications linéaires séparément continues de $E \times F$ dans G. Montrer que si M est équicontinu par rapport à l'<u>une</u> des variables, alors $M(x,y)$ est une partie bornée de G pour tout $(x,y) \in E \times F$. Soit A (respect. B) une partie bornée de E (resp. F). Montrer que $M(A \times B)$ est une partie bornée de G dans chacun des cas suivants: a) $M(x,y)$ est une partie bornée de G pour tout $(x,y) \in E \times F$, et A et B sont fortement bornés; b) M est équicontinu par rapport à x, et A est <u>fortement</u> <u>borné</u>; c) M est équihypocontinu par rapport aux parties compactes de E (ou même seulement par rapport aux suites dans E tendant vers 0 au sens de Mackey).

<u>Exercice</u> <u>5</u>. Montrer que dans l'exercice précédent, il suffit pas dans a) de supposer que A ou B soit fortement borné, ou dans b) que ce soit B qui est fortement borné (A étant seulement supposé borné), tout en laissant dans a) et b) la même hypothèse sur M. Enfin, dans c) il ne suffit pas de supposer M séparément équicontinu. (On montrera qu'il y a des espaces dans lesquels existent des par

ties bornées non fortement bornées; puis on fera dans a) et b) $F = G = \mathbf{k}$ corps de scalaires, et dans c) $G = \mathbf{k}$, $F = E'_s$, M réduit à un élément, forme bilinéaire canonique sur $E \times E'$). En déduire des contre-exemples dans le cas où on suppose M réduit à un élément (établir une réciproque convenable de l'exercice 1)).

Exercice 6. Soient E, F, G des ELC, soit u une application bilinéaire de $E \times F$ dans G telle que $u(A \times B)$ soit une partie bornée de G pour toute partie bornée A de et toute partie bornée B de F. Soit U une partie ouverte de R^n, soit f (resp. g) une application continûment différentiable de U dans E (resp. F). Montrer que la fonction $t \longrightarrow u(f(t),g(t))$ sur U, à valeurs dans G, est continûment différentiable et que sa dérivée par rapport à t_i est donnée par

$$\frac{\partial}{\partial t_i} u(f(t),g(t)) = u(\frac{\partial}{\partial t_i} f(t),g(t)) + u(f(t),\frac{\partial}{\partial t_i} g(t)).$$

(Démontrer d'abord l'existence d'une dérivée donnée par la formule précédente; puis montrer que si u est comme ci-dessus, et f' une application continûment différentiable de U dans E, g une application continue de U dans G, alors l'application $t \longrightarrow u(f'(t),g(t))$ de U dans G est continue). Donner une autre démonstration, plus rapide dans le cas où on suppose même u hypocontinue par rapport aux parties compactes de E (ou de F).

Exercice 7. Soient E, F, G des espaces localement convexes, M un ensemble séparément équicontinu d'applications bilinéaires de $E \times F$ dans G. Montrer que M ést équihypocontinu par rapport aux parties compactes de F, quand on munit E de la topologie de la convergence uniforme sur les parties faiblement compactes de E' (se ramener au cas où G est le corps des scalaires grâce à l'exercice 1, puis interpréter M comme un ensemble équicontinu d'applications linéaires de F dans E' faible, et noter que M est relativement compact dans $L(F,E')$ pour la convergence compacte, grâce au th. d'Ascoli; en conclure par raison de continuité que tout compact $K \subset F$, $M(K)$ est une partie faiblement relativement compacte de E').

Exercice 8. Soient E, F, G des ELC, M un ensemble d'applications bilinéaires séparément continues de $E \times F$ dans G, $\mathfrak{T}$ un ensemble de parties fortement bornées de F. On suppose F tonnelé (resp. quasi-tonnelé) et que pour tout $(x,y) \in E \times F$, $M(x,y)$ soit une partie bornée de G (resp. que M soit équicontinue par rapport à E). Montrer que M est équihypocontinu par rapport à $\mathfrak{T}$.

Exercice 9. Soient E, F, G trois espaces localement convexes, $\mathfrak{S}_1$ (resp. $\mathfrak{S}_2$) un ensemble de parties bornées de E (resp. F) recouvrant E (resp. F). On suppose que pour toute application linéaire continue u de E dans F, on ait $u(\mathfrak{S}_1) \subset \mathfrak{S}_2$. Alors l'application bilinéaire

$$(v,u) \longrightarrow v \circ u$$

de $L_{\mathfrak{S}_2}(F,G)$ $L_{\mathfrak{S}_1}(E,F)$ dans $L_{\mathfrak{S}_1}(E,G)$ est séparément continue. Soit $\sum$ l'ensemble des parties M de $L_{\mathfrak{S}_1}(E,F)$ telles que pour tout $A \in \mathfrak{S}_1$, $M(A)$ soit une partie de F élément de $\mathfrak{S}_2$. Alors $(v,u) \longrightarrow v \circ u$ est hypocontinue par rapport à $\sum$ et par rapport à l'ensembles des parties équicontinues de $L_{\mathfrak{S}_2}(F,G)$. - Cas particulier: a) Si $\mathfrak{S}_2$ est l'ensemble de toutes les parties bornées de F, alors $(v,u) \rightarrow v \circ u$ est application hypocontinue par rapport à l'ensemble des parties bornées de $L_{\mathfrak{S}_1}(E,F)$ et à l'ensemble des parties équicontinues de $L_{\mathfrak{S}_2}(F,G)$. b) Si $\mathfrak{S}_1$ (resp. $\mathfrak{S}_2$) est l'ensemble des parties finies de E (resp. F) alors $(v,u) \rightarrow v \circ u$ est application hypocontinue par rapport aux parties équicontinues de $L_{\mathfrak{S}_2}(F,G)$. c) Si $\mathfrak{S}_1$ est un ensemble de parties compactes de E, $\mathfrak{S}_2$ l'ensemble de toutes les parties compactes de F, alors $(v,u) \longrightarrow v \circ u$ est application hypocontinue par rapport aux parties compactes de $L_{\mathfrak{S}_1}(E,F)$ et par rapport aux parties équicontinues de $L_{\mathfrak{S}_2}(F,G)$.

<u>Exercice</u> <u>10</u>. Soit F un espace de Banach, soit $E=F'$ l'espace de Banach dual, u la forme bilinéaire canonique sur $E \times F$. Soit v_1 le prolongement canonique par continuité faible de u à $E \times F''$, et w_1 le prolongement analogue de v_1 à $E'' \times F''$. On définit de même le prolongement v_2 de u à $E'' \times F$, et le prolongement w_2 de v_2 à $E'' \times F''$. Expliciter

w_1 et w_2 (qui sont donc des formes bilinéaires sur $F'' \times F''$), et montrer qu'elles sont distinctes et non faiblement séparément continues si F n'est pas réflexif. Montrer qu'il n'existe alors pas de forme bilinéaire faiblement séparément continue sur E'' F'' prolongeant u.

6. *Espaces d'applications bilinéaires. Définitions et notations.*

Soient E, F, G, des espaces localement convexes, soit $\mathfrak{S}$ un ensemble de parties bornées de E, $\mathfrak{T}$ un ensemble de parties bornées de F, H un espace d'applications linéaires séparément continues de $E \times F$ dans G. On peut considérer sur H la topologie de la $\mathfrak{S} \times \mathfrak{T}$-convergence, où $\mathfrak{S} \times \mathfrak{T}$ désigne l'ensemble des parties de $E \times F$ du type $A \times B$, avec $A \in \mathfrak{S}$, $B \in \mathfrak{T}$. Cette topologie est localement convexe si et seulement si pour tout $A \times B \in \mathfrak{S} \times \mathfrak{T}$, et tout $u \in H$, l'ensemble $u(A \times B)$ est une partie bornée de G (Chap. 1, Nº 8, th. 3); de toutes façons:

Proposition 12. Sur l'espace d'applications bilinéaires H, la topologie de la $\mathfrak{S} \times \mathfrak{T}$-convergence est identique à la topologie induite par l'espace des applications linéaires de E dans $L_{\mathfrak{T}}(F,G)$, muni de la $\mathfrak{S}$-convergence.

(Vérification immédiate, voir Chap. 0, prop.6"). En particulier, si les $u \in H$ sont hypocontinues par rapport à $\mathfrak{S}$ ou $\mathfrak{T}$, alors les applications de E dans $L_{\mathfrak{T}}(F,G)$ qui leur correspondent transforment les $A \in \mathfrak{S}$ en des parties bornées de $L_{\mathfrak{T}}(F,G)$ donc H est localement convexe. De même, appliquant la proposition 3 bis, (Nº 2), on voit que H est toujours localement convexe si les $A \in \mathfrak{S}$ ou les $B \in \mathfrak{T}$ sont fortement bornés. En particulier, appliquant le th. de Banach-Steinhaus-Mackey (Nº 2), on trouve le

Corollaire. Si les ensembles élements de $\mathfrak{S}$ ou $\mathfrak{T}$ sont des disques complets, alors l'espace de toutes les applications bilinéaires séparément continues de $E \times F$ dans G, muni de la $\mathfrak{S} \times \mathfrak{T}$-convergence, est localement convexe.

La topologie de la $\mathfrak{S} \times \mathfrak{T}$-convergence n'est autre que celle de la convergence bornée (resp. compacte, resp. simple) si $\mathfrak{S}$ et $\mathfrak{T}$ sont l'ensemble des parties bornées (resp. compactes, resp. finies) de E et F. L'espace des applications bilinéaires séparément continues (resp. continues) de $E \times F$ dans G est noté $\mathcal{L}(E,F;G)$ (resp. $B(E,F;G)$), et on omet G quand c'est le corps des scalaires, donc $\mathcal{L}(E,F)$ et $B(E,F)$ sont respectivement l'espace des formes bilinéaires séparément continues, et l'espace des formes bilinéaires continues, sur $E \times F$. Si on considère sur l'un des espaces précédents la topologie de la convergence bornée (resp. compacte, resp. simple), on l'indique par l'adjonction de l'indice b (resp. c, resp. s) comme dans $\mathcal{L}_b(E,F;G)$, $\mathcal{L}_c(E,F;G)$, $\mathcal{L}_s(E,F;G)$. L'espace $\mathcal{L}_s(E,F;G)$ et l'espace $B_b(E,F;G)$ sont toujours localement convexes. Quand on considère les duals forts E' et F' de deux ELC E et F, il y a lieu le plus souvent de munir l'espace $\mathcal{L}(E',F';G)$ et ses sous-espaces de la topologie de la convergence uniforme sur les produits $A \times B$, où A (resp. B) est une partie équicontinue de E' (respect. F). Cette topologie, toujours localement convexe (parce que les parties équicontinues faiblement fermées, donc faiblement compactes d'un dual, sont fortement complètes en vertu du lemme 2 du Nº 2), est appelée topologie de la <u>convergence équicontinue</u>. On indique cette topologie en mettant l'indice e dans la formule désignant l'espace fonctionnel envisagé, comme dans $\mathcal{L}_e(E',F')$, $B_e(E',F')$, $\mathcal{L}_e(E'_s,F'_s)$, etc. Quand F et G sont identiques au corps des scalaires, on retombe sur E'' muni de la topologie usuelle.

<u>Cas des espaces normés</u>. On démontre facilement la généralisation suivante de Chap. 1, Nº 5, th. 2:

<u>Proposition 13</u>. <u>Soient</u> E_i $(i=1,2,\dots,n)$ <u>et</u> F <u>des espaces semi-normés, soit</u> u <u>une application</u> n <u>fois linéaire du produit des</u> E_i <u>dans</u> F. <u>Pour que</u> u <u>soit continue, il faut et il suffit que le nombre</u> $\|u\|$ <u>défini par</u>

$$\|u\| = \sup_{\substack{(x_i) \\ \|x_i\| \leqslant 1}} \|u(x_1,\dots,x_n)\|$$

<u>soit fini</u>.

Alors on a

$$\|u(x_1,\dots,x_n)\| \leqslant \|u\| \, \|x_1\| \dots \|x_n\|$$

pour tout $(x_i) \in \prod_i E_i$. L'expression $\|u\|$ sur $B(E_1,\ldots,E_n;F)$ est une semi-norme (et une norme si F est séparé), la topologie correspondante est la topologie de la convergence uniforme sur le produit des boules unités sur les E_i (ou encore sur les produits de bornés quelconques). Cet espace est complet quand E est séparé et complet. Enfin, on a un isomorphisme métrique canonique de $B(E_1,\ldots,E_p;B(E_{p+1},\ldots,E_n;F))$ sur $B(E_1,\ldots,E_n;F)$.

En particulier, si u est une forme bilinéaire continue sur le produit $E\times F$ de deux espaces semi-normés, sa norme en tant que forme bilinéaire est identique à la norme de l'application linéaire correspondante de E dans F' (ou de F dans E'). Le prolongement canonique de la forme u sur $E\times F$ à $E\times F''$ (voir prop. 11) à même norme que u. On notera que si E, F, G sont des espaces semi-normés, alors sur $\mathcal{L}(E',F';G)$ la topologie de la convergence biéquicontinue n'est autre que celle définie par la semi-norme naturelle de cet espace.

<u>Les espaces</u> $E\hat{\otimes}F$. Soient E et F deux ELC séparés, considérons $E\otimes F$ comme un espace de formes bilinéaires sur $E'\times F'$, à $x\otimes y$ correspondant la forme bilinéaire $\langle x,x'\rangle\langle y,y'\rangle$. Comme cette dernière est manifestement faiblement séparément continue (et même faiblement continue), on peut considérer $E\otimes F$ comme un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E'_s,F'_s)$, et le munir de la topologie de la convergence équicontinue, pour laquelle c'est donc un sous-espace vectoriel

topologique de $\mathcal{L}_e(E'_s,F'_s)$.

<u>Définition</u> <u>7</u>. Soient E et F deux ELC séparés. On désigne par $E \hat{\otimes} F$ le complété de $E \otimes F$ muni de la topologie de la convergence biéquicontinue (topologie induite par $\mathcal{L}_e(E'_s,F'_s)$).

Si $\mathcal{L}_e(E'_s,F'_s) \approx L_e(E',F)$ est complet, i.e. si E et F sont complets (Nº 1, proposition 1), alors $E \hat{\otimes} F$ est donc les sous-espace vectoriel topologique fermé de $\mathcal{L}_e(E'_s,F'_s)$, adhérence de $E \otimes F$. D'autre part, soit $u \in \mathcal{L}_e(E'_s,F'_s)$, il revient au même de dire que l'application linéaire de E' dans F qui lui correspond transforme les parties équicontinues en des parties précompactes de F, ou en des parties relativement compactes de F, ou que l'application linéaire de F' dans E qui lui correspond possède la propriété analogue (Chap. 2, Nº 18, th. 12, corollaire); d'autre part le sous-espace K de $\mathcal{L}_e(E'_s,F'_s) \approx L_e(E',F)$ formé de ces u est <u>fermé</u> (Chap.0, Nº 4, prop. 6'). Par suite, <u>si</u> E <u>et</u> F <u>sont</u> <u>completes</u>, $E \hat{\otimes} F$ s'identifie aussi à un sous-espace vectoriel de K, en d'autres termes <u>l'application</u> <u>linéaire</u> <u>de</u> E' <u>dans</u> F <u>qui</u> <u>correspond</u> <u>à</u> <u>un</u> $u \in E \otimes F$ <u>transforme</u> <u>les</u> <u>parties</u> <u>équicontinues</u> <u>de</u> E' <u>en</u> <u>des</u> <u>parties</u> <u>relativement</u> <u>compactes</u> <u>de</u> F. La réciproque est vraie dans tous les cas connus; en d'autres termes, dans tous les cas connus toute application linéaire faiblement continue de E' dans F, transformant les parties équicontinues en des parties relativement compactes, est limite, uniforme sur les parties équicontinues de E, d'applica tions linéaires faiblement continues de rang fini (voir exercice 4).

Si E et F sont deux espaces normés, alors la topologie de la convergence biéquicontinue sur $E \otimes F$ est définie par la norme naturelle de l'espace $B(E',F')$ des formes bilinéaires continues sur $E' \times F'$. Il y a donc lieu de considérer $E \hat{\otimes} F$ comme un espace de Banach, sous-espace normé de $B(E',F')$.

Exercice 1. Soient E et F deux espaces de Banach, considérons l'espace $B(E,F)$ comme un sous-espace du dual de $E \otimes F$. a) Montrer que la boule unité de $B(E,F)$ est faiblement compacte, et que c'est par suite la boule unité du dual de $E \otimes F$, pour une norme convenable uniquement déterminée sur $E \otimes F$. b) $E \otimes F$ étant normé ainsi, montrer que pour qu'une application bilinéaire u de $E \otimes F$ dans un espace de Banach G soit continue, il faut et il suffit que l'application linéaire $\tilde{u}$ de $E \times F$ dans G qui lui correspond soit continue, et alors les normes de u et de $\tilde{u}$ sont égales. c) Montrer que $E \otimes F$ est tonnelé (remarquer que cette affirmation équivaut au théorème 12 du Chap. 1, Nº 15). d) Soit P_n l'ensemble des éléments de $E \otimes F$ qui sont de rang $\leqslant n$. Montrer que P_n est une partie fermée de $E \otimes F$ (on montrera que P_n est même fermé pour $\sigma(E \otimes F, E' \otimes F')$, en utilisant l'exercice suivant). En conclure que si E et F sont de dimension infinie, alors $E \otimes F$ est un espace normé tonnelé qui est maigre (donc qui n'est pas un espace de Baire).

<u>Exercice 2</u>. Soient E et F deux espaces vectoriels, u une forme bilinéaire sur $E \times F$. On appelle <u>rang</u> de u le rang de l'application linéaire de E dans le dual algébrique F^* de F qu'elle définit (évidemment identique au rang de l'application linéaire de F dans E^* définie par u). Montrer que pour que le rang de u soit $\leqslant n$ (nombre entier > 0 donné), il faut et il suffit que pour toute suite de n éléments (x_i) dans E et toute suite de n éléments (y_i) dans F, on ait $\det(u(x_i, y_i)) = 0$. En conclure que l'ensemble des formes bilinéaires sur $E \times F$ qui sont de rang $\leqslant n$ est fermé pour la topologie de la convergence simple.

<u>Exercice 3</u>. a) Soient (E_i), (F_j) deux familles d'ELC séparés, soit $E = \prod_i E_i$ et $F = \prod_j F_j$. Montrer que $E \hat{\otimes} F$ est canoniquement isomorphe à

$$\prod_{i,j} E_i \hat{\otimes} F_j .$$

b) Soient E_i, F_i des ELC séparés $(i=1,2)$, soit u_i une application linéaire continue de E_i dans F_i, montrer que l'application $u_1 \otimes u_2$ de $E_1 \otimes E_2$ dans $F_1 \otimes F_2$ est continue pour les topologies de la convergence biéquicontinue, et se prolonge donc en une application linéaire continue $u_1 \hat{\otimes} u_2$ de $E_1 \hat{\otimes} E_2$ dans $F_1 \hat{\otimes} F_2$. Si les u_i sont des isomorphismes topologiques, il en est de même de $u_1 \hat{\otimes} u_2$. Si les E_i, F_i sont des espaces de Banach, et si les u_i sont des isomorphismes métriques, alors il en est de même de $u_1 \hat{\otimes} u_2$.

Exercice 4. Soit E un ELC séparé complet. Les conditions suivantes sont équivalentes: a) $E' \otimes E$ est dense dans $L_c(E;E)$; b) pour tout ELC F, $F' \otimes E$ est dense dans $L_c(F,E)$; c) pour tout espace localement convexe F muni d'un ensemble $\mathfrak{S}$ de parties bornées, $F' \otimes E$ est dense pour la $\mathfrak{S}$-convergence dans l'espace $K_{\mathfrak{S}}(E,F)$ des applications linéaires continues de F dans E, transformant les $A \in \mathfrak{S}$ en des parties relativement compactes de F; d) pour tout ELC séparé et complet F, $F \hat{\otimes} E$ s'identifie à l'espace des applications linéaires faiblement continues de F' dans E, transformant les parties équicontinues de F' en des parties relativement compactes de E. Montrer que si E possède ces propriétés, tout facteur direct de E les possède aussi.

7. Sur les applications linéaires d'ELC dans certains espaces fonctionnels. Applications dans un espace de fonctions continues.

Soit M un espace localement compact, considérons l'espace $C(M)$ des fonctions scalaires continues sur M, muni de la topologie de la convergence compacte, et l'espace $C_o(M)$ des fonctions scalaires continues sur M "nulles à l'infini", muni de la topologie de la convergence uniforme (voir Chap.1, Nº 9). Pour tout $t \in M$, soit $\varepsilon(t)$ la forme linéaire $f \longrightarrow f(t)$ sur $C(M)$, elle est évidemment continue, et l'application $t \longrightarrow \varepsilon(t)$ de M dans le dual de $C(M)$ (ou de $C_o(M)$) est évidemment continue pour la topologie faible du dual; il est d'ailleurs très facile de vérifier que c'est même là un homéomorphisme (c'est même un homéomorphisme de M pour la topologie $\sigma((C(M))', \mathcal{K}(M))$, où $\mathcal{K}(M)$ est l'espace des fonctions continues à support compact). Alors la topologie de $C(M)$ est la topologie de la $\mathfrak{S}$-convergence, où $\mathfrak{S}$ est l'ensemble des parties de $(C(M))'$ du type $\varepsilon(K)$, où K parcourt l'ensemble des parties compactes de M; et la topologie de $C_o(M)$ est la topologie de la convergence uniforme sur la partie $\varepsilon(M)$ de $(C_o(M))'$.

Soit maintenant E un ELC quelconque, u une application linéaire continue de E dans $C(M)$. Alors sa transposée u' est une application faiblement continue de $(C(M))'$ dans E', transformant les parties équicontinues en des parties équicontinues (Chap. 2, Nº 16, prop. , corollaire), donc $u' \circ \varepsilon$ est une application continue f de M dans E'_s, transformant les parties compactes de M en des parties équicontinues de E', définie explicitement par

$$(1) \qquad \langle x, f(t) \rangle = u(x)(t)$$

et on voit sur cette formule que u est connue quand f est connue. Réciproquement, si f est une application continue de M dans E'_s transformant les parties compactes en des parties équicontinues, alors pour tout $x \in E$ la formule précédente définit une fonction scalaire <u>continue</u> sur M (à cause de la continuité de f), d'où une application linéaire u de E dans $C(M)$. Cette application est continue, car cela signifie (même référence) que quand x' parcourt un ensemble $\varepsilon(K)$ (K partie compacte de M), alors $x'o u$ parcourt une partie équicontinue de E', or en effet par définition

$$\varepsilon(t)ou = f(t).$$

Un raisonnement identique vaut quand on remplace $C(M)$ par $C_o(M)$. En resumé, on a obtenu le résultat suivant:

Théorème 5. Soit M un espace localement compact, E un ELC. Les applications linéaires continues de E dans $C(M)$ (resp. dans $C_o(M)$) correspondent alors biunivoquement aux applications continues de M dans E'_s transformant les parties compactes en des parties équicontinues de E' (resp. aux applications continues nulles à l'infini de M dans E'_s, appliquant M dans une partie équicontinue de E'), cette correspondance étant donnée par la formule (1) ci-dessus.

Corollaire 1. Si E est un espace tonnelé, alors on a des isomorphismes canoniques

$$L(E,C(M)) = C(M,E'_s), \qquad L(E,C_o(M)) = C_o(M,E'_s).$$

En effet, alors toute partie faiblement compacte de E' est équicontinue de sorte que la condition supplémentaire sur les applications continues de M dans E'_s, donnée dans le th. 5, devient inutile. Dans le cas où E est quelconque, on peut seulement dire que

$$L(E,C(M)) \subset C(M,E'_s), \qquad L(E,C_o(M)) \subset C_o(M,E'_s).$$

De plus, on vérifie immédiatement:

Corollaire 2. Soit $\mathfrak{S}$ un ensemble de parties bornées de E. Alors la topologie de la $\mathfrak{S}$-convergence dans $L(E,C(M))$ (resp. $L(E,C_0(M))$), est identique à la topologie induite par la topologie de la convergence compacte (resp. de la convergence uniforme) de l'espace des applications de M dans $E'_{\mathfrak{S}}$ (où $E'_{\mathfrak{S}}$ désigne E' muni de la topologie de la $\mathfrak{S}$-convergence).

(Regarder les voisinages de 0).

Corollaire 3. Soit M un espace localement compact, E un ELC séparé où l'enveloppe convexe fermée d'un compact est compacte (p. ex. un espace quasi-complet, voir Chap. 2, Nº , exerc.). Alors on a des isomorphismes

$$C(M,E) = L(E'_c,C(M)), \qquad C_0(M,E) = L(E'_c,C_0(M)),$$

où E'_c désigne l'espace E' muni de la topologie de la convergence compacte.

En effet, d'après le th. de Mackey, le dual de E'_c est E, et le th. 5 donne alors le résultat, compte tenu du fait qu'une application continue de M dans E faible, qui transforme les parties compactes en des parties compactes est déjà continue pour la topologie donnée de E (car sur une partie compacte de E, la topologie induite est identique à la topologie faible induite), et d'autre part, une $f \in C(M,E)$ (resp. une $f \in C_0(M,E)$) satisfait évidemment aux conditions envisagées dans le th. 5 (c'est à dire transforme les parties compactes de M en des parties compactes - resp. transforme

M en une partie relativement compacte de E). Utilisant le théorème d'approximation 4 de Chap. 1, Nº 9, le corollaire 3 peut aussi s'énoncer:

<u>Corollaire 4. Soit</u> M <u>un espace localement compact,</u> E <u>un ELC séparé et complet. Alors on a des isomorphismes</u>

$$C(M,E) = C(M) \hat{\hat{\otimes}} E \qquad C_o(M,E) = C_o(M) \hat{\hat{\otimes}} E.$$

D'ailleurs, si E est un espace de Banach, le deuxième de ces isomorphismes est même un isomorphisme métrique.

Soit maintenant M un ensemble quelconque, soit E un ELC formé de fonctions scalaires sur M, avec une topologie plus fine que la topologie de la convergence simple (i.e. un sous-espace vectoriel de k^M, avec une topologie localement convexe plus fine que la topologie induite). Donc pour tout $t \in M$, la forme linéaire $\varepsilon(t)$ sur E définie par

$$\langle \varphi, \varepsilon(t) \rangle = \varphi(t)$$

est continue. Soit maintenant F un ELC séparé et complet, et soit u une application linéaire faiblement continue de F' dans E, alors $f = u' \circ \varepsilon$ est une application de M dans F, donnée de façon explicite par

$$\langle f(t), y' \rangle = \langle uy', \varepsilon(t) \rangle = u(y')(t).$$

Donc pour $y' \in F'$ donné, la fonction

$$t \longrightarrow f_{y'}(t) = \langle f(t), y' \rangle$$

est identique à uy', par suite, si y' parcourt une partie équicontinue de F', $f_{y'}$ parcourt une partie faiblement relativement compacte de E. Réciproquement, si f est une application de M dans F telle que pour tout $y' \in F'$, la fonction $f_{y'}$ parcourt une partie faiblement relativement compacte de E, si y' parcourt une partie équicontinue de F', montrons que l'application $u: y' \longrightarrow f_{y'}$ de F' dans E est faiblement continue. En effet, la restriction de u à toute partie équicontinue A de F' étant continue pour la topologie faible sur A et la topologie de la convergence simple dans E, est même faiblement continue puisque sur l'adhérence faible de $u(A)$, qui est faiblement compacte, la topologie faible est identique à la topologie séparée moins fine de la convergence simple sur M. Ainsi pour tout $x' \in E'$, la restriction de $x'ou$ à toute partie équicontinue A de F' est faiblement continue, donc F étant complet, $x'ou$ sera même faiblement continue (Chap. 2, Nº 14, th. 10), donc u est bien faiblement continue. En résumé:

<u>Proposition 14</u>. <u>Soit</u> M <u>un ensemble, soit</u> E <u>un ELC formé de fonctions scalaires sur</u> M, <u>avec une topologie plus fine que la topologie de la convergence simple. Soit</u> F <u>un ELC séparé et complet. Alors les applications linéaires faiblement continues de</u> F' <u>dans</u> E <u>s'identifient aux applications</u> f <u>de</u> M <u>dans</u> F <u>telles que pour tout</u> $y' \in F'$, <u>la fonction</u>

$$f_{y'}: t \longrightarrow \langle f(t), y' \rangle$$

<u>appartienne à</u> E, <u>et parcoure une partie faiblement</u>

<u>relativement compacte de E quand y' parcourt une partie équicontinue de F'</u>.

<u>Corollaire</u>. <u>Dans l'énoncé précédent, si E est un espace métrisable et complet réflexif, alors la dernière condition envisagée sur f est vérifiée d'elle même</u>.

En effet, elle signifie ici que l'application

$$y' \longrightarrow f_{y'}$$

de F' dans E transforme toute disque équicontinu faiblement fermé A de F' en une partie <u>bornée</u> de E, en d'autres termes, induit une application linéaire <u>continue</u> de l'espace de Banach F'_A. Mais à priori, cette application linéaire est continue pour la topologie sur E de la convergence simple dans M, topologie séparée moins fine que la topologie donnée de E. Il en résulte, en vertu du th. du graphe fermé (voir Chap. 1, Nº 14, th. 10, corollaire), que cette application est continue.

La proposition 14, complétée éventuellement par son corollaire, peut s'appliquer dans de nombreux cas. Prenant par exemple pour E l'espace des fonctions indéfiniment différentiables sur une partie ouvert M de R^n, on trouve que les applications linéaires faiblement continues de F' dans E s'identifient aux applications de M dans F qui sont "scalairement indéfiniment différentiables " (voir Nº suivant pour l'étude de telles fonctions), etc..

<u>Exercice 1</u>. Soit M un espace localement compact, M_o un sous-espace fermé, E un ELC. a) Montrer que l'appli-

cation linéaire naturelle de $C(M,E)$ dans $C(M_o,E)$, faisant correspondre à toute fonction continue sur M sa restriction à M_o, est un homomorphisme du premier sur un sous-espace dense du second. b) En conclure que si M est dénombrable à l'infini, E métrisable et complet, on obtient même un homomorphisme du premier espace sur le second. c) Pour que ceci reste vrai pour tout espace localement convexe complet E, il faut et il suffit que le sous-espace $J(M_o)$ de $C(M)$ formé des fonctions nulles sur M_o admette un supplémentaire topologique, ou encore que l'application naturelle $t \longrightarrow \varepsilon(t)$ de M_o dans le dual faible de $C(M_o)$, puisse se prolonger en une application continue de M dans le même espace (pour la suffisance de la première condition, utiliser le corollaire 3 du théorème 5; pour la réciproque, prendre pour E le dual de $C(M_o)$ muni de la topologie de la convergence compacte (qui en fait un ELC complet), et considérer l'application continue

$$t \longrightarrow \varepsilon(t)$$

de M_o) dans E). Il en est ainsi en particulier si M est métrisable et séparable (Chap. 1, Nº 11, exercice 5). d) Montrer que si l'application naturelle de $C(M,E)$ dans $C(M_o,E)$ n'est pas une application sur, alors le quotient de $C(M,E)$ par le sous-espace fermé formé des fonction qui s'annulent sur M_o, n'est pas complet (bien que $C(M,E)$ soit complet quand E est complet).

<u>Exercice</u> <u>2</u>. Soit I un ensemble, on considère l'espace de Banach $\ell^{\infty}(I)$ des familles bornées de scalaires sur

I. Si $J \subset I$, on identifie $\ell^\infty(J)$ au sous-espace $\ell^\infty(I)$ formé des éléments dont les coordonnées suivant les indices $i \in \complement J$ sont nulles. Si μ est une forme linéaire continue sur $\ell^\infty(I)$, on désigne par μ_J sa restriction à $\ell^\infty(J)$.

a) Montrer que si $J_1,\dots,J_n$ sont des parties disjointes de I, alors

$$\| \mu_{J_1} \| + \dots + \| \mu_{J_n} \| \qquad \| \mu \| .$$

b) Pour tout forme linéaire continue μ sur $\ell^\infty(I)$, soit $\tilde{\mu}$ sa restriction à $c_o(I)$, identifié à un élément de $\ell^1(I)$ (Chap. 1, Nº 9, exerc. 7); on peut aussi le considérer comme une forme linéaire continue sur $\ell^\infty(I)$ grâce à la dualité naturelle entre $\ell^1(I)$ et $\ell^\infty(I)$ (Comparer Chapitre 2, Nº , exerc.), en général distincte de μ. Déduire de a) que si I est infini, pour toute suite (μ_n) de formes linéaires continues sur $\ell^\infty(I)$, existe une partie infinie J de I telle que $(\widetilde{\mu_n})_J = (\mu_n)_J$ pour tout n (Construire par récurrence une suite décroissante (J_n) de parties infinies de I, telles que $\|(\mu_n)_{J_n}\| \leqslant \frac{1}{n}$ pour $k \leqslant n$. et considérer une partie infinie J de I telle que $J \cap \complement J_n$ soit fini pour tout n).

c) En conclure que si (μ_n) converge vers zero dans le dual faible de $\ell^\infty(I)$, alors $(\widetilde{\mu}_n)$ converge fortement vers 0 dans $\ell^1(I)$ (procéder par l'absurde, en montrant qu'autrement on pourrait trouver un $\varepsilon > 0$ et une suite (A_n) de parties finies de I disjointes deux à deux, telles que

$$\sum_{i \in A_n} |\mu_n(i)| \geq \varepsilon$$

(en remplaçant au besoin (μ_n) par une suite extraite, considérant alors l'isomorphisme de $\ell^\infty(\mathbf{N})$ -- $\mathbf{N}$ ensemble des entiers ≥ 0 dans $\ell^\infty(I)$ donné par

$$(\xi_n) \longrightarrow \sum_n \xi_n \varphi_{A_n},$$

où φ_{A_n} désigne la fonction caractéristique de A_n et où la série du second membre converge pour la convergence simple dans $\ell^\infty(I)$, se ramener au cas où $I = \mathbf{N}$, et $A_n = \{n\}$; utilisant b), on peut même supposer que $\mu_n = \tilde{\mu}_n$ pour tout n, donc que $\mu_n \in \ell^1$ pour tout n; alors (μ_n) serait une suite faiblement convergente et non fortement convergente de l'espace de Banach ℓ^1, ce qui est impossible (Chap. 2, Nº 17, exerc. 4)).

d) Conclure de c) que si e_i est la i-ème forme coordonnée sur c_0, alors la suite des e_i converge vers 0 dans le dual faible de c_0, mais ne peut pas se relever en une suite de formes linéaires continues sur ℓ^∞ convergent vers 0 dans le dual faible de ℓ^∞. À fortiori, c_0 n'a pas de supplémentaire topologique dans ℓ^∞.

e) Soit $\mathbf{M}$ le compactifié de Stone de l'ensemble $\mathbf{N}$ des entiers ≥ 0, soit $\mathbf{M}_0$ le sous-espace compact, complémentaire de $\mathbf{N}$. Montrer que $\mathbf{M}$, $\mathbf{M}_0$ ne satisfont pas aux conditions de l'exercice 1, c).

<u>Exercice 3</u>. a) Soit M un espace compact, E un espace de Banach. Montrer que l'espace des applications linéaires compactes de E dans $C(M)$, muni de la norme induite par $L(E,C(M))$, est canoniquement isomorphe à l'espace normé $C(M,E')$. b) En conclure que si E est un espace de Banach, F un sous-espace vectoriel normé, alors toute application linéaire compacte u de F dans $C(M)$ peut se prolonger en une application linéaire compacte de E dans $C(M)$, de norme $\leqslant \|u\| + \varepsilon$ (où $\varepsilon > 0$ est arbitrairement donné au préalable) (utiliser Chap. 1, Nº 14, exerc. 2). c) Généraliser au cas où E est un ELC quelconque.

<u>Exercice 4</u>. Montrer qu'on peut trouver un sous-espace fermé F de $E = \ell^1$, et une suite dans E/F convergent faiblement vers 0, qui ne provient pas d'une suite dans E convergent faiblement vers 0 (se rappeler que toute suite faiblement convergente de ℓ^1 est fortement convergente - Chap. 2, Nº 17, exerc. 4) qu'il existe des espaces de Banach séparables, tels c_0, admettant des suites faiblement convergentes qui ne sont pas fortement convergentes, enfin que tout espace de Banach séparable est isomorphe à un espace quotient de ℓ^1 - Chap. 1, Nº 14, exerc. 1).

8. <u>Fonctions vectorielles différentiables</u>.

Soit U un ouvert de R^n, E un ELC séparé (on n'envisage dans ce Nº que des ELC <u>séparés</u>), f une application de U dans E. La notion de dérivabilité de f en un point $t \in U$, suivant une des variables (ou plus généralement suivant un vecteur donné) se définit comme dans le cas scalaire, d'où la notion d'application m fois continûment différentiable de U dans E. Nous développons quelques lemmes utiles.

Lemme 1. Pour que l'application f de l'ouvert $U \subset R^n$ dans le complété faible E'^* de E soit dérivable au point $t \in U$, il faut et il suffit que pour tout $x' \in E'$, la fonction $f_{x'} = \langle f(t), x' \rangle$ soit dérivable en t; alors on a pour tout $x' \in E'$

$$(1) \qquad \langle f'(t), x' \rangle = f_{x'}(t).$$

En effet, il faut exprimer que $\frac{1}{h}(f(t+h) - f(t))$, considéré comme une forme linéaire sur E', tend vers une limite pour la convergence simple pour $h \longrightarrow 0$ (limite qui sera alors automatiquement linéaire, donc sera un élément de E'^*, dérivée de f en t). Cela signifie que pour tout $x' \in E'$ le produit scalaire

$$\langle \frac{1}{h}(f(t+h) - f(t)), x' \rangle = \frac{1}{h}(f_{x'}(t+h) - f_{x'}(t))$$

tend vers une limite (qui sera alors $\langle f'(t), x' \rangle$), i.e. que pour tout $x' \in E'$ la fonction $f_{x'}$ est dérivable en t (et on aura alors bien (1)).

Corollaire. Pour qu'une application f de l'ouvert $U \subset R^n$ dans le complété faible E'^* de E soit m fois continûment différentiable, il faut et il suffit que f soit scalairement m fois continûment différentiable (par quoi on entend que pour tout $x' \in E'$, la fonction $f_{x'}$, possède la propriété envisagée).

<u>Lemme 2</u>. <u>Pour que l'application</u> f <u>de</u> U <u>dans</u> E <u>soit</u> m <u>fois continûment différentiable dans le complété faible</u> E'^{*} <u>de</u> E, <u>il faut et il suffit qu'elle le soit dans</u> E'' <u>faible</u>.

Suffisance triviale; pour la réciproque, on se ramène aussitôt au cas $m = 1$, et où $U \subset \mathbb{R}$, et on note que si la limite de $\frac{1}{h}(f(t+h) - f(t))$ existe dans E' faible, cette limite est aussi la limite d'une <u>suite</u> dans E (correspondant aux valeurs $h = \frac{1}{n}$, avec n entier >0), qui sera une suite de Cauchy faible, donc bornée. Il en résulte (th. de Mackey) que la limite appartient à E''.

<u>Lemme 3</u>. <u>Soit</u> f <u>une application de</u> U <u>dans</u> E <u>continûment différentiable, et dont les dérivées premières sont continues pour une topologie localement convexe</u> T <u>sur</u> E <u>admettant un système fondamental de voisinages fermés de</u> 0. <u>Alors</u> f <u>est aussi continûment différentiable pour</u> T.

L'hypothèse sur T signifie que c'est une topologie de $\mathfrak{S}$-convergence, où $\mathfrak{S}$ est un ensemble de parties faiblement fermées de E'. On est aussitôt ramené aus cas d'une variable, et il suffit de prouver que $\frac{1}{h}(f(t+h) - f(t))$, qui tend vers $f'(t)$ pour la topologie initiale T_0 de E, tend aussi vers cette limite pour la topologie T, i.e. que pour tout $A \in \mathfrak{S}$, son produit scalaire par des $x' \in A$ tend vers $\langle f'(t),x'\rangle$, <u>uniformément</u> quand x' parcourt A. Or, ce produit scalaire s'écrit aussi

$$\frac{1}{h}(f_{x'}(t+h) - f_{x'}(t)) = \frac{1}{h}\int_t^{t+h} f'_{x'}(s)\, ds,$$

sa différence avec $\langle f'(t),x'\rangle = f'_{x'}(t)$ s'écrit

$$\frac{1}{h}\int_t^{t+h} (f'_{x'}(s) - f'_{x'}(t))\, ds,$$

qui tend en effet vers 0 uniformément quand x' parcourt un $A \in \mathfrak{S}$, car $f'_{x'}(s)$ tend vers $f'_{x'}(t)$ pour $s \longrightarrow t$, uniformément quand x' parcourt un $A \in \mathfrak{S}$ (ce qui exprime en effet la continuité de $f'(s)$ pour la topologie T).

Corollaire. *T étant comme ci-dessus, si f est m fois continûment différentiable, et ses dérivées d'ordre m sont continues pour T, alors f est aussi m fois continûment différentiable pour T.*

Immédiat à partir du lemme 3, par récurrence sur m.

Lemme 4. *Soit F un ELC, E un sous-espace vectoriel quasi-complet, f une application de l'ouvert $U \subset R^n$ dans E, m fois continûment différentiable dans F. Alors elle est m fois continûment différentiable dans E.*

Se prouve comme le lemme 2, car les valeurs des dérivées de f dans F seront adhérentes à des parties *bornées* de E.

Lemme 5. *Soit f une application scalairement continûment différentiable de U dans E. Alors f est con-*

<u>tinue, et même continue pour la topologie de la convergence uniforme sur les parties f o r t e m e n t bornées de</u> E'.

La démonstration se simplifie quand on utilise la notion d'intégrale faible, dont nous utilisons seulement des propriétés à peu près immédiates. On a

$$f(t+h) - f(t) = \int_{t}^{t+h} f'(s)\, ds$$

(où on intègre la fonction continue f' à valeurs dans E'' faible), d'où $f(t+h) - f(t) \in h.K$, pour h assez petit, où K est l'enveloppe convexe faiblement fermée de l'ensemble K_o, image d'un intervalle compact fixe de centre t, contenu dans U. K_o est faiblement compact, donc K est faiblement borné, donc $A = K \cap E$ est une partie <u>bornée</u> de E, et on a

$$f(t+h) - f(t) \in h.A.$$

Il en résulte bien que $f(t+h) - f(t)$ tend vers 0 pour la topologie de la convergence uniforme sur les parties fortement bornées de E'. (On a supposé pour simplifier les notations $U \subset \mathbf{R}$, ce qui n'a évidemment rien d'essentiel). Noter que le lemme 3 pourrait se démontrer avantageusement par la même méthode intégrale.

<u>Proposition 15</u>. <u>Soit</u> U <u>un ouvert dans</u> $\mathbf{R}^n$, <u>soit</u> E <u>un ELC quasi-complet</u>, f <u>une application de</u> U <u>dans</u> E. <u>Pour que</u> f <u>soit</u> m <u>fois continûment différentiable, il faut et il suffit qu'elle soit scalairement</u> m <u>fois con-</u>

<u>tinûment différentiable, et que ces dérivées partielles m-èmes</u> (qui existent alors dans E" - voir lemmes 1 et 2) <u>soient continues pour la topologie naturelle de</u> E"(topologie de la convergence uniforme sur les équicontinus de E').

De façon explicite, ces conditions signifient que les $f_{x'}$ sont m fois continûment différentiables, et que leurs dérivées m-èmes parcourent un ensemble <u>équicontinu</u> de fonctions sur U, quand x' parcourt une partie équicontinue de E' (condition qui ne fait donc plus intervenir que les composantes scalaires $f_{x'}$). - <u>Démonstration</u>: Sous les conditions indiquées f est m fois continûment différentiable dans E" faible (lemmes 1 et 2), donc aussi pour la topologie naturelle de E" (lemme 3), donc aussi dans E lui-même (lemme 4).

<u>Corollaire 1</u>. E <u>étant quasi-complet, si l'application</u> f <u>de</u> U <u>dans</u> E <u>est scalairement</u> m <u>fois continûment différentiable, alors elle est</u> m-1 <u>fois continûment différentiable</u>.

En effet, d'après le lemme 5, les dérivées d'ordre m-1 de f dans E" faible sont continues pour la topologie de la convergence uniforme sur les parties de E' bornées pour la topologie forte sur E' associée au système dual (E',E"), donc à fortiori pour la topologie de la convergence uniforme sur les disques équicontinus faiblement compacts (donc bornés et complets pour la topologie forte sur E' associée à (E',E")) de E', i.e. la topologie naturelle de E". Le corollaire résulte alors de la prop. 15. On en conclut:

Corollaire 2. *Soit E un ELC quasi-complet, f une application d'un ouvert U de R^n dans E. Pour que f soit indéfiniment continûment différentiable, il faut et il suffit que f soit scalairement indéfiniment continûment différentiable.*

Proposition 16. *Soit E un ELC complet, soit U une partie ouverte de R^n. Alors l'espace $\mathcal{E}^{(m)}(U,E)$ des applications m fois continûment différentiables de U dans E, muni de sa topologie naturelle* (convergence compacte de f et de ses dérivées d'ordre $\leqslant m$), *s'identifie à l'espace des applications linéaires faiblement continues de E' dans $\mathcal{E}^{(m)}(U)$, transformant les parties équicontinues en des parties relativement compactes de $\mathcal{E}^{(m)}(U)$, cet espace d'applications étant muni de la topologie de la convergence uniforme sur les parties équicontinues de E'.*

Soit $f \in \mathcal{E}^{(m)}(U,E)$, elle définit une application linéaire $x' \longrightarrow f_{x'}$ de E' dans $\mathcal{E}^{(m)}(U)$, qui est faiblement continue en vertu de Nº 7, prop. 14. Montrons qu'elle transforme une partie équicontinue A de E' en une partie relativement compacte de $\mathcal{E}^{(m)}(U)$. D'après Chap. I,Nº10,prop. 18, il suffit de montrer que l'ensemble des dérivées d'ordre m des $f_{x'}$ $(x' \in A)$ est un ensemble équicontinu de fonctions sur U; or ceci exprime seulement que les dérivées m-èmes de f dans E sont des applications continues. Réciproquement, étant donnée une application faiblement continue u de E' dans $\mathcal{E}^{(m)}(U)$, transformant parties équicontinues en parties relativement compactes, on en déduit une application f de U dans E telle que $\langle f(t),x'\rangle = ux'(t)$ pour $t \in U$, $x' \in E'$. Cette f satisfait alors aux conditions de la prop. 15, et est donc dans $\mathcal{E}^{(m)}(U,E)$. Enfin, on vérifie trivialement que la topologie de $\mathcal{E}^{(m)}(U,E)$ correspond à la topologie de la convergence uniforme sur les parties équicontinues de E'. Dans ce raisonnement, il était loisible de supposer $m = +\infty$, en laissant tomber le condition de compacité, et utilisant le corollaire 2 de prop. 15. On obtient ainsi:

Corollaire. E étant un ELC complet, $\mathcal{E}(U,E)$ s'identifie à l'espace des applications linéaires faiblement continues de E' dans $\mathcal{E}(U)$, muni de la topologie de la convergence uniforme sur les parties équicontinues de E'.

Ce n'est d'ailleurs aussi autre que le corollaire de prop. 14, compte tenu de prop. 15, corollaire 2.

Remarque. On peut montrer en fait qu'on a

$$\mathcal{E}^{(m)}(U,E) = \mathcal{E}^{(m)}(U) \hat{\otimes} E$$

pour tout espace localement convexe complet, i.e. que l'ensemble des combinaisons linéaires de fonctions $\varphi(t)a$ ($\varphi \in \mathcal{E}^{(m)}(U)$, $a \in E$) est dense dans $\mathcal{E}^{(m)}(U,E)$ (exercice 2, c)).

<u>Exercice 1</u>. Montrer que la prop. 16 reste valable si E est seulement quasi-complet.

<u>Exercice 2</u>. Soit U une partie ouverte de $\mathbb{R}^n$, considérons l'isomorphisme vectoriel-topologique

$$f \longrightarrow (D^p(f))_{|p| \leq m}$$

de $E = \mathcal{E}^{(m)}(U)$ dans $F = (C(U))^{P_m}$, où P_m est l'ensemble des indices de dérivation d'ordre $\leq m$ sur $\mathbb{R}^n$. Montrer que l'image de E dans F est un facteur direct. (Supposer d'abord U convexe, soit alors E_o le sous-espace de codimension finie de E formé des fonctions nulles ainsi que leurs dérivées d'ordre $\leq m-1$ en un point fixe $t_o \in U$, il suffit de montrer que le sous-espace F_o de F image de E_o est un facteur direct, donc qu'il existe une projection continue de F sur le sous-espace F_o, espace des $(g_p)_{|p| \leq m} \in F$ telles que pour $|p| \leq m-1$, on ait $g_p(t_o) = 0$ et

$$\frac{\partial}{\partial x_i} g_p = g_{p+\alpha_i},$$

où $\alpha_i = (0,\ldots,1,\ldots,0)$ est l'indice de dérivation qui correspond a`l'operateur $\frac{\partial}{\partial x_i}$. Pour définir ces g_p comme fonctions linéaires de $(f_q) \in F$, on pose d'abord pour $p = m$: $g_p = f_p$, ce qui permet de calculer sans ambiquité les g_p pour $|p| = m - 1$, puis $|p| = m - 2$, etc. Quand U est quelconque, il est réunion d'une famille (U_i) d'ouverts convexes; soit alors, pour tout i, v_i une application linéaire continue de $(C(U_i))^{P_m}$ dans $\mathcal{E}^{(m)}(U_i)$, inverse à gauche de l'applica tion linéaire naturelle de $\mathcal{E}^{(m)}(U_i)$ dans $(C(U_i))^{P_m}$, soit (φ_i) une partition indéfiniment différentiable de l'unité sur U, subordonnée à (U_i). Soit, pour toute

$$f \in F = (C(U))^{P_m},$$

$\varphi_i v_i(f)$ la fonction sur U nulle dans $\complement U_i$, et égale dans U_i à $\varphi_i v_i(f_{U_i})$, où f_{U_i} est la restriction de f à U_i, soit enfin

$$vf = \sum \varphi_i v_i(f_{U_i}).$$

Alors v est une application naturelle de E dans F.).

b) En conclure qu'un espace $\mathcal{E}^{(m)}(U)$ est toujours isomorphe à un facteur direct d'un espace $C(V)$, où V est une partie ouverte convenable d'un espace R^m.

c) En conclure que $\mathcal{E}^{(m)}(U)$ jouit des propriétés envisagées dans l'exercice 4 du Nº 6, donc que pour tout ELC séparé complet E, on a

$$\mathcal{E}^{(m)}(U,E) = \mathcal{E}^{(m)}(U) \hat{\hat{\otimes}} E.$$

__Exercice 3__. Soit U une partie ouverte de R^n, E un espace $(\mathcal{F})$, F un sous-espace vectoriel fermé de E. Montrer que toute application m fois continûment différentiable de U dans E/F provient, par composition avec l'application canonique de E sur E/F, d'une application m fois continûment différentiable de U dans E (voir exercice 2, b), et Chap. 1, Nº 14, exercice 2).

CHAPITRE IV.

ETUDE DE QUELQUES CLASSES SPECIALES D'ESPACES.

§ 1º - Limites inductives, espaces $(\mathcal{L}\mathcal{F})$.

1. Généralités.

Définition 1. Soit E un espace vectoriel, (E_i) une famille d'ELC, soit, pour tout i, u_i une application linéaire de E_i dans E. On appelle topologie limite inductive des E_i (par les applications E_i) la topologie localement convexe la plus fine sur E rendant continues les u_i. Muni de cette topologie, E est appelé limite inductive des E_i (par les applications u_i).

L'existence d'une telle topologie est immédiate, car une topologie localement convexe T sur E rend continues les u_i si et seulement si pour tout voisinage disqué V de 0 pour T, les $\overset{-1}{u}_i(V)$ sont des voisinages de 0 dans les E_i; or l'ensemble de tous les disques équilibrés dans E ayant ces propriétés forme manifestement le système des voisinages disqués de 0 pour une topologie localement convexe sur E, qui sera la plus fine des topologies T envisagées. On a prouvé en même temps la première partie de la

Proposition 1. Soit E la limite inductive des E_i par les u_i.

1. Pour qu'un disque équilibré V dans E soit un

voisinage de 0, il faut et il suffit que pour tout i, $\overset{-1}{u}_i(V)$ soit voisinage de 0 dans E_i.

2. Si les $u_i(E_i)$ engendrent E, on obtient un système fondamental de voisinages de 0 en prenant les enveloppes convexes $\Gamma(\bigcup u_i(V_i))$, où pour tout i, V_i parcourt un système fondamental donné de voisinages de 0 dans E_i.

La deuxième partie est conséquence immédiate de la première. Note que dans 1., si les $u_i(E_i)$ engendrent E, il est inutile de supposer à priori V équilibré, car il sera automatiquement.

Corollaire 1. Une limite inductive d'espaces bornologiques (resp. tonnelés, resp. quasi-tonnelés) est bornologique (resp. tonnelé, resp. quasi-tonnelé).

En effet, si V est un disque dans E qui est bornivore (resp. fermé et équilibré, resp. fermé et bornivore), alors il est aussi équilibré, et les $u_i(V)$ sont manifestement aussi bornivores (resp. ...) donc des voisinages de 0 d'après l'hypothèse sur les E_i, donc V est lui-même un voisinage de 0, d'où la conclusion.

Le plus souvent, la famille d'indices I (sous-entendue plus haut) est ordonnée filtrante croissante, et pour $i \leqslant j$ on se donne une application linéaire continue u_{ij} de E_i dans E_j, de telle façon que $i \leqslant j \leqslant k$ implique

$$u_{ik} = u_{jk}\, u_{ij},$$

et $i \leqslant j$ implique $u_i = u_j u_{ij}$.

Alors on vérifie immédiatement que <u>la topologie limite inductive sur</u> E <u>ne change pas si on remplace</u> I <u>par un ensemble</u> $I' \subset I$ <u>cofinal à</u> I. On peut d'ailleurs se ramener au cas où la famille (E_i) est comme ci-dessus. En effet, dans le cas général, pour toute partie finie $J \subset I$, soit

$$E_J = \prod_{i \in J} E_i ,$$

et soit u_J l'application linéaire de E_J dans E coincidant avec les u_i sur les facteurs E_i; comme cette application est évidemment continue quand E est muni de la topologie limite inductive des E_i, il s'ensuit que cette dernière est aussi identique à la limite inductive des E_J par les u_J; or la famille (E_J) forme de façon évidente un système transitif du type envisagé plus haut. - Notons encore que la topologie limite inductive sur E ne change pas quand on remplace les E_i par leur quotient par le noyau de u_i, ce qui ramène au cas où les u_i sont biunivoques, et où par suite les E_i s'identifient à des sous-espaces vectoriels le E, munis de la topologies localement convexes propres T_i. Quand les E_i formaient d'abord un sytème transitif, on voi qu'après passage aux quotients, on aura des sous-espaces E_i de E tels que $i \leqslant j$ implique $E_i \subset E_j$ et que l'application identique de E_i dans E_j est continue (pour les topologies propres aux espaces E_i, E_j). - Le plus souvent de plus, la réunion des $u_i(E_i)$ engendre E (donc, si les E_i forment une famille transitive, la réunion des $u_i(E_i)$ sera identique à E).

Notons la propriété de transtivité, résultant trivialement de la définition: <u>Si chaque E_i est lui-même donné comme limite inductive d'une famille $(E_{i,\alpha})_{\alpha \in A_i}$ d'ELC (pour des applications $u_{i,\alpha}$), alors E est aussi la limite inductive des $(E_{i,\alpha})$ (avec i variable, et $\alpha \in A_i$) par les applications composées</u> $u_i \circ u_{i,\alpha}$.

<u>Proposition 2. Soit E un espace limite inductive d'une famille (E_i) d'ELC par des applications linéaires u_i, E engendré par les $u_i(E_i)$. Soit F un ELC arbitraire.</u>

<u>1. Pour qu'une application linéaire v de E dans F soit continue, il faut et il suffit que pour tout i, $v \circ u_i$ soit continue. Plus généralement soit M un ensemble d'applications linéaires de E dans F, pour que M soit équicontinu, il faut et il suffit que pour tout i, l'ensemble $M \circ u_i$ (formé des $v \circ u_i$ avec $v \in M$) soit un ensemble équicontinu d'applications de E_i dans F.</u>

<u>2. Soit, pour tout i, $\mathfrak{S}_i$ un ensemble de parties bornées de E_i, soit $\mathfrak{S}$ la réunion des ensembles de parties bornées $u_i(\mathfrak{S}_i)$ de E. Alors la topologie de la $\mathfrak{S}$-convergence, dans l'espace des applications linéaires de E dans F, est la moins fine des topologies rendant continues les applications $v \longrightarrow v \circ u_i$, quand l'espace des applications linéaires de E_i dans F est muni de la topologie de la $\mathfrak{S}_i$-convergence. En particulier, un ensemble M d'applications linéaires de E dans F est borné pour la $\mathfrak{S}$-convergence si et seulement si</u>

<u>pour tout</u> i, <u>l'ensemble</u> $M \circ u_i$ <u>d'applications linéaires de</u> E_i <u>dans</u> F <u>est borné pour la</u> $\mathfrak{S}_i$<u>-convergence</u>.

<u>Démonstration</u>. 2. est trivial (F peut même être un espace topologique quelconque, et les applications considérées quelconques, les structures vectorielles, et la topologie de E, n'interviennent même pas). Pour 1., on note que M équicontinu signifie que pour tout voisinage disqué V de 0 dans F, $M^{-1}(V)$ est un voisinage de 0 dans E; comme c'est déjà un disque, cela signifie (prop. 1) que pour tout i, $u_i^{-1}(M^{-1}(V))$ est un voisinage de 0 dans E_i, or cet ensemble est aussi $M_i^{-1}(V)$, où $M_i = M \circ u_i$; il faut donc exprimer que pour i donné, $M_i^{-1}(V)$ est un voisinage de 0 dans E_i quel que soit le voisinage disqué V de 0 dans F, i.e. que M_i est équicontinu.

Voici maintenant le genre de questions qui se posent pour un espace limite inductive, se solvant parfois par la négative même pour les limites inductives d'une suite d'espaces de Banach, et dont la réponse présente souvent des difficultés sérieuses. 1) L'espace E est-il complet quand les E_i le sont? 2) Toute partie bornée (resp. compacte, resp. faiblement compacte) de E provient-elle d'une partie bornée (resp. ..) d'un espace E_i? (Dans cette question, il y a lieu de supposer que les (E_i) forment déjà un système transitif). En particulier, si on suppose les E_i réflexifs (resp. des espaces de Montel), E est-il réflexif (resp. un espace de Montel)? (Pour l'affirmer, il suffirait de savoir que E est séparé, et que toute partie bornée de E provient d'une partie bornée d'un E_i). Noter que même si les E_i sont séparés, il se peut que E ne soit pas séparé (voir Nº 4, exercice 2) mais en pratique, on s'assure aisément que E est séparé, car il suffit manifestement pour ceci de trouver sur E <u>une</u> topologie localement convexe séparée rendant continues les u_i. - On notera que pratiquement, les difficultés qui se présentent pour les limites inductives sont exactement inverses de celles pour les "limites projectives" ("topologie la moins fine qui ..."); là il est pratiquement toujour facile de prouver que l'espace est complet, de déterminer ses parties bornées, faiblement compactes ou compactes (le lecteur se rappelera les énoncés correspondants), et en particulier de reconnaite si c'est un espace réflexif, ou un espace de Montel; tandis qu'il est souvent difficile de reconnaitre s'il est bornologique, ou tonnelé, et on n'a pas de critère agréable comme dans la prop. 2 ci-dessus pour les ensembles équicontinus d'applications linéaires, etc.

2. <u>Exemples</u>.

Dans tous ces exemples, les E_i forment un système transitif de façon naturelle, et la réunion des $u_i(E_i)$ est E. On vérifie trivialement dans les exemples c), d), e), f), que les espaces E obtenus sont séparés, en utilisant la remarque générale fait plus haut (Nº 1).

a) Soit E un ELC, F un sous-espace vectoriel. Alors E/F est la limite inductive de E, par l'application canonique de E sur E/F.

b) Pour que l'espace localement convexe E soit bor nologique, il faut et il suffit qu'il soit une limite inductive d'espaces normés. En effet, c'est suffisant en vertu de prop. 1, corollaire (un espace normé étant bornologique - Chapitre. 3, Nº 4, th.), et nécessaire, car on vérifie immédiatement que E est bornologique si et seulement si sa topologie est la limite inductive des espaces E_A (où A parcourt les disques bornés fermés de E) par les applications identiques de ces espaces dans E. (Si donc E est séparé et <u>quasi-complet</u>, les E_A sont complets, donc E est bornologique si et seulement si il est limite inductive d'une famille d'<u>espaces de Banach</u>.

c) Soient E et F deux espaces $(\mathcal{F})$, soit $\Gamma(E,F)$ l'espace des applications linéaires compactes de E dans F. Pour tout voisinage disqués V de 0, soit E_V l'espace normé associé à la semi-norme jauge de V; il existe une application linéaire biunivoque naturelle de $\Gamma(E_V,F)$ dans $\Gamma(E,F)$, qui est réunion des images de ces espaces. Munissons $\Gamma(E_V,F)$ de la topologie de la convergence bornée, qui en fait un sous-espace <u>fermé</u> de l'espace $L_b(E_V,F)$ (Chap. 3, Nº 1, prop. ; les applications linéaires <u>compactes</u> d'un espace semi-normé dans un espace F sont celles qui transforment la <u>boule unité</u> en une partie relativement compacte de F). Comme $L_b(E_V,F)$ est manifestement un espace $(\mathcal{F})$, il en est donc de même de $\Gamma(E_V,F)$ (On a donc la bonne topologie sur cet espace). Il y a lieu alors de munir $\Gamma(E,F)$ de la topologie limite inductive des espaces $\Gamma(E_V,F)$ du type $(\mathcal{F})$. Cette topologie limite ne change pas si on fait parcourir à V un sys tème fondamental de voisinages disqués de 0, par exemple une suite fondamentale (V_n) de voisinages. Ainsi, l'espace $\Gamma(E,F)$ des applications linéaires com- ctes d'un espace $(\mathfrak{F})$ dans un autre, apparait comme limite inductive d'une suite d'espaces du type $(\mathfrak{F})$. Construction analogue pour l'espace des applications linéaires bornées de E dans F.

d) Soit M un espace localement compact, soit $\mathcal{K}(M)$ l'espace des fonctions numériques continues à support compact sur M. Pour tout compact $K \subset M$, on désigne par $\mathcal{K}_K(M)$ l'espace des fonctions ayant leur support $\subset K$, muni de la topologie définie par la norme uniforme (i.e. la topologie de la convergence uniforme), qui en fait un espace de Banach. $\mathcal{K}(M)$ est la réunion de ces sous-espaces, et il y a lieu de le munir de la topologie limite inductive. Si M est dénombrable à l'infini, on peut se borner à prendre une suite croissante (K_n) convenable de compacts, alors $\mathcal{K}(M)$ est la limite inductive d'une suite d'espaces de Banach.

e) On procède de la même façon pour l'espace $\mathfrak{D}(U)$ des fonctions indéfiniment différentiables à support compact sur un ouvert $U \subset R^n$; cet espace est la limite inductive d'une suite de sous-espaces du type $(\mathfrak{F})$.

f) Soit d'abord U un ouvert de C^n, considérons l'espace $H(U)$ des fonctions holomorphes sur U, c'est un sous-espace vectoriel fermé de l'espace $C(U)$ des fonctions complexes continues sur U (th. de Weierstrass), et sera donc muni de la topologie induite, qui en fait un espace $(\mathfrak{F})$. Soit maintenant A une partie quelconque de C^n, soit $H(A)$ l'en semble des classes de fonctions holomorphes définies dans un voisinage ouvert (variable) de A, deux telles fonctions étant mises dans la même classe si elles coincident dans un même voisinage de A. $H(A)$ est muni d'une structure vectorielle évidente, et si $B \supset A$, on a une application linéaire naturelle $\varphi_{B,A}$ de $H(B)$ dans $H(A)$ (application de <u>restriction</u>). Si A est ouvert, on retrouve l'espace déjà défini. Il y a alors lieu de munir $H(A)$ de la topologie limite inductive des espaces $H(U)$ correspondants aux voisinages ouverts U de A, par les applications linéaires $\varphi_{U,A}$. Il suffit d'ailleurs de faire parcourir à U un système fondamental dénombrable de voisinages ouverts de A. En particulier, si A est compact, on peut prendre une <u>suite</u> (U_n) fondamentale de voisinages ouverts de A, donc $H(A)$ apparait allors comme limite inductive d'une <u>suite</u> d'espaces $(\mathfrak{F})$.

3. <u>Limites inductives strictes</u>.

<u>Définition 2</u>. E est dite <u>limite inductive stricte</u> d'une famille (E_i) d'ELC, si les E_i forment une famille filtrante croissante de sous-espaces vectoriels de E dont la réunion est E, chaque E_i étant muni d'une topologie localement convexe <u>séparée</u>, et $E_i \subset E_j$ impliquent que E_i est un sous-espace vectoriel topologique fermé de E_j (en particulier sa topologie est celle induite par E_j). (C'est par exemple le cas dans les exemples d), e), du Nº 2).

On ne sait pas si alors les questions posées à la fin de Nº 1 se resolvent toujours par l'affirmative (voir exercice 7 plus bas). On va voir qu'il en est ainsi dans le cas le plus important, savoir quand l'ensemble d'indices I est dénombrable. Dans ce cas, les remarques faites dans Nº 1 montrent qu'on peut supposer que (E_i) est une suite croissante de sous-espaces vectoriels de E, de réunion E, munis de topologies séparées propres telles que la topologie de E_i soit celle induite par E_{i+1}, et que E_i soit un sous-espace fermé de E_{i+1}.

Proposition 3. *Soit E un espace limite indutive stricte d'une suite croissante de sous-espaces E_i. Alors les E_i sont fermés dans E, E induit sur chaque E_i la topologie donnée de E_i* (en particulier E est separé), *les parties bornées de E sont celles qui sont contenues et bornées dans quelque espace E_i. Pour que E soit complet, il faut et il suffit que les E_i le soient.*

La démonstration repose sur le

Lemme. *Soit F un ELC, G un sous-espace vectoriel fermé, V un disque ouvert dans G, $x \in \complement G$. Alors il existe un disque ouvert W dans F tel que $x \in \complement W$, $W \cap G = V$.*

En effet, soit W_o un disque ouvert dans F assez petit pour que $x + W_o$ ne rencontre pas G, et que $W_o \cap F \subset V$. On laisse au lecteur le soin de vérifier que $W = \Gamma(W_o \cap V)$ satisfait à la condition voulue.

Pour prouver que E induit sur E_i la topologie propre de E_i, il suffit de prouver que pour tout disque ouvert V_i dans E_i, existe un voisinage disqué V de 0 dans E tel que $V \cap E_i = V_i$. Mais grâce au lemme, on construit par récurrence une suite des disques $V_{i+1},\dots,V_j,\dots$, où V_j est un disque ouvert dans E_j induisant V_{j-1} sur E_{j-1}. Alors $V = \bigcup_j V_j$ donne le voisinage cherché. Montrons que E_i est fermé dans E, donc que pour $x \in \complement E_i$, il existe une forme linéaire continue sur E, nulle sur E_i mais non sur x. En effet, on aura $x \in E_j$ pour j convenable et comme E_i est fermé dans E_j, il existe une forme linéaire continue sur E_j nulle sur E_i mais non sur x. Comme E_j est un sous-espace vectoriel topologique de E, cette forme peut être étendue en une forme linéaire continue définie sur E tout entier, et qui répondra à la question. Pour l'assertion relative aux bornés, il faut seulement montrer que si A est une partie bornée de E, alors $A \subset E_i$ pour i convenable. Or s'il n'en était pas ainsi, on pourrait construire par récurrence une suite strictement croissante (i_n) d'indice, et une suite (x_n) dans E, telles que $x_n \in A \cap E_{i_n} \cap \complement E_{i_{n-1}}$, puis grâce au lemme une suite de disques ouverts V_n dans les E_{i_n} tels que $V_{n-1} = V_n \cap E_{i_{n-1}}$ et $x_n \notin nV_n$. Alors la réunion V des V_n est un voisinage de 0 dans E, induisant les V_n sur les E_{i_n}, et tel que $x_n \notin nV$ pour tout n. Il s'ensuit que la suite des (x_n), donc A ne peut être borné.

Si E est complet, il en est de même de ses sous espaces fermés E_i. Réciproquement, supposons les E_i complets, montrons que E l'est, i.e. (Chap. 2, Nº 14, th. 10) que toute forme linéaire x sur E' dont les restrictions aux parties équicontinues sont faiblement continues, est déjà faiblement continue. D'abord, x s'annule sur un orthogonal E_i^o pour i convenable, car autrement il existerait pour tout i un $x_i' \in E_i^o$ tel que $\langle x,x_i'\rangle = 1$, or la suite des x_i' serait manifestement équicontinue (prop. 1) et convergerait faiblement vers 0, sans que $\langle x,x_i'\rangle$ tende vers 0, ce qui est absurde. Ainsi x s'annule sur un espace E_i^o, donc provient d'une forme linéaire y sur le quotient E'/E_i^o, quotient qui s'identifie au dual $(E_i)'$ de E_i. Cette forme linéaire a ses restrictions aux parties équicontinues de $(E_i)'$ faiblement continues; en effet, une partie équicontinue de E' est contenue dans l'image $\varphi(A)$ d'une partie équicontinue de E' (Chap. 2, Nº 15, prop. 20) que l'on peut supposer faiblement compacte, où φ est l'application canonique de E' sur $(E_i)'$. Or la restriction de y à $\varphi(A)$ faible est continue si et seulement si $y \circ \varphi = x$ est continue sur A faible, ce qui est en effet le cas. Comme E_i est complet, on en conclut que y est faiblement continue, il en est donc de même de $x = y \circ \varphi$, c.q.f.d.

4. Sommes directes.

Définition 3. Soit (E_i) une famille d'ELC E_i. On appelle somme directe topologique des E_i, la somme directe algébrique $E = \sum_i E_i$ munie de la topologie limite inductive des sous-espaces E_i (munis des topologies données).

Quand l'ensemble d'indices est fini, on retrouve la topologie produit.

La construction de limites inductives générales se ramène à la construction de sommes directes topologiques et de quotients, grâce à la

Proposition 4. Soit E un ELC, limite inductive d'une famille (E_i) d'ELC par des applications linéaires u_i, telles que E soit engendré par la réunion des $u_i(E_i)$. Alors E est isomorphe à un espace quotient de la somme directe topologique des E_i.

En effet, désignons ce dernier espace par F, soit u l'application linéaire de F dans E qui coincide avec u_i sur E_i, c'est une application linéaire de F sur E, donc définit une application linéaire biunivoque d'un quotient de F sur E. La topologie quotient sur E est la topologie limite inductive de F par u (Nº 2, exemple a)), donc (transitivité des limites inductives, voir Nº 1) est identique à la topologie limite inductive des E_i par les applications u_i induites par u sur les E_i, d'où la conclusion voulue.

Proposition 5. Soit E la somme directe topologique d'une famille $(E_i)_{i \in I}$ d'ELC séparés. Alors les E_i sont fermés dans E, et E y induit les topologies données; plus généralement, pour toute partie J de I, l'espace E_J somme directe topologique des E_i avec $i \in J$, est un sous-espace vectoriel topologique fermé de E. Les

<u>parties bornées de E sont les parties qui sont contenues et bornées dans la somme directe d'un nombre fini de facteurs E_i. Pour que E soit complet, il faut et il suffit que les E_i le soient.</u>

À priori, la topologie somme directe propre de E_J est plus fine que la topologie induite par E, mais la projection naturelle de E sur E_J est une application linéaire continue de E dans E_J (car ses restrictions aux E_i, $i \in I$, le sont), d'où s'ensuit que E_J est en fait un sous-espace vectoriel topologique fermé de E. Soit A une partie bornée de E, si elle n'était contenue dans aucun E_J avec J fini, on construirait par récurrence une suite croissante de parties finies $J_1, \ldots, J_n, \ldots$ de I et une suite de points $x_1, \ldots$ de A, telles que $x_n \in E_{J_{n+1}} \cap \complement E_{J_n}$, soit J la réunion des J_n, on vérifie aussitôt que E_J est la limite inductive stricte des E_{J_n}. Mais alors $A \cap E_J$ serait une partie bornée de E_J qui n'est contenue dans aucun des E_{J_n}, ce qui est absurde en vertu de prop. 3. - Si E est complet, les E_i le sont, car ce sont des sous-espaces fermés de E. Pour la réciproque, nous aurons besoin d'abord de la

<u>Proposition 6. Le dual de la somme directe topologique $\sum E_i$ s'identifie au produit $\prod E_i'$ des duals des E_i; les parties équicontinues du dual sont celles contenues dans un produit $\prod A_i$, où pour tout i, A_i est une partie équicontinue de E_i'.</u>

C'est une conséquence triviale de prop. 2, 1.

Corollaire. Soit, pour tout i, $\mathfrak{S}_i$ *un ensemble des parties bornées de* E_i, *soit* $\mathfrak{S}$ *l'ensemble des parties bornées de* E, *réunion des* $\mathfrak{S}_i$. *Alors sur*

$$E' = \prod E'_i,$$

la topologie de la $\mathfrak{S}$*-convergence est identique à la topologie produit, quand les* E'_i *sont munis de la topologie de la* $\mathfrak{S}_i$*-convergence. En particulier, la topologie faible* (resp. *forte*) *sur* E' *est le produit des topologies faibles* (resp. *fortes*) *des* E'_i.

L'assertion générale est un cas particulier de prop. 2, 2. Les cas particuliers en résultent, car on peut remplacer $\mathfrak{S}$ par l'ensemble des enveloppes convexes de réunions finies d'ensembles éléments de $\mathfrak{S}$, et appliquer la caracterisation des bornés de E donnés dans prop. 5.

Nous pouvons maintenant démontrer que si les E_i sont complets, E est complet, i.e. que toute forme linéaire x sur $E' = \prod E'_i$ dont les restrictions aux parties équicontinues sont faiblement continues, est faiblement continue (Chap. 2, Nº 14, th. 10). Soit x_i la restriction de x à E'_i, ses restrictions aux parties équicontinues de E'_i (considéré comme dual de E_i) sont évidemment faiblement continues, donc, E_i étant complet, on a $x_i \in E_i$. Montrons que tous les x_i sauf un nombre fini sont nuls: autrement il existerait une suite infinie d'indices distincts $i_1, \ldots, i_n, \ldots$, et d'éléments $x'_{i_n} \in E'_{i_n}$ tels que $\langle x, x'_{i_n} \rangle = \langle x_{i_n}, x'_{i_n} \rangle = 1$, or il est immédiat que (x'_{i_n}) est une suite équicontinue tendant faiblement vers 0 dans E', ce qui est absurde, car $\langle x, x'_{i_n} \rangle$ devrait tendre vers 0 par hypothèse. Soit X l'élément de E dont les composantes sont les x_i, il reste à prouver que $x = X$. Or ces deux formes coincident sur le sous-espace E'_i de $\prod E'_i$, et ont des restrictions aux parties équicontinues de $\prod E'_i$ faiblement continues, il suffit donc de montrer que tout $x' = (x'_i) \in \prod E'_i$ est faiblement adhérent à une partie équicontinue de $\prod E'_i$ contenue dans $\sum E'_i$. Or l'ensemble des projections x'_J de x' sur les sommes directes finies E'_J correspondantes aux parties finies J de I est manifestement équicontinu, et x' est limite faible des x'_J suivant le filtre des sections croissantes dans l'ensemble des parties finies de I, d'où la conclusion.

Notons encore la proposition suivante, duale de proposition 6:

<u>Proposition</u> 7. <u>Soit</u> (E_i) <u>une famille d'ELC, soit, pour tout</u> i, $\mathfrak{S}_i$ <u>un ensemble des disques bornés de</u> E_i, <u>soit</u> $\mathfrak{S}$ <u>l'ensemble des parties de</u> $\prod E_i$ <u>qui sont du type</u> $\prod A_i$, <u>avec</u> $A_i \in \mathfrak{S}_i$ <u>pour tout</u> i. <u>Alors sur le dual</u> $\sum E'_i$ <u>du produit vectoriel-topologique</u> $\prod E_i$ (voir Chap. 2, Nº 15, prop. 22) <u>la topologie de la</u> $\mathfrak{S}$<u>-convergence est identique à la topologie somme directe topologique des topologies de</u> $\mathfrak{S}_i$<u>-convergence sur les</u> E_i.

Cela résulte immédiatement de la formule suivante, valable pour toute famille (A_i) de disques dans les E_i:

$$(\prod A_i)^\circ = \overline{\Gamma}(\bigcup (A_i)^\circ)$$

(vérification laissée au lecteur). Compte tenu de la caractérisation des parties bornées de $\prod E_i$, on trouve le

Corollaire. *Le dual fort de $\prod E_i$ s'identifie à la somme directe topologique des duals forts des E_i.*

Exercice 1. Généraliser la prop. 6 et son corollaire à l'espace des applications linéaires continues d'une somme directe topologique dans un ELC quelconque. Généraliser de même la prop. 7 et Chap. 2, prop. 22, à l'espace des applications linéaires continues d'un produit vectoriel topologique d'ELC dans un ELC F *semi-normé* (en particulier, un espace de Banach). Montrer que l'énoncé obtenu devient faux quand on suppose que F est un ELC quelconque (prendre p.ex. $F = E$).

Exercice 2. Soit H un espace de Banach séparable de dimension infinie. Soit (H_n) une suite croissante de sous-espaces vectoriels de dimension finie dont la réunion N est dense dans H, soit $E_n = H/H_n$, $E = H/N$, u_n l'application naturelle de E_n sur E. Montrer que la topologie limite inductive de la suite des espaces de Banach E_n par les applications u_n est la topologie la moins fine de toutes les topologies sur E (i.e. tout ouvert non vide est identique à E). Soit F un supplémentaire algébrique de N, soit F_n l'espace F muni de la norme image réciproque de la norme de E_n par l'application naturelle de F dans E_n, montrer que sur F, la topologie limite inductive des F_n (par rapport aux applications identiques) est encore la moins fine de toutes les topologies sur F. (Montrer que toute forme linéaire continue sur E ou F est nulle).

Exercice 3. Soit E un espace vectoriel, (E_i) une suite croissante de sous-espaces vectoriels de E, munis de topologies localement convexes séparées telle que l'application identique de E_i dans E_{i+1} soit faiblement compacte (Chap. 2, Nº 18, définition 14) pour tout i. Montrer que l'espace E, muni de la topologie limite inductive des E_i, est séparé, et qu'il peut aussi être considéré comme limite inductive d'une suite analogue d'espaces de Banach.

Exercice 4. (G. Köthe) Soit, pour tout entier naturel n, a^n la suite double définie par: $a^n_{ij} = j^n$ pour $i \leq n$, $a^n_{ij} = i^n$ pour $i > n$. Posons

$$c_o = c_o(N \times N), \qquad \ell^\infty = \ell^\infty(N \times N),$$

où N est l'ensemble des entiers naturels, soit $a^n.c_o$ resp. $a^n.\ell^\infty$ l'espace des produits $a^n x$ avec $x \in c_o$ resp. $x \in \ell^\infty$, muni de la topologie normée déduite de la topologie de c_o resp. ℓ^∞ par transport de structure. a) Pour toute suite double x et toute partie J de $N \times N$, soit x_J la suite double dont les coordonnées sont identiques à celles de x sur J, et nulles sur $\complement J$. Soit E resp. F l'espace réunion des $a^n.c_o$ resp. $a^n.\ell^\infty$, muni de la topologie limite inductive.

Montrer que pour tout $x \in F$, la suite des x_J, où J parcourt les parties finies de $N \times N$, est une suite de Cauchy dans E, et qu'elle tend dans F vers la limite x. b) En conclure que E n'est pas complet, même pour les suites (noter que la suite double x dont toutes les coordonnées sont égales à 1 est dans F, mais non dans E).

<u>Exercice</u> <u>5</u>. Déduire de l'exercice 4, et de la proposition 4, qu'il existe un sous-espace vectoriel fermé H de la somme directe L d'une suite d'espaces isomorphes à c_o, tel que L/H ne soit pas complet (bien que L soit complet, en vertu de prop. 5). Montrer que ceci reste valable si on remplace c_o par ℓ^1 (utiliser le fait que c_o est isomorphe à un espace quotient de ℓ^1 - Chap. 1, Nº 14, exercice 1).

<u>Exercice</u> <u>6</u>. Soit E un ELC limite inductive stricte d'une suite croissante de sous-espaces E_n.

a) Si $\mathfrak{S}$ (resp. $\mathfrak{S}_n$) est l'ensemble des parties équicontinues de E' (resp. E'_n), alors pour tout disque $\mathfrak{S}$-bornivore U dans E' (voir Chap. 3, Nº 2, définition 1), existe n tel que $U \supset (E_n)^o$, et alors l'ensemble U_n des $x' \in (E_n)'$ dont l'image réciproque dans E' est $\subset U$, est un disque $\mathfrak{S}_n$-bornivore.

b) En conclure que si les E_n sont quasi-tonnelés et leurs duals forts bornologiques, alors E est quasi-tonnelé et son dual fort bornologique.

c) Soit E un ELC quasi-tonnelé. Montrer que si E' fort est quasi-tonnelé, il est aussi tonnelé (donc sous les conditions de b), E' fort est aussi tonnelé).

Exercice 7. Soit $E = \prod E_i$ le produit vectoriel topologique d'une famille d'ELC E_i.

a) Montrer que les parties faiblement (resp. fortement) bornées de $E' = \sum E'_i$ sont les parties contenues dans la somme d'un nombre fini de parties faiblement (resp. fortement bornées des E'_i.

b) En conclure que pour que E soit tonnelé (resp. quasi-tonnelé) il faut et il suffit que les E_i le soient.

Exercice 8. Soit $E = \sum E_i$ la somme directe topologique d'une famille d'ELC E_i. Pour que E soit bornologique (resp. tonnelé, resp. quasi-tonnelé, resp. réflexif, resp. du type $(\mathcal{M})$), il faut et il suffit que les E_i le soient.

5. Espaces $(\mathcal{L}\mathcal{F})$.

Définition 4. On appelle espace $(\mathcal{L}\mathcal{F})$ tout ELC séparé E qui est limite inductive d'une suite (E_i) d'espaces $(\mathcal{F})$ par des applications linéaires u_i, telles que les $u_i(E_i)$ engendrent E.

Les considérations du Nº 1 montrent qu'on peut alors supposer que la suite (E_i) est une suite croissante de sous-espaces vectoriels de E, munis de topologies propres T_i qui en font des espaces $(\mathcal{F})$, l'application identique de E_i dans E_{i+1} étant continue, et E étant la réunion des E_i. Une telle suite est appelée une suite de définition de l'espace $(\mathcal{L}\mathcal{F})$ E. - Les exemples les plus importants donnés au

Nº 2 sont des espaces $(\mathcal{L}\mathcal{F})$ (exemples c) et e), exemple d) quand M est dénombrable à l'infini, exemple f) quand A est ouvert, ou compact). - Un espace $(\mathcal{F})$ est trivialement du type $(\mathcal{L}\mathcal{F})$. D'après la transitivité des limites inductives, un espace E séparé qui est limite inductive d'une suite d'espaces $(\mathcal{L}\mathcal{F})$ par des applications linéaires telles que la réunion des images engendre E, est un espace $(\mathcal{L}\mathcal{F})$; en particulier, un espace quotient d'un espace $(\mathcal{L}\mathcal{F})$ par un sous-espace vectoriel fermé, est un espace $(\mathcal{L}\mathcal{F})$. On fera attention qu'un sous-espace vectoriel fermé d'un espace $(\mathcal{L}\mathcal{F})$, et même d'une somme directe topologique d'une suite d'espaces de Hilbert, peut ne pas être du type $(\mathcal{L}\mathcal{F})$. - Les espaces $(\mathcal{L}\mathcal{F})$ sont bornologiques et tonnelés (prop. 1, corollaire), mais peuvent ne pas être complets, même quand il s'agit de limites inductives d'espaces de Banach (exemple de Köthe, voir N) 4, exercice 4). - Les propriétés plus speciales des espaces $(\mathcal{L}\mathcal{F})$ résultent du théorème suivant (où il n'est pas question de locale convexité):

<u>Théorème 1</u>. Soit E un espace vectoriel muni d'une topologie séparée, (E_i) une suite d'EVT métrisables et complets, soit, pour tout i, u_i une application linéaire continue de E_i dans E. Soit u une application linéaire continue d'un EVT métrisable et complet F dans E, telle que $u(F) \subset \bigcup u_i(E_i)$. Alors il existe un indice i tel que $u(F) \subset u_i(E_i)$, et si u_i est biunivoque, on peut écrire $u = u_i \circ v$, où v est une application linéaire et continue de F dans E_i.

<u>Démonstration</u>. Soit H_i le sous-espace fermé de $F \times E_i$ formé des couples (x,y) tels que $ux = u_i y$, soit

$$F_i = p_i(H_i) \subset F,$$

où p_i est la projection de $F \times E_i$ sur F, F_i est manifestement l'ensemble des $x \in F$ tels que $ux \in u_i(E_i)$. L'hypothèse signifie que $F = \bigcup_i F_i$, d'où s'ensuit (F étant un espace de Baire) que l'un des F_i est non maigre. Mais en vertu du th. des homomorphismes de Banach (Chap. 1, Nº 14, th. 9, cor. 3) il en résulte que p_i est une application linéaire de H_i <u>sur</u> F, i.e. $F_i = F$, i.e. $u(F) \subset u_i(E_i)$. Si u_i est biunivoque, on a manifestement $u = u_i \circ v$, où v est une application linéaire bien determinée de F dans E_i. Cette dernière est continue en vertu du th. du graphe fermé (Chapitre 1, Nº 14, th. 10, cor.) car elle est continue pour la topologie sur E_i image réciproque de la topologie de E par u_i, topologie moins fine que la topologie donnée, et qui est encore séparée.

<u>Corollaire 1</u>. <u>Soit</u> E <u>un espace</u> $(\mathcal{LF})$, (E_i) <u>une suite de définition de</u> E, u <u>une application linéaire continue d'un espace</u> F <u>du type</u> $(\mathcal{F})$ <u>dans</u> E. <u>Alors il existe un</u> i <u>tel que</u> u <u>soit une application linéaire continue de</u> F <u>dans l'espace</u> E_i (muni de sa topologie propre d'espace $(\mathcal{F})$).

C'est un cas particulier immédiat du th. 1. Appliquant ceci au cas où $F = E_A$, espace normé défini par un disque borné de E, on trouve le

<u>Corollaire 2</u>. Soit E un espace $(\mathcal{L}\mathcal{F})$, (E_i) une suite de définition de E, A un disque borné dans E tel que E_A soit complet (par exemple un disque borné et complet). Alors A est contenu et borné dans un espace E_i.

En particulier, si E est quasi-complet, alors les parties bornées de E proviennent de parties bornées des espaces E_i (la réciproque est fausse, voir espace E de l'e-exercice 4 ci-dessus).

<u>Corollaire 3</u>. Soit E un espace vectoriel, soit (E_i) (resp. (F_i)) une suite d'espaces $(\mathcal{F})$, soit, pour tout i, u_i (resp. v_i) une application linéaire de E_i (resp. F_i) dans E, on suppose que la réunion des images des E_i (resp. F_i) engendre E, et qu'on peut trouver sur E une topologie séparée rendant continue les u_i et les v_i. Alors sur E, la topologie limite inductive des E_i par les u_i est identique à la topologie limite inductive des F_i par les v_i.

En effet, on peut se ramener au cas où les (E_i) (respect. (F_j)) forment une suite de définition, mais alors on voit par application du th. 1 que tout E_i est contenu dans un F_j convenable (avec l'application identique $E_i \longrightarrow F_j$ continue) et inversement, d'où le résultat. On voit donc que pratiquement, il ne peut exister sur un espace vectoriel qu'une seule topologie d'espace $(\mathcal{L}\mathcal{F})$ raisonnable.

Le théorème 1 permet aussi de donner une généralisation intéressante du théorème des homomorphismes et du théorème du graphe fermé. Pour l'énoncer, introduisons la notion d'<u>espace strictement bornologique</u>: c'est par définition un ELC séparé qui est limite inductive d'une famille (de puissance quelconque) d'espaces de <u>Banach</u> (il revient au même de dire que dans E, tout disque $\mathfrak{S}$-bornivore, où $\mathfrak{S}$ est l'ensemble des disques bornés dans E tels que E_A soit complet, est un voisinage de 0, comparer Nº 2, exemple b)). Si E est séparé et quasi-complet, il revient donc au même de dire qu'il est bornologique, ou strictement bornologique (Nº 2, exemple b)).

En particulier, un espace $(\mathcal{F})$ est strictement bornologique puisqu'il est bornologique (Chap. 3, Nº 4, th. 3). Il est trivial que toute limite inductive d'espaces strictement bornologiques est un espace strictement bornologique (transitivité des limites inductives), en particulier <u>un espace $(\mathcal{LF})$ est strictement bornologique</u>. Ceci posé, on a le

<u>Théorème 2</u>. Soit E un ELC strictement bornologique, F un ELC séparé réunion d'une suite d'images d'espaces E_i du type $(\mathcal{F})$ par des applications linéaires continues u_i (par exemple, E et F du type $(\mathcal{LF})$).

1. Toute application linéaire continue de F sur E est un homomorphisme.

2. Soit u une application linéaire de E dans F.

Pour que u soit continue il suffit que son graphe soit fermé, et même qu'on ne puisse trouver dans E une suite (x_i) tendant vers 0, telle que la suite (ux_i) tende vers une limite, distincte de 0.

Démonstration. Dans 1, on peut manifestement supposer que u est biunivoque (en remplaçant autrement F par le quotient de F par le noyau de u), il faut montrer que l'application identique de E, muni de sa topologie donnée, dans E muni de la topologie T limite inductive des E_i par les $v_i = u \circ u_i$ (espace noté E_T), est continue. Comme E est strictement bornologique, cela signifie que pour tout espace de Banach H et toute application linéaire continue w de H dans E, w est aussi une application continue de H dans E_T (Nº 1, prop. 2). Mais on peut manifestement supposer que la réunion des images des E_i dans E est identique à E, et que les v_i sont biunivoques, et alors le résultat apparait immédiatement grâce au th. 1.

2. Pour vérifier la continuité de u, on est aussitôt ramené au cas où E est un Banach. Soit $H = E \times F$ le graphe de u, soit $H_i = H \cap (E \times E_i)$ (on suppose que les E_i sont des sous-espaces de F, dont la réunion soit F), l'hypothèse la plus faible dans 2. implique que H_i est un sous-espace fermé de $E \times E_i$, i.e. c'est un espace $(\mathcal{F})$ pour la topologie induite. H est réunion des H_i, et satisfait donc aux conditions de l'espace F de l'énoncé 1. Par suite, la projection de H sur E est un isomorphisme, i.e. l'application inverse est continue, donc aussi l'application u, obtenue en composant la

précédente avec la projection de H dans F.

Il semble qu'on devrait pouvoir affaiblir beaucoup les conditions sur F, question qui semble digne de rechercher.

Exercice 1. Soit E un espace $(\mathcal{F})$, F un espace $(\mathcal{L}\mathcal{F})$. a) Montrer que si E est normable, ou F quasi-complet, alors l'espace des applications linéaires bornées de E dans F (Chap. 2, Nº 18, définition 14) peut être muni d'une topologie d'espace $(\mathcal{L}\mathcal{F})$, plus fine que la topologie de la convergence bornée, uniquement déterminée (voir Nº 2, exemple c)). b) E et F étant comme dans a), soit G un espace $(\mathcal{F})$ et u une application bilinéaire continue de $E \times G$ dans F telle que pour tout $y \in G$, l'application $x \longrightarrow u(x,z)$ de E dans F soit bornée. Montrer qu'il existe un voisinage fixe V de 0 dans E, tel que pour tout $z \in G$, V soit transformé en une partie bornée de F par l'application

$$x \longrightarrow u(x,z).$$

c) Donner les énoncés analogues à a) et b) quand F est un espace $(\mathcal{F})$ ou plus généralement une limite inductive stricte d'une suite d'espaces $(\mathcal{F})$, et qu'on remplace partout les applications bornées par des applications compactes.

6. Produits et sommes directes de droites.

Proposition 8. Soit E un ELC. Les conditions suivantes sont équivalentes:

1. La topologie de E est la plus fine de toutes les topologies localement convexes sur E (ou encore,

toute application linéaire de E *dans un ELC est continue*).

2. *Toute forme linéaire sur* E *est continue, et la topologie de* E *est une topologie de Mackey* (Chap. 2, Nº 13, définition 12).

3. E *est isomorphe à une somme directe topologique de droites*.

L'équivalence des deux conditions énoncées dans 1. est triviale, de plus il est immédiat que la topologie localement convexe la plus fine sur E est identique à la topologie $\tau(E,E^*)$ (th. de Mackey); si d'autre par, (e_i) est une base de E identifiant E à $k^{(I)}$ (k, corps des scalaires), il est immédiat à partir de la définition que la topologie localement convexe la plus fine sur E est aussi la topologie somme directe topologique (qui est la plus fine des topologies localement convexes sur E rendant continues les applications $\lambda \longrightarrow \lambda e_i$ de k dans E, ou *toute* topologie localement convexe sur E les rend continues. Cela prouve l'équivalence des conditions 1., 2., 3.

Proposition 9. *Soit* E *un espace vectoriel muni de la topologie localement convexe la plus fine*. E *est bornologique, complet* (donc *tonnelé*), *ses parties bornées sont de dimension finie* (à fortiori E *est réflexif, et même un espace* $(\mathcal{M})$ - voir Chap. 2, Nº 18, définition 13). *Sur le dual* $E' = E^*$ *de* E, *topologie faible et forte sont identiques, et* E^* *est alors isomorphe à un* produit topologique de droites.

E est bornologique et tonnelé comme il résulte trivialement des définition (mais aussi parce que une limite inductive d'espaces bornologiques tonnelés est bornologique, respect. tonnelé). Que E soit complet, et la caractérisation de ses parties bornées est inclus dans la prop. 5, Nº 3. Le fait que les parties bornées sont de dimension finie équivaut exactement au fait que sur E', topologie faible et forte coincident. D'autre part, le dual faible d'une somme directe topologique est le produit des duals faibles des facteurs (proposition 6), ce qui achève la démonstration.

Proposition 10. Soit E un espace vectoriel muni de la topologie localement convexe la plus fine. Alors tout sous-espace vectoriel V de E est fermé, la topologie induite sur V est aussi la topologie localement convexe la plus fine sur V, tout supplementaire algébrique de V est aussi supplémentaire topologique (donc, V est facteur direct topologique de E).

Soit en effet W un supplémentaire algébrique de V, soit p la projection correspondante de E sur V, elle est continue quand V est muni de la topologie localement convexe T la plus fine sur V (prop. 8, 1.), d'où résulte à fortiori qu'elle est continue de E dans E, donc que V et W sont supplémentaires topologiques, et à fortiori V est fermé; en même temps, cela prouve que la topologie induite par E sur V est identique à T (car l'application identique de V sur V muni de l'une et l'autre topologie est continue).

Corollaire. Tout espace quotient de E est séparé, et sa topologie est même la topologie localement convexe la plus fine.

En effet, cet espace quotient est d'après prop. 10 isomorphe à un sous-espace W de E (supplémentaire du sous espace V donné), d'où la conclusion.

Proposition 11. Soit E un ELC séparé. Les conditions suivantes sont équivalentes:

1. La topologie de E est minimale parmi les topologies localement convexes séparées.

2. $E = E'^*$.

3. E est isomorphe à un produit vectoriel topologique de droites.

1. implique 2., car si on avait $x \in E'^* \cap \complement E$, et si H est le noyau de la forme x sur E', la topologie $\sigma(E,H)$ serait manifestement séparée, strictement moins fine que $\sigma(E,E')$ (car donne pour dual, H strictement plus petit que E') donc strictement moins fine que la topologie donnée.

Réciproquement, 2. implique que toute partie équicontinue de E', qui est donc faiblement bornée pour $\sigma(E',E'^*)$, est de dimension finie (car prop. 10 contient que pour tout espace vectoriel F, les parties bornées pour $\sigma(F,F^*)$, i.e. pour la topologie localement convexe la plus fine - ce qui revient au même d'après Banach-Steinhaus-Mackey - est de dimension finie). Donc la topologie de E est une topologie faible. Si T est une topologie localement convexe séparée moins fine que $\sigma(E,E')$, son dual doit être E' (car autrement la topologie ne serait pas séparée, tout sous-espace vectoriel de E' étant faiblement fermé), donc elle est plus fine que la topologie initiale, donc identique, ce qui prouve que la topologie initiale est bien minimale parmi les topologies localement convexes séparées sur E. Enfin, on sait que E'^* muni de $\sigma(E'^*,E')$ est isomorphe à un produit topologique de droites (prop. 9), et réciproquement un tel espace satisfait manifestement à 2.

<u>Proposition 12</u>. <u>Soit</u> E <u>un ELC isomorphe à un produit vectoriel topologique de droites</u>. E <u>est complet, tonnelé, c'est un espace</u> $(\mathcal{M})$ (et à fortiori <u>réflexif</u>), <u>dont le dual fort est isomorphe à une somme directe topologique de droites</u> (étudiée dans la prop. 9).

Trivial (un produit d'espaces complets, resp. tonnelés, resp. du type $(\mathcal{M})$, est manifestement complet, resp. ...; et le dual fort d'un produit vectoriel topologique est la somme directe topologique des duals forts). On ignore si l'espace R^I est toujours bornologique (voir exercice 3).

<u>Proposition 13</u>. <u>Soit</u> E <u>un ELC isomorphe à un produit vectoriel-topologique de droites</u>. <u>Soit</u> V <u>un sous-espace vectoriel fermé de</u> E, <u>alors</u> V <u>admet un supplémentaire topologique, et la topologie induite sur</u> V <u>en fait aussi un espace isomorphe à un produit vectoriel topologique de droites</u>.

Considérons en effet l'orthogonal V^o de V dans E' fort, on sait (prop. 10) qu'il admet un supplementaire topologique N, et que V^o et N sont isomorphes à des sommes directes de droites. Par suite, le dual fort E de E' s'identifie au produit des duals forts de V^o et de N, duals isomorphes à des produits vectoriels topologiques de droites; et dans cette identification, V n'est autre que le dual de N, d'où la conclusion.

<u>Corollaire</u>. <u>Tout espace quotient séparé de</u> E <u>est aussi isomorphe à un produit vectoriel topologique de droites</u>.

<u>Exercice 1</u>. Toute application linéaire continue d'un ELC F dans un espace E isomorphe à une somme directe topologique de droites, est un homomorphisme sur un sous-espace fermé. Si cette application est biunivoque (resp. sur) elle admet une application linéaire continue inverse à gauche (respect. à droite). En particulier, si H est un sous-espace vectoriel de F tel que F/H soit isomorphe à une somme directe de droites, alors H admet un supplémentaire topologique. b) Toute application linéaire continue d'un espace E isomorphe à un produit vectoriel topologique de droites, dans un ELC séparé F quelconque, est un homomorphisme sur un sous-espace fermé. Si cette application est biunivoque (resp. sur) elle admet une application linéaire continue inverse à gauche (resp. à droite). En particulier, si H est un sous-espace vectoriel de F, isomorphe à un produit vectoriel topologique

de droites, alors H admet un supplémentaire topologique.

Exercice 2. Soit E un ELC isomorphe à une somme directe topologique de droites, F un ELC isomorphe à un produit vectoriel topqlogique de droites, considérons $H = E + F$: des espaces de ce type sont dits linéairement localement compacts. Montrer que tout sous-espace vectoriel fermé de H est aussi linéairement localement compact, et admet un supplementaire topologique.

Exercice 3. Soit I un ensemble infini d'indices.

a) Considérons R^I et sont dual $R^{(I)}$. Montrer que toute forme linéaire sur R^I, bornée sur les parties bornées, peut se mettre de façon unique sous la forme $x' = y' + z'$, où $y' \in R^{(I)}$, et où z' s'annule sur $R^{(I)} \subset R^I$.

b) Soit z' une forme linéaire sur R^I, bornée sur les parties bornées, et nulle sur le sous-espace $R^{(I)}$. Montrer qu'on peut trouver une partition finie de I en des parties J ayant la propriété suivante: pour toute décomposition de J en réunion de deux ensembles complémentaires J_1 et J_2, la restriction de z' à l'un des deux espaces R^{J_1} ou R^{J_2} est nulle (procéder par l'absurde, en montrant qu'on pourrait trouver autrement une suite infinie $x^{(i)}$ d'éléments de E, à supports disjoints deux à deux, et sur lesquels z' soit non nulle; on pourrait supposer $\langle x^{(i)}, z'\rangle = 1$, ce qui est absurde, car $x^{(i)}$ tend vers 0 au sens de Mackey).

c) Soit z' une forme linéaire sur R^I, bornée sur les parties bornées, nulle sur $R^{(I)}$, et telle que pour toute partie J de I, la restriction de z' à R^J ou à $R^{\complement J}$ soit nulle. Montrer que si z' n'est pas nulle, alors les parties J de I telles que la restriction de z' à R^J ne soit pas nulle forment un <u>ultrafiltre</u> φ tel que l'intersection d'une suite d'ensembles J_i appartenant à φ appartienne encore à φ ("ultrafiltre de Ulam-Mackey"), et qu'on a $\langle x,z'\rangle = \lambda \lim x_i$ pour tout $x = (x_i) \in R^I$ (où λ est une constante). Montrer que réciproquement, pour tout ultrafiltre de Ulam-Mackey φ sur I, la formule précédente (avec $\lambda = 1$) définit une forme linéaire ε_φ sur R^I, bornée sur les parties bornées, nulle sur $R^{(I)}$.

d) Montrer que les formes ε_φ ainsi construites sont linéairement indépendantes, et que, par suite, toute forme linéaire sur R^I bornée sur les parties bornées se met de façon unique sous forme d'une somme d'un élément de $R^{(I)}$ et d'une combinaison linéaire de formes linéaires du type ε_φ.

e) Pour que R^I soit bornologique, il faut et il suffit qu'il n'existe pas d'ultrafiltre de Ulam-Mackey sur I. On dit alors que le cardinal de I est bornologique. Montrer que s'il existe un cardinal non bornologique, alors il existe un plus petit cardinal non bornologique K, et alors un cardinal est bornologique si et seulement si il est strictement inférieur à K.

f) Montrer qu'un nombre cardinal qui est somme d'une famille de cardinaux bornologiques, le cardinal de la famille d'indices étant bornologique, est bornologique (utiliser Chap. 3, Nº 4, exercice 2). Ulam a montré que si α est bornologique, 2^{α} est bornologique; par suite le nombre cardinal K de e), s'il existe, est un cardinal limite.

g) Un nombre cardinal C est dit *strictement inaccessible*, s'il est $> \aleph_0$, s'il n'est pas somme d'une famille de cardinaux strictement inférieurs, la famille ayant une puissance strictemente inférieure à C, et si de plus $\alpha < C$ implique $2^{\alpha} < C$ (ce qui implique que C est un cardinal limite). Le cardinal K, s'il existe (voir e)), est strictement inaccessible. On ignore même s'il existe des cardinaux strictement inaccessibles, et il semble fort plausible que l'on puisse ajouter aux axiomes de la théorie des ensembles la non existence de cardinaux strictement inaccessibles, sans rencontrer de contradiction. Dans un tel système d'axiomes, ou aurait donc le théorème: tout espace R^I est bornologique (donc - voir Chap. 3, Nº 4, exercice - tout produit d'espaces bornologiques est bornologique).

h) Soit z' une forme linéaire sur R^I bornée sur les parties bornées, soit E une partie de R^I dont la puissance est bornologique. Montrer que la restriction de z' à E est continue. Énoncé analogue pour les filtres convergents sur R^I, ayant une base de puissance bornologique.

Dans l'ordre d'idées de I'exercice précédent, voir aussi Bourbaki, Intégration, Chap. IV, § 4, exercice 18 (page 178).

§ 2º - ELC métrisables.

1. Rappels.

Rappelons qu'on appelle espace $(\mathfrak{F})$ un ELC métrisable et complet. Si E est un ELC métrisable, F un sous-espace vectoriel fermé, alors E/F est métrisable, et si E était complet, E/F est complet - Chap. 1, Nº 4, prop. 6 - (ce qui est tout à fait spécial au cas des espaces $(\mathfrak{F})$). Bien entendu, un sous-espace vectoriel fermé d'un espace $(\mathfrak{F})$ est un espace $(\mathfrak{F})$, ainsi que le produit vectoriel-topologique d'une suite d'espaces $(\mathfrak{F})$.

Un espace E du type $(\mathfrak{F})$ est un espace de Baire, d'où découlent en grande partie ses propriétés spéciales. C'est donc un espace tonnelé, i.e. si F est un ELC quelconque, toute partie de L(E,F) bornée pour la convergence simple est équicontinue (théorème de Banach-Steinhaus; en fait, la locale convexité n'a rien à voir ici, voir Chap. 1, Nº 15,th.11). On en tire que si E et F sont deux espaces $(\mathfrak{F})$, alors toute application bilinéaire séparément continue de $E \times F$ dans un ELC G est continue, et tout ensemble d'applications bilinéaires de $E \times F$ dans G borné pour la convergence simple, est équicontinu (Chap. 1, Nº 15, th. 12). Parmi les propriétés faisant intervenir le fait qu'il s'agit d'espaces métrisables complets, il faut encore signaler le théorème du graphe fermé, qui signifie pratiquement que toutes les applications linéaires d'un espace $(\mathfrak{F})$ qu'on rencontrera sont continues, et le théorème des homomorphismes, qui en est une variante com mode (Chap. 1, Nº 14).

Un espace localement convexe métrisable E (complet ou non) est <u>bornologique</u>, en particulier sa topologie est toujours la topologie de Mackey associée $\tau(E,E')$ (Chap. 3, Nº 4, théorème 3). En particulier, si F est un ELC quelconque, les applications linéaires continues ou faiblement continues de E dans F sont les mêmes, de même les homomorphismes ou les homomorphismes faibles de F dans E sont les mêmes (Chapitre 2, Nº 16, prop. 28, corollaire 2 et prop. 29, corollaire 3; noter qu'on se sert du fait que le sous-espace $u(F)$ de E, étant métrisable, a la topologie de Mackey).

Signalons enfin la proposition de topologie générale suivante, qui pourra s'appliquer en particulier aux quotients d'espaces $(\mathfrak{F})$:

<u>Proposition 1</u>. <u>Soit</u> E <u>un espace topologique métrique complet</u>, R <u>une relation d'équivalence séparée et ouverte dans</u> E. <u>Alors toute partie compacte de</u> E/R <u>est contenue dans l'image canonique d'une partie compacte de</u> E, <u>toute suite convergente dans</u> E/R <u>est image canonique d'une suite convergente de</u> E.

<u>Démonstration</u>. Les deux parties de la proposition vont résulter du

<u>Corollaire 1</u>. <u>Sous les conditions de la prop. 1, soit</u> K <u>un espace compact totalement discontinu</u>, u <u>une application continue de</u> K <u>dans</u> E/R. <u>Alors il existe une application continue</u> v <u>de</u> K <u>dans</u> E <u>telle que</u>

$$u = \varphi o v,$$

où φ est l'application canonique de E sur E/R.

La première partie de la proposition en résultera, car toute partie compacte A de E/R peut être considéré comme image d'un compact K totalement discontinu par une application continue de K sur A (on peut prendre par exemple pour K le compactifié de Čech-Stone de A considéré comme ensemble discret, ou aussi - puisque A est métrisable - l'ensemble triadique de Cantor); de même, la deuxième partie de la proposition résultera du lemme, en considérant une suite convergente dans E/R comme image de l'espace compact K formé des points $0, 1, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{n}, \dots$ par une application continue de K dans E/R. - Preuve du corollaire 1: On construit par récurrence une suite croissante de partitions finies

$$V_1, \dots, V_n, \dots$$

de K en des ensembles à la fois ouverts et fermés, et d'applications $U_{n,i} \longrightarrow B_{n,i}$ faisant correspondre, à tout $U_{n,i} \in V_n$, une boule ouverte de rayon $\leq \frac{1}{n}$ dans E, de telle façon que $u(U_{n,i}) \subset \varphi(B_{n,i})$ et que $U_{n+1,i} \subset U_{n,j}$ implique $B_{n+1,i} \subset B_{n,j}$. La possibilité est immédiate, car si la construction est fait jusqu'au rang n, on considère pour tout $U_{n,i} \in V_n$ le recouvrement formé des images réciproques par u des images par φ des boules ouvertes de rayon $< \frac{1}{n+1}$ contenus dans $B_{n,i}$; comme φ est une application ouverte, on obtient un recouvrement ouvert de l'espace compact totalement discontinu $U_{n,i}$, il existe donc un recouvrement fini plus fin défini par une partition de $U_{n,i}$ en des ensembles à la fois ouverts et fermés $U_{n+1,j}$; à chacun de ces ensembles on peut alors faire correspondre une boule ouverte $B_{n+1,j}$ de rayon $\leqslant \frac{1}{n+1}$ dans $B_{n,i}$ telle que $u(U_{n+1,j}) \subset \varphi(B_{n+1,j})$; ceci étant fait pour tous les $U_{n,i} \in V_n$, on obtient le recouvrement $V_{n+1} = (U_{n+1,j})$ cherché ainsi que l'application

$$U_{n+1,j} \longrightarrow B_{n+1,j} .$$

Soit maintenant $x \in K$, soit $U_n(x)$ l'ensemble élément de V_n contenant x, soit $B_n(x)$ la boule dans E associée, on obtient ainsi une suite décroissante de boules dont les rayons tendent vers 0, d'où (E étant complet) un point limite $v(x)$. Comme $\varphi(B_n(x)) \ni u(x)$ pour tout n, on en conclut

$$\varphi(v(x)) = ux.$$

D'autre part, l'oscillation de v dans un ensemble élément de V_n est au plus égale à $\frac{2}{n}$, donc v est continue, c.q.f.d.

Remarquons d'ailleurs que dans le cas où E/R est l'espace quotient d'un espace $(\mathfrak{F})$ par un sous-espace vectoriel fermé F, la proposition 1 est un cas particulier d'un résultat beaucoup plus fort (Chap. 1, Nº 14, exercice 2).

<u>Exercice</u> - Soit E un espace métrisable et compact, R une relation d'équivalence séparée dans E telle que toute suite convergente dans E/R soit l'image canonique d'une suite convergente dans E. Montrer que R est ouverte.

2. Parties bornées d'un ELC métrisable.

Théorème 1. Soit E un ELC métrisable.

1) Pour toute suite (A_i) des parties bornées de E, existe une suite (λ_i) de nombres > 0 telle que $\bigcup_i \lambda_i A_i$ soit borné; ou encore, il existe un disque borné fermé A dans E tel que les A_i soient des parties bornées de l'espace normé E_A.

2) Soit A une partie bornée de E. Alors il existe un disque borné fermé B de E tel que $A \subset B$, et que la topologie et la structure uniforme induite par l'espace normé E_B sur A soit identique à celle induite par E.

Il est immédiat que les deux assertions dans 1) disent la même chose. Soit (p_n) une suite fondamentale de semi-normes dans E, soit $M_i^n = \operatorname{Sup}_{x \in A_i} p_n(x)$, on aura donc, si $x \in \bigcup_i \lambda_i A_i$

$$p_n(x) \leq \operatorname{Sup} \lambda_i M_i^n,$$

il suffit de prendre (λ_i) tel que pour tout n, on ait

$$\operatorname{Sup}_i \lambda_i M_i^n < +\infty,$$

donc que pour tout n, (λ_i) soit majoré par un multiple de la suite $(\frac{1}{M_i^n})_i$. Il suffit de prendre en effet

$$\lambda_i = \operatorname{Inf}\left(\frac{1}{M_i^1}, \ldots, \frac{1}{M_i^i}\right).$$

Pour prouver la deuxième partie, on peut supposer que A est un disque, il suffit alors que E_B induise sur A le même système de voisinages de 0 que E (Chap. 2, Nº 14, lemme), donc que pour tout $\lambda > 0$, existe un indice n tel que

$$A \cap V_n \subset \lambda B$$

(où (V_n) est une suite fondamentale de voisinages de 0 dans E). Or on a $A \subset \bigcap_i \lambda_i V_i$, où (λ_i) est une suite convenable de nombres > 0, soit alors (μ_i) une suite de nombres positifs tels que $\lambda_i/\mu_i \longrightarrow 0$, je dis que $B = \bigcap \mu_i V_i$ satisfait à la question. En effet, on a $A \subset \lambda \mu_i V_i$ pour i assez grand (savoir pour i tel que $\lambda_i \leqslant \lambda \mu_i$), soit alors n tel que V_n soit contenu dans l'intersection des $\lambda \mu_i V_i$ pour les autres indices i, alors on a $A \cap V_n \subset \lambda \mu_i V_i$ pour tout i, i.e. $A \cap V_n \subset \lambda B$. - Réunissant les deux énoncés du théorème, on trouve le

Corollaire 1. *Soit E un ELC métrisable, soit (A_i) une suite de parties bornées de E. Alors il existe un disque borné fermé A dans E tel que les A_i soient des parties bornées de l'espace normé E_A, et que ce dernier y induise même topologie et même structure uniforme que E.*

Corollaire 2. *Soit A une partie précompacte (respect. compacte, resp. faiblement compacte et convexe) de l'ELC métrisable E. Alors il existe un disque borné fermé B dans E tel que A soit aussi une partie pré-*

<u>compacte</u> (resp. <u>compacte</u>, resp. <u>faiblement compacte</u>) <u>de l'espace normé</u> E_B.

Cela résulte en effet trivialement de th. 1,2º dans le cas où A est précompact ou compact. Dans le cas où il est faiblement compact, on utilise le fait que pour une partie <u>convexe</u> A d'un espace localement convexe F ($= E_B$), le fait d'être faiblement compact ne dépend que de la topologie induite par F (lui-même, et non F faible) sur A (Chap. 2, Nº9, exercice 2). - Nous verrons d'ailleurs au Chap. 5 que dans un ELC <u>complet</u>, l'enveloppe convexe fermée d'un faiblement compact est faiblement compacte, de sorte que si E est un espace ($\mathcal{F}$), il est inutile de supposer A convexe dans le corollaire précédent.

<u>Corollaire 3</u>. <u>Soit</u> f <u>une application continue d'un espace localement compact dénombrable à l'infini</u> M <u>dans un ELC métrisable</u> E. <u>Alors il existe un disque borné et fermé</u> A <u>dans</u> E <u>tel que</u> f <u>soit une application continue de</u> M <u>dans l'espace normé</u> E_A.

D'ailleurs, la remarque suivant le corollaire 2 montre que le corollaire 3 reste valable si on y remplace la continuité par la continuité faible.

<u>Exercice 1</u>. Démontrer l'analogue du corollaire 3 précédent pour les fonctions continues nulles à l'infini (inutile de supposer M dénombrable à l'infini). Qu'obtient-on quand M est l'ensemble des entiers naturels, avec la topologie discrète?

Exercice 2. Soit M un espace localement compact muni d'une mesure positive μ, on suppose M réunion d'une suite d'ensembles intégrables. Soit f une application mesurable de M dans un ELC métrisable E. Montrer que f est p. p. égale à une application mesurable de M dans un espace normé E_A, où A est un disque borné fermé dans E.

Exercice 3. Soit donné une suite de suites positives $\lambda^n = (\lambda_i^n)_i$. Soit E un ELC métrisable, (x_i) une suite dans E telle que pour tout $x' \in E'$, les suites

$$(\lambda_i^n \langle x_i, x' \rangle)$$

soient bornées pour tout n. Montrer qu'il existe un disque borné fermé A dans E tel que les x_i appartient à l'espace normé E_A, et que la suite de leurs normes $\| x_i \|_A$ soit telle que les suites $(\lambda_i^n \| x_i \|_A)_i$ soient bornées pour tout n.

Exercice 4. Soit E un ELC séparé. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes:

a) pour toute application linéaire compacte d'un ELC F dans E, la transposée est une application linéaire compacte de E' fort dans F' fort;

b) même énoncé, mais F étant assujetti à être un espace de Banach;

c) pour tout disque compact A dans E, existe un disque borné fermé $B \supset A$ tel que A soit une partie compacte de l'espace normé E_B. Cela implique même que la transposée d'une application linéaire compacte d'un ELC F dans E est une application compacte de E'_c (E' muni de la convergence précompacte) dans F' fort. - Appliquer ce résultat au cas où E est un espace métrisable.

3. Topologie T_c sur le dual.

Soit E un ELC, alors sur les parties équicontinues de E' (qui sont aussi uniformément équicontinues), la topologie T_c de la convergence précompacte est identique à la topologie faible. Donc sur E', la topologie T_c est à priori moins fine que la topologie T_o la plus fine parmi les topologies sur E' (localement convexe ou non) induisant sur les parties équicontinues la topologie faible (voir Chap. 0,Nº 1). On va voir qu'elle lui est identique si E est métrisable (ce qui constitute, avec le théorème de Hahn-Banach, le théorème de Banach-Steinhaus et le théorème des homomorphismes ou du graphe fermé, un des résultats les plus profonds de la théorie, bien que moins souvent employé que les autres):

Théorème 2 (Banach-Dieudonné). Soit E un ELC métrisable. Alors sur E', la topologie de la convergence précompacte est identique à la topologie la plus fine induisant sur les parties équicontinues la topologie faible.

Donnons d'abord les corollaires. Le th. est équivalente au

<u>Corollaire 1</u>. Une partie H de E' est fermée pour la topologie T_c si et seulement si pour toute partie équicontinue faiblement fermée A de E', $A \cap H$ est faiblement fermé. Soit: une partie U de E' est ouverte pour T_c si et seulement si pour toute partie équicontinue A de E', $U \cap A$ est relativement ouvert dans A muni de la topologie faible.

Ou encore:

<u>Corollaire 2</u>. Soit u une application quelconque de E' dans un espace topologique quelconque F. Pour que u soit continue pour la topologie T_c sur E', il faut et il suffit que sa restriction à toute partie équicontinue de E' soit faiblement continue.

Les corollaires 1 et 2 sont p.ex. utiles quand E est un espace métrisable du type $(\mathcal{M})$, car alors la topologie T_c n'est autre que la topologie forte, importante en elle-même. Dans le cas général, l'application la plus importante est le

<u>Corollaire 3</u>. Soit E un espace $(\mathcal{F})$, soit H une partie <u>convexe</u> de E'. Pour que H soit faiblement fermé, il faut et il suffit que son intersection avec toute partie équicontinue faiblement fermée de E' soit faiblement fermée.

En effet, comme le dual de E' pour T_c est E (théorème de Mackey), il revient au même pour une partie <u>convexe</u>

H de E' de dire qu'elle est fermée pour T_c ou faiblement fermée, d'où l'assertion grâce au corollaire 1.

De plus, nous allons même montrer que la topologie T_o la plus fine qui ..., est même identique à la topologie de la convergence uniforme sur les suites de E qui convergent vers 0. D'où

Corollaire 4. Soit E un ELC métrisable. Alors sur E', la topologie de la convergence précompacte, de la convergence compacte, et de la convergence uniforme sur les suites de E tendant vers 0, sont identiques. En d'autres termes, pour toute suite précompacte K de E, existe une suite (x_i) dans E tendant vers 0, telle que K soit contenue dans l'enveloppe disquée fermée de (x_i).

Démonstration du th. 2. Il faut montrer que pour toute partie U de E' ouverte pour la topologie T_o, i.e. telle que l'intersection de $\complement U$ avec toute partie équicontinue faiblement fermée de E' soit faiblement fermée, et tout point $x' \in U$, il existe un voisinage de x' pour la convergence uniforme sur les suites convergentes vers 0, qui soit contenu dans U. On peut évidemment supposer $x = 0$, il faut donc trouver un ensemble K dans E, ensemble des points d'une suite convergente vers 0, tel que $K^o \subset U$. Soit (V_n) une suite fondamentale décroissante de voisinages de 0 dans E, nous allons construire par récurrence une suite $K_o, \ldots, K_n, \ldots$ de parties de E, avec

$$(1)\quad \begin{cases} K_n \subset V_n, \quad \text{pour} \quad n \geq 1, \\ {K'_n}^{o} \cap (V_{n+1})^{o} \subset U, \ \text{pour} \quad n \geq 0 \quad (\text{où} \quad K'_n = \bigcup\limits_{i \leq n} K_i) \end{cases}$$

Alors $K = \bigcup K_n$ satisfera aux conditions voulues (car E' est réunion des polaires des V_n). La construction de K_o est immédiate, car il faut seulement que K_o soit une partie finie dont le polaire ne rencontre par $V_1^o \cap \complement U$, ce qui est possible puisque ce dernier ensemble est faiblement fermé et ne contient pas 0. Pour construire K_{n+1}, nous deveons donc trouver une partie fine $A = K_{n+1}$ de V_{n+1} telle que $(K'_n \cup A)^o$ ne rencontre pas $(V_{n+2})^o \cap \complement U$. Or ce dernier ensemble est faiblement compact, et ces intersections avec les $(K'_n \cup A)^o$ forment une base de filtre formée d'ensembles faiblement fermés dont l'intersection est vide, car un point de l'intersection appartient à $(K'_n \cup V_{n+1})^o = {K'_n}^o \cap (V_{n+1})^o$, qui est contenu dans U d'après l'hypothèse de récurrence. Donc l'une au moins des intersections $(K'_n \cup A)^o \cap (V_{n+2})^o \cap \complement U$ est vide, ce qui achève la démonstration.

<u>Exercice 1</u>. Soit E un ELC localement convexe. Considérons les deux conditions suivantes: a) Tout sous-espace vectoriel de E' dont les intersections avec les parties équicontinues faiblement fermées sont faiblement fermées, est faiblement fermé; b) Toute application linéaire continue de E <u>sur</u> un ELC tonnelé F est un homomorphisme.

1) Montrer que a) implique b), et que si E est ton-

nelé, b) implique a). Application: déduire le théorème des homomorphismes pour espaces $(\mathfrak{F})$ du théorème 2, corollaire 3.

2) Montrer que les propriétés a) et b) sont stables par passage à un quotient par un sous-espace vectoriel fermé. Montrer que a) implique que E soit complet (donc que tout espace quotient de E par un sous-espace vectoriel fermé est complet).

3) En conclure que les propriétés a) et b) sont en défaut quand E est la somme directe topologique d'une suite d'espaces isomorphes à c_o, ou à ℓ^1 (utiliser § 1º, Nº 4, exercice 5). À fortiori, le th. 2 est en défaut pour ces sommes directes.

4) Dans 1) on a vu que le "théorème des homomorphismes" est valable pour une application linéaire continue d'un espace E du type $(\mathfrak{F})$ sur un ELC <u>tonnelé</u> F. Il n'est plus valable si on suppose qui c'est E qui est tonnelé, F du type $(\mathfrak{F})$: soit E un espace normé de codimension 1 dans son complété $\hat{E}$ (donc tonnelé, cf. Chap. 3, Nº 2, exerc. 7, 2º), D une droite supplémentaire de E dans $\hat{E}$, $F = \hat{E}/D$, u l'application linéaire continue biunivoque de E sur F induite par l'application canonique de $\hat{E}$ sur F. u n'est pas un isomorphisme (car E n'est pas complet).

<u>Exercice 2</u>. Soit E un ELC tonnelé, u une application linéaire de E dans un ELC F.

1. Soit H le sous-espace de F' formé des y' telles que $y' \circ u$ soit continue. Prouver que si A est une partie faiblement bornée de F' contenue dans H, alors son a-

dhérence faible est contenue dans H. En conclure que si F satisfait à la condition a. de l'exercice 1, 1º (en particulier si F est un espace $(\mathfrak{F})$), alors H est un sous-espace vectoriel <u>faiblement</u> <u>fermé</u> de F'.

2. Conclure de 1, que, si E est un espace $(\mathfrak{F})$, pour que u soit continue, il suffit que l'on puisse trouver une partie totale dans F' formée de y' telles que $y' \circ u$ soit continue. (Il suffit en effet de vérifier que u est faiblement continue).

3. Soit u une application linéaire d'un ELC tonnelé E dans un espace F du type $(\mathfrak{F})$. Montrer que pour que u soit continue, il suffit que l'on puisse trouver sur F une topologie localement convexe <u>séparée</u>, moins fine que celle donnée sur F, qui rende u continue. (Conséquence immédiate de 2.).

4. E étant suposé quelconque, pour que u soit continue, il suffit que tout $y' \in F'$ soit faiblement adhérent à un ensemble faiblement borné de F' formé d'éléments y' tels que $y' \circ u$ soit continu.

<u>Exercice 3</u>. Soit E un espace $(\mathfrak{F})$, $(x_i)_{i \in I}$ une famille d'éléments de E, H une partie totale de H' telles que pour toute famille $\lambda = (\lambda_i)$ de scalaires tous égaux à +1 ou -1, on puisse trouver un élément $x = u(\lambda)$ dans E (évidemment unique), tel que $\langle x,x'\rangle = \sum \lambda_i \langle x_i,x'\rangle$ pour tout $x' \in H$. Prouver que la suite (x_i) est sommable dans E. (Soit F le sous-espace de $\ell^\infty(I)$ formé des combinaisons linéaires des $\lambda = (\lambda_i)$ précédents, u s'étend en une ap

plication linéaire u de F dans E; prouver que u est continue, en utilisant l'exercice 2, 3º, grâce au fait que F est tonnelé, établi dans Chap. 3, Nº 3, exercice 7. u se prolonge donc par continuité à $\ell^\infty(I)$ achever à l'aide de Chap. 3, Nº 18, exercice 3).

4. Caractérisation des homomorphismes.

Théorème 3. Soient E et F deux espaces $(\mathcal{F})$, u une application linéaire continue de E dans F. Les six conditions suivantes sont équivalentes:

1) u est un homomorphisme;

2) u est un homomorphisme faible;

3) u(E) est fermé;

4) u' est un homomorphisme faible;

5) u'(F') est faiblement fermé;

6) u'(F') est fortement fermé.

Il suffit, pour que ces conditions soient vérifiées, que l'on ait

7) u' est un homomorphisme fort.

Cette condition est aussi nécessaire si E et F sont des espaces de Banach.

Démonstration. 1) équivaut à 2), car la topologie de u(E) est la topologie de Mackey (voir Nº 1, troisième alinéa). 1) implique 3), car tout espace quotient de E est complet, d'autre part 3) implique 1), ce qui n'est autre que le théorème des homomorphismes (Chap. 1, Nº 14). De toutes façons, 3) équivaut à 4), et 2) équivaut à 5) (Chap. 2, Nº 16, prop. 27). Donc les conditions 1) à 5) sont équivalentes, et 5) implique 6) évidemment. Montrons que 6) implique aussi 5), cela sera contenu dans le résultat plus fort:

<u>Lemme</u>. <u>Supposons que pour toute partie équicontinue disquée faiblement fermée</u> A <u>de</u> E', $u'(F')\cap A$ <u>soit fermé dans l'espace de Banach</u> E'_A. <u>Alors</u> $u'(F')$ <u>est même faiblement fermé</u> (i.e. u <u>est un homomorphisme</u>).

(Noter que l'hypothèse du lemme signifie que $u'(F')$ est fermé par rapport aux <u>suites</u> qui convergent vers 0 <u>au sens de Mackey</u>). Appliquant le th. 2, du Nº 3, il suffit de montrer que pour tout A, $A\cap u'(F') = B$ est <u>faiblement</u> fermé, pour ceci il suffit de montrer que cet ensemble est <u>faiblement compact</u>. Or, B étant un disque <u>fermé</u> de l'espace de Banach E'_A, $E'_B = (E'_A)_B$ sera un espace de Banach, donc un espace de Baire. D'autre part F' est réunion d'une suite (C_n) de disques faiblement compacts. Alors $B_n = A\cap u'(C_n)$ est un disque de E'_B qui est faiblement compact dans E', et à fortiori fermé dans E'_B, et la réunion des nB_n est E'_B. Il en résulte que l'un des B_n est voisinage de 0 dans E'_B, donc on aura, en multipliant au besoin C_n par un scalaire,

$$B\subset B_n = u'(C_n)\cap A,$$

d'où $B = B_n$. Or B_n est faiblement compact, il en est de même de B, c.q.f.d. (Ce lemme est dû à G. Köthe).

Ainsi, les conditions 1) à 6) sont équivalentes. Prouvons que 7) implique 6). En effet, soit G l'adhérence de u(E), on peut écrire $u = w\circ v$, ou v est l'application de

E dans G déduite de u, et w l'application identique de G dans F. On aura alors $u' = v'w'$, et u' étant un homomorphisme fort, il en sera de même de v': car si U est un voisinage fort de 0 dans G', comme w' est une application sur, on aura $U = w'(V)$, où $V = w'^{-1}(U)$ est un voisinage fort de 0 dans F', d'où $v'(U) = u'(V)$, et comme par hypothèse $u'(V)$ est un voisinage fort de 0 dans $u'(F')$, $v'(U)$ sera un voisinage fort de 0 dans $v'(G') = u'(F')$, ce qui exprime que v' est un homomorphisme fort. Comme v' est biunivoque, v' sera donc un isomorphisme fort de G' dans E', donc, G' étant complet, $u'(G')$ sera un sous-espace fortement complet, donc fortement fermé, de E', c.q.f.d.

Enfin, on a vu déjà (Chap. 2, Nº 17, prop. 32, corollaire 2) que si E et F sont des espaces de Banach, 1) implique 7), ce qui achève la démonstration du théorème 3. De plus, nous pouvons énoncer maintenant la réciproque du résultat rappelé à l'instant:

> Corollaire 1. Soient E et F deux espaces de Banach, u une application linéaire continue de E dans F. Pour que u soit un homomorphisme (resp. un homomorphisme métrique) de E dans F, il faut et il suffit que u' soit un homomorphisme (resp. un homomorphisme métrique) de l'espace de Banach F' dans l'espace de Banach E'.

Le cas d'un homomorphisme résulte de l'équivalence des conditions 1) et 7) du théorème 3. Il reste à montrer que si u' est un homomorphisme métrique, il en est de même de u. Or u est alors un homomorphisme, et grâce à Chap. 2, Nº 17, prop. 32, pour prouver que u est un homomorphisme <u>métrique</u>, on peut se borner au cas où u est déjà un <u>isomorphisme</u> (topologique) <u>sur</u>. Mais alors c'est trivial car la norme d'un espace normé est connue quand on connait la boule unité de son dual. Signalons les cas particuliers:

<u>Corollaire 2. Soient</u> E <u>et</u> F <u>deux espaces de Banach</u>, u <u>une application linéaire continue de</u> E <u>dans</u> F. <u>Pour que</u> u <u>soit un isomorphisme</u> (resp. <u>un isomorphisme métrique</u>, resp. <u>un homomorphisme sur</u>, resp. <u>un homomorphisme métrique sur</u>), <u>il faut et il suffit que</u> u' <u>soit un homomorphisme sur un sous-espace faiblement dense de</u> E' (resp. <u>un homomorphisme sur un sous-espace faiblement dense de</u> E', resp. <u>un isomorphisme de</u> F' <u>dans</u> E', resp. <u>un isomorphisme métrique de</u> F' <u>dans</u> E').

Enfin, utilisant la prop. 1 du Nº 1, on obtient (indépendamment du th. 3):

<u>Corollaire 3. Soient</u> E <u>et</u> F <u>deux espaces</u> $(\mathfrak{F})$, u <u>une application linéaire continue de</u> E <u>dans</u> F. <u>Pour que</u> u <u>soit un homomorphisme</u>, <u>il faut et il suffit que pour toute suite</u> (y_i) <u>dans</u> $u(E)$ <u>qui tend vers</u> 0, <u>il existe une suite</u> (x_i) <u>dans</u> E <u>tendant vers</u> 0, <u>telle que</u> $y_i = ux_i$ <u>pour tout</u> i.

On fera attention qu'en général, si u est un homomorphisme de E dans F (E et F du type $(\mathfrak{F})$), il n'est pas vrai que u' soit un homomorphisme fort. De façon précise, ceci peut être en défaut si u est un isomorphisme de E dans F, ou un homomorphisme de E sur F. En d'autres termes (et comme nous l'avons déjà signalé au Chap.2, Nº 15), le dual fort d'un sous-espace fermé d'un espace E du type $(\mathcal{F})$ peut ne pas s'identifier à un quotient du dual fort de E, et le dual fort d'un espace quotient de E peut ne pas s'identifier à un sous-espace du dual fort de E (si on veut que les topologies soient respectées). Rappelons cependant que si u est un isomorphisme d'un ELC <u>réflexif</u> dans un ELC F quelconque, alors sa transposée est un homomorphisme fort (Chap.2,Nº 15, prop. 21, 2º).

<u>Exercice 1</u>. Soit u un homomorphisme d'un espace de Banach E dans un ELC F. Montrer que u' est un homomorphisme fort.

<u>Exercice 2</u>. Soit P l'ensemble des indices de dérivation relatifs à R^n. Montrer que l'application linéaire

$$f \longrightarrow (D^p f(0))_{p \in P}$$

de $\mathcal{E}(R^n)$ dans R^P est un <u>homomorphisme</u> du premier <u>sur</u> le second (montrer que u'(F') est le sous-espace <u>faiblement fermé</u> de E' formé des distributions de support $\{0\}$). Montrer que le noyau de cet homomorphisme n'a pas de supplémentaire topologique (si v était un inverse à droite de l'application envisagée u, montrer qu'on pourrait supposer que

$$v(y) \in \mathcal{E}(R^n)$$

a son support dans un compact K fixe; en conclure une contradiction, en notant que l'espace des $f \in \mathcal{E}(R^n)$ ayant leur support dans K admet une vraie norme continue, tandis qu'il n'en est pas ainsi de R^P).

§ 3º - Espaces $(\mathfrak{D}\mathfrak{F})$.

1. Généralités.

Définition 1. Un espace localement convexe H est dit espace $(\mathfrak{D}\mathfrak{F})$ s'il satisfait aux deux conditions suivantes:

1) H admet une suite fondamentale de parties bornées;

2) Si (U_i) est une suite de voisinages disqués et fermés de 0 dont l'intersection U est bornivore, alors U est un voisinage de 0.

Notons que par polarité, la condition 2) équivaut à:

2') Toute partie bornée M du dual fort H' de H, réunion d'une suite de parties équicontinues, est équicontinue.

La condition est vérifiée d'elle-même si H est quasi-tonnelé (donc alors H est du type $(\mathfrak{D}\mathfrak{F})$ s'il admet une suite fondamentale de bornés), dans le cas général, elle servira à remplacer le fait que l'espace soit quasi-tonnelé. Un espace normé satisfait à la condition 1), et est quasi-tonnelé, c'est donc un espace $(\mathfrak{D}\mathfrak{F})$. D'autres exemples seront vus au Nº 4, le plus important pour l'instant (et qui justifie l'introduction des $(\mathfrak{DF})$ est donné par le

<u>Théorème 1. Le dual fort</u> E' <u>d'un ELC métrisable</u> E <u>est du type</u> $(\mathfrak{DF})$.

En effet, les parties bornées de E' sont ses parties équicontinues, elles admettent donc bien une suite fondamentale (car E admet une suite fondamentale de voisinages de 0). Reste à vérifier la condition 2; pour ceci, on note qu'un système fondamental de voisinages de 0 dans E' est formé des disques <u>faiblement</u> fermés et équilibrés (qui sont exactement les polaires des bornés de E), il faut trouver un tel V contenu dans U. Soit (A_i) une suite fondamentale de disques bornés de E', qu'on peut supposer <u>faiblement compacts</u>, on construit par récurrence une suite de voisinages disqués <u>faiblement</u> fermés V_i de 0 et de scalaires $\lambda_i > 0$, tels que, si la construction est faite jusqu'au rang n, on ait

$$\lambda_i A_i \subset \frac{1}{2} U; \qquad \lambda_i A_i \subset V_j$$

$$V_i \subset U_i \quad (\text{pour } i, j \leqslant n).$$

Alors il suffira de poser $V = \bigcap_i V_i$. Reste à montrer la possibilité de la récurrence. On peut trouver λ_{n+1} assez petit pour que $\lambda_{n+1} A_{n+1} \subset V_i$ pour $i = 1, \ldots, n$ et $\lambda_{n+1} A_{n+1} \subset \frac{1}{2} U$, alors $\Gamma_{i=1}^{n+1}(\lambda_i A_i)$ est un disque <u>faiblement compact</u> contenu dans $\frac{1}{2} U$. Soit alors W un voisinage disqué <u>faiblement fermé</u> de 0 contenu dans $\frac{1}{2} U_{n+1}$, alors $V_{n+1} = A + W$ est un disque <u>faiblement fermé</u>, contenu dans

$\frac{1}{2}U + \frac{1}{2}U_{n+1}$, donc dans U_{n+1} puisque ce dernier est un disque, et contenant A donc les $\lambda_i A_i$ pour $i = 1,\ldots,n+1$. Cela achève la démonstration.

<u>Proposition 1</u>. <u>Soit</u> H <u>un espace</u> ($\mathfrak{DF}$), E <u>un ELC quelconque</u>. <u>Alors toute partie bornée de</u> $L_b(H,E)$, <u>réunion d'une suite de parties équicontinues, est équicontinue</u>.

Cela résulte aussitôt de la condition 2'. de la définition 1, compte tenu du fait évident qu'une partie M de $L_b(H,E)$ est bornée (resp. équicontinue) si et seulement si pour toute partie équicontinue A de E', l'ensemble $M'(A)$ réunion des $u'(A)$, quand u parcourt M, soit une partie bornée (resp. équicontinue) du dual fort de H.

<u>Corollaire 1</u>. <u>Toute suite bornée dans</u> $L_b(H,E)$ <u>est équicontinue, donc aussi toute partie</u> M, <u>dans laquelle existe une partie dénombrable dense</u> (il suffit qu'elle soit dense pour la convergence simple).

En particulier:

<u>Corollaire 2</u>. <u>Supposons</u> H <u>espace</u> ($\mathfrak{DF}$) <u>complet, et soit</u> (u_i) <u>une suite d'applications linéaires continues de</u> H <u>dans</u> E (supposé séparé), <u>convergeant en chaque point vers une limite</u> $u(x)$. <u>Alors</u> (u_i) <u>est une suite équicontinue, donc</u> u <u>est une application linéaire continue de</u> H <u>dans</u> E, <u>et</u> u_i <u>tend vers</u> u <u>uniformément sur tout compact</u>.

En effet, H étant complet et (u_i) borné pour la convergence simple, est aussi borné pour la convergence bornée, donc équicontinu (corollaire 1).

Corollaire 3. Soit H un espace $(\mathfrak{DF})$, E un espace $(\mathfrak{F})$, alors $L_b(H,E)$ est un espace $(\mathfrak{F})$.

En effet, H admettant une suite fondamentale de parties bornées, et E étant métrisable, $L_b(H,E)$ est métrisable. Pour vérifier qu'il est complet, il suffit de voir que toute suite de Cauchy converge; il suffit pour cela de vérifier qu'elle converge simplement, ce qui résulte du corollaire 2 (voir aussi Nº 5, th. 6, corollaire 1, pour un résultat plus général et moins immédiat). En particulier:

Corollaire 4. Le dual fort d'un espace $(\mathfrak{DF})$ est du type $(\mathfrak{F})$.

Compte tenu du th. 1, on voit donc que le bidual d'un espace métrisable E est un espace $(\mathfrak{F})$ (noter que E étant quasi-tonnelé, la topologie naturelle de son bidual- convergence uniforme sur les parties équicontinues - est identique à la topologie du dual fort de E' fort).

Exercice 1. Soit u une application linéaire faiblement continue d'un espace $(\mathfrak{DF})$ H dans un ELC séparable, montrer que u est continue (procéder par transposition, en remarquant que les parties équicontinues de E' sont faiblement séparables).

Exercice 2. Soit E un espace de Banach réflexif non séparable, soit H l'espace E muni de la topologie de la convergence uniforme sur les parties bornées séparables de E'. Montrer que E est un espace $(\mathfrak{DF})$ réflexif dont la topologie est distincte de la topologie de Mackey. Montrer que le résultat du exercice 1 est en défaut si on n'y suppose pas E séparable.

<u>Exercice 3</u>. Soit E un ELC métrisable, montrer que toute partie bornée et faiblement bornée de E" est contenue dans l'adhérence faible d'une partie bornée de E. En particulier, toute partie bornée séparable du complété de E est contenue dans l'adhérence d'une partie bornée de E.

<u>Exercice 4</u>. Soit E un ELC métrisable, $\mathfrak{S}$ un ensemble de parties bornées de E tel que toute partie bornée de E qui est réunion d'une suite de parties appartenant à $\mathfrak{S}$, appartienne à $\mathfrak{S}$. Montrer que E', muni de la $\mathfrak{S}$-convergence, est un espace $(\mathfrak{DF})$. Application: le bidual d'un espace $(\mathfrak{DF})$ H, muni de sa topologie naturelle (convergence équicontinue) est un espace $(\mathfrak{DF})$.

2. <u>Applications bilinéaires du produit de deux espaces $(\mathfrak{DF})$</u>.

<u>Proposition 2. Soit H un espace $(\mathfrak{DF})$, (U_i) une suite de voisinages de 0 dans H. Il existe un voisinage U de 0 qui est absorbé par tout U_i</u> (i.e. pour tout U_i, un homothétique convenable de U_i contient U).

Par polarité, cela signifie que pour toute suite de parties équicontinues A_i de H', existe une suite de $\lambda_i > 0$ telle que $\bigcup \lambda_i A_i$ soit encore équicontinu. Or, H' étant métrisable, et les A_i bornés, on peut trouver les λ_i de sorte que $\bigcup \lambda_i A_i$ soit borné (§1, Nº 2, th. 1) et alors, cet ensemble sera même équicontinu en vertu de la condition 2') de la définition 1.

<u>Corollaire 1</u>. <u>Toute application linéaire continue d'un espace</u> H <u>du type</u> $(\mathfrak{D}\mathfrak{F})$ <u>dans un ELC métrisable</u> E <u>est bornée</u> (i.e. transforme un voisinage convenable de 0 en une partie bornée). <u>Tout ensemble équicontinu d'applications linéaires de</u> H <u>dans</u> E <u>est équiborné</u> (i.e. il existe un voisinage U de 0 dans H tel que

$$M(U) = \bigcup_{u \in M} u(U)$$

soit une partie bornée de E).

Il suffit de prouver la deuxième assertion. Soit (V_n) une suite fondamentale de voisinages de 0 dans E, alors pour tout n, $M^{-1}(V_n) = \bigcap_{u \in M} u^{-1}(V_n)$ est un voisinage U_n de 0 dans H. Si U est un voisinage de 0 dans H absorbé par tous les U_n, alors $M(U)$ est absorbé par tous les V_n, i.e. est borné. - Dans le même ordre d'idées, signalons:

<u>Corollaire 2</u>. <u>Soit</u> E <u>un espace</u> $(\mathfrak{F})$, H <u>un espace</u> $(\mathfrak{D}\mathfrak{F})$. <u>Toute application linéaire continue de</u> E <u>dans</u> H <u>est bornée, tout ensemble borné d'applications liné-</u>

<u>aires continues de</u> E <u>dans</u> H <u>est équiborné</u>.

Il suffit en effet d'interpréter les applications linéaires continues de E dans H comme des formes bilinéaires sur E H' (produit de deux espaces ($\mathfrak{F}$)), et d'appliquer Chap. 1, Nº 15, th. 12.

<u>Théorème 2</u>. Soient H_1 et H_2 deux espaces ($\mathfrak{D}\mathfrak{F}$), soit E un ELC quelconque, u une application bilinéaire de $H_1 \times H_2$ dans E. Pour que u soit continue, il faut et il suffit qu'elle soit hypocontinue (Chap. 3, Nº 5, définition). Plus généralement, pour qu'un ensemble M d'applications bilinéaires de $H_1 \times H_2$ soit équicontinu, il faut et il suffit qu'il soit équi-hypocontinu.

Comme M est équicontinu (resp. équi-hypocontinu) si et seulement si pour toute partie équicontinue A de E', l'ensemble M'(A) des <u>formes</u> bilinéaires $\langle u(x,y),z'\rangle$ sur $H_1 \times H_2$, quand u parcourt M et z' parcourt A, est équicontinu (resp. équi-hypocontinu) - vérification triviale; voir Chap. 3, Nº 5, exercice 1 - on est ramené au cas où E est le corps des scalaires. Mais alors M s'identifie à un ensemble <u>équicontinu</u> d'applications linéaires de H_1 dans le dual fort H_2' de H_2 (équi-hypocontinuité en H_2), et comme H_2' est un espace ($\mathfrak{F}$), il existe un voisinage U de 0 dans H_1 tel que M(U) soit une partie <u>bornée</u> de H_2' (prop. 2, corollaire 1). Mais H_1 est réunion d'une suite de parties bornées, donc U est aussi réunion d'une suite de parties bornées A_i, d'où $M(U) = \bigcup_i M(A_i)$. Les $M(A_i)$ sont des parties <u>équicon-</u>

tinues de H_2' (équi-hypocontinuité en H_1), donc $M(U)$ est une partie bornée de H_2', réunion d'une suite de parties équicontinues, donc équicontinu. Cela exprime que M est un ensemble équicontinu de formes bilinéaires.

Corollaire 1. Soient H_1 et H_2 deux espaces $(\mathfrak{DF})$ tonnelés, soit E un ELC quelconque, u une application bilinéaire u séparément continue de $H_1 \times H_2$ dans E. Alors u est continue. Plus généralement, tout ensemble M d'applications bilinéaires séparément continues de $H_1 \times H_2$ dans E, borné pour la convergence simple, est équicontinu.

En effet, dans le cas d'espaces H_1 et H_2 tonnelés, l'hypothèse sur M implique déjà l'équi-hypocontinuité (Chap. 3, Nº 5, prop. 9, corol. 1).

Corollaire 2. Soient E_1 et E_2 deux ELC métrisables, E un ELC quelconque, u une application bilinéaire de $E_1' \times E_2'$ dans E, séparément faiblement continue. Alors u est continue pour le produit des topologies fortes. Plus généralement, soit M un ensemble d'applications bilinéaires faiblement séparément continues de $E_1' \times E_2'$ dans E, borné pour la convergence simple, alors M est équicontinu pour le produit de topologies fortes.

En effet, on est ramené aussitôt au cas où E est le corps des scalaires. L'hypothèse sur M implique que M est borné pour la convergence bibornée (E_1' et E_2' étant for tement complets), i.e. que pour toute partie bornée A de E_1', $M(A)$ est une partie bornée de E_2, donc une partie équicontinue du dual de E_2' fort. Cela exprime l'équi-hypocontinuité de M en E_1' fort; on voit de même que M est équi-hypocontinu en E_2' fort, donc d'après le th. 2, M est équicontinu pour le produit des topologies fortes (E_1' et E_2' étant en effet des espaces $(\mathfrak{D}\mathfrak{F})$ en vertu de th. 1).

Proposition 3. *Soient H_1 et H_2 deux espaces $(\mathfrak{D}\mathfrak{F})$ E un ELC quelconque, M une partie de l'espace*

$$B_b(H_1,H_2;E)$$

des applications bilinéaires continues de $H_1 \times H_2$ dans E, muni de la convergence bibornée. Si M est borné et réunion d'une suite de parties équicontinues, alors M est équicontinu.

On est ramené comme toujours au cas où E est le corps des scalaires. M s'identifie alors à un ensemble borné dans $L_b(H_1,H_2')$ (où H_2' est muni de la topologie forte), et c'est alors encore la réunion d'une suite de parties équicontinues, donc une partie équicontinue de $L_b(H_1,H_2')$ (prop. 1). De même, M définit un ensemble équicontinu d'applications linéaires de H_2 dans H_1'. A fortiori, M est équi-hypocontinu en tant qu'ensemble de formes bilinéaires, donc aussi équicontinu en vertu du th. 2. - On laisse au lecteur le soin d'énoncer les corollaires analogues aux corollaires de la proposition 1.

Exercice 1. Etendre les résultats précédents aux applications multilinéaires de produits d'espaces $(\mathcal{DF})$.

Exercice 2. Soit E un ELC non quasi-tonnelé. Montrer qu'il existe un espace normé F (qu'on peut supposer complet si le dual fort de E est supposé complet), et une forme bilinéaire séparément continue sur $E \times F$ qui n'est pas continue (prendre dans E' un disque fortement borné et fermé A non équicontinu, et poser $F = E_A$). En conclure que dans le corollaire 1 du th. 2, on ne peut pas se borner à supposer que H_1 ou H_2 est tonnelé.

Exercice 3. Un ELC qui est à la fois métrisable et du type $(\mathcal{DF})$, est normable (appliquer prop. 2, corol. 1).

3. Propriétés de stabilité.

Proposition 4. *Soit E un ELC, F un sous-espace vectoriel.*

1. *Si F est un espace $(\mathcal{DF})$, alors son dual fort s'identifie au quotient du dual fort E' de E par l'orthogonal F^o de F.*

2. *Si E est un espace $(\mathcal{DF})$, alors E/F est un espace $(\mathcal{DF})$, et son dual fort s'identifie au sous-espace F^o du dual fort E' de E.*

Dans 1., il faut montrer que l'application naturelle $F'_b \longrightarrow E'_b/F^o$ est continue, or F'_b est métrisable donc bornologique, il suffit donc de vérifier que ses suites convergentes vers zéro sont transformées en suites bornées. Or, F étant $(\mathfrak{DF})$, une suite fortement bornée du dual est équicontinue, donc provient d'une suite équicontinue (et à fortiori fortement bornée) de E', dont l'image dans E'_b/F est donc bornée. - On montre de même dans 2. que l'application naturelle de F^o (muni de la topologie métrisable induite par E'_b) dans le dual fort de E/F transforme suites convergentes vers 0 en des suites bornées, et est donc continue, donc c'est un isomorphisme. Il revient au même de dire que toute partie bornée de E/F est contenue dans l'adhérence de l'image canonique d'une partie bornée de E, d'où aussitôt l'existence d'une suite fondamentale de bornés dans E/F (car il y a une dans l'espace $(\mathfrak{DF})$ E). Enfin, on vérifie trivialement la deuxième condition sur les espaces $(\mathfrak{DF})$ dans E/F, grâce au fait qu'elle est vérifiée dans E. Cela achève la démonstration.

Corollaire 1. Soit E un ELC, F un sous-espace vectoriel $(\mathfrak{DF})$, alors toute partie bornée de l'adhérence de F est contenue dans l'adhérence d'une partie bornée de F.

En effet, on peut supposer F dense dans E, alors les duals de E et F s'identifient algèbriquement, et la prop. 4, 1. dit que cette identification respecte les topologies, ce qui n'est autre que le corollaire. - En particulier:

Corollaire 2. Soit F un espace $(\mathfrak{DF})$. Pour que F soit complet, il faut et il suffit qu'il soit quasi-complet. En particulier, si F est réflexif, il est complet.

Signalons qu'un sous-espace vectoriel fermé d'un espace $(\mathfrak{DF})$ (même du type $(\mathcal{M})$) n'est pas toujours du type $(\mathfrak{DF})$. Cependant, on vérifie trivialement que le produit d'un nombre <u>fini</u> d'espaces $(\mathfrak{DF})$ est une espace $(\mathfrak{DF})$. Si E est un espace $(\mathfrak{DF})$, son dual fort E' est un espace $(\mathfrak{F})$, donc son bidual muni de la topologie du dual fort de E' est $(\mathfrak{DF})$ (théorème 1); E" est encore un espace $(\mathfrak{DF})$ pour sa topologie "naturelle" (Nº 1, exercice 4). Enfin, on a la

<u>Proposition 5. Soit E un ELC limite inductive d'une suite d'espaces $(\mathfrak{DF})$ E_i par des applications linéaires u_i, telles que la réunion des images des E_i engendre E. Alors E est un espace $(\mathfrak{DF})$, la topologie forte de son dual est la moins fine de celles qui rendent continues les applications transposées u_i' de E' dans les duals forts E_i', les parties bornées de E sont celles contenues dans l'adhérence de la somme d'un nombre fini d'images par les u_i de parties bornées des E_i.</u>

Les deux dernières affirmations disent la même chose, et il faut seulement vérifier que l'application identique de E', muni de la topologie T la moins fine rendant continues les u_i', dans E' fort, est continue. Comme T est métrisable, il suffit encore de vérifier qu'une suite qui converge vers 0 pour T est fortement bornée, or elle est même équicontinue, car son image par toute u_i' est une suite fortement bornée, donc équicontinue de E_i'. En même temps est prouvé que E admet une <u>suite</u> fondamentale de parties bornées. Enfin, la deuxième condition sur les espaces $(\mathfrak{DF})$ est vérifiée trivialement à partir du fait qu'elle est valable dans chaque E_i'. - On pouvait aussi prouver la prop. 5 pour les sommes directes topologiques d'une suite d'espaces $(\mathcal{DF})$, ce qui donne le résultat voulu en conjuguant avec prop. 4, 2º.

<u>Corollaire 1</u>. <u>Si les</u> E_i <u>sont les espaces</u> $(\mathcal{DF})$ <u>réflexifs</u> (resp. <u>du type</u> $(\mathcal{M})$) <u>et</u> E <u>séparé</u>, <u>alors</u> E <u>est réflexif</u> (resp. <u>du type</u> $(\mathcal{M})$).

En effet, on vérifie aussitôt que ses parties bornées sont alors relativement compactes (resp. faiblement relativement compactes).

<u>Corollaire 2</u>. <u>Soit</u> (E_i) <u>une suite d'ELC</u>, <u>soit pour tout</u> i u_i <u>une application linéaire de</u> E_i <u>dans un même espace vectoriel</u> E, <u>et</u> v_i <u>une application linéaire de</u> E_i <u>dans</u> E_{i+1}, <u>telles que</u> $u_i = u_{i+1}v_i$. <u>Supposons</u> E <u>identique à la réunion des images des</u> E_i, <u>et munissons le de la topologie limite inductive</u>. <u>Si les applications</u> v_i <u>sont bornées</u>, <u>alors</u> E <u>est un espace</u> $(\mathcal{DF})$ <u>quasi-tonnelé et bornologique</u>; <u>si les applications</u> v_i <u>sont même faiblement compactes</u> (resp. <u>compactes</u>) <u>et</u> E <u>séparé</u>, <u>alors</u> E <u>est réflexif</u> (resp. <u>du type</u> $(\mathcal{M})$), <u>tonnelé et bornologique</u>.

Soit, en effet, pour tout i, U_i un voisinage disqué de 0 dans E_i dont l'image par v_i est borné, soit F_i l'espace E_i muni de la semi-norme jauge de U_i, on vérifie trivialement que la topologie de E est aussi la topologie limite inductive des espaces semi-normés F_i par les u_i. C'est donc un espace $(\mathcal{DF})$, quasi-tonnelé et bornologique puisque les F_i sont quasi-tonnelés et bornologiques, et de plus toute partie bornée de E est contenue dans l'adhérence de de l'homothétique d'un ensemble $u_i(U_i)$ (inutile de prendre ici des sommes finies, car on a déjà un système transitif). Or $u_i(U_i) = u_{i+1}(A_{i+1})$, où $A_{i+1} = v_i(U_i)$. Si donc les v_i sont compacts (resp. faiblement compacts), i.e. si on peut choisir les U_i de façon que les A_{i+1} soient relativement compacts (resp. relativement faiblement compacts), et si E est séparé, alors les $u_{i+1}(A_{i+1})$ seront des parties relativement compactes (resp. faiblement relativement compactes) de E, qui sera par suite du type $(\mathcal{M})$ (resp. réflexif). A fortiori il sera complet (prop. 4, corollaire 2), donc aussi tonnelé puisqu'il est quasi-tonnelé.

<u>Exercice</u> <u>1</u>. Dans les hypothèses de la prop. 5, corollaire 2 (les v_i applications <u>bornées</u>), montrer que si les E_i sont quasi-complets, ou les v_i faiblement compactes, alors E est un espace $(\mathcal{L}\mathfrak{F})$ (donc <u>tonnelé</u>).

<u>Exercice</u> <u>2</u>. Soit E un espace $(\mathfrak{D}\mathfrak{F})$. Montrer que son complété est $(\mathfrak{D}\mathfrak{F})$. Pour que E soit quasi-tonnelé, il faut et il suffit que son complété soit tonnelé.

<u>Exercice</u> <u>3</u>. Montrer que les espaces $(\mathfrak{D}\mathfrak{F})$ <u>bornologiques</u> sont exactement les limites inductives d'une suite d'espaces normés dont les images engendrent l'espace. - Pour qu'un espace $(\mathfrak{D}\mathfrak{F})$ complet soit bornologique, il faut et il suffit que ce soit un espace $(\mathcal{L}\mathfrak{F})$.

4. Exemples.

a) Comme les duals forts d'espaces $(\mathfrak{F})$ sont du type $(\mathfrak{D}\mathfrak{F})$, les espaces de distributions $\mathcal{E}'$, , $\mathfrak{D}'_{L^p}$, etc. (voir le livre de Schwartz pour la définition) sont des espaces $(\mathfrak{D}\mathfrak{F})$.

Les autres espaces $(\mathfrak{D}\mathfrak{F})$ importants se définissent le plus souvent comme des limites inductives:

b) Soit K un compact de C^n, soit $H(K)$ l'espace des fonctions holomorphes définies au voisinage de K, avec la topologie limite inductive des espaces $H(U)$, où U parcourt les voisinages ouverts de K (§ 1, Nº 2, exemple f). Ici il suffit de fait parcourir à U une suite fondamentale (U_n) de voisinages de K, et on peut supposer U_{n+1} relativement compact dans U_n. Alors l'application canonique v_n de $H(U_{n+1})$ dans $H(U_n)$ est compacte (th. de Montel), donc on est sous les conditions de prop. 5, corollaire 2: $H(K)$ est un espace $(\mathfrak{D}\mathfrak{F})$ complet, tonnelé, bornologique, du type $(\mathcal{M})$.

c) Soit (φ_n) une suite croissante de fonctions continues positives sur un espace localement compact M, soit pour tout n, E_n l'espace des fonctions continues f sur M majorées en module par un multiple de φ_n, muni de la norme naturelle faisant correspondre à f le plus petit nombre m tel que $|f| \leqslant m\,\varphi_n$, qui en fait un espace de Banach (vérification immédiate). Alors l'espace E des fonctions continues sur M qui sont majorées par un multiple d'un des φ_n au moins est la réunion de la suite croissante des E_n, et se mu nira de la topologie limite inductive correspondante, qui en fait donc un espace $(\mathfrak{DF})$ (prop. 5) bornologique et tonnelé. Si p. ex. M est réunion d'une suite de compacts M_n, et si on prend une suite croissante de fonctions continues positives et à support compact φ_n, telles que φ_n soit identique à 1 sur K_n, on obtient pour E l'espace des fonctions continues à support compact sur M (§ 1, Nº 2, exemple d). Si $M = R^p$, et si $\varphi_n = (1 + r^2)^n$ (r désignant la fonction distance à l'origine), on trouve pour E l'espace des fonctions continues à croissance lente (i.e. majorées par un polynome).

d) On peut varier, en supposant, p.ex. les φ_n définis sur C^p, et en désignant par H_n le sous-espace de E_n formé de fonctions <u>holomorphes</u>. C'est un sous-espace fermé (car toute limite uniforme sur tout compact de fonctions holomorphes est déjà holomorphe - th. de Weierstrass), et la limite inductive des H_n (espace des fonctions holomorphes majorées par un multiple d'au moins une des φ_n) est ainsi muni d'une topologie d'espace $(\mathfrak{DF})$ bornologique et tonnelé. Prenant par exemple $\varphi_n = \exp. nr$ (r, distance à l'origine) on trouve l'espace des fonctions entières de type exponentiel. Prenant $\varphi_n = \exp. r^n$, on trouve l'espace des fonctions entières d'ordre fini, etc.

e) Une question ouverte est de donner les conditions pour qu'un espace $L_b(E,H)$, avec E du type $(\mathfrak{F})$ et H du type $(\mathfrak{DF})$, soit du type $(\mathfrak{DF})$ (on sait que $L_b(E,H)$ aura une suite fondamentale de parties bornées, conséquence immédiate de N° 2, prop. 2, corollaire 2). Quand en particulier H est le dual fort d'un espace F du type $(\mathfrak{F})$, cela revient à la question quand l'espace $B(E,F)$ des formes bilinéaires continues sur le produit de deux espaces $(\mathfrak{F})$ muni de la topologie de la convergence bibornée, est un espace $(\mathfrak{D}\mathfrak{F})$.

Exercice 1. Montrer que l'espace des fonctions entières de type exponentiel, resp. d'ordre fini sur C^p, est un espace $(\mathfrak{D}\mathfrak{F})$ du type $(\mathcal{M})$ (utiliser prop. 5, corollaire 2). Montrer que le premier de ces deux espaces est isomorphe à l'espace $H(\{0\})$ des fonctions holomorphes au voisinage de l'origine (représenter une fonction holomorphe à l'origine par la suite de ses coéfficients de Taylor).

5. Compléments.

A titre indicatif, nous donnons encore quelques résultats plus fins sur les espaces $(\mathfrak{D}\mathfrak{F})$, en omettant les démonstrations essentielles (th. 3, th. 4, lemme). Le lecteur pourra les chercher en exercice, ou se référer à Grothendieck - "Sur les Espaces $(\mathfrak{F})$ et $(\mathfrak{D}\mathfrak{F})$", à paraitre dans Summa Brasiliensis Mathematicae, où il trouvera encore, entre autres, des contre exemples divers relatifs aux $(\mathfrak{F})$ et $(\mathfrak{D}\mathfrak{F})$ et des questions ouvertes.

Théorème 3. Soit H un espace $(\mathfrak{D}\mathfrak{F})$, U un disque dans H. Pour que U soit un voisinage de 0, il faut et il suffit qu'il induise sur toute partie bornée un voisinage de 0.

On vérifie d'ailleurs immédiatement que cette propriété de H est équivalent à l'énoncé:

Corollaire 1. Soit u une application linéaire de H dans un ELC quelconque E. Pour que u soit continue, il faut et il suffit que ses restrictions aux parties bornées de H le soient.

L'énoncé analogue pour la caractérisations des ensembles équicontinus d'applications linéaires de H dans E sera d'ailleurs aussi valable (même démonstration); cela permettrait par exemple d'améliorer encore le th. 2, du Nº 2. Autre application:

Corollaire 2. Soit H un espace $(\mathfrak{D}\mathfrak{F})$, E un ELC séparé complet, alors $L_b(H,E)$ est complet.

En effet, toute limite pour la convergence bornée d'applications linéaires continues aura ses restrictions aux parties bornées continues et sera donc continue en vertu de corollaire 1; donc $L_b(H,E)$ est un sous-espace fermé de l'espace complet de toutes les applications de H dans E, muni de la convergence bornée, donc lui-même complet. - Ce résultat généralise prop. 1, corollaire 3. Comparer aussi avec Chapitre 3, prop. 2.

Théorème 4. Soit H un espace $(\mathfrak{D}\mathfrak{F})$, M une partie séparable de H (i.e. dans laquelle il existe une suite dense). Alors sur M, la topologie donnée T de H, et la topologie T_o de la convergence uniforme sur les parties fortement bornées de H', sont identiques.

Comme $T = T_o$ si et seulement si H est quasi-tonnelé, on aura

Corollaire 1. Un espace $(\mathfrak{DF})$ séparable est quasi-tonnelé.

Autre conséquence immédiate:

Corollaire 2. Dans H, les suites convergentes pour T ou pour T_o sont les mêmes. En d'autres termes, pour une application d'un espace topologique métrisable dans H, il revient au même d'être continue pour T, ou pour T_o.

Conjuguant avec le th. 3, on obtient le

Théorème 5. Un espace $(\mathfrak{DF})$ dont les parties bornées sont métrisables, est quasi-tonnelé.

En effet, pour vérifier que l'application identique de H muni de T dans H muni de T_o est continue, il suffit (th. 3, cor. 1) de vérifier que sa restriction à toute partie bornée l'est, ce qui résulte du th. 4, corol. 2.

On prouve sans grande difficulté le

Lemme: Soit (A_i) une suite croissante de disques bornés dans l'espace H du type $(\mathfrak{DF})$, telle que leurs homothétiques forment une suite fondamentale de parties bornées de H. Soit $U = \bigcup A_i$, alors l'adhérence de U est identique à la boule unité associée à la jauge de U

(i.e. à la réunion des adhérences des segments découpés par U sur les droites réeles passant par l'origine).

Conjuguant alors avec un argument de faible compacité, on obtient:

<u>Théorème 6. Soit E un ELC métrisable, alors tout disque U bornivore dans le dual fort E' contient un disque bornivore et fermé.</u>

Par polarité, ce résultat équivaut aussi à:

<u>Corollaire 1. Tout ensemble de formes linéaires sur E' qui est uniformément borné sur toute partie bornée, est contenu dans l'adhérence faible, dans le dual algébrique de E', d'une partie bornée de E".</u>

Le cas particulier le plus important est le

<u>Corollaire 2. Soit E un ELC métrisable. Pour que son dual fort E' soit bornologique, il faut et il suffit qu'il soit quasi-tonnelé</u> (ou <u>tonnelé</u>, ce qui est la même chose puisque l'espace est complet).

Rappelons que le fait que E' fort est quasi-tonnelé se vérifiera pratiquement à l'aide du th. 5. Mais c'est en tout cas trivialement vrai si E est réflexif, donc:

<u>Corollaire 3. Le dual fort d'un espace</u> ($\mathfrak{F}$) <u>réflexif est bornologique.</u>

Le fait qu'un dual fort soit bornologique peut par exemple être utile dans des théorèmes de dualité comme le sui vant:

<u>Proposition 6. Soit</u> E <u>un ELC</u>, F <u>un sous-espace vectoriel quasi-tonnelé dont le dual fort est bornologique. Alors ce dual fort s'identifie au quotient du dual fort</u> E' <u>de</u> E <u>par le sous-espace</u> F^o <u>orthogonal à</u> F.

En effet, pour vérifier que l'application canonique $F'_b \longrightarrow E'_b/F^o$ est continue, comme F'_b est bornologique, il suffit de vérifier qu'une partie bornée est transformée en une partie bornée; mais F étant quasi-tonnelé, une partie bornée de F' fort est équicontinue, donc provient d'une partie équicontinue et à fortiori fortement bornée de E', dont l'image canonique dans E'_b/F^o sera bien bornée.

<u>Exercice</u>. Déduire du th. 4 que ce dernier reste valable en y remplaçant T et T_o par les topologies faibles associées. Donné l'analogue correspondant au corollaire 2, du th. 4. Montrer que les parties de H compactes pour la topologie faible associée à T, ou celle associée à T_o, sont les mêmes (on se ramènera au cas où H est complet, et on admettra le th. de Eberlein - qui sera démontré au Chap. 5 -: Dans un espace localement convexe séparé complet, une partie est faiblement relativement compacte si et seulement si toute suite extraite admet une valeur d'adhérence faible). En conclure que toute forme linéaire sur H continue pour T_o appartient au complété de H' pour τ(H',H); montrer que si H est complet, toute forme linéaire sur H appartenant au complété de H' pour τ(H',H) est bornée sur les parties bornées, et

que, réciproquement, si H est le dual fort d'un ELC métrisable, toute forme linéaire sur H bornée sur les bornés, est continue pour T_o.

§ 4 - Espaces quasi-normables et espaces de Schwartz.

1. Définition des espaces quasi-normables.

Définition 1. Un espace localement convexe E est dit quasi-normable si pour tout disque équicontinu A dans E' existe un disque équicontinu $B \supset A$ tel que sur A les topologies induite par E' fort et par E'_B soient les mêmes.

En vertu du Chap. 2, Nº 14, il revient d'ailleurs au même de dire que les structures uniformes sur A induites par E' fort ou par E'_B sont les mêmes; ou aussi seulement que les deux topologies en question induisent sur A le même système de voisinages de 0. Cela signifie donc que pour tout $\lambda > 0$, existe un voisinage fort W de 0 dans E', qu'on peut supposer disqué faiblement fermé, tel que $A \cap W \subset A \cap \lambda B$, soit $A \cap W \subset \lambda B$. Supposant A et B faiblement fermés, et désignant par U et V leurs polaires, enfin par M le polaire de W, la condition de quasi-normabilité devient: pour tout voisinage disqué fermé U de 0 dans E en existe un autre V tel que, pour tout $\lambda > 0$, on puisse trouver un disque borné fermé M tel que $V \subset \lambda \overline{\Gamma}(U \cup M)$. Changeant λM en M (changement de notation) et notant que

$$\frac{1}{2}(U + M) \subset \overline{\Gamma}(U \cup M) \subset 2(U + M)$$

(la deuxiéme inclusion vaut parce que U est un voisinage de

0), on constate aussitôt qu'on peut remplacer l'inclusion écrite plus haut par l'inclusion plus commode:

$$(1) \qquad V \subset \lambda U + M.$$

Ainsi, E est quasi-normable si et seulement si pour tout voisinage U de 0 en existe un autre V tel que, pour tout $\lambda > 0$, existe un borné M tel qu'on ait (1): c'est la forme sous laquelle on vérifiera la quasi-normabilité dans les cas concrets.

Un espace $(\mathcal{DF})$ quasi-tonnelé est quasi-normable: conséquence immédiate de la définition et de § 2, Nº 2, th.1, 2º. Un espace $(\mathcal{F})$, même s'il est du type $(\mathcal{M})$ (Chap.2, Nº 18, définition 13), peut ne pas être quasi-normable, néanmoins les espaces $(\mathcal{M})$ qu'on rencontre en pratique sont quasi-normables. On laisse au lecteur de vérifier qu'un quotient d'un espace quasi-normable et la somme directe topologique d'une suite d'espaces quasi-normables est quasi-normable il en est donc de même de la limite inductive d'une suite d'espaces quasi-normables (qui est un quotient de la somme directe topologique); le produit vectoriel topologique d'une famille quelconque d'espaces quasi-normables est quasi-normable. (Il suffit dans tout ceci d'appliquer telle quelle la définition; seul le cas de la somme directe demande un raisonnement, on procède comme dans § 2, Nº 2, th. 1, 2º). Mais un sous-espace vectoriel d'un espace quasi-normable n'est en général pas quasi-normable, puisque tout espace $(\mathcal{F})$ est isomorphe à un sous-espace du produit d'une suite d'espaces de Banach (produit qui est quasi-normable d'après ce qui précède), et qu'il existe des espaces $(\mathfrak{F})$ non quasi-normables.

Signalons que de la définition résulte aussitôt que si E est quasi-normable, alors les parties équicontinues de son dual fort sont métrisables. Dans le cas où E est du type $(\mathfrak{F})$, donc E' fort du type $(\mathfrak{DF})$ (§ 3, th. 1), on voit, en conjuguant avec § 3, Nº 5, th. 5 et th. 6, corollaire 2, que E' fort est alors un espace $(\mathfrak{DF})$ <u>bornologique</u> (pourvu que E soit quasi-normable).

<u>Exercice 1</u>. Montrer que le bidual d'un espace quasi normable est quasi-normable (utiliser la condition exprimée dans la formule (1)).

<u>Exercice 2</u>. Soit E un ELC. On dit que E satisfait à la condition de convergence de Mackey si toute suite qui tend vers 0 dans E tend vers 0 au sens de Mackey (Chap. 3, Nº 4, définition 4), et que E satisfait à la condition de convergence de Mackey stricte si pour tout disque borné A dans E existe un disque borné $B \supset A$ tel que sur A, la topologie induite par E ou par E_B soit la même (ex. espace métrisable, en vertu de § 2, Nº 2, th. 1, 2º).

1) Soit E un ELC quasi-tonnelé, alors E est quasi-normable si et seulement si son dual fort satisfait à la condition de convergence de Mackey stricte.

2) Un sous-espace vectoriel d'un espace qui satisfait à l'une des deux conditions de convergence de Mackey, le produit vectoriel topologique d'une suite d'espaces ou la som

me directe topologique d'une famille quelconque d'espaces qui satisfont à l'une déterminée de ces deux propriétés, satisfait à la même propriété.

3) Soit E un ELC admettant une suite fondamentale de bornés. a) Si E satisfait à la condition de convergence de Mackey, montrer que pour tout filtre φ <u>à base dénombrable</u> sur E convergent vers une limite $x \in E$, on peut trouver un disque borné fermé A tel que $A \in \varphi$, et que la trace de φ sur A tend vers x dans l'espace normé E_A; en particulier, tout disque borné <u>métrisable</u> B dans E est contenu dans un disque borné A tel que sur B, la topologie induite par E ou par E_A soit la même. b) En conclure que pour que E satisfasse à la condition de convergence de Mackey <u>stricte</u>, il faut et il suffit que ses parties bornées soient métrisables, et qu'il satisfasse à la condition de convergence de Mackey pour les suites.

2. <u>Relèvement des suites fortement convergentes de formes linéaires sur un sous-espace</u>.

Une conséquence immédiate de la définition 1 est la

<u>Proposition 1</u>. <u>Soit E un ELC quasi-normable, (x'_i) une suite équicontinue dans E' tendant fortement vers une limite x'. Alors il existe un disque équicontinu A dans E' tel que x'_i tende vers x' dans l'espace normé E'_A; en d'autres termes</u> (posant $V = A^0$) <u>il existe un voisinage V de 0 dans E tel que x'_i tende vers x' uniformément sur V.</u>

Cela signifie aussi, si on suppose pour simplifier $x' = 0$, qu'il existe une suite de $\lambda_i > 0$, tendant vers 0, telle que l'on ait $x'_i \in \lambda_i A$. Si maintenant on suppose que E est un sous-espace vectoriel topologie d'un ELC F, on sait (Hahn-Banach) qu'une partie équicontinue A de E' est l'image canonique d'une partie équicontinue B de F', donc sous les conditions précédentes, on peut trouver pour tout i un prolongement y'_i de x'_i à F tel que $y'_i \in \lambda_i B$. Il s'ensuit:

Théorème 1. *Soit F un ELC, E un sous-espace vectoriel, (x'_i) une suite équicontinue fortement convergente dans E'. Alors, si E est quasi-normable, on peut trouver des prolongements y'_i des x'_i à F, tels que (y'_i) soit une suite équicontinue fortement convergente dans F'.*

Le théorème 1 s'applique surtout sous la forme du

Corollaire. *Soit E un ELC quasi-normable dont la topologie est définie comme la moins fine de celles qui rendent continues des applications linéaires u_i de E dans des ELC E_i. Alors les suites équicontinues et fortement convergentes dans E' s'obtiennent en prenant des sommes finies de suites obtenues en composant avec u_i les éléments d'une suite équicontinue et fortement convergente dans un espace E'_i.*

En effet, on se ramène aussitôt au cas où E est séparé, donc s'identifie à un sous-espace vectoriel topologique du produit vectoriel topologique des E_i. On applique alors le théorème 1, en notant que le dual fort du produit des E_i s'identifie à la somme directe topologique des duals forts des E_i (§1, Nº 4, prop. 7), et que ses parties équicontinues sont celles contenues dans la somme d'un nombre finie de parties équicontinues d'espaces E'_i (Chap. 2, Nº 15, prop. 22, corollaire 1).

Remarquons d'ailleurs que le th. 1 et son corollaire 1 pourraient aussi manifestement s'énoncer pour des <u>filtres</u> fortement convergents sur une partie équicontinue du dual de E. Si on suppose alors réciproquement que E est un ELC tel que, quel que soit son imersion dans un ELC F, l'énoncé ainsi renforcé du th. 1 est valable, alors F est quasi-normable; on le voit immédiatement en prenant pour E un ELC quasi-normable, par exemple un produit d'espaces de Banach, ce qui est toujours possible.

<u>Exercice</u> <u>1</u>. Soit un ELC E <u>séparable</u>, F un sous-espace vectoriel, (x'_i) une suite équicontinue et faiblement convergente dans F' montrer qu'on peut trouver des prolongements y'_i des x'_i à E tels que (y'_i) soit une suite équicontinue et faiblement convergente dans E'. Montrer que, même si E est un espace de Banach, il est indispensable dans ce qui précède que E soit séparable (voir Chap. 3, Nº 7, exercice 2, d).

3. Quasi-normabilité et compacité.

Théorème 2. Soit E un ELC quasi-normable, A un disque équicontinu dans E' compact pour $\sigma(E',E")$ (respect. pour la topologie forte), alors il existe un disque équicontinu faiblement fermé B dans E' tel que A soit une partie faiblement compacte (resp. compacte) de l'espace de Banach E'_B.

En effet, prenons B tel que sur A, la topologie induite par E' fort ou par E'_B soit la même. Si alors A est fortement compact, il est donc aussi compact dans E'_B. De même, si B est compact pour la topologie faible $\sigma(E',E")$ associée à la topologie forte, B est faiblement compact dans le Banach E'_B, car pour une partie disquée A d'un ELC F (E'_B dans le cas actuel) le fait d'être faiblement compact ne dépend que de la topologie induite par F sur A (Voir Chap. 2, Nº 9, exercice 2).

Corollaire. Soit u une application linéaire continue d'un ELC quasi-normable E dans un espace de Banach F, transformant les parties bornées en des parties faiblement relativement compactes (resp. relativement compactes). Alors u est faiblement compacte (respectivement compacte).

En effet, soit A l'image de la boule unité de F' par u', A est compact pour $\sigma(E',E")$ resp. pour la topologie forte, en vertu de Chap. 2, Nº 18, th. 12 et th. 13. Soit alors B comme dans l'énoncé du th. 2 soit $U = B^{o}$; comme $u(U)$ est manifestement borné (car $u(A^{o})$ est contenu dans la boule unité de F) u est une application linéaire continue de l'espace E muni de la semi-norme jauge de U. Le dual de cet espace semi-normé est manifestement E'_B, et la transposée de u considérée comme application de E_U dans F est encore u' considérée comme application de F' dans E'_B. Comme cette dernière est faiblement compacte (resp. compacte), il en est de même de u considérée comme application de E_U (même référence), donc $u(U)$ est faiblement relativement compact (resp. relativement compact). En particulier, on obtient:

Corollaire 2. *Soit E un ELC quasi-normable. Si E est réflexif* (resp. *si ses parties bornées sont précompactes, à fortiori si E est du type* $(\mathcal{M})$), *alors toute application linéaire continue de E dans un espace de Banach F est faiblement compacte* (resp. *compacte*).

Cette dernière propriété peut être en défaut si E est non quasi-normable, même s'il est du type $(\mathcal{F})$ et $(\mathcal{M})$: on peut trouver en effet un espace E du type $(\mathcal{F})$ et $(\mathcal{M})$ admettant un espace quotient qui est un espace de Banach non réflexif, alors l'application canonique de E sur son quotient n'est pas même faiblement compacte! (En même temps, on voit qu'il existe des parties bornées dans le quotient qui ne sont pas contenues dans l'adhérence de l'image canonique d'une partie bornée de E: prendre un voisinage de 0 borné dans le quotient; donc le dual fort du quotient de E ne s'identifie pas à un sous-espace vectoriel topologique du dual fort de E). Il y a cependant une catégorie plus large que les espaces quasi-normables réflexifs pour satisfaire aux conditions du corollaire 2:

<u>Proposition 2. Soit</u> E <u>un ELC. Les conditions suivantes sont équivalentes:</u>

1. <u>Toute application linéaire continue de</u> E <u>dans un espace de Banach</u> F <u>est faiblement compacte</u> (resp. <u>compacte</u>).

2. <u>Pour tout voisinage disqué</u> U <u>de</u> 0 <u>dans</u> E, <u>existe un voisinage disqué</u> $V \subset U$ <u>de</u> 0 <u>tel que l'application naturelle de</u> $\hat{E}_V$ <u>dans</u> $\hat{E}_U$ <u>soit faiblement compacte</u> (resp. <u>compacte</u>).

3. <u>Pour tout disque équicontinu</u> A <u>dans</u> E' <u>existe un disque équicontinu</u> $B \supset A$ <u>tel que</u> A <u>soit faiblement relativement compact</u> (resp. <u>relativement compact</u>) <u>dans l'espace normé</u> E'_B.

<u>Si</u> E <u>satisfait à ces propriétés et est de plus quasi-complet alors il est réflexif</u> (resp. <u>du type</u> $(\mathcal{M})$).

Notons que si U est un voisinage disqué de 0 dans E, $\hat{E}_U$ désigne l'espace de Banach associé à la semi-norme jauge de U. - L'équivalence de 1. et 2. se voit trivialement (1. implique 2. comme on voit en posant $F = E_U$, 2. implique 1. en considérant l'image inverse U de la boule unité de F par u). D'autre part 3. signifie aussi que l'application identique de E'_A dans E'_B est compacte; supposant A et B faiblement fermés (ce qui ne change rien) et appelant U et V les polaires de A resp. B, l'application identique $E'_A \longrightarrow E'_B$ est la transposée de l'application canonique $\hat{E}_V \longrightarrow \hat{E}_U$, donc elle est faiblement compacte (resp. compacte) si et seulement si cette dernière l'est. Cela établit l'équivalence des conditions 2. et 3. Enfin, si E satisfait à ces conditions et est quasi-complet, montrons qu'il est réflexif (resp. un espace de Montel), i.e. que l'application identique $E \longrightarrow E$ transforme les parties bornées en des parties faiblement relativement compactes (resp. relativement compactes). On sait (Chap. 2, Nº 18, th. 12 et 13) qu'il revient au même de dire que la transposée, i.e. l'application identique de E' sur E', transforme parties équicontinues en des parties relativement compactes pour $\sigma(E', E'')$ (respect. relativement compactes pour la topologie forte), ce qui résulte en effet aussitôt de la condition 3.

Il est trivial sur la condition 1 qu'un espace quotient d'un espace E satisfaisant aux conditions de la prop. 2 y satisfait aussi. Conjuguant avec le corollaire 2 du th. 2, on obtient:

<u>Corollaire 1</u>. <u>Soit</u> E <u>un espace quasi-normable qui est réflexif</u> (resp. <u>du type</u> $(\mathcal{M})$). <u>Alors tout espace quotient séparé quasi-complet de</u> E <u>est aussi quasi-normable et réflexif</u> (resp. <u>du type</u> $(\mathcal{M})$).

Sur la condition 2. ou la condition 3. de la prop.

2, on voit que la propriété envisagée dans cette proposition est aussi stable par passage à un sous-espace vectoriel quelconque. En particulier:

<u>Corollaire 2</u>. <u>Soit</u> E <u>un</u> <u>ELC</u> <u>quasi-normable</u> <u>et</u> <u>réflexif</u> (resp. <u>du</u> <u>type</u> $(\mathcal{M})$). <u>Alors</u> <u>tout</u> <u>sous-espace</u> <u>vectoriel</u> <u>de</u> E <u>satisfait</u> <u>aux</u> <u>conditions de</u> <u>prop</u>. <u>2</u>.

On remarquera que ce sous-espace pourra ne pas être quasi-normable. On trouve par exemple que tout sous-espace vectoriel du produit vectoriel topologique d'une famille quelconque d'espaces de Banach <u>réflexifs</u> satisfait aux conditions de la prop. 2 (celles qui sont relatives à la compacité faible, i.e. qui ne sont pas entre parenthèses). Il en est ainsi par exemple des espaces $(\mathcal{D}_{L^p})$ de L. Schwartz pour $1<p<\infty$, qui sont en effet par définition isomorphes à des sous-espaces vectoriels topologiques du produit d'une suite d'espaces L^p (qui sont des espaces de Banach réflexifs). En fait, il n'est pas difficile de voir que les $(\mathcal{D}_{L^p})$ sont même quasi-normables, mais il n'en sera plus en général de même de ses sous-espaces vectoriels, qui satisferont pourtant encore aux conditions de prop. 2.

4. <u>Espaces</u> <u>de</u> <u>Schwartz</u>.

Un <u>espace</u> <u>de</u> <u>Schwartz</u> est un ELC séparé qui satisfait à la deuxième série de conditions équivalentes de la proposition 2. On peut par exemple mettre la condition 2. sous la forme voisine:

Définition 2. Soit E un ELC séparé; E est dit un *espace de Schwartz*, en abrégé *espace* (S), si pour tout voisinage disqué U de 0, en existe un autre V qui soit précompact pour la topologie semi-normé définie par U.

En plus des conditions équivalentes de la prop.2, on a une autre caractérisation des espaces (S):

Proposition 3. *Soit* E *un ELC séparé*. E *est un espace* (S) *si et seulement si il est quasi-normable, et si toute partie bornée est précompacte*.

Que la condition soit suffisante a été vu dans le corollaire 2 du th. 2. Supposons réciproquement que E soit un espace (S), soit A une partie bornée de E, pour prouver que A est précompact, il suffit de prouver qu'il est précompact pour toute semi-norme continue correspondante à un voisinage disqué U de 0; or cela est évident grâce à la définition 2. Enfin, soit A un disque équicontinu faiblement fermé dans E', d'après la condition 3. de prop. 2, il existe un disque équicontinu faiblement fermé B tel que A soit compact dans E'_B. Par suite, sur A la topologie induite par E'_B est identique à la topologie induite par E' fort, qui est en effet séparée et moins fine. Il s'ensuit que E est quasi-normable.

L'intérêt des espaces (S) tient entre autres à la grande stabilité de cette catégorie d'espaces, et au fait que dans le cas des espaces ($\mathfrak{F}$), ils permettent une théorie achevée de la dualité forte, comme nous montrons maintenant.

Proposition 4. Un sous-espace vectoriel, un espace quotient séparé d'un espace (S), le produit vectoriel topologique d'une famille quelconque et la somme directe topologique d'une suite d'espaces (S), est un espace (S).

Nous avons déjà remarqué que les conditions de la prop. 2 sont stables par passage à un sous-espace vectoriel et à un espace vectoriel quotient. On constate immédiatement qu'il en est de même pour le produit d'une famille quelconque d'espaces, en utilisant la condition 2. de prop. 2 (une application linéaire continue du produit dans un espace de Banach se ramène en effet à une application linéaire continue d'un produit fini partiel dans le même espace). Il n'est pas difficile de voir qu'il en est de même de la somme directe topologique d'une suite d'espaces (voir exercice 1). Dans le cas qui nous intéresse ici (espaces (S)) on peut dire qu'une somme directe topologique d'une suite d'espaces quasi-normables est quasi-normable, et si les parties bornées des facteurs sont précompactes, il en est de même des parties bornées dans la somme directe (qui sont en effet contenues dans la somme d'un nombre fini de parties bornées des facteurs) d'où le résultat, grâce à prop. 3.

Corollaire 1. Un ELC séparé qui est limite inductive d'une suite d'espaces (S) est un espace (S).

<u>Corollaire 2. Un ELC séparé dont la topologie est la moins fine de celles qui rendent continues des applications linéaires</u> u_i <u>de</u> E <u>dans des espaces</u> (S) E_i, <u>est un espace</u> (S).

Dans le premier cas, on a en effet affaire à un quotient d'une somme directe topologique d'une suite d'espaces (S), dans le deuxième à un sous-espace du produit d'une famille d'espaces (S). - Notons que si E est un espace ($\mathfrak{F}$) et ($\mathcal{M}$) qui n'est pas un espace (S) (nous avons dit au Nº 3 qu'il en existe), c'est le dual fort de son dual fort E', qui est du type (S), car quasi-normable (en tant qu'espace ($\mathfrak{D}\mathfrak{F}$) quasi-tonnelé) et du type ($\mathcal{M}$) (comme dual d'un espace ($\mathcal{M}$) quasi-tonnelé). Donc le dual fort d'un espace (S) ne peut pas être du type (S).

<u>Théorème 3. Soit</u> E <u>un espace</u> ($\mathfrak{F}$) <u>et</u> (S), F <u>un sous-espace vectoriel fermé. Alors</u> F <u>et</u> E/F <u>sont des espaces</u> ($\mathfrak{F}$) <u>et</u> (S), <u>le dual fort de</u> F (resp. de E/F) <u>s'identifie au quotient</u> E'/F^o <u>du dual fort</u> E' <u>de</u> E (resp. <u>au sous-espace vectoriel topologique</u> F^o <u>du dual fort</u> E' <u>de</u> E).

Nous savons déjà (prop. 4) que F et E/F sont du type (S), ce sont aussi des espaces ($\mathfrak{F}$). En particulier, F sera réflexif, d'où le résultat relatif à son dual fort (Chapitre 2, Nº 15, prop. 21, corollaire 2). Pour l'assertion relative au dual de E/F, il faut montrer seulement que toute partie bornée de E/F est contenue dans l'adhérence de l'ima ge canonique d'une partie bornée de E. Or les parties bornées de E/F étant relativement compactes, il suffit d'appliquer § 2, Nº 1, prop. 1.

Corollaire. Soit E un espace ($\mathcal{F}$) et (S). Alors les sous-espaces vectoriels fermés de son dual fort, et les espaces quotients de ce dual par ces sous-espaces, sont des espaces ($\mathcal{DF}$), (S), bornologiques et complets.

En effet, ce sont des duals forts d'espaces ($\mathcal{F}$) et (S), donc ce sont des espaces ($\mathcal{DF}$), complets et bornologiques (§ 3, Nº 5, th. 6, corollaire 3). Comme ils sont aussi du type ($\mathcal{M}$), ils sont même du type (S), comme nous l'avons signalé plus haut pour les espaces ($\mathcal{DF}$) quasi-tonnelés.

Proposition 5. Soit U une partie ouverte de R^n, K un cube compact de R^n. Alors les espaces $\mathcal{E}(U)$ et $\mathcal{E}(K)$ des fonctions indéfiniment différentiables sur U et K (voir Chap. 1, Nº 10) sont des espaces (S).

En effet, la topologie de $\mathcal{E}(K)$ par exemple est la moins fine de celles qui rendent continues les applications identiques de $\mathcal{E}(K)$ dans les espaces $\mathcal{E}^{(m)}(K)$. Or on a vu (Chap. 1, Nº 10) que l'application identique de $\mathcal{E}^{(m+1)}(K)$ dans $\mathcal{E}^{(m)}(K)$ est compacte, d'où s'ensuit aussitôt que la condition de la définition 2 est vérifiée. On procède de façon analogue pour $\mathcal{E}(U)$.

Corollaire 1. L'espace $\mathcal{D}(U)$ des fonctions indéfiniment différentiables à support compact sur U, est

<u>un espace</u> (S).

En effet, pour tout compact $K \subset U$, l'espace $\mathfrak{D}_K(U)$ des $f \in \mathcal{E}(U)$ dont le support est dans K est un sous-espace vectoriel topologique de $\mathcal{E}(U)$, donc un espace (S). $\mathfrak{D}(U)$ est la limite inductive d'une suite de tels espaces $\mathfrak{D}_K(U)$ du type (S), donc est lui-même un espace (S).

<u>Corollaire 2</u>. <u>Soit</u> U <u>un ouvert de</u> C^n, $\mathcal{H}(U)$ <u>l'espace des fonctions holomorphes sur</u> U, <u>muni de la topologie de la convergence compacte</u>. <u>Alors</u> $\mathcal{H}(U)$ <u>est un espace</u> (S). <u>Il en est de même de l'espace</u> $\mathcal{H}(K)$ <u>des fonctions holomorphes au voisinage d'un compact</u> K <u>de</u> C^n (§ 1, Nº 2, exemple f).

En effet, on sait que $\mathcal{H}(U)$ est aussi un sous-espace vectoriel topologique de $\mathcal{E}(U)$ (vérification par exemple sans calcul, à l'aide du th. du graphe fermé et du fait que toute limite, uniforme sur tout compact, de fonctions holomorphes est holomorphe, ce qui implique à fortiori que $\mathcal{H}(U)$ est un sous-espace <u>fermé</u> de $\mathcal{E}(U)$) $\mathcal{E}(U)$ est du type (S), donc il est de même de $\mathcal{H}(U)$. Enfin, $\mathcal{H}(K)$ est la limite inductive d'une suite d'espaces comme $\mathcal{H}(U)$, qui sont des espaces (S), donc il est un espace (S).

<u>Exercice 1</u>. Soit E un espace ($\mathcal{F}$), et soit (A_i) une suite de disques faiblement compacts (resp. compacts) dans E. Montrer qu'on peut trouver une suite (λ_i) de scalaires > 0 telle que l'enveloppe disquée fermée de $\bigcup \lambda_i A_i$ soit faiblement compacte (resp. compacte). En conclure que si F

est un ELC limite inductive d'une suite d'espaces localement convexes F_i par des applications linéaires u_i dont les images engendrent F, et u une application linéaire de F dans l'espace E (du type $(\mathfrak{F})$), alors u est faiblement compacte (resp. compacte, resp. bornée) si et seulement si les applications $u \circ u_i$ le sont. En conclure que les conditions de la prop. 2 sont stables par passage à la limite inductive d'une suite d'espaces.

<u>Exercice 2</u>. Considérer la situation du § 3, Nº 3, proposition 5, corollaire 2. Montrer que si les applications v_i sont faiblement compactes (resp. compactes), alors le dual fort de E est un espace $(\mathfrak{F})$ qui satisfait à la première (resp. à la seconde) série de conditions de la prop. 2 du présent Nº. Par suite, E est lui-même le dual fort d'un espace $(\mathfrak{F})$ réflexif (resp. d'un espace $(\mathfrak{F})$ et (S)).

CHAPITRE V.

COMPACITÉ DANS LES ELC.

Les propriétés de compacité les plus élémentaires (et les plus importantes de ce fait), en liaison avec la technique de dualité, ont été vues au Chap. 2, Nº 18. Nous donnons ici des propriétés plus fines. Les §§ 1, 2 sont surtout importants dans certaines applications (plus que pour la théorie des ELC elle-même), et indépendants entre eux et des §§ 3 et 4.

§ 1 - Le théorème de Krein-Milman.

1. Points extrémaux.

Les espaces vectoriels envisagés ici seront *réels*. Le *segment* d'extrémités a, b est l'ensemble des points

$$\lambda a + (1 - \lambda)b,$$

avec $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$; par abus de langage, on appelle *intérieur du segment* le segment privé de ses extrémités.

Définition. Soit A une partie d'un espace vectoriel. Une sous variété linéaire de E est dite *variété d'appui*, si $V \cap A \neq \emptyset$ et si tout segment ouvert contenu dans A, dont l'intérieur recontre V, est contenu dans V. On appelle *point extrémal* de A une variété linéaire d'appui de dim. 0 (i.e. un point de A qui est extrémité de tout segment dans A qui le contient).

Proposition. Une intersection de variétés d'appui de A est une variété d'appui si et seulement si elle rencontre A.

(Trivial).

Corollaire. Si A est une partie compacte d'un EVT E, l'ensemble des variétés d'appui fermées de A est in- inductif pour $\supset$.

En effet, par raison de compacité, l'intersection d'une famille totalement ordonnée de variétés d'appui fermées recontre A donc est une variété d'appui fermée, qui est la borne supérieure cherchée.

Proposition 2. Soit A une partie de l'espace vectoriel E, x' une forme linéaire non nulle sur E, V hyperplan d'équation $\langle x,x'\rangle = a$. Pour que V soit variété d'appui de A, il suffit qu'il recontre A et le laisse d'un même côte, i.e. que a soit un minimum ou un maximum de la forme x' sur A. La condition est aussi necessaire si A est convexe.

(Trivial).

Corollaire. Si A est une partie compacte d'un EVT alors pour tout hyperplan fermé V dans E, existe un hyperplan d'appui de A parallele.

En effet, V aura une équation $\langle x,x'\rangle = 0$, où x' est une forme linéaire continue sur E, qui admet donc un maximum a sur A. L'hyperplan d'équation $\langle x,x'\rangle = a$ répond à la question.

Proposition 3. Soit A une partie de l'espace vectoriel E, V une variété d'appui de A. W une variété contenue dans V. Pour que W soit variété d'appui de A, il faut et il suffit qu'elle soit variété d'appui de $V\cap A$.

Necessité résulte du fait trivial: toute variété d'appui W de A est aussi variété d'appui de toute partie de A qui rencontre W.

Suffisance: segment dans A dont l'intérieur rencontre W donc V est contenu dans V, donc dans $V\cap A$, donc dans W qui est variété d'appui de $V\cap A$, c.q.f.d.

Des propositions 2 et 3 résulte le

Corollaire. Soit A une partie compacte d'un espace localement convexe séparé E, alors les points extrémaux de A sont les variétés d'appui fermées minimales.

Soit en effet V une variété d'appui fermée non réduite a un point, montrons qu'il existe une variété d'appui fermée strictement plus petite. On peut supposer $0 \in V$ (sinon on translate), alors $V\cap A$ est une partie compacte non vide de l'ELC séparé non nul V. Dans V existe un hyperplan fermé (Hahn-Banach), donc un hyperplan d'appui de $A\cap V$ parallele (prop. 2, corollaire), qui est aussi une variété d'appui de A (prop. 3).

Du corollaire précédent et du corollaire de prop. 1 (qui permet d'appliquer le th. de Zorn) résulte immédiatement la

Proposition 4. *Soit A une partie compacte d'un ELC séparé E. Toute variété d'appui fermée de A contient au moins un point extrémal.*

Comme E est variété d'appui de A, A a donc au moins un point extrémal. Bien mieux:

Théorème 1 (Krein-Milman). *Soit A une partie compacte d'un ELC séparé E. Alors l'ensemble des points extrémaux de A a même enveloppe convexe fermée que A.*

Dans le cas où A est convexe (le seul intéressant semble-t-il), cet énoncé devient:

Corollaire. *Une partie convexe compacte d'un ELC séparé est identique à l'enveloppe convexe fermée de l'ensemble de ses points extrémaux.*

Démonstration du th. 1. En vertu de Chap. 2, th. 3, corollaire 1, il suffit de montrer que si $x' \in E'$ et $a \in \mathbf{R}$ sont tels que $\langle x,x'\rangle \leq a$ pour tout point extrémal de A, on a la même inégalité pour tout $x \in A$. Sinon, en effet, le maximum de x' sur le compact A serait $b > a$, or l'hyperplan $\langle x,x'\rangle = b$ sera un hyperplan d'appui de A (prop. 2), donc contiendrait un point extrémal (prop. 4) ce qui est absurde car en ce point x' a la valeur b, non $\leq a$.

2. Génératrices extrémales.

Pour l'étude élémentaire des cônes, voir Chap. 2, Nº 3. Nous ne parlons ici que de cônes contenant le sommet O. Soit V une variété d'appui du cône C, si elle contient un point x de C non nul elle contient la génératrice de x (car elle contient un segment porté par la génératrice, dont l'intérieur contient x). Donc dans tous les cas, puisque pour une variété d'appui V, $V \cap C$ est non vide, une variété d'appui du cône C contient O, i.e. est homogène. On s'interessera surtout aux variétés d'appui qui contiennet au moins une génératrice, i.e. dont l'intersection avec C n'est pas réduite à O.

Définition 2. Soit C un cône dans l'espace vectoriel E. Une génératrice de C est dite génératrice extrémale si la droite qu'elle engendre est une variété d'appui.

Si x est un point non nul de C, sa génératrice est donc extrémale si et seulement si tout segment dans C dont l'intérieur contient x est contenu dans la génératrice de x, i.e. si $y, z \in A$, $0 < \lambda < 1$ et $x = \lambda y + (1-\lambda) z$ implique que y et z sont proportionnels à x. (Nécessité évidente par définition, suffisance aussi en remarquant que si la condition est vérifiée, elle l'est aussi pour les points de C proportionnels à x).

Soit C un cône dans l'espace vectoriel E, H un hyperplan non homogène dans E tel que C soit le cône (con tenant l'origine) engendré par $A = C \cap H$. Alors les sous-espaces vectoriels W de E tels que $W \cap C$ ne soit pas réduit à 0, sont en correspondance biunivoque avec les sous-variétés linéaires V de H qui rencontrent A, à W correspondant $V = W \cap H$ et à V correspondant l'espace vectoriel W engendré par V.

<u>Proposition 5. Dans cette correspondance, aux variétés d'appui</u> W <u>de</u> C <u>telles que</u> $W \cap C \neq 0$, <u>correspondent les variétés d'appui</u> V <u>de</u> $A = H \cap C$.

Supposons W variété d'appui de C; considérons un segment dans A dont l'intérieur rencontre V, il est contenu dans C et rencontre W, donc contenu dans W, donc aussi dans $V = W \cap H$; donc V est variété d'appui de A. Supposons que V soit variété d'appui de A; considérons un segment dans C dont l'intérieur contient un $x \in W$, on voit aussitôt que $x \neq 0$ (à cause de la façon dont est engendré C). Ou bien ce segment est sur la droite engendrée par x (et à fortiori contenu dans W) ou il se projette (centralement) sur H suivant un segment contenu dans A, dont l'intérieur contien la projection de x sur H, et renoontre donc $V = W \cap H$; ce dernier segment est donc contenu dans V donc le segment initial dans W, ce qui prouve que W est variété d'appui de C.

<u>Corollaire. Soit</u> C <u>le cône avec sommet engendré par une partie</u> A <u>d'hyperplan non homogène</u> H. <u>Les génératrices extrémales de</u> C <u>sont en correspondance biunivoque avec les points extrémaux de</u> A <u>(à un point ex-</u>

trémal de A correspondant la génératrice de C engendré par ce point).

Nous avons vu au Chap. 2, § 3 que la donné d'un cône convexe C contenant l'origine dans un espace vectoriel E, est equivalent à la donné d'un préordre sur E compatible avec la structure vectorielle. (Le cône est l'ensemble des éléments $\geqslant 0$ de E).

Proposition 6. Soit E un espace vectoriel réel préordonné, C le cône de ses éléments positifs. Soit $x \in E$, $x > 0$. Pour que la génératrice de x soit génératrice extrémale de C, il faut et il suffit que tout élément positif de E majoré par x soit proportionnel à x.

Si la génératrice de x n'est pas extrémale, on a $x = \lambda a + (1 - \lambda)b$, avec $a,b \in C$, $0 < \lambda < 1$ a et b non proportionnels à x (voir remarque après la définition 2) . Donc, λa est un élément positif de E, majoré par x et non proportionnel à x. Supposons qu'il existe un tel élément y de E: $0 \leqslant y \leqslant x$, y non proportionnel à x, on a alors $x = \frac{1}{2}(2y + 2(x-y))$, donc on est sous les conditions du début, avec $a = 2y$, $b = 2(x - y)$, $\lambda = \frac{1}{2}$, donc la génératrice de x n'est pas extrémale. C'est surtout sous la forme de la propriété envisagée dans prop. 6 que les génératrices extrémales des cônes convexes se rencontrent dans les applications.

Jusqu'à maintenant, nous n'avons pas dans ce Nº fait intervenir de topologie sur l'espace E, ce qu'on va faire maintenant:

<u>Théorème</u> <u>2</u>. <u>Soit</u> E <u>un</u> <u>ELC</u> <u>séparé</u>, A <u>une partie</u> <u>convexe</u> <u>compacte</u> <u>de</u> E <u>ne</u> <u>contenant</u> <u>pas</u> 0, C <u>le</u> <u>cône</u> <u>contenant</u> <u>l'origine</u> <u>engendré</u> <u>par</u> A. <u>Alors</u> C <u>est</u> <u>fermé</u> <u>et</u> <u>identique</u> <u>à</u> <u>l'enveloppe</u> <u>convexe</u> <u>fermée</u> <u>de</u> <u>la</u> <u>réunion</u> <u>de</u> <u>ses</u> <u>génératrices</u> <u>extrémales</u>.

On peut trouver un hyperplan fermé H_0 qui ne rencontre pas A, et le laisse donc strictement d'une même côté Soit H un hyperplan parallèle à H_0 d'équation

$$\langle x,x'\rangle = 1,$$

du même côté de H_0 que A. Pour tout $x \in \complement H_0$, soit

$$p(x) = \frac{1}{\langle x,x'\rangle} x$$

sa projection centrale sur H. Le cône contenant 0 engendré par A est manifestement identique au cône contenant 0 engendré par $K = p(A)$ et abstraction faite de l'origine c'est l'ensemble des points x du demi-espace ouvert U défini par $\langle x,x'\rangle > 0$, tels que $p(x) \in K$. Or p étant une application continue dans $\complement H_0$, K sera compact comme image du compact A. À fortiori K est fermé, donc son image réciproque dans U par p, qui est aussi C moins l'origine, est relativement fermé dans U. Donc tout point adhérent à $C \cap U$ non contenu dans $C \cap U$ est non contenu dans U, donc H_0 montrons qu'il est nul. Cela résulte du fait immédiat qu'on peut séparer strictement, par un hyperplan fermé convenable, tout point non nul x de H_0 avec A (de sorte que x n'est donc pas adhérent au cône engendré par A). On a ainsi prouvé que C est fermé. En vertu du th. 1, le compact K est l'enveloppe convexe fermée de l'ensemble de ses points extrémaux, donc contenu (compte tenu du corollaire de la prop. 5) dans l'enveloppe convexe fermée de la réunion des génératrices extrémales de C; il en est donc de même de C, ce qui achève la démonstration.

Exercice 1. Soit M un espace localement compact. Soit $\mathcal{K}(M)$ l'espace vectoriel ordonné des fonctions réelles continues à support compact sur M, $\mathcal{M}^+(M)$ le cône des formes linéaires positives sur $\mathcal{K}(M)$. Montrer que les génératrices extrémales sont les génératrices engendrées par les formes ε_s $(s \in M)$ définies par $\langle f, \varepsilon_s \rangle = f(s)$.

2) Soit $\mathcal{M}^1(M)$ le dual de l'espace de Banach $C_0(M)$. Soit A l'ensemble des éléments de la boule unité de $\mathcal{M}^1(M)$ qui sont des formes linéaires positives sur l'espace vectoriel ordonné $C_0(M)$. Montrer que les points extrémaux de A sont 0 et les ε_s.

3) Si M est compact, montrer que l'ensemble K des éléments de A de norme 1 est aussi identique à l'ensemble des formes positives μ sur $C(K)$ telles que $\mu(1)=1$. En conclure que K est faiblement compact. Montrer que ses points extrémaux sont les ε_x, et que le cône contenant 0 engendré par K est identique à $\mathcal{M}^+(M)$.

4) Appliquer le th. de Krein-Milman aux situations de 2 et 3 remarquer d'ailleurs qu'ici, on obtient les mêmes résultats plus rapidement par application direct du th. des

bipolaires, comparer Chap. 2, Nº 9 exercice).

5) Considérons encore $C_o(M)$ (M espace localement compact), les scalaires étant maintenant indifféremment réels ou complexes. Prouver que les éléments extrémaux de la boule unité du dual $\mathcal{M}^1(M)$ sont les $\lambda\, \varepsilon_s$, avec $s \in M$, $|\lambda| = 1$.

Exercice 2. (Les scalaires sont réels ou complexes).

1) Soit M un espace topologique. Montrer que les points extrémaux de la boule unité de $C^\infty(M)$ sont les f telles que $|f(s)| = 1$ pour tout $s \in M$. Démontrer l'assertion analogue pour un espace L^∞ construit sur une mesure μ.

2) Montrer que dans ce deuxième cas, la boule unité de L^∞ est l'enveloppe convexe fermée de l'ensemble de ses points extrémaux. Prouver que c'est encore vrai pour $C(M)$ est un espace compact totalement discontinu. (N. B. Le théorème de Krein-Milman ne marche pas ici! Il faut se ramener au cas d'un espace $C(M)$, où M est un espace compact fini. On peut d'ailleurs remarquer que, comme il est bien connu, L^∞ est isomorphe avec toutes ces structures à un $C(M)$ construit sur un certain espace compact totalement discontinu M, donc en fait l'assertion sur L^∞ peut être regardée comme cas particulier de celle relative à $C(M)$).

3) Soit M un espace topologique connexe, montrer que la boule unité de $C^\infty(M)$, quand on prend des scalaires réels, n'a que deux points extrémaux, et n'est donc pas en général l'enveloppe convexe fermée de l'ensemble de ses points extrémaux.

<u>Exercice 3</u>. Soit u une application linéaire d'un espace vectoriel E dans un autre F, soit A une partie de E, soit $B = u(A)$. Montrer que l'image inverse par u d'une variété d'appui de B est une variété d'appui de A. En conclure que si E, F sont des ELC séparés, A compact, alors tout point extrémal de B est image par u d'un point extrémal de A; et si A est le cône contenant l'origine engendré par un ensemble convexe compact ne contenant pas 0, alors toute génératrice extrémale de B est l'image par u d'une génératrice extrémale de A.

<u>Exercice 4</u>. Soit E un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbf{R}$, K une partie convexe et compacte de E. Montrer que K est l'enveloppe convexe de ses points extrémaux (pour prouver que tout $x \in K$ est dans cette enveloppe, prendre d'abord x dans l'intérieur de K, puis raisonner par récurrence sur la dimension).

<u>Exercice 5</u>. Soit E un espace localement convexe séparé sur $\mathbf{R}$, A une partie quelconque de E.

a) Montrer que les deux conditions suivantes sur un $x \in E$ sont équivalentes: 1. Pour toute application linéaire continue u de E dans un espace vectoriel de dimension finie, $u(x)$ appartient à l'enveloppe convexe de $u(A)$. 2. Pour toute sous variété fermée H de E passant par y, et de codimension finie $n > 0$, il existe une partie A ayant au plus $n+1$ éléments, dont l'enveloppe convexe rencontre H. (Utiliser l'exercice 2, Chap. 2, Nº 5). Soit $\tilde{A}$ l'ensemble des

$x \in E$ qui satisfont à ces propriétés. $\widetilde{A}$ est convexe, on a $A \subset \widetilde{A} = \widetilde{\widetilde{A}}$, et $\widetilde{A}$ est contenu dans l'enveloppe convexe fermée de A. Si E est de dimension finie, A est identique à l'enveloppe convexe de A.

b) Soit (x_i) une famille d'éléments de A; (λ_i) une famille de nombres positifs tels que $\sum \lambda_i = 1$ on suppose que la famille $(\lambda_i x_i)$ dans E est sommable. Montrer que sa somme x est dans A. (Se ramenent au cas où E est de dimension finie et est engendré affinement par les $\lambda_i x_i$: Plus généralement, si M est un espace localement compact muni d'une mesure positive μ de masse totale égale à 1,

$$t \longrightarrow f(t)$$

une application scalairement sommable de M dans E telle que

$$x = \int f(t)\, d\mu(t) \in E,$$

si on suppose enfin $f(M) \subset A$ alors $x \in \widetilde{A}$. (Se ramener au cas où E est de dimension finie, puis au cas précédent, en mettant M sous la forme $N \cup \bigcup M_i$ où N est négligeable, et où (M_i) est une suite de compacts disjoints deux à deux sur lesquels f a une restriction continue - en utilisant l'exercice 2, chap. 2, Nº 5).

c) Si A est compact, $\widetilde{A}$ est identique à l'enveloppe convexe fermée de A (utiliser l'exercice 2, Chap.2,Nº 5).

d) Si K est une partie convexe compacte de E, A l'ensemble de ses points extrémaux on a $K = \widetilde{A}$ (utiliser les exercices 3 et 4).

e) Si A est partie de E qui est réunion de demi droites fermées d'origine 0, alors la condition 1 de a) peut se remplacer par la suivante: par toute variété fermée H de codimension finie n passant par x, il existe une partie finie de A de n <u>éléments au plus</u> dont l'enveloppe convexe rencontre H (ou aussi: dont la somme est égale à x) - De plus, la somme de <u>toute</u> famille sommable extraite de A est dans A et généralisation analogue à celle de b) pour les intégrales de fonctions faiblement sommables. Si A est la réunion des génératrices extrémales d'un cône C engendré par un ensemble convexe compact K ne contenant pas 0, on a $\widetilde{A} = C$.

§ 2. <u>Théorie des opérateurs compacts</u>.

1. <u>Rappels</u>.

Dans ce § il ne sera question que d'ELC <u>séparés</u>.

Rappelons (Chap. 2, Nº 18, définition 14) qu'une application linéaire d'un ELC E dans un autre F est dite compacte (resp. précompacte) si elle transforme un voisinage convenable V de 0 en une partie relativement compacte (resp. précompacte); à fortiori, une telle application est continue. Quand E est normé, on peut prendre dans cette définition pour V la boule unité; si F est quasi-complet, la notion d'application compacte et précompacte de E dans F coincident. Compte tenu de Chap. 0, Nº 4, prop. 6' il en résulte que <u>si E est normable</u>, F <u>quasi-complet</u>, <u>l'espace des applications li-</u>

néaires compactes de E dans F est un sous-espace vectoriel fermé de $L_b(E,F)$. Rappelons aussi que la transposée d'une application linéaire compacte d'un espace de Banach dans un autre est compacte (Chap. 2, Nº 18, th. 12, corollaire 3). Signalons que ceci est vrai plus généralement pour la transposée d'une application, linéaire compacte d'un ELC quelconque dans un espace $(\mathcal{F})$ quand on muni les duals des topologies fortes (voir Chap. 4, § 2, exercice 4).

Signalons aussi la

Proposition 1. Soit u une application linéaire continue d'un ELC E dans un autre F. Soient E'_c et F'_c les duals de E et F, munis de la topologie de la convergence uniforme sur les disques compacts. Si u est compacte, alors sa transposée u' l'est aussi.

En effet, soit V un voisinage disqué de l'origine dans E tel que $K = u(V)$ soit relativement compact, alors u' applique K^o dans V^o (Chap. 2, prop. 25). Or K^o est un voisinage de 0 dans F'_c et V^o est une partie équicontinue de E', donc relativement compacte pour la convergence faible, donc aussi pour la convergence compacte (et à fortiori pour la convergence uniforme sur les disques compacts) par raison d'équicontinuité. Cela prouve la proposition; noter d'ailleurs que la réciproque est évidemment vraie si tout disque compact dans E'_c est équicontinu, en particulier si la topologie de E est $\tau(E,E')$.

2. Théorèmes généraux de finitude.

Nous suivons à peu près textuellement ici une note récente de L. Schwartz.

Théorème 1. *Soient u, v deux applications linéaires d'un ELC E dans un autre F. On suppose que u est un isomorphisme de E sur un sous-espace fermé de F, et que v est compacte. Alors w=u+v est un homomorphisme dont l'image est fermée, et le noyau de dimension finie.*

Soit V un voisinage disqué de 0 tel que $v(V)$ soit relativement compact, soit N le noyau de w, soit $W = V \cap N$. On a $u(W) = -v(W) \subset v(V)$, donc $u(W)$ est relativement compact donc précompact, donc W est précompact (u étant un isomorphisme). Ainsi N a un voisinage précompact W de 0, donc est de dimension finie (Chap. 1, Nº 13, th. 8). Il est immédiate que pour démontrer les autres assertions du théorème, on peut prendre les restrictions de u, v, w à un supplémentaire topologique de N (qui existe, N étant de dimension finie voir Chap. 2, Nº 5, th. de Hahn-Banach, corollaire 4), donc qu'on peut se ramener au cas où w est biunivoque. Il faut donc prouver alors que w est un <u>isomorphisme</u> sur un sous-espace <u>fermé</u> de F; il est immédiat que cela signifie aussi que si U est un ultrafiltre dans E tel que

$$\lim_U wx$$

existe dans F, alors U converge dans E. Soit p la semi-norme jauge de V soit $a = \lim_U p(x)$ $(0 \leqslant a \leqslant +\infty)$. Si a est fini, alors il existe A U tel que A est contenu dans un homothétique $(a+1)V$, donc $v(A)$ est relativement compact, donc $\lim_U vx$ existe, donc aussi $\lim_U ux = z$ (car $ux = wx - vx$). Or, $u(E)$ étant fermé, on aura $z = ux_o$ $(x_o \in E)$ et u étant un isomorphisme, on aura $\lim_U x = x_o$. Montrons qu'il est impossible qu'on ait $a = +\infty$. Sinon on aurait

$$\lim_U \frac{wx}{p(x)} = \lim_U w\left(\frac{x}{p(x)}\right) = 0,$$

d'où d'après ce qui précède $x/p(x) \longrightarrow x_o$, et on aurait

$$p(x_o) = \lim_U p\left(\frac{x}{p(x)}\right) = 1,$$

et $x(x_o) = 0$, ce qui contredit la biunivocité de w. CQFD.

<u>Théorème 2. Soient</u> u, v <u>deux applications linéaires d'un ELC</u> E <u>dans un autre</u> F. <u>On suppose que</u> u <u>est un *homomorphisme faible* de</u> E <u>sur</u> F, <u>tel que tout disque compact de</u> F <u>soit contenu dans l'image par</u> u <u>d'un disque compact de</u> E, <u>et que</u> v <u>est *compacte*. Alors</u> $w = u + v$ <u>est un homomorphisme faible de</u> E <u>sur un sous-espace fermé de codimension finie de</u> E.

Munissons E', F' de la topologie de la convergence uniforme sur les disques compacts (leurs duals sont donc E resp. F). v' est compacte (prop. 1), $u'(F')$ est faiblement fermé puisque u est un homomorphisme faible (Chap. 2, Nº 16, prop. 27) donc fermé, enfin u' est continue (Chap. 2, proposition 28) et c'est même un isomorphisme; car toute partie équicontinue du dual F de F' i.e. tout disque compact de F, est par hypothèse contenue dans l'image par $(u')' = u$ d'une partie équicontinue du dual de E', i.e. d'un disque compact de E, de sorte qu'il suffit d'appliquer Chap. 1, prop. 29, corollaire 1. Ainsi u' et v' satisfont aux hypothèses du théorème 1, donc $w' = u' + v'$ est un homomorphisme de F' sur un sous-espace fermé de E', ayant un noyau de dimension finie. Donc w est un homomorphisme faible (car $w(F')$ est faiblement fermé) et $w(E)$ est fermé (w' étant un homomorphisme, donc un homomorphisme faible) et même identique à l'orthogonal du noyau de w', donc de codimension finie, ce qui achève la démonstration.

<u>Corollaire 1</u>. <u>Soient</u> u, v <u>deux applications linéaires continues d'un espace</u> E <u>du type</u> ($\mathfrak{F}$) <u>dans un autre</u> F. <u>On suppose que</u> u <u>est sur</u>, v <u>compact</u>. <u>Alors</u> $w = u + v$ <u>est un homomorphisme de</u> E <u>sur un sous-espace fermé de codimension finie de</u> F.

En effet, u est un homomorphisme (th. des homomorphismes de Banach, Chap. 1, Nº 14, th. 9) et à fortiori un homomorphisme faible, et la condition de relevement des compacts dans l'énoncé du th. 2 est automatiquement vérifiée (Chap. 4, § 2, Nº 1, prop. 1). Le théorème 2 s'applique donc, et du fait que w est un homomorphisme faible résulte ici que c'est même un homomorphisme (Chap. 4, § 2, Nº 4, th. 3).

<u>Corollaire 2</u>. <u>Soient</u> E, F, G <u>trois espaces</u> ($\mathfrak{F}$), u <u>une application linéaire continue de</u> E <u>dans</u> G, v <u>une application linéaire</u> <u>c o m p a c t e</u> <u>de</u> F <u>dans</u> G,

telles que $u(E) + v(F) = G$. *Alors* u *est un homomorphisme de* E *sur un sous-espace fermé de codimension finie de* G.

En effet, soit $H = E \times F$, soient $\tilde{u}$ et $\tilde{v}$ les applications linéaires de H dans G définies par u et v ($\tilde{u}(x,y) = ux$, $\tilde{v}(x,y) = vy$), soit $\tilde{w} = \tilde{u} + \tilde{v}$, d'où $\tilde{u} = \tilde{w} + (-\tilde{v})$. $\tilde{w}$ est une application sur (en vertu de $u(E) + v(F) = G$) et $-\tilde{v}$ est compacte, donc en vertu du corollaire 1 $\tilde{u}$ est un homomorphisme de H sur un sous-espace fermé de codimension finie de G. Il en est donc manifestement de même de u.

Conjuguant les théorèmes 1 et 2, on obtient:

Corollaire 3. Soient u, v *deux applications linéaires d'un ELC* E *dans un autre* F, *on suppose que* u *est un isomorphisme de* E *sur* F, v *compacte. Alors* $w = u + v$ *est un homomorphisme de* E *sur un sous-espace fermé de codimension finie de* F, *dont le noyau est de dimension finie.*

Au Nº 4, nous verrons d'ailleurs que la dimension du noyau de w est égale à la codimension de l'image (on y suppose $E = F$, u application identique de E sur F, ce qui ne restreint manifestement pas la généralité).

3. *Généralités sur le spectre d'un opérateur.*

Nous commençons par quelques généralités de nature algébrique (valables pour des espaces vectoriels sur un corps arbitraire).

Proposition 2. Soit v un endomorphisme d'un espace vectoriel E. *Soit* E_n *le noyau,* F_n *l'image de* v^n (pour n entier $\geqslant 0$), *en particulier* $E_o = 0$, $F_o = E$.

1. *La suite* (E_n) *est soit strictement croissante, soit strictement croissante jusqu'à un rang fini* $n = \nu$, *à partir duquel elle est constante.*

2. *La suite* (F_n) *est soit strictement décroissante, soit strictement décroissante jusqu'à un rang fini* μ, *à partir duquel elle est constante.*

3. *Si les deux suites* (E_n) *et* (F_n) *finissent par rester stationaires, alors* $\nu = \mu$ (avec les notations de 1 et 2.), *i.e. elles restent stationnaires à partir du même rang. Posons alors* $E_\infty = E_\nu$, $F_\infty = F_\nu$ *alors* E *est somme directe de* E_∞ *et* F_∞, *et* v *induit un endomorphisme nilpotent dans le premier facteur, un automorphisme dans le second.*

Démonstration. On a

$$(v^p)^{-1}(E_q) = E_{p+q}, \qquad v^p(F_q) = F_{p+q}.$$

D'autre part, comme v^n permute à v, son noyau E_n et image F_n sont stables sous v. D'où aussitôt

$$E_{n+1} = v^{-1}(E_n) \supset E_n, \qquad F_{n+1} = v(F_n) \subset F_n,$$

donc (E_n) est croissante, (F_n) décroissante. Si on a

$$E_n = E_{n+1},$$

on a

$$(v^p)^{-1}(E_n) = (v^p)^{-1}(E_{n+1}),$$

i.e. $E_{n+p} = E_{n+p+1}$, i.e. la suite (E_n) est stationnaire à partir de n, et on voit de même que si $F_n = F_{n+1}$, la suite (F_n) est stationnaire à partir de n, ce qui achève de prouver 1 et 2. Dans les notations de 3., on aura prouvé $\mu \leqslant \nu$ si on prouve que $E_n = E_{n+1}$ et $F_n \neq F_{n+1}$ implique

$$F_{n+1} \neq F_{n+2}$$

(donc aussi $F_{n+1} \neq F_{n+2}$, puisque on a $E_{n+1} = E_{n+2}$, est de façon que (F_m) serait une suite strictement croissante). Si en effet on avait $F_{n+1} = F_{n+2}$, soit $v^n x$ un élément de F_n, alors

$$v^{n+1}x \in F_{n+1} = F_{n+2}$$

est de la forme $v^{n+2}y$, d'où

$$v^{n+1}(x - vy) = 0$$

d'où (puisque $F_n = F_{n+1}$)

$$v^n(x - vy) = 0,$$

i.e.

$$v^n x = v^{n+1}y \in F_{n+1},$$

on aurait donc $F_n = F_{n+1}$, contrairement à l'hypothèse. On prouve de façon toute analogue que $F_n=F_{n+1}$ et $E_n \neq E_{n+1}$ implique $E_{n+1} \neq E_{n+2}$, d'où aussitôt $\nu \leqslant \mu$, donc $\mu = \nu$. On a $E_\infty \cap F_\infty = 0$ car si x appartient à cette intersection, on a $x = v^\nu y$, $v^\nu x = 0$, d'où $v^{2\nu}y = 0$ et même $v^\nu y = 0$ (car

$E_\nu = E_{2\nu}$), i.e. $x = 0$. Soit $\tilde{v}$ l'opérateur dans E/E_∞ déduit de v par passage au quotient, $\tilde{v}$ est évidemment biunivoque (car $E_\nu = E_{\nu+1}$) montrons que c'est une application <u>sur</u>. En effet, autrement d'après de début de 3, appliqué a $\tilde{v}$ pour lequel l'entier correspondant a ν dans cet énoncé est 0, la suite de $\tilde{v}^n(E/E_\infty)$ serait strictement décroissante, donc la suite de leurs images réciproques $v^n(E) + E_\infty$ serait strictement décroissante, donc la suite des $v^n(E)$ ne pourrait pas finir par rester stationnaire, contrairement, à l'hypothèse. Ainsi $\tilde{v}$ est un automorphisme, il en est donc de même de $\tilde{v}^\nu$, en particulier $\tilde{v}^\nu(E/E_\infty) = E/E_\infty$, ce qui s'écrit aussi

$$v^\nu(E) + E_\infty = E,$$

i.e. $F_\infty + E_\infty = F$. Cela prouve donc que E est somme directe de E_∞ et F_∞. Dire que $\tilde{v}$ est un automorphisme, signifie alors aussi que v induit un automorphisme sur F_∞. D'autre part, comme v^ν est nul sur E_∞, la restriction de v à E_∞ est bien nilpotent, ce qui achève la démonstration.

<u>Corollaire</u>. <u>Supposons qu'on soit dans les conditions de 3., et que E_∞ soit de dimension finie. Alors la dimension du noyau de v est égale à la codimension de son image</u>.

En effet, il suffit de le vérifier séparément pour les restrictions de v à E_∞ et F_∞. Or dans l'espace de dimension finie E_∞ c'est bien connu, et d'autre part v induisant un automorphisme de F_∞, dimension du noyau et codimension de l'image de ce dernier sonttous deux nuls.

Rappelons qu'on appelle <u>spectre</u> d'un élément u d'un algèbre A, avec unité 1, l'ensemble des scalaires λ tels que $\lambda 1 - u$ ne soit pas inversible. En particulier si u est un opérateur linéaire dans un espace vectoriel E, quand on parle de son spectre, on sous-entend le spectre de u dans l'algébre de tous les endomorphismes de E, resp. de tous les endomorphismes <u>continus</u> de E quand u est un opérateur continu dans un EVT E; si d'ailleurs E est un espace $(\mathcal{F})$, les spectres de u dans les deux algèbres envisagées sont les mêmes, puisqu'on sait que si un opérateur continu $v = \lambda 1 - u$ est inversible dans l'ensemble de <u>tous</u> les endomorphismes linéaires, i.e. s'il est biunivoque et sur, alors son inverse est automatiquement continu (théorème des homomorphismes, Chap.1, Nº 14, th. 9). Soit toujours u un endomorphisme d'un vectoriel quelconque, un scalaire λ est dit <u>valeur propre</u> de u s'il existe x non nul dans E tel que $ux = \lambda x$; comme ceci s'écrit $(\lambda 1 - u)x = 0$, on voit qu'il revient au même de dire que $\lambda 1 - u$ n'est pas biunivoque, à fortiori non inversible, donc <u>une valeur propre est une valeur spectrale</u> (la réciproque étant évidemment fausse en général si E est de dimension infinie). Les $x \in E$ tels que $ux = \lambda x$ sont appelés les <u>vecteurs propres</u> associés à la valeur propre λ. L'espace des vecteurs propres relatifs à λ est donc aussi le noyau de $\lambda 1 - u = v_\lambda$. De façon générale, pour tout scalaire λ, posons $v_\lambda = \lambda 1 - u$, puis $E_{\lambda,n} = v_\lambda^{-n}(0)$, $F_{\lambda,n} = v^n(E)$, $E_\lambda = \bigcup_n E_{\lambda,n}$, $F_\lambda = \bigcup_n F_{\lambda,n}$. La suite $(E_{\lambda,n})$ est croissante,

$(F_{\lambda,n})$ décroissante; pour $\lambda = 0$, on retrouve les suites d'espaces envisagés dans la prop. 2 pour l'opérateur u lui-même. E_λ s'appelle aussi le <u>sous-espace spectral</u> de E relatif a λ, sa dimension est appelée <u>multiplicité spectrale</u> de λ.

<u>Proposition 3. Si λ et λ' sont deux scalaires distincts, alors</u> $E_\lambda \subset F_{\lambda'}$.

En effet, soit $x \in E_\lambda$, i.e. $(\lambda 1-u)^n x = 0$ pour un n convenable, il faut prouver que l'on peut écrire, quel que soit l'entier m, $x = (\lambda' 1 - u)^m y$.

Or, soit G l'espace vectoriel stable sous u (ou $\lambda 1 - u$, cela revient au même) engendré par x, il est de dimension <u>finie</u> $\leqslant n$; la restriction de u à G n'a que la seule valeur propre λ, donc $\lambda' 1 - u$ a une restriction à G inversible; il en est donc de même de $(\lambda' 1 - u)^m$, d'où $x \in (\lambda' 1 - u)^m G = G$, ce qui achève la démonstration.

Rappelons d'ailleurs que si E est de dimension finie, et le corps des scalaires algébriquement clos (p. ex. le corps des complexes), alors E est somme directe des sous-espaces spectraux E_λ correspondants aux valeurs propres de u; ces dernières sont aussi les racines du polynome <u>caractéristique</u> $P_u(\lambda) = \det.(\lambda 1 - u)$, de degré $n = \dim. E$; l'ordre de multiplicité d'une racine est égale à sa multiplicité spectrale.

<u>Proposition 4. Soit E un espace de Banach. L'ensemble des éléments inversibles de $L(E)$ est un ouvert,</u>

contenant l'ensemble des 1-u *avec* $\|u\| < 1$.

En effet si $\|u\| < 1$, la série

$$\sum_{0}^{\infty} u^n$$

est absolument convergente, et on vérifie trivialement que sa somme est un inverse de $1 - u$. Soit alors v un élément inversible de $L(E)$, alors pour $w \in L(E)$,

$$v + x = v(1 - (-v^{-1}w))$$

est inversible si $\| v^{-1}w\| < 1$, donc à fortiori si

$$\| v^{-1}\| \, \| w\| < 1,$$

donc en tous cas pour w assez petit, ce qui achève la démonstration.

Corollaire. Pour tout $u \in L(E)$, *le spectre* $\sigma(u)$ *de* u *est une partie compacte du corps des scalaires;* $\lambda \in \sigma(u)$ *implique* $|\lambda| < \|u\|$.

Par définition, $\sigma(u)$ est l'image réciproque, par l'application $\lambda \longrightarrow \lambda 1 - u$, de l'ensemble des éléments non inversibles de $L(E)$, comme ce dernier est fermé en vertu de prop. 3, il en est de même de $\sigma(u)$. D'ailleurs si

$$\lambda > \|u\|,$$

alors en vertu de prop. 3

$$1 - \frac{1}{\lambda} u$$

est inversible, donc aussi $\lambda 1 - u$, donc λ n'appartient pas à $\sigma(u)$. En d'autres termes $\lambda \in \sigma(u)$ implique bien

$$\lambda \leqslant \|u\| ;$$

le spectre de u est donc aussi borné, donc compact puisqu'il est fermé. - Noter que la proposition 3 et son corollaire restent valables pour une algèbre normée complète avec unité quelconque.

Si u est un opérateur continu dans un ELC non normable, son spectre n'est en général ni fermé, no borné (voir exercice 1). On peut cependant dans certains cas, se ramener au cas d'un espace de Banach grâce à la

Proposition 5. Soit E un ELC, F un sous-espace vectoriel de E muni d'une topologie localement convexe plus fine que la topologie induite par E. Soit u une application continue de E dans F, désignons par φ l'application identique de F dans E. Alors exception faite éventuellement du scalaire 0, le spectre de φu dans $L(E)$ est identique au spectre de $u\varphi$ dans $L(F)$. Si λ est un élément non nul du spectre, alors le sous-espace propre ainsi que le sous-espace spectral correspondant est le même pour $u\varphi$ et φu.

Il faut d'abord montrer que si λ est un scalaire non nul, alors il revient au même de dire que $\lambda 1 - \varphi u$ est inversible dans $L(E)$, ou $\lambda 1 - u\varphi$ inversible dans $L(F)$. Divisant par le scalaire λ, et remplaçant dans les notations

$-\frac{1}{\lambda}u$ par u, on est ramené à prouver le même chose pour

$$1 + \varphi u \qquad \text{et} \qquad 1 + u\varphi .$$

Or supposons que $1 + \varphi u$ ait un inverse dans $L(E)$, qu'on pourra écrire $1 + v$, $v \in L(E)$, on aura donc

$$(1) \qquad \varphi u + v + \varphi uv = \varphi u + v + v\varphi u = 0.$$

De la première relation (1) on tire $v = \varphi w$, où

$$w = -u(1 + v) \in L(E,F)$$

et en remplaçant v par cette valeur dans (1) on trouve

$$\varphi(u + w + u\varphi w) = \varphi(u + w + w\varphi u) = 0$$

d'où, en supprimant le facteur φ à gauche (ce qui est possible, φ étant biunivoque) et en multipliant les relations obtenues par φ à droite:

$$u\varphi + w\varphi + (u\varphi)(w\varphi) = u\varphi + w\varphi + (w\varphi)(u\varphi) = 0$$

ce qui exprime précisément que $1 + w\varphi \in L(F)$ est un inverse de $u\varphi$ dans $L(F)$. On prouve de façon toute analogue que si $u\varphi$ est inversible, il en est de même de u. Soit alors λ une valeur spectrale non nulle de $u\varphi$, φu, il est trivial que le sous-espace propre dans F correspondant à u est l'intersection de F avec le sous-espace propre de E correspondant à φu; or ce dernier est déjà contenu dans F, car $\varphi ux = \lambda x$ implique $x = \frac{1}{\lambda}\varphi ux \in F$. D'où l'identité des sous espaces propres. On en conclut plus généralement que pour tout n, les noyaux de $(\lambda 1 - \varphi u)^n$ dans E et de $(\lambda 1 - u\varphi)^n$ dans F sont les mêmes, car on voit aussitôt que, au facteur λ^n

près, ces deux opérateurs peuvent s'écrire

$$1 + \varphi u_n \qquad \text{et} \qquad 1 + u_n \varphi ,$$

pour $u_n \in L(E,F)$ convenable. D'où l'identité des sous-espaces spectraux de φu et $u\varphi$, ce qui achève la démonstration.

<u>Corollaire</u>. <u>Soit</u> u <u>un opérateur borné dans un ELC</u> E, <u>on suppose</u> E <u>quasi-complet, ou plus généralement qu'il existe un voisinage</u> V <u>de</u> 0 <u>et un disque borné</u> B <u>dans</u> E, <u>tels que</u> $u(V) \subset B$ <u>et que l'espace</u> E_B <u>engendré par</u> B, <u>muni de la norme jauge de</u> B, <u>soit complet</u>. <u>Alors le spectre de</u> u <u>est une partie compacte du corps des scalaires</u>.

En effet, u peut être considéré comme un opérateur continu de E dans E_B donc en vertu de la proposition 4, abstraction faite de 0, son spectre dans $L(E)$ est identique au spectre d'un opérateur continu dans l'espace de Banach E_B, qui est compact d'après prop. 3 corollaire. Cela achève la démonstration si 0 appartient au spectre de u dans $L(E)$, i.e. c'est un isomorphisme de E sur E, donc B est un voisinage borné de 0, de sorte que E est isomorphe à E_B, et qu'on peut donc appliquer directement la prop. 3, corollaire.

<u>Exercice 1</u>. Soit M un espace localement compact, soit $E = C(M)$. Si $f \in E$, désignons par u_f l'opérateur

$$g \longrightarrow fg$$

dans E. Montrer que le spectre de u_f est identique à $f(M)$.

En conclure que toute partie non vide du corps des scalaires peut être considérée comme le spectre d'un opérateur continu dans un ELC convenable; dans le cas où la partie envisagée est réunion d'une suite de compacts, c'est même le spectre d'un opérateur continu dans un espace de Fréchet convenable, dans le cas où c'est une partie compacte, c'est le spectre d'un opérateur continu dans un espace de Banach E (prendre $E = C(M)$), M étant le compact envisagé.

<u>Exercice 2</u>. Soit E un espace de Banach complexe, soit $u \in L(E)$; considérons la fonction

$$\varphi(\lambda) = (\lambda 1 - u)^{-1}$$

définie dans le complémentaire du spectre de u, à valeur dans $L(E)$. Montrer que $\varphi(\lambda)$ tend vers 0 quand $|\lambda|$ tend vers l'infini, et que pour toute forme linéaire continue w sur $L(E)$, $\langle \varphi(\lambda), w \rangle$ est fonction holomorphe de λ. En conclure que le spectre de u n'est pas vide sinon appliquer le théorème de Liouville aux fonctions entières, nulles à l'infini $\langle \varphi(\lambda), w \rangle$).

<u>Exercice 3</u>. Soit E l'espace des fonctions continues f sur R telles que

$$\lim_{t \to -\infty} f(t)\, e^{t} = 0.$$

Munir E d'une topologie naturelle qui en fasse un espace de Fréchet. Soit u l'opérateur de translation $uf(t) = f(t - h)$, où $h > 0$. Montrer que u est un opérateur continu dont le spectre est vide (prouver que la série

$$\sum_{0}^{\infty} \lambda^n u^n$$

converge dans $L_b(E)$ quelque soit λ). Soit u un opérateur <u>borné</u> dans un ELC E, montrer que le spectre de u n'est pas vide (utiliser exercice 2).

<u>Exercice 4</u>. Soit u un opérateur linéaire dans un espace vectoriel E. Avec les notation de prop. 3, montrer que les sous-espaces spectraux E_λ (λ scalaire variable) sont linéairement indépendants.

4. <u>La théorie de Riesz des opérateurs compacts</u>.

<u>Lemme</u>. <u>Soit</u> u <u>un opérateur compact dans un ELC</u> E, <u>soit</u> $w = 1 + u$. <u>Alors la suite des noyaux des itérés</u> w^n <u>finit par rester stationnaire</u>.

<u>Démonstration</u>. Soit V un voisinage de 0 dans E et A un disque compact, tels que $u(V) \subset A$. Alors l'espace E, engendré par A, muni de la norme jauge de A, est un espace de Banach, l'application identique φ de E_A dans E est compacte, et u définit une application linéaire continu u_o de E dans E_A; d'autre part, l'opérateur $u_o\varphi$ induit par u dans E_A est compact, puisque u_o l'est. En vertu de proposition 5 pour prouver le lemme, il suffit de le prouver pour l'opérateur compact $u_o\varphi$ dans l'espace de Banach E_A. On peut donc supposer que E est un espace de Banach. On procède par l'absurde, si la suite des noyaux E_n de v^n était

strictement croissante, on pourrait trouver une suite infinie (y_n) telle que $y_n \in E_{n+1}$, $\|y_n\| \leqslant 1$, la distance de y_n à E_n étant au moins égale à $1/2$ (voir Chap. 1, Nº 13, lemme). On aurait alors pour $m > n$:

$$uy_n - uy_m = (1 - v)y_m - (1 - v)y_n = y_m - x,$$

où

$$x = vy_m + (1 - v)y_n \in E_m,$$

par suite

$$\| uy_n - uy_m \| \geqslant \frac{1}{2} .$$

Or la suite (uy_n) est relativement compacte comme image d'une suite extraite de la boule unité, et doit donc avoir une valeur d'adhérence, ce qui est absurde, et achève la démonstration.

Appliquant le lemme a $v' = 1 + u'$ dans E' muni de la topologie de la convergence uniforme sur les disques compacts (qui rend u' un opérateur compact - prop. 1), on voit que la suite des noyaux des itérés v'^n finit par rester stationnaire. Or $v'^n = (v^n)'$ et on peut écrire

$$v^n = (1 + u)^n = 1 + u_n,$$

où

$$u_n = nu + \frac{n(n-1)}{2} u^2 + \ldots + u^n$$

est un opérateur compact dans E. Par suite (th. 3, corollaire 3) v^n est un homomorphisme de E sur un sous-espace fer de codimension finie de E, qui est donc l'orthogonal du noyau de $(v^n)'$. Comme ce dernier reste constante pour n assez grand, on trouve donc que la suite des $v^n(E)$ finit par rester stationnaire, et leur intersection est un sous-espace fermé F_∞ de codimension finie. Appliquant prop. 2, 3º, on voit donc que les suites $v^{-n}(0)$ et $v^n(E)$ sont stationnaires à partir du même rang ν et que E est somme directe (algébrique) de

$$E_\infty = v^{-\nu}(0) \quad \text{et} \quad F_\infty = v^\nu(E).$$

C'est même leur somme directe topologique, F_∞ étant fermé et de codimension finie (Chap. 1, Nº 12, th. 7, cor. 3). De plus, v est nilpotent dans E_∞, et est dans F_∞ un automorphisme au sens algébrique (prop. 2, 3º), i.e. une application biunivoque de F_∞ sur F_∞. Comme c'est de plus un homomorphisme dans F_∞ en vertu de th. 2, corol. 2 appliqué à l'opérateur $v = 1 + u$ induit sur F_∞ par v, on voit donc que ce sera même un isomorphisme de F_∞ sur lui même. En résumé, on peut donc énoncer le théorème fondamental de la théorie de Riesz:

Théorème 5. Soit u un opérateur compact dans un ELC E, soit $v = 1 + u$. Alors v est un homomorphisme de E sur un sous-espace fermé de E, de codimension finie égale à la dimension du noyau. Soit

$$E_\infty = \bigcup_n v^{-n}(0), \qquad F_\infty = \bigcap_n v^n(E),$$

alors E_∞ et F_∞ sont des supplémentaires topologiques, stables par u et v, E_∞ de dimension finie. v

induit un opérateur nilpotent dans E et un automorphisme vectoriel topologique dans F.

(La première assertion du théorème est contenue dans th. 2, cor. 3 et dans prop. 2, corollaire).

Corollaire 1. L'image $v(E)$ est l'orthogonal du noyau $v'^{-1}(0)$ de v' et l'image $v'(E')$ est l'orthogonal du noyau $v^{-1}(o)$ de v.

La première assertion résulte du fait que $v(E)$ est fermé, la seconde du fait que $v'(E')$ est fermé dans E' muni de la convergence uniforme sur les disques compacts (grâce à prop. 1 qui permet d'appliquer le th. 3 à $v'=1+u'$), donc aussi dans E' faible.

Corollaire 2. Les conditions suivantes sont équivalentes:

a) v est biunivoque;

b) v est sur;

c) v est un automorphisme.

a'), b'), c') énoncés symétriques pour v' (considéré comme opérateur dans E' muni p. ex. de la topologie de la convergence uniforme sur les disques compacts).

En effet, l'équivalence de a. et b. résulte de l'identité entre dimension du noyau et codimension de l'image de v; de plus v étant un homomorphisme, a. et b. impliquent c., et lui sont donc aussi équivalents. Cela prouve aussi l'équivalence de a'., b'., c'.; enfin, l'équivalence de b. et a'.

résulte aussitôt du corollaire 1, qui implique même, plus généralement:

Corollaire 3. La dimension du noyau de v, la dimension du noyau de v', la codimension de l'image de v et enfin la codimension de l'image de v', sont égales.

Corollaire 4. Posons

$$E'_{\infty} = \bigcup_{n} v'^{-n}(0), \qquad F'_{\infty} = \bigcap_{n} v'^{n}(E').$$

Alors E'_{∞} est l'orthogonal de F_{∞} et F'_{∞} est l'orthogonal de E_{∞}. En particulier, les dimensions de E_{∞} et E'_{∞} sont les mêmes.

Introduisant en effet l'entier ν a partir duquel les 4 suites $(v^{-n}(0))$, etc. deviennent constantes, il suffit d'appliquer le corollaire 1 à $v^{n} = 1 + u_n$ (où u_n est un opérateur compact dans E).

Proposition 6. Soit u un opérateur compact dans un ELC E. Pour toute valeur non nulle λ du spectre de u, il existe un vecteur propre non nul, i.e. λ est valeur propre de u. Le sous-espace spectral correspondant E_{λ} de E est de dimension finie, égale à la dimension du sous-espace spectral E'_{λ} correspondant au transposé u' de u, u et u' ont les mêmes valeurs propres non nulles, avec les mêmes multiplicités.

Il suffit d'appliquer les corollaires précédents à l'opérateur compact $-\frac{1}{\lambda}u$ et l'opérateur correspondant

$$1 - \frac{1}{\lambda} u = \frac{1}{\lambda} (\lambda 1 - u).$$

Corollaire. Les sous-espaces E_λ $(\lambda \neq 0)$ sont topologiquement libres.

On entend par la que pour tout $\lambda \neq 0$, existe un sous-espace vectoriel fermé de E contenant les $E_{\lambda'}$ (λ' distinct de λ et de 0) et dont l'intersection avec E_λ est nulle. Or il suffit de prendre F_λ, avec les notations de proposition 3.

Théorème 4. Soit u un opérateur compact dans un ELC E. Alors le spectre de u est un ensemble compact, et tout point non nul du spectre est isolé.

Énoncé équivalent: le spectre de u est fini, ou est formé de 0 et des points d'une suite qui converge vers 0.

Démonstration. On sait que le spectre de u est compact (prop. 5, corollaire), soit alors λ un élément non nul du spectre, prouvons que c'est un point isolé. Avec les notations de prop. 3, E est somme directe topologique des sous-espaces fermés E_λ et F_λ, stables sous u. Si u_1 et u_2 sont les opérateurs induits par u, on a manifestement

$$\sigma(u) = \sigma(u_1) \cup \sigma(u_2).$$

Or $\sigma(u_1)$ est réduit à λ et $\sigma(u_2)$ est compact (d'après ce qui précéde) et ne contient pas λ (autrement en effet F contiendrait un vecteur propre non nul correspondant a λ), d'où aussitôt la conclusion.

Exercice 1. Soit E un ELC.

a) Si u est un opérateur linéaire compact (resp. borné) dans E et si $v = 1 + u$ est inversible dans $L(E)$, montrer que l'inverse de v a la même forme que v (utiliser le fait que les opérateurs compacts resp. bornés forment un ideal bilatère dans $L(E)$).

b). En conclure qu'il revient au même de dire que v est inversible dans $L(E)$, ou dans l'algèbre $L(E_o)$ des opérateurs linéaires continus pour une topologie localement convexe sur E plus fine que la topologie localement convexe sur E plus fine que la topologie donnée, donnant les mêmes parties bornées, et telle que $L(E_o) \subset L(E)$.

c) Soit u un opérateur compact dans E; soit E_o l'espace E muni d'une topologie localement convexe telle que tout opérateur compact dans E soit continu dans E_o. Montrer que il revient au même de dire que $1 + u$ soit inversible dans $L(E)$ ou $L(E_o)$.

Exercice 2. Soit (λ_i) une suite tendant vers 0, soit E l'espace ℓ^p ou l'espace c_o $(1 \leq p \leq +\infty)$, u l'opérateur de multiplication par (λ_i) dans E. Montrer que le spectre de u est formé de 0 et de l'ensemble des (λ_i). En conclure que toute partie compacte non vide du corps des scalaires, dont tout point non nul est isolé, est le spectre d'un opérateur compact convenable dans E. Montrer que la proposition 6 et ses corollaires devient fausse si on n'exclut pas la valeur spectrale 0.

Exercice 3. a) Développer la notion de fonction holomorphe, ou méromorphe, sur un ouvert du plan complexe, à valeurs dans un ELC quelconque E.

b) Montrer que si u est un opérateur linéaire continu dans un espace de Banach complexe E, alors la fonction

$$\lambda \longrightarrow (\lambda 1 - u)^{-1},$$

définie dans le complémentaire du spectre de u, à valeurs dans l'espace de Banach $L(E)$, est holomorphe. Généralisation au cas où u est un opérateur borné dans un ELC E quelconque, $L(E)$ étant muni de la topologie de la convergence bornée. (Voir Nº 3, exercice 2).

c) Soit u un opérateur compact dans l'ELC complexe E. Montrer que la fonction $(1 - zu)^{-1}$ à valeurs dans $L_b(E)$ est méromorphe dans tout le plan complexe. (Il suffit d'après b) de montrer la méromorphie en un point z tel que $1/z$ soit valeur propre; utiliser pour cela la décomposition spectrale $E = E_{1/z} + F_{1/z}$).

§ 3. Critères généraux de compacité.

1. Le théorème de Šmulian.

Proposition 1. Soit E un espace compact, F un espace métrique, $\mathfrak{S}$ un ensemble de parties de E recouvrant E, (f_i) une suite relativement compacte dans $C_{\mathfrak{S}}(E,F)$. Alors il existe une suite extraite qui conver-

<u>ge dans</u> $C_{\mathfrak{S}}(E,F)$.

Soit A l'adhérence compacte de l'ensemble de f_i, sur A la $\mathfrak{S}$-convergence est identique à la convergence simple, et même à la convergence simple dans une partie dense de E, donc il suffit de trouver une suite extraite de (f_i) qui converge en chaque point de E ou même d'une partie dense. Cela nous ramène d'ailleurs au cas où $\mathfrak{S}$ est l'ensemble des parties uniponctuelles de E. Si E est métrisable, donc admet une suite dense (x_i) puisqu'il est compact, A est métrisable pour la convergence simple dans l'ensembles des (x_i), d'où la conclusion dans ce cas. Si on ne suppose plus E métrisable, en considère l'espace compact $\tilde{E}$ quotient de E par relation d'équivalence "$f_i(x) = f_i(y)$ pour tout i", alors $C_s(\tilde{E},F)$ s'identifie à un sous-espace fermé de $C_s(E,F)$. D'autre part, $\tilde{E}$ est métrisable car sa topologie est par raison de compacité la moins fine de celles qui rendent continues la suite des applications f_i dans l'espace métrique F. On est ramené au cas déjà traité.

<u>Corollaire 1. Dans la prop. 1 au lieu de supposer</u> E <u>compact, il suffit de supposer qu'il existe une suite de parties compactes de</u> E <u>dont la réunion est dense.</u>

En effet, il résulte alors de la prop. 1 que l'on peut extraire de (f_i) une suite qui converge en chaque point de E_1, de celle-ci une suite qui converge en chaque point de E_2 etc., enfin le procédé diagonal donne une suite extraite de (f_i) qui converge en chaque point de $\bigcup E_i$, ce qui achè ve la démonstration puisque cet ensemble est dense.

Corollaire 2. *Soit E un ELC séparé tel qu'il existe dans E' une suite de parties faiblement compactes dont la réunion soit totale. Alors de toute suite relativement compacte de E, on peut extraire une suite convergente.*

On peut évidemment supposer que la réunion des parties faiblement compactes de E' envisagées est même faiblement dense. Interprétant alors comme toujours E comme un espace de fonctions scalaires continues sur E' faible, muni d'une topologie de $\mathfrak{S}$-convergence, il suffit d'appliquer le cor. 1 (aux notations près). En particulier, supposons qu'il existe une suite de voisinages de 0 dans E pour une topologie compatible avec la dualité (E,E'), i.e. de voisinages pour $\tau(E,E')$, dont l'intersection soit réduite à 0; on voit aussitôt par polarité que cela signifie qu'il existe dans E' une suite de disques faiblement compacts dont la réunion est dense. Dans ce cas, on peut donc appliquer le corollaire 2. En particulier, si E est l'espace faible associé à un ELC métrisable, on trouve le

Théorème 1 (Šmulian). *Soit E un ELC métrisable, alors de toute suite faiblement relativement compacte de E, on peut extraire une suite faiblement convergente.*

Exercice 1. Montrer que la prop. 1 devient fausse si on ne suppose plus F métrisable (prendre E réduit à un point).

Exercice 2. Soient E un espace compacte, F un espace métrique, A une partie quelconque de $C_s(E,F)$, f une valeur d'adhérence de A. Montrer que f est adhérente à une partie dénombrable de A. (Pour tout entier $n > 0$, montrer qu'il existe une partie finie F_n de A telle que pour tout

$$x = (x_1,\dots,x_n) \in E^n$$

existe $f_x \in F_n$ telle que

$$d(f_x(x_i),f(x_i)) \leqslant \frac{1}{n}$$

pour $1 \leqslant i \leqslant n$).

Exercice 3. Soit E un ELC séparable, alors les parties faiblement compactes du dual sont métrisables, donc de toute suite faiblement relativement compacte dans E, on peut extraire une suite faiblement convergente. Montrer que cet énoncé devient faux si E n'est pas séparable (exemple: $E = \ell^\infty$ et la suite des formes coordonnées sur E).

2. Le théorème d'Eberlein.

Proposition 2. Soit E un espace compact, F un espace métrique, $\mathfrak{S}$ ensemble de parties de E recouvrant E, A une partie de $C_{\mathfrak{S}}(E,F)$. Pour que A soit relativement compact, il faut et il suffit que toute suite extraite de A admette une valeur d'adhérence dans

$$C_{\mathfrak{S}}(E,F).$$

Il suffit de prouver que c'est suffisant; or la condition énoncée implique que A est précompact (critère de Weil, Chap. 0), il suffit donc de prouver que l'adhérence de A dans $C_{\mathfrak{S}}(E,F)$ est complète. Il suffit pour ceci de prouver que son adhérence pour la convergence simple est complète pour la convergence simple et, à fortiori pour la $\mathfrak{S}$-convergence (Chap. 0, Nº 4, prop. 6, corollaire), ce qui nous ramène au cas de la convergence simple. Pour tout $x \in E$, $A(x)$ est une partie de E telle que toute suite extraite admette une valeur d'adhérence, donc $A(x)$ est relativement compact dans F puis que F est métrique. En vertu de Tychonoff, A est donc relativement compact dans $\mathfrak{F}_s(E,F) = F^E$, espace de toutes les applications de E dans F, muni de la convergence simple. Il rest donc à prouver que l'adhérence de A dans $\mathfrak{F}_s(E,F)$ est contenue dans $C_s(E,F)$ donc qu'une application f de E dans F adhérente à A pour la convergence simple, est continue. On procède par l'absurde. Autrement il existe un $a \in E$ où f n'est pas continue, donc un $\varepsilon > 0$ tel que pour tout voisinage V de a, existe $x \in V$ avec

$$d(f(x),f(a)) \geqslant \varepsilon .$$

On peut alors construire par récurrence simultanée une suite (f_i) extraite de A et une suite (x_i) extraite de E, avec $x_0 = a$, telles qu'on ait

1. $d(f_n(x_i),f(x_i)) \leqslant \frac{1}{n}$ pour $0 \leqslant i \leqslant n-1$,
2. $d(f_i(x_n),f_i(x_0)) \leqslant \frac{1}{n}$ pour $0 \leqslant i \leqslant n$,
3. $d(f(x_n),f(x_0)) \geqslant \varepsilon$.

(Possibilité immédiate, supposant les deux suites construites jusqu'au rang $n-1$, on détermine f_n de façon qu'on ait 1. grâce au fait que f est adhérente a A, puis x_n de façon à satisfaire à 2 et 3, grâce au fait que l'ensemble des x_n de E satisfaisant à 2 est un voisinage de $x_0=a$). Soit g une valeur d'adhérence de la suite (f_n) dans $C_s(E,F)$ (qui existe par hypothèse sur A) et x une valeur d'adhérence de (x_n) dans E. On a $f(x_i) = g(x_i)$ pour tout i en vertu de 1., $f_i(x) = f_i(x_o)$ pour tout i en vertu de 2., d'où compte tenu de 1., $d(f_n(x),f(x_o)) \leqslant 1/n$ pour tout n, d'où $g(x) = f(x_o)$. Or g étant une fonction continue, $g(x)$ est valeur d'adhérence de $(g(x_i))$, donc $f(x_o)$ est valeur d'adhérence de $(f(x_i))$, ce qui contredit 3. et achève la démonstration.

Théorème 2 (Eberlein). *Soit E un ELC, A une partie de E. Supposons que toute suite extraite de A admette une valeur d'adhérence, et que l'enveloppe convexe fermée de A soit complète pour $\tau(E,E')$. Alors A est relativement compact.*

Comme A sera précompact, il suffit de prouver que son adhérence est complète, et à fortiori que son adhérence faible est faiblement complète, ce qui ramène au cas où la topologie envisagée sur E est la topologie faible. Comme $\overline{\Gamma}(A)$ est complète pour $\tau(E,E')$, elle sera fermée dans le complété $\hat{E}$ de E pour $\tau(E,E')$, donc faiblement fermée dans cet espace puisque c'est une partie convexe, il suffit donc de prouver que l'adhérence faible de A dans $\hat{E}$ est faiblement compacte, puisque cette adhérence est contenue dans E. Cela nous ramène au cas où E est complet pour $\tau(E,E')$. Comme A sera manifestement borné, donc relativement compact dans le dual algébrique de E' muni de la topologie faible, il suffit de prouver que toute forme X sur E', adhérente à A pour la convergence simple, est dans E. Or pour toute partie faiblement compacte K de E', la restriction X_K de X a F est adhérente pour la convergence simple à l'ensemble A_K des restrictions des $x \in A$ à K. Il est immédiat que toute suite extraite de A_K a une valeur d'adhérence dans $C_s(K)$, donc en vertu de prop. 2, A_K est relativement compact dans $C_s(K)$, donc X_K est continu. Comme ceci est vrai pour tout disque faiblement compact K dans E' cela implique que X est dans E puisque E est complet pour $\tau(E,E')$, (Chap. 2, Nº 14, th. 10, corollaire 3). Appliquant le théorème 2 pour une topologie faible, on obtient l'énoncé habituel (en fait équivalent):

<u>Corollaire</u>. <u>Soit</u> E <u>un ELC quasi-complet</u>. <u>Pour qu'une partie de</u> E <u>soit faiblement relativement compacte</u>, <u>il faut et il suffit que toute suite extraite admette une valeur d'adhérence faible</u>.

<u>Théorème 3</u>. <u>Soit</u> K <u>un espace compact</u>. A <u>une partie de</u> C(K). <u>Pour que</u> A <u>soit faiblement relativement compacte</u>, <u>il faut et il suffit qu'elle soit bornée</u>, <u>et</u>

<u>qu'elle soit relativement compacte dans</u> $C_s(E)$.

Nécessité triviale. Pour la suffisance, en vertu du théorème d'adhérence faible dans $C(K)$, or en vertu du Nº 1, prop. 1, on peut en extraite une suite que converge simplement vers une fonctions continue. La conclusion résulte alors de la

<u>Proposition 3</u>. <u>Pour qu'une suite</u> (f_i) <u>dans</u> $C(K)$ (K, <u>espace compact</u>) <u>converge faiblement vers une</u> $f \in C(K)$, <u>il faut et il suffit qu'elle soit bornée, et converge vers</u> f <u>pour la convergence simple</u>.

Nécessité triviale. Comme les formes linéaires continues sur $C(K)$ sont les mesures sur K, la suffisance résulte du théorème de Lebesgue.

<u>Exercice 1</u>. Disons qu'un espace a la propriété (E) si toute partie dont toute suite extraite admet une valeur d'adhérence, est relativement compacte. Soit E un espace localement compact ou métrisable, $\mathfrak{S}$ un ensemble de parties de E recouvrant E, F un espace uniforme. Montrer que pour que $C_{\mathfrak{S}}(E,F)$ ait la propriété (E), il faut et il suffit que F l'ait. (Se ramener au cas E compact, puis au cas de la convergence simple, enfin au cas ou F est le corps des réeles, en regardant la topologie de F comme la moins fine de celles qui rendent continues une certaine famille de fonctions réelles sur F).

<u>Exercice 2</u>. Soit E un ELC, A une partie convexe de E.

a) Pour que A soit faiblement relativement compact, il faut et il suffit que $\bar{A}$ soit complet et que son image par toute application linéaire continue de E dans un espace de Banach arbitraire F soit faiblement relativement compact. (Noter que E est isomorphe à un sous-espace vectoriel topologique du produit d'une famille de Banachs).

b) Montrer que dans cet énoncé, on peut se borner à prendre pour F l'espace ℓ^∞ des suites bornées. (On peut supposer grâce à a. que E est un Banach, et on peut de plus supposer A disqué. Il faut prouver que l'application identique de $G = E_A$ dans E est faiblement compacte, ou encore que la transposée applique la boule unité de E' dans une partie de G' relativement compacte pour $\sigma(G',G")$ - Chap. 2, Nº 18, th. 13, cor. 3. Montrer qu'il suffit de prouver que l'image de toute suite (x_i') extraite de la boule unité de E' est relativement compacte pour $\sigma(G',G")$, et envisager alors l'application $ux = (\langle x,x_i'\rangle)$ de E dans ℓ^∞.

c) Supposons que E soit séparable. Alors dans l'énoncé a. on peut supposer que F est l'espace c_0.(Avec les notations de b., noter qu'il suffit de prouver que l'application $E' \longrightarrow G'$ a une restriction à la boule unité de E' qui est continue pour $\sigma(E',E)$ et $\sigma(G',G")$, et même seulement continue à l'origine, et que la boule unité de E' étant faiblement métrisable, il suffit de prouver que pour toute suite (x_i') dans E' qui tend vers zéro pour $\sigma(E',E)$, son image dans G tend vers 0 pour $\sigma(G',G'')$). N.B. L'hypothèse que E est séparable est essentielle, sinon une partie A de E peut ne pas être faiblement relativement compacte et pourtant son image dans c_o pour toute application linéaire continue être même compacte. Exemple: $E = \ell^\infty$, A partie bornée faiblement métrisable et non faiblement relativement compacte de ℓ^∞, par exemple une suite de Cauchy faible non faiblement convergente (voir № 3, exercice supplémentaire 4).

Exercice 3. Prouver l'analogue de l'exercice 2, en remplaçant compacité faible par compacité. (N.B. La preuve se fait de la même façon, mais le théorème d'Eberlein devient inutile).

Exercice 4. Soit E un ELC, A une partie convexe de E. Pour que A soit faiblement relativement compact, il faut et il suffit que son adhérence soit complète, et que pour tout suite décroissante de parties convexes A_i de A, on ait $\bigcap_i \bar{A}_i \neq \emptyset$. (Grâce à exercice 2, a. se ramener au cas où E est un Banach, alors il suffit de prouver que toute suite (x_i) extraite de A a une valeur d'adhérence faible. Cela raméne au cas où E est séparable, donc où il existe une suite faiblement dense (x'_i) dans E'. En extrayant au besoin de (x_i) une suite partielle, on peut supposer que pour tout j,

$$\lim \langle x_i, x'_j \rangle$$

existe. Soit alors A_n l'enveloppe convexe de l'ensemble des x_i avec $i \geqslant n$, soit $x \in \bigcap_n \bar{A}_n$, prouver que x_i tend faiblement vers x, en utilisant Chap. 2, № 18, exercice 1).

Exercice 5. Soit E un espace complètement régulier dont la topologie T est plus fine qu'une certaine topologie métrisable T_o. Soit A une partie de E. Les conditions suivantes sont équivalentes:

a) A est relativement compact.

b) Toute suite extraite de A admet une valeur d'adhérence.

c) Pour toute suite extraite de A, il existe une suite extraite de cette dernière qui est convergente (Prouver que b) implique c), en regardant la topologie T comme la borne supérieure d'une famille de topologies métrisables T_i plus fines que T_o. Montrer ensuite que a) implique que l'adhérence de A est métrisable).

Exercice 6. Soit K un espace compacte, A et B deux parties faiblement relativement compactes de $C(K)$, montrer que l'ensemble AB des fg $(f \in A,\ g \in B)$ est faiblement relativement compact. (Utiliser le th. 3). Pour un résultat plus profond et plus général, voir § 4, Nº 2, th. 2, corollaire 1.

Exercice 7. Soit M un espace localement compact (f_i) une suite dans $C_o(M)$. Pour que ce soit une suite de Cauchy faible, il faut et il suffit qu'elle soit bornée, et converge en chaque point de M (Utiliser le th. de Lebesgue).

3. Le théorème de Krein.

Théorème 4 (Krein). *Soit E un ELC, A une partie faiblement compacte de E. Pour que son enveloppe convexe fermé $\overline{\Gamma}(A)$ soit faiblement compacte, il faut et il suffit qu'elle soit complète pour la topologie donné.*

D'ailleurs, appliquant le même énoncé à E muni de $\tau(E,E')$ (ce qui ne change pas la topologie faible correspondante) on voit qu'il suffit que $\overline{\Gamma}(A)$ soit complet pour $\tau(E,E')$, ce qui est moins restrictif à priori.

Corollaire 1. Soit E un ELC quasi-complet, alors dans E, l'enveloppe convexe fermée d'une partie faiblement compacte est faiblement compacte.

Le théorème 4 est contenu dans l'énoncé suivant, plus général en apparence.

Corollaire 2. Soit E un ELC, A une partie compacte de E. Pour que son enveloppe convexe fermée $\overline{\Gamma}(A)$ soit compacte, il faut et il suffit qu'elle soit complète pour $\tau(E,E')$.

(Le th. 4 s'obtient quand on applique cet énoncé à un espace E muni d'une topologie faible).

La condition est nécessaire, puisqu'une partie compacte de E est complète, donc complète pour $\tau(E,E')$. Réciproquement, supposons $\overline{\Gamma}(A)$ complet pour $\tau(E,E')$. Comme $\overline{\Gamma}(A)$ est précompact pour la topologie donné, il suffit de prouver qu'il est complet pour cette topologie, et à fortiori de prouver qu'il est faiblement compact. Cela ramène au cas où la topologie donnée est faiblement compact.

la topologie donnée de E est la topologie faible. On se ramène comme dans le théorème 2 au cas où E est complet pour $\tau(E,E')$. Il suffira prouver que l'enveloppe disquée B de A est faiblement relativement compacte, i.e. que l'application identique u de l'espace normé $E_B = F$ engendré par B (muni de la norme jauge de B) dans E, est faiblement compacte. En vertu de Chap. 2, № 18, th. 13, corollaire 1, cela signifie que u' transforme les parties équicontinues A' de E' en des parties de F relativement compactes pour $\sigma(F',F'')$. Or considérons le sous-espace H des éléments de F' dont la restrictions à A est continue pour $\sigma(E,E')$, c'est évidemment un sous-espace vectoriel fermé donc complet de F', et la norme induite sur H par F' est aussi celle induite par l'espace $C(A)$ des fonctions continues sur le compact A muni de $\sigma(E,E')$ (car B est l'enveloppe disquée de A). Par suite H, est un sous-espace fermé de $C(A)$, donc faiblement fermée, et pour qu'une partie H soit relativement compacte dans F' pour $\sigma(F',F'')$ (il faut et) il suffit qu'elle soit faiblement relativement compacte dans $C(A)$ donc par raison de continuité elle sera faiblement relativement compacte dans l'espace de Banach F', i.e. pour $\sigma(F',F'')$). Or évidemment

$$u'(E') \subset H,$$

et il faut donc seulement montrer que u' transforme une partie équicontinue de E' en une partie faiblement relativement compacte de $C(A)$. u' transforme $x' \in E'$ en la restriction de x' à A, il faut donc montrer que si x' parcourt une partie équicontinue de E', sa restriction à A parcourt en ensemble faiblement relativement compact dans $C(A)$. Or, en vertu du théorème 5, cela est évident (car $u':E' \longrightarrow C(A)$ étant continue de E' faible dans $C_s(A)$, transforme une partie équicontinue donc faiblement relativement compacte de E' en une partie relativement compacte de $C_s(E)$, dont on constate de plus aussitôt qu'elle est bornée. Cela achève la démonstration (mais on notera que, sous la forme du théorème 3 la démonstration fait un usage essentiel du théorème d'Eberlein, et du théorème de Lebesgue en intégration).

<u>Proposition 4. Soit</u> K <u>un espace compact muni d'une mesure</u> μ, f <u>une application faiblement continue de</u> K <u>dans un ELC quasi-complet</u> E. <u>Alors</u> f <u>est faiblement intégrable dans</u> E.

Rappelons que cela signifie que d'une part f est <u>scalairement intégrable</u> (ce qui est trivial, puisqu'elle est même scalairement continue), et que plus la forme linéaire x sur E' donnée par

$$\langle x,x'\rangle = \int \langle f(t),x'\rangle \, d\mu$$

appartient à E. Or, supposant $\|\mu\| \leqslant 1$, ce qui est évidemment permis, on voit aussitôt que x appartient au polaire, dans le dual algébrique de E', du polaire de $f(K)$, donc au bipolaire de $f(K)$, i.e. à l'enveloppe disquée faiblement fermée de $f(K)$ dans le complété faible de E. Il suffit donc de prouver que cette enveloppe est contenue dans E, donc que l' enveloppe disquée faiblement fermée de $f(K)$ dans E est déjà faiblement compacte. Or $f(K)$ étant faiblement compact par raison de continuité, il suffit d'appliquer le théorème 4 corollaire 1 qui vaudra évidemment aussi pour l'enveloppe disquée fermée, soit en vertu de la démonstration donnée, soit comme corollaire immédiat de l'énoncé tel qu'il est donné.

Exercice 1. Prouver que la conclusion de prop.4 reste valable si on suppose seulement K localement compact, la mesure μ bornée, f faiblement continue et bornée. (Traiter d'abord le cas où μ est à support compact, grâce à la prop. 4, puis passer à la limite pour μ quelconque).

Exercice 2. Soit K une partie compacte d'un ELC complet. Montrer que l'enveloppe convexe fermée de K est l'ensemble des intégrales faibles

$$\int_K x \, d\mu(x),$$

où μ parcourt l'ensemble des mesures positives de norme 1 sur K. Montrer que le théorème 4 serait une conséquence facile de prop. 4.

Exercices supplémentaires.

Voici quelques exercices de compacité qui pourraient aller dés le Chapitre 2, à l'exception de exercice 3, 3º et exercices 4 et 5 qui utilisent le théorème de Šmulian.

Exercice 1. Soit (x_i) une suite de Cauchy dans un ELC E, montrer que son enveloppe disquée fermée A est métrisable (Se ramener au cas où E est séparé complet, donc (x_i) convergente, puis au cas où la limite est nulle, en notant que la somme de deux compacts métrisables A et B est un compact métrisable, car homéomorphe à un quotient séparable de $A \times B$. Utilisant alors Chap. 2, Nº 13, exercice 2, noter que A est isomorphe à un espace quotient de la boule unité de ℓ^1 munie de $\sigma(\ell^1, c_o)$, et que cette dernière est un compact métrisable).

<u>Exercice</u> <u>2</u>. Soit E un ELC, soit $\mathfrak{S}$ l'ensemble des parties A de E telles que de toute suite extraite de A, on puisse extraire une suite de Cauchy ($\mathfrak{S}$ contient donc les précompacts métrisables).

1. Soit u une application linéaire de E dans un ELC F. Montrer que si u transforme suites convergentes en suites convergentes, alors u transforme suites de Cauchy en suites de Cauchy, et les $A \in \mathfrak{S}$ en des parties précompactes. (Pour le premier point, soit A l'enveloppe disquée fermée de la suite de Cauchy (x_i), prouver que la restriction de u à A est uniformément continue, en notant qu'en vertu de Chap. 2, Nº 14, lemme, il suffit de prouver la continuité de cette restriction à l'origine, et qu'il suffit en vertu de exercice 1 de prouver cette continuité pour les suites dans A qui tendent vers 0. Le deuxième point résulte du premier de façon purement topologique, en utilisant le critère de Weil).

2. Soit A' un ensemble de formes linéaires sur E continues pour les suites, les conditions suivantes sur A' sont équivalentes:

a) A est précompact pour la convergence uniforme sur les suites convergentes de E;

b) A' est précompact pour la $\mathfrak{S}$-convergence;

c) toute suite convergente (ou aussi: toute suite de Cauchy) dans E, converge uniformémment sur A'. (Montrer que cet énoncé est équivalent au premier, en utilisant Chap. 2, Nº 13, th. 12).

Exercice 3. Soit E un espace localement convexe, $\mathfrak{S}$ l'ensemble des parties A de E telles que de toute suite extraite de A, on puisse extraire une suite de Cauchy faible ($\mathfrak{S}$ contient donc les bornés qui sont métrisables pour la structure uniforme faible puisque borné = faiblement précompact).

1. Soit u une application linéaire de E dans un ELC F. Si u transforme les suites faiblement convergentes en suites convergentes, elle transforme suites de Cauchy faibles en suites de Cauchy, et les $A \in \mathfrak{S}$ en des parties précompactes. (Cas particulier de l'exercice précédent appliqué à E faible; même démonstration pour 2º:)

2. Soit A' une partie de E'. Les conditions suivantes sont équivalentes:

a) A est précompact pour la convergence uniforme sur les suites faiblement convergentes de E;

b) A est précompact pour la $\mathfrak{S}$-convergence;

c) toute suite faiblement convergente (ou aussi: toute suite de Cauchy faible) dans E, converge uniformément sur A'.

On dit avec G. Köthe qu'une telle partie de E' est <u>limitée</u> ("begrenzt"); cette notion ne dépend que du système dual (E,E') (de sorte que les parties limitées de E sont définies en même temps).

3. Pour que $A' \subset E'$ soit limitée il suffit qu'elle soit précompacte pour $\tau(E',E)$. Cette condition est aussi nécessaire si E est séparable, ou un espace métrisable (plus généralement chaque fois que dans E le théorème de Šmulian est valable, car ce dernier signifie précisément que les parties faiblement compactes de E sont dans $\mathfrak{S}$!).

4. Une application linéaire faiblement continue (seuls les systèmes duals interviennent en fait) d'un ELC dans un autre, transforme parties limitées en parties limitées. Montrer que pour une partie A de E, les conditions suivantes sont équivalentes:

c) A est limitée;

d) toute application linéaire faiblement continue de E dans un ELC <u>séparable</u> F transforme A en une partie précompacte;

e) toute application linéaire faiblement continue de E dans c_o transforme A en une partie précompacte de c_o (c) $\longrightarrow$ d) résulte de 3º. d) $\longrightarrow$ e) est trivial, et e) $\longrightarrow$ c) se voit en utilisant une correspondance biunivoque canonique entre applications linéaires faiblement continues de E dans c_o, et suites faiblement convergentes vers 0 dans E') - comparer Nº 2, exercice 2, c).

Exercice 4. Soit (E,E') un système dual, $\mathfrak{S}$ l'ensemble des parties A de E telles que de toute suite extraite de A, on puisse extraire une suite de Cauchy faible, $\mathfrak{S}'$ l'ensemble des parties analogues de E', $\mathcal{L}$ (resp. $\mathcal{L}'$) l'ensemble des parties limitées de E (resp. E') (voir exercice 3).

1. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes:

a. $\mathfrak{S} \subset \mathcal{L}$; a'. $\mathfrak{S}' \subset \mathcal{L}'$;

b. (resp. c.) les suites faiblement convergentes (respect. les suites de Cauchy faibles) dans E sont limitées;

b' (resp. c') même énoncé relatifs à E';

d. Pour toute suite (x_i) (resp. (x'_i)) dans E (respect. E') qui tend faiblement vers 0, on a

$$\lim \langle x_i, x'_i \rangle = 0.$$

2. Si E est séparable, il ne peut avoir la propriété précédente que si ces parties bornées sont précompactes pour $\tau(E,E')$; en particulier si depuis E est un espace normable cela exige que E est de dimension finie. Même conclusion si E est un espace de Banach réflexif, non nécessairement séparable (utiliser exercice 3, 3º).

3. Soit K un espace compact stonien, posons

$$E = C(K),$$

montrer que (E,E') satisfait aux conditions de 1º (Conjugues § 4, Nº 1, exercice 12, 2º prouvant qu'une suite faible ment convergente dans E' converge pour $\sigma(E,E'')$, et même Nº, exercice 11, prouvant que dans un dual d'espace $C(K)$ une suite convergente pour $\sigma(E',E'')$ converge pour $\tau(E',E)$.

4. Remarquant que si dans 3º, K est infini (par exemple $C(K) = \ell^{\infty}$ quand K est le compactifié de Stone de l'ensemble des entiers), il existe des suites de Cauchy faibles non faiblement convergentes dans $E = C(K)$ (voir p. ex. § 4, Nº 2, exercice 3, 2º), en conclure qu'il existe dans E des parties limitées qui ne sont pas même faiblement relativement compactes. (Comparer Nº 2, exercices 2 et 3).

<u>Exercice 5</u>. 1. Soit μ une mesure positive dénombrable à l'infini sur un espace localement compact M, soit $E = L^1(\mu)$. Montrer que de toute suite bornée du dual E', on peut extraire une suite faiblement convergente. (Se ramener au cas où μ est bornée em remplaçant μ par une mesure équivalent ce qui remplace $L^1(\mu)$ par un espace isomorphe; dans ce cas, on a $L^{\infty} \subset L^1$, et l'application d'inclusion est continue pour $\sigma(L^{\infty},L^1)$ et la topologie faible $\sigma(L^1,L^{\infty})$ de L^1, donc la boule unité de L^{∞} est une partie faiblement compacte de L^1. Appliquer alors le théorème de Šmulian dans L^1).

2. Soit μ une mesure quelconque sur un espace localement compact. Montrer que les parties limitées de

$$E = L^1(\mu)$$

(voir exercice 3) sont identiques aux parties précompactes de

E. (pour montrer qu'une partie limitée est précompacte, on peut supposer qu'il s'agit d'une suite dans $E = L^1(\mu)$; se ramener alors au cas où μ est dénombrable à l'infini; dans ce cas, l'assertion résulte trivialement de 1º).

Exercice 6. Soit E un ELC dont le dual fort est séparable. Une application linéaire u de E dans un ELC F, transformant suites faiblement convergentes en suites convergentes, transforme les parties bornées en des parties précompactes - et réciproquement bien entendu (Utiliser exercice 3, 1º, en notant que les parties bornées de E sont ici faiblement métrisables).

§ 4. Compacité faible dans L^1.

1. Le critère de Dunford-Pettis et ses premières conséquences.

Dans ce qui suit, M désigne un espace localement compact, μ une mesure positive sur M. Nous supposons connue la théorie générale de l'Intégration (Bourbaki, Intégration, Chap. 1 à 5) et suivons en gros la terminologie de Bourbaki. Rappelons que $L^1(\mu) = L^1$ sera l'espace de Banach des (classes de) fonctions sommables, avec la norme

$$\|f\| = \int |f(s)| \, d\mu(s),$$

et que son dual s'identifie a $L^\infty(\mu) = L^\infty$, espace des (classes de) fonctions mesurables et bornées, muni de la norme

$$\|f\|_\infty = \text{Sup. en mesure } |f(s)|.$$

L'accouplement est donné par

$$\langle f,g\rangle = \int fg\, d\mu \qquad (f\in L^1,\ g\in L^\infty).$$

Il est parfois commode d'introduire l'espace $M(\mu)=M$ de toutes les classes de fonctions scalaires mesurables (modulo l'égalité localement presque partout), muni de la topologie de la <u>convergence en mesure sur tout compact</u>, dont un système fondamental de voisinages de 0 est formé des ensembles $V(K, \varepsilon)$, K compact $\subset M$ et $\varepsilon > 0$, formés des f telles que l'ensembles des points de K où $|f(s)| \geqslant \varepsilon$ soit de mesure $\leqslant \varepsilon$. (On obtient ainsi une topologie d'espace vectoriel topologique, mais non localement convexe en général). Les suites convergentes pour cette topologie sont dites <u>suites convergentes en mesure sur tout compact</u>. Les espaces L^p se plongent canoniquement et continûment dans M (ce qui explique le rôle de M !). Rappelons le <u>théorème d'Egoroff</u>: Une suite (f_i) qui converge presque partout, converge en mesure sur tout compact.

Si A est une partie de M, on désigne par φ_A sa fonction caractéristique, ou encore sa classe dans L^∞ si A est mesurable. Avec cette notation, on a pour $f\in L^1$:

$$\langle f, \varphi_A\rangle = \int_A f\, d\mu$$

Lemme. Soit (f_n) une suite dans L^1 telle que $(\langle f_n, \varphi_A\rangle)$ soit convergente quel que soit l'ensemble ouvert A. Alors on a ce qui suit:

a) Pour tout $\varepsilon > 0$, existe $\eta > 0$ tel que A mesurable, $\mu(A) \leqslant \eta$ implique $\langle |f_n|, \varphi_A\rangle \leqslant \varepsilon$ pour tout n.

b) Pour tout $\varepsilon > 0$, existe un compacte $K \subset M$, tel que $\langle |f_n|, \varphi_{CK}\rangle \leqslant \varepsilon$ pour tout n.

Démonstration. a) Il est bien connu que pour une $f \in L^1$ donnée on peut pour tout $\varepsilon > 0$ trouver $\eta > 0$ tel que A mesurable, $\mu(A) \leqslant \eta$ implique

$$\langle |f|, \varphi_A\rangle \leqslant \varepsilon .$$

(Car soit M_n l'ensemble des $s \in M$ tels que $|f(s)| \geqslant n$, alors $\bigcap M_n = \emptyset$, donc d'après le théorème de Lebesgue

$$\langle |f|, \varphi_{M_n}\rangle \longrightarrow 0,$$

donc il existe n tel que $\langle |f|, \varphi_{M_n}\rangle \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$; prenons $\eta = \frac{\varepsilon}{2n}$, alors A mesurable et $\mu(A) \leqslant \eta$ implique

$$\langle |f|, \varphi_A\rangle \leqslant$$

$$\leqslant \langle |f|, \varphi_{A\cap CM_n}\rangle + \langle |f|, \varphi_{M_n}\rangle \leqslant \eta\mu(A) + \frac{\varepsilon}{2} \leqslant \varepsilon).$$

Supposons d'abord que pour tout ouvert A, $\langle f_n, \varphi_A\rangle$ tende vers 0. Pour prouver a), il suffit de prouver qu'on peut trouver $\eta > 0$ tel que A mesurable, $\mu(A) \leqslant \eta$ implique

$$\langle f_n, \varphi_A \rangle \leqslant \varepsilon$$

pour tout n, car on aura alors (en supposant les f_n réelles)

$$\langle |f|, \varphi_A \rangle = \langle f, \varphi_{A_1} \rangle - \langle f, \varphi_{A_2} \rangle$$

(où A_1 resp. A_2 est l'ensemble des points de A où f_n est positive resp. négative), d'où

$$\langle |f|, \varphi_A \rangle \leqslant \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon .$$

Procédons maintenant par l'absurde, en supposant que quel que soit $\eta > 0$, existe un ensemble mesurable A et un indice n tels que

$$\mu(A) < \eta , \qquad |\langle f_n, \varphi_A \rangle| > \varepsilon .$$

On peut alors évidemment supposer A ouvert (en le remplaçant par un ouvert un peu plus grand et n aussi grand qu'on veut. On va construire par récurrence simultanée une suite strictement croissant d'indices (n_i) et une suite d'ouverts A_i, de façon qu'on ait, en désignant par A_{ij} l'ensemble des éléments de A_i qui n'appartienent ni à A_j, ni aux A_k, avec $k < i$:

(1) $$|\langle f_{n_j}, \varphi_{A_{ij}} \rangle| \leqslant 2^{-i-j} \qquad \text{pour tout } i,j$$

(2) $$|\langle f_{n_j}, \varphi_{A_j} \rangle| \geqslant \varepsilon \qquad \text{pour tout } j.$$

Supposons la construction faite jusqu'au rang k conformément à ces conditions; en vertu de la remarque au début on peut trouver $\eta > 0$ tel que

$$(3) \qquad \langle |f_j|, \varphi_A \rangle \leq 2^{-2k-1} \leq 2^{-j-(k+1)}$$

$$\text{pour} \quad \mu(A) \leq \eta \ , \ j \leq k$$

et comme (f_n) tend vers 0 sur les fonctions caractéristiques d'ouverts et par suite sur leurs combinaisons linéaires $\varphi_{A_{ij}}$ $(i,j \leq k)$ on peut trouver un indice n tel que

$$(4) \qquad |\langle f_m, \varphi_{A_{ij}} \rangle| \leq 2^{-2k-1} \leq 2^{-i-(k+1)}$$

$$\text{pour} \quad m \geq n, \quad i,j \leq k$$

enfin d'après l'hypothèse on peut trouver un ouvert $A = A_{k+1}$ et $m = n_{k+1}$ tels que $\mu(A) \leq \eta$, $m \geq n$, $|\langle f_m, \varphi_A \rangle| \geq \varepsilon$,et on constate aussitôt que l'on satisfait encore ainsi à l'hypothèse de récurrence. Posons $A = \bigcup A_k$, c'est un ouvert, et on a comme $A = A_j \cup \bigcup_i A_{ij}$ (réunion disjointe)

$$\langle f_{n_j}, \varphi_A \rangle = \langle f_{n_j}, \varphi_{A_j} \rangle + \sum_i \langle f_{n_j}, \varphi_{A_{ij}} \rangle$$

d'où en vertu de (1) et (2)

$$|\langle f_{n_j}, \varphi_A \rangle| \geq \varepsilon - \sum_i 2^{-i-j} = \varepsilon - 2^j.$$

Mais d'autre part on doit avoir $\langle f_{n_j}, \varphi_A \rangle \longrightarrow 0$, ce qui amène une contradiction.

Passons au cas général. Je dis qu'il existe un entier $n > 0$, et un $\eta > 0$, tels que $\mu(A) \leq \eta$, $p,q \geq n$ impliquent

$$\langle |f_p - f_q|, \varphi_A \rangle \leqslant \frac{\varepsilon}{2} .$$

Autrement, on pourrait trouver en effet deux suites d'indices p_k et q_k et une suite de A_k, telles que

$$\mu(A_k) \leqslant \frac{1}{k} , \qquad p_k, q_k \geqslant k,$$

$$\langle |f_{p_k} - f_{q_k}|, \varphi_{A_k} \rangle \geqslant \frac{\varepsilon}{2} ,$$

ce qui contredit le résultat précédent, puisque la suite

$$(f_{p_k} - f_{q_k})$$

est une suite qui tend vers 0 sur les φ_A, A ouvert. Soient donc n et η comme plus haut; en prennant η assez petit, on peut de plus supposer que $\mu(A) \leqslant \eta$ implique aussi

$$\langle |f_m|, \varphi_A \rangle \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$$

pour $m \leqslant n$. On a alors pour $\mu(A) \leqslant \eta$ et $m \geqslant n$

$$\langle |f_m|, \varphi_A \rangle \leqslant \langle |f_n|, \varphi_A \rangle + \langle |f_m - f_n|, \varphi_A \rangle \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

donc

$$\langle |f_m|, \varphi_A \rangle \leqslant \varepsilon$$

pour <u>tout</u> m, ce qui achève la démonstration de la première partie du lemme.

b) Soit μ_n la mesure de densité f_n par rapport à μ. L'hypothèse est que $\mu_n(A)$ est une suite convergente pour tout ouvert A, on veut en conclure qu'il existe un compact K tel que $|\mu_n|(\complement K) \leq \varepsilon$ pour tout n. Interprétant les μ_n comme des mesures bornées sur l'espace compact $\hat{M}$ obtenu par adjonction d'un "point à l'infini" ω, l'hypothèse est conservée dans cette interprétation des μ_n, et la conclusion signifie que l'on peut trouver un voisinage V de ω dans $\hat{M}$ tel que $|\mu_n|(V) \leq \varepsilon$ pour tout n. Or on peut trouver une mesure ν sur $\hat{M}$ telle que les μ_n appartienent à $L^1(\nu)$ (identifié de la façon usuelle à un espace de mesures) p. ex.

$$\nu = \sum_n 2^{-n} \frac{\mu_n}{\|\mu_n\|} .$$

D'après la première partie, on peut trouver $\eta > 0$ tel que pour toute partie mesurable A de M, $\mu(A) \leq \eta$ implique

$$|\mu_n|(A) \leq \varepsilon .$$

En particulier on peut prendre un voisinage V de ω tel que $\nu(V \cap \complement\omega) \leq \eta$, c'est le V cherché.

<u>Théorème 1</u> (<u>Dunford-Pettis</u>). <u>Soit</u> H <u>une partie de</u> L^1. <u>Pour que</u> H <u>soit faiblement relativement compacte, il faut et il suffit qu'elle satisfasse aux deux conditions suivantes:</u>

a) <u>Pour tout</u> $\varepsilon > 0$, <u>existe</u> $\eta > 0$, <u>tel que</u> A <u>mesurable et</u> $\mu(A) \leq \eta$ <u>implique</u> $\langle |f|, \varphi_A \rangle \leq \varepsilon$ <u>pour tout</u> $f \in H$.

b) Pour tout $\varepsilon > 0$, existe un compact $K \subset M$ tel que $\langle |f|, \varphi_{CK} \rangle \leq \varepsilon$ pour tout $f \in H$.

Supposons H faiblement relativement compacte. Si a) n'était vérifiée, il existerait une suite (A_n) de parties mesurables de M et une suite (f_n) extraite de H, telles que $\langle |f_n|, \varphi_{A_n} \rangle > \varepsilon$, $\mu(A_n) \leq 1/n$. Mais d'après le théorème de Šmulian, on pourrait de (f_n) extraire une suite faiblement convergente, et cette dernière mettrait en défaut la première partie du lemme précédent. De même, si b) n'était vérifié, on pourrait trouver une suite de compacts $K_n \subset M$ disjoints deux à deux, et une suite (f_n) extraite de H, telles que $\langle |f_n|, \varphi_{K_n} \rangle > \varepsilon$. Soit (g_n) une suite extraite de (f_n) qui converge faiblement (th. de Šmulian), soit K un compact tel que $\langle |g_n|, \varphi_{CK} \rangle \leq \frac{\varepsilon}{2}$ pour tout n, on aura

$$\langle |g_n|, \varphi_{K_m} \rangle \leq \frac{\varepsilon}{2} + \langle |g_n|, \varphi_{K \cap K_m} \rangle ,$$

et le deuxième terme du second membre tend vers 0 pour $m \to \infty$ uniformément par rapport à n en vertu du lemme 1, a), d'où $\langle |g_n|, \varphi_{K_m} \rangle < \varepsilon$ pour tout n pour $m \geq m_o$, ce qui est absurde.

Supposons vérifiées a) et b), prouvons que H est faiblement relativement compact. On utilise le

Lemme 2. Soit H une partie d'un espace de Banach E telle que pour tout $\varepsilon > 0$, existe une partie faiblement compacte H' de E telle que tout $x \in H$ soit à une distance $< \varepsilon$ de H'. Alors H est faiblement relativement compact.

Soit en effet B la boule unité de E, E" le bidual de E, $\bar{B}$ l'adhérence de B dans E" muni de la topologie faible (i.e. $\sigma(E",E')$). H étant évidemment borné, il suffit de prouver que son adhérence faible $\bar{H}$ dans E" est contenu dans E. Or de $H \subset H' + \varepsilon B$, on conclut $\bar{H} \subset H' + \varepsilon \bar{B}$, car H' étant faiblement compact et εB faiblement fermé, la deuxième membre est faiblement fermé dans E". À fortiori on aura $\bar{H} \subset E + \varepsilon \bar{B}$ pour tout $\varepsilon > 0$, d'où $\bar{H} \subset E$ puisque E est fortement fermé dans E", c.q.f.d.

Revenons aux conditions du th. 1. Pour tout compact $K \subset M$, considérons l'ensemble $H' = \varphi_K H$ des produits $\varphi_K f$, $f \in H$. En vertu du lemme 2 et de la condition b) du théorème, il suffit de prouver que les ensembles H' sont faiblement relativement compacts, ce qui nous ramène au cas où toutes les $f \in H$ s'annulent en dehors d'un compact fixe K, donc au cas où M lui-même est un compact K. Dans ce cas, on a $L^\infty \subset L^1$. On voit d'abord facilement que a) implique que H est <u>borné</u>. Soit A la boule unité de L^∞, sur A la convergence vers 0 au sens de la topologie induite par L^1 implique la convergence uniforme sur H. En effet, grâce à la condition a. sur H, on voit facilement que même la convergence en mesure sur A implique la convergence uniforme sur H. Or sur L^∞ la topologie induite par L^1 est la topologie de la convergence uniforme sur la partie A de L^1, et ce qui précède signifie que pour tout $\varepsilon > 0$, existe $\eta > 0$ tel que une distance $< \varepsilon$ de H'. Alors H est faiblement relativement compact.

Soit en effet B la boule unité de E, E'' le bidual de E, $\bar{\bar{B}}$ l'adhérence de B dans E'' muni de la topologie faible (i.e. $\sigma(E'',E')$). H étant évidemment borné, il suffit de prouver que son adhérence faible $\bar{\bar{H}}$ dans E'' est contenu dans E. Or de $H \subset H' + \varepsilon B$, on conclut $\bar{\bar{H}} \subset H' + \varepsilon \bar{\bar{B}}$, car H' étant faiblement compact et εB faiblement fermé, la deuxième membre est faiblement fermé dans E''. À fortiori on aura $\bar{\bar{H}} \subset E + \varepsilon \bar{\bar{B}}$ pour tout $\varepsilon > 0$, d'où $\bar{\bar{H}} \subset E$ puisque E est fortement fermé dans E'', c.q.f.d.

Revenons aux conditions du th. 1. Pour tout compact $K \subset M$, considérons l'ensemble $H' = \varphi_K H$ des produits $\varphi_K f$, $f \in H$. En vertu du lemme 2 et de la condition b) du théorème, il suffit de prouver que les ensembles H' sont faiblement relativement compacts, ce qui nous ramène au cas où toutes les $f \in H$ s'annulent en dehors d'un compact fixe K, donc au cas où M lui-même est un compact K. Dans ce cas, on a $L^\infty \subset L^1$. On voit d'abord facilement que a) implique que H est <u>borné</u>. Soit A la boule unité de L^∞, sur A la convergence vers 0 au sens de la topologie induite par L^1 implique la convergence uniforme sur H. En effet, grâce à la condition a. sur H, on voit facilement que même la convergence en mesure sur A implique la convergence uniforme sur H. Or sur L^∞ la topologie induite par L^1 est la topologie de la convergence uniforme sur la partie A de L^1, et ce qui précède signifie que pour tout $\varepsilon > 0$, existe $\eta > 0$ tel que

$$A \cap \eta A^{o} \subset \varepsilon H^{o}.$$

Par polarité cela s'écrit

$$\frac{1}{\varepsilon} H \subset \overline{\Gamma}(A^{o}, \frac{1}{\eta} A)$$

où A^{o} n'est autre que la boule unité B de L^{1}. À fortiori

$$H \subset \frac{\varepsilon}{\eta} A + \varepsilon B.$$

i.e. on est sous les conditions du lemme 2, avec $H' = \frac{\varepsilon}{\eta} A$. Il suffit maintenant de noter que A est bien une partie faiblement compacte de L^{1}, ce qui est immédiat, l'application identique de L^{∞} dans L^{1} étant continue pour la topologie faible $\sigma(L^{\infty}, L^{1})$ de L^{∞} et la topologie faible de L^{1}, et transformant donc la partie faiblement compacte A de L^{∞} en une partie faiblement compacte de L^{1}. c.q.f.d.

Corollaire 1. *Soit $H \subset L^{1}$, et soit H' l'ensemble des $f \in L^{1}$ telles qu'il existe $g \in H$ avec $|f| \leq |g|$. Pour que H soit faiblement relativement compact, il suffit que H' le soit.*

En particulier

Corollaire 2. *Une partie latticiellement bornée de L^{1} est faiblement relativement compacte.*

(Prendre, dans le corollaire 1, H réduit à un élément).

Corollaire 3. Dans un espace L^1, une suite de Cauchy faible est faiblement convergente.

En effet, en vertu du lemme 1, les deux conditions du th. 1 sont vérifiées.

Proposition 1. Toute suite bornée dans L^∞ qui converge vers une f en mesure sur tout compact, converge vers f uniformément sur toute partie faiblement compacte de L^1 (i.e. pour la topologie de Mackey $\tau(L^\infty, L^1)$).

(La réciproque est d'ailleurs vraie, voir exercice 1). La démonstration est immédiate, grâce aux conditions a) et b) du théorème 1.

Corollaire. Soit u une application linéaire faiblement continue de L^∞ dans un espace localement convexe E. Alors u transforme les suites bornées et convergentes en mesure, en des suites convergentes de E.

En effet, la transposée u' de u est une application linéaire de E' dans L^1 continue pour $\sigma(E',E)$ et $\sigma(L^1, L^\infty)$, et transforme donc les parties faiblement compactes, et à fortiori les parties équicontinues faiblement fermées de E', en des parties faiblement compactes de L^1. La conclusion du corollaire signifie précisément que les suites (f_n) envisagées convergent uniformément sur les images par u' des parties équicontinues de E', ce qui résultera donc de la prop. 1.

<u>Proposition 2</u>. <u>Soit</u> $H \subset L^1$, <u>pour que</u> H <u>soit relativement compact, et relativement compact dans l'espace</u> $M(\mu)$ (pour la topologie de la convergence en mesure sur tout compact).

Nécessité évidente. Pour la suffisance, il suffit de prouver que de toute suite (f_n) extraite de H, on peut extraire une suite convergente dans L^1. Or on peut en extraire une suite faiblement convergente (g_n) (Šmulian) et de cette dernière une suite qui converge en mesure; car si on suppose M dénombrable à l'infini, alors $M(\mu)$ est métrisable (donc toute suite relativement compacte de cet espace admet une suite extraite convergente), et dans le cas général, on se ramène facilement au précédent, en notant que les g_n sont nuls en dehors de la réunion d'une suite de compacts (puisque chaque g_n est intégrable). La proposition résulte alors du

<u>Corollaire</u>. <u>Soit</u> (f_n) <u>une suite dans</u> L^1, <u>pour qu'elle converge fortement vers</u> $f \in L^1$, <u>il faut et il suffit qu'elle converge faiblement, et qu'elle converge vers</u> f <u>dans</u> $M(\mu)$ (i.e. en mesure sur tout compact).

Nécessité évidente. Pour la suffisance, on note que, l'ensemble des f_n étant faiblement relativement compact dans L^1 satisfait aux conditions a) et b) du théorème 1. De ceci, et du fait qu'elle converge en mesure sur tout compact vers f, on conclut très facilement que

$$|f - f_n| \, d\mu \longrightarrow 0.$$

<u>Corollaire 2</u>. <u>Dans l'espace</u> ℓ^1 <u>toute partie faiblement compacte est compacte</u>, <u>toute suite faiblement convergente est convergente</u>.

<u>Exercice 1</u>. Pour qu'une partie de L^∞ soit relativement compacte sur $\tau(L^\infty, L^1)$, il faut et il suffit qu'elle soit bornée, et relativement compacte dans $\mathbf{M}$ (espace des classes de fonctions scalaires mesurables, avec la convergence en mesure sur tout compact). Pour qu'une suite dans L^∞ converge pour $\tau(L^\infty, L^1)$, il faut et il suffit qu'elle soit bornée, et converge en mesure sur tout compact. (Se ramener au deuxième énoncé, et utiliser la prop. 1).

<u>Exercice 2</u>. Soit M un espace localement compact, $\mathcal{M}^1(M)$ l'espace des mesures bornées sur M, dual de $C_0(M)$.

a) Soit μ une mesure positive sur $\mathbf{M}$, si à toute $f \in L^1(\mu)$ on fait correspondre la mesure $f\mu$ de "densité f" par rapport à μ, on obtient un isomorphisme métrique de $L^1(\mu)$ dans $\mathcal{M}^1(M)$, qui respecte les structures d'ordre naturelles. On écrira $L^1(\mu) \subset \mathcal{M}^1(M)$. Montrer que les $L^1(\mu)$ (μ variable dans $\mathcal{M}^1_+(M)$) forment une famille filtrante croissante de sous-espaces vectoriels fermés de $\mathcal{M}^1(M)$, ayant pour réunion $\mathcal{M}^1(M)$. Pour toute <u>suite</u> $L^1(\mu_i)$ de tels sous-espaces, il en existe un $L^1(\mu)$ du même type qui les contient tous. (Prendre

$$\mu = \sum \frac{1}{2^n} \frac{\mu_i}{\|\mu_i\|}$$

et appliquer le théorème de Lebesgue-Nikodym).

b) Montrer qu'on peut trouver un espace localement compact M' muni d'une mesure positive μ, et un isomorphisme d'espace de Banach ordonnée de $\mathcal{M}^1(M)$ sur $L^1(\mu)$. (Considérer une famille maximale (μ_i) de mesures positives sur M deux à deux étrangères, et prendre pour (M', μ) l'espace mesure somme des espaces (M_i, μ_i), où M_i est le support de μ_i).

c) Une partie latticillement bornée de $\mathcal{M}^1(M)$ est relativement compacte pour $\sigma(\mathcal{M}^1(M), (\mathcal{M}^1(M))')$.

<u>Exercice 3</u>. Soit H une partie faiblement compacte d'un espace $L^1(\mu)$. Montrer qu'on peut trouver une suite (K_i) de parties compactes de M telle que toute $f \in H$ soit nulle dans $\complement \bigcup_i K_i$, donc qu'il existe une $f \in L^1$ telle que pour toute $g \in H$, on ait $g\mu \in L^1(f\mu)$.

b) En conclure, avec les notations de l'exercice 2, qu'une partie faiblement compacte d'un espace $\mathcal{M}^1(M)$ est contenue et faiblement compacte dans un sous-espace $L^1(\mu)$ convenable. (Utiliser l'exercice 2, b); bien entendu, par topologie faible dans $\mathcal{M}^1(M)$ on entend la topologie faible définie par le dual de l'espace de Banach $\mathcal{M}^1(M)$, et non la topologie moins fine $\sigma(\mathcal{M}^1(M), C_o(M))$.

c) Soit A une partie d'un espace $\mathcal{M}^1(M)$. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes:

1º. Il existe une mesure positive bornée μ sur M telle que $A \subset L^1(\mu)$;

2º. A est contenue dans l'espace vectoriel fermé engendré par une partie latticiellement bornée convenable de $\mathcal{M}^1(M)$;

3º. A est contenue dans l'espace vectoriel fermé engendré par une partie faiblement compacte convenable de $\mathcal{M}^1(M)$.

Montrer que la réunion d'une suite d'ensembles satis faisant à ces propriétés, satisfait à la même propriété. Si μ est une mesure positive sur M, pour que la partie $L^1(\mu)$ de $\mathcal{M}^1(M)$ satisfasse aux conditions ci-dessus, il faut et il suffit que μ soit dénombrable à l'infini.

d) Soit μ une mesure positive dénombrable à l'in fini sur l'espace localement compact M, u une application linéaire continue de $L^1(\mu)$ dans un espace $\mathcal{M}^1(M')$ (M', es pace localement compact). Montrer que l'image de $L^1(\mu)$ est contenue dans un espace $L^1(\nu)$, où ν est une mesure positive bornée convenable sur M'. (Utiliser c)).

<u>Exercice</u> <u>4</u>. a) Soit K un espace compact, F un es pace localement convexe quasi-complet, u une application li néaire continue de C(K) dans F. Pour tout espace quotient séparé $\tilde{K}$ de K, on identifie $C(\tilde{K})$ à un sous-espace normé de C(K). Montrer que pour que u soit faiblement compacte, il faut et il suffit que pour tout espace quotient <u>métrisable</u> $\tilde{K}$ de K la restriction de u a $C(\tilde{K})$ soit faiblement com-

pacte. (Utiliser le théorème d'Eberlein, et noter que toute <u>suite</u> dans $C(K)$ est contenue dans l'espace $C(\tilde{K})$ avec $\tilde{K}$ quotient métrisable convenable de K).

b) Pour tout espace quotient séparé $\tilde{K}$ du compact K, on considère l'application transposée de l'imersion canonique de $C(\tilde{K})$ dans $C(K)$, on obtient donc un homomorphisme métrique canonique $\mu \longrightarrow \varphi(\mu)$ de l'espace $\mathcal{M}(K)$ des mesures sur K, sur l'espace $\mathcal{M}(\tilde{K})$ des mesures sur $\tilde{K}$ ($\varphi(\mu)$ est appelé classiquement <u>image de la mesure</u> μ par l'application canonique φ de K dans $\tilde{K}$). Soit alors A une partie de $\mathcal{M}(K)$. Montrer que pour que A soit faiblement relativement compacte (par topologie faible dans $\mathcal{M}(K)$ on entend ici la topologie $\sigma(\mathcal{M}(K),(\mathcal{M}(K))')$ et non la topologie $\sigma(\mathcal{M}(K),C(K))$), il faut et il suffit que pour tout espace quotient <u>métrique</u> $\tilde{K}$ de K, l'image canonique de A dans $\mathcal{M}(\tilde{K})$ soit faiblement compact. (Montrer qu'alors A est borné, puis se ramener au cas où A est disqué, et fermé pour $\sigma(\mathcal{M}(K),C_o(K))$, donc l'image de la boule unité d'un dual F', par la transposée d'une application linéaire continue u de $C(K)$ dans un espace de Banach F. Prouver que u est faiblement compacte, grâce à a)).

<u>Exercice 5</u>. Soit M un espace localement compact, $\mathcal{M}^1 = \mathcal{M}^1(M)$ l'espace des mesures bornées sur M (dual de $C_o(M)$). Toute fonction bornée f sur M, mesurable pour toute mesure sur M (par exemple une fonction borélienne) defini une forme linéaire continue $\mu \longrightarrow \int f\, d\mu$ sur $\mathcal{M}^1$ de norme $\operatorname{Sup}_t |f(t)|$, ce qui permet d'identifier l'espace de

ces fonctions, avec la norme uniforme à un sous-espace normé du dual de $\mathcal{M}^1$. On désigne par E_1 (resp. E_o), le sous-espace formé des combinaisons linéaires de fonctions caractéristiques d'ensembles ouverts (resp. d'ensembles ouverts qui sont réunion d'une suite d'ensembles fermés). Par topologie faible dans $\mathcal{M}^1$ on entend la topologie $\sigma(\mathcal{M}^1,(\mathcal{M}^1)')$.

a) Une suite de Cauchy pour $\sigma(\mathcal{M}^1,E_1)$ est déjà faiblement convergente. (Utiliser l'exercice 2, a) pour se ramener au cas d'une suite dans un espace $L^1(\mu)$, puis utiliser le lemme 1 et le théorème 1 du texte).

b) Soit A une partie de $\mathcal{M}^1$, pour que A soit faiblement relativement compacte il faut et il suffit qu'elle soit relativement compacte pour $\sigma(\mathcal{M}^1,E_o)$. (Se ramener au cas où M est compact, en passant au compactifié de Alexandroff, puis au cas où M est métrisable grâce à l'exercice 4, b). Noter que A est borné, grâce à Chap. 3, Nº 3, exercice 7, c. Il suffit alors d'extraire, de toute suite (μ_i) dans A, une suite faiblement convergente - th. d'Eberlein. Extraire d'abord une suite convergente pour $\sigma(\mathcal{M}^1,C_o)$ grâce au fait que la boule unité de $\mathcal{M}^1$ est métrisable et compacte pour cette topologie. Puis noter que A est aussi relativement compacte pour $\sigma(\mathcal{M}^1,\bar{E}_o)$, où $\bar{E}_o$ est l'adhérence de E_o pour la topologie normée de $(\mathcal{M}^1)$, et que $C_o \subset \bar{E}_o$ de sorte que toute suite dans A qui converge pour $\sigma(\mathcal{M}^1,C_o)$ converge aussi pour $\sigma(\mathcal{M}^1,\bar{E}_o)$ par raison de compacité, donc faiblement en vertu de a)).

c) Soit u une application linéaire continue de

$C_o(M)$ dans un espace localement convexe quasi-complet F. Prouver que les conditions suivantes sont équivalentes:

1º. u est faiblement compacte;

2º. $u''(E_o) \subset F$;

3º. u transforme suites de Cauchy faibles en suites faiblement convergentes;

4º. u transforme toute suite bornée et croissante en une suite de Cauchy faible.

(On a immédiatement 1º $\longrightarrow$ 2º $\longrightarrow$ 3º $\longrightarrow$ 4º, en tenant compte de la caractérisation des suites de Cauchy faibles dans $C_o(M)$, § 3, Nº 2, exercice 8; on a de plus facilement 4º $\longrightarrow$ 2º; enfin 2º $\longrightarrow$ 1º grâce à b)).

<u>Exercice 6</u>. Soit M un espace localement compact, F un espace localement convexe quasi-complet. On suppose que dans F toute suite de Cauchy faible est faiblement convergente. Montrer que toute application linéaire continue de $C_o(M)$ dans F est faiblement compacte (Utiliser exercice 5, c). Toute application linéaire continue de $C_o(M)$ dans un espace L^1 ou $\mathcal{M}^1(M)$ - M' espace localement compact - est faiblement compacte.(Utiliser a) et le th. 1, corollaire 3, enfin le fait que $\mathcal{M}^1(M)$ est isomorphe à un espace L^1 - exercice 2, b).

<u>Exercice 7</u>. Soit M un espace localement compact muni d'une mesure positive μ, E un espace localement convexe quasi-complet, f une application scalairement sommable de M dans E, qui définit donc une application linéaire na-

turelle u de E' dans $L^1(\mu)$. ux' étant la classe de la fonction $\langle f(t),x'\rangle$. La transposée de u est une application linéaire de L^∞ dans le dual algébrique $\hat{E}$ de E', notée classiquement par

$$u'\varphi = \int f\varphi d\mu$$

("intégrale faible"). Montrer que pour que $\int f\varphi d\mu$ soit élément de E quelle que soit $\varphi \in L^\infty$, il faut et il suffit que ce soit le cas pour toute φ fonction caractéristique d'un ensemble fermé. (Se ramener au cas où F est un espace de Banach; montrer qu'alors u est une application linéaire <u>continue</u> de E' dans L^1 - utiliser le th. du graphe fermé - donc u' une application linéaire <u>continue</u> de L^∞ dans E". En conclure qu'elle applique $C_o(M)$ dans E, puis utilisant exercice 5, c, critère 2º, que c'est une application linéaire <u>faiblement compacte</u> de $C_o(M)$ dans E. Achever en notant que la boule unité de $C_o(M)$ est faiblement dense dans celle de L^∞).

<u>Exercice 8</u>. Soit E un espace localement convexe quasi-complet dans lequel toute suite de Cauchy faible est faiblement convergente (p.ex. un espace réflexif, ou un espace L^1). Montrer que dans E, toute suite scalairement sommable est sommable. (Utiliser Chap. 2, Nº 18, ex. 3).

<u>Exercice 9</u>. Soit M un espace localement compact, soit $\mathcal{M}^1 = \mathcal{M}^1(M)$ l'espace des mesures bornées sur M (dual de $C_o = C_o(M)$), H une partie de $\mathcal{M}^1$. Montrer que les con-

ditions suivantes sont équivalentes:

a) H est relativement compact pour $\sigma(\mathcal{M}^1,(\mathcal{M}^1)')$.

b) Il existe une mesure positive μ sur M telle que $H \subset L^1(\mu)$ (quand $L^1(\mu)$ est identifié à un espace de mesures bornées comme dans exercice 2). Et μ étant ainsi fixé en tant que partie de $L^1(\mu)$, H satisfait aux conditions a. et b. du théorème.

c) Il existe une mesure positive μ sur M telle que $H \subset L^1(\mu)$. Et H étant ainsi fixée, toute suite bornée (f_n) dans $L^\infty(\mu)$ qui converge en mesure, converge uniformément sur H.

d) Toute suite dans C_0 faiblement convergente vers zéro (i.e. bornée, et qui converge vers 0 en tout point de M), converge uniformément sur H.

e) Pour toute suite d'ouverts O_i disjoints deux à deux dans M, on a $\lim\limits_i \mu(O_i) = 0$ uniformément quand μ est dans H.

f) H satisfait aux deux conditions: α. Pour tout compact $K \subset M$ et tout $\varepsilon > 0$, existe un ouvert $U \supset K$ tel que $|\mu|(U \cap \complement K) \leqslant \varepsilon$ pour toute $\mu \in H$. . Pour tout $\varepsilon > 0$, existe un compact $K \subset M$ tel que $|\mu|(\complement K) \leqslant \varepsilon$ pour toute $\mu \in H$.

(a $\longrightarrow$ b en vertu de exercice 3, b et théorème 1; b $\longrightarrow$ c en vertu de prop. 1; c $\longrightarrow$ d trivialement; on prouve sans difficulté d $\longrightarrow$ e et e $\longrightarrow$ f.

Reste à prouver f $\longrightarrow$ a, pour ceci se ramener grâce au théorème d'Eberlein au cas où M est dénombrable, donc exercice 2, a contenu dans un espace $L^1(\mu)$. Utiliser alors le théorème 1, dont il faut seulement prouver la condition a. Pour ceci, on peut se ramener aussitôt au cas où M est compact, et on arrive à bonne fin par une démonstration par l'absurde, pas tout à fait triviale).

Exercice 10. Soit u une application linéaire continue de $C_o(M)$ (M espace localement compact) dans un espace de Banach E. Prouver l'équivalence des conditions suivantes:

a) u est faiblement compaote.

b) Il existe un mesure positive μ sur M telle que $u'(E') \subset L^1(\mu)$. Et μ étant ainsi fixée, les conditions suivantes sont vérifiées: α. Pour tout $\varepsilon > 0$ existe $\eta > 0$ tel que pour tout ensemble borélien A tel que

$$\mu(A) \leqslant \eta ,$$

on a

$$\| u''(\varphi_A) \| \leqslant \varepsilon .$$

β. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un compact $K \subset M$ tel que pour tout ensemble borélien $A \subset \complement K$, on a

$$\| u''(\varphi_A) \| \leqslant \varepsilon .$$

c) Il existe une mesure positive μ sur M telle que u se prolonge par continuité en une application de $L^\infty(\mu)$ dans E continue pour $\sigma(L^\infty(\mu), L^1(\mu))$ et $\sigma(E,E')$.

d) u transforme les suites faiblement convergentes de $C_o(M)$, en des suites fortement convergentes de E.

e) Pour toute suite (O_i) d'ouverts disjoints deux à deux dans M, on a $\lim u''(\varphi_{O_i}) = 0$ dans E.

f) On a les deux propriétés: α. Pour tout compact $K \subset M$ et tout $\varepsilon > 0$, existe un ouvert $U \supset K$ tel que pour tout compact $K' \subset U \cap \complement K$, on ait

$$\| u''(\varphi_{K'}) \| \leqslant \varepsilon .$$

β. Pour tout $\varepsilon > 0$, existe un compact $K \subset M$ tel que pour tout compact K' disjoint de K on ait

$$\| u''(\varphi_{K'}) \| \leqslant \varepsilon .$$

Dans l'énoncé des conditions a. c. et f., on a identifié, comme dans l'exercice 5, les fonctions boréliennes et bornées sur M à des éléments du bidual de $C_o(M)$). φ_A est la fonction caractéristique de A. (Démonstration: à l'exception de c., l'équivalence de ces conditions n'est qu'une reformulation de l'équivalence des conditions correspondantes dans l'exercice 9. a $\longrightarrow$ c résulte directement de exercice 3, b., et c $\longrightarrow$ a est trivial puisque la boule unité de $L^\infty(\mu)$ est compacte pour la topologie faible envisagée). Étendre l'équivalence des conditions a, d, e, f (f convenablement modifiée) au cas où E est un ELC quasi-complet quelconque.

Comparer les résultats des exercices 9 et 10 à ceux de l'exercice suivant (et aussi de l'exercice 5).

<u>Exercice</u> <u>11</u>. Soit E un espace $\mathcal{F}$. Pour qu'une partie H de E' soit relativement compacte pour $\tau(E',E)$, il faut et il suffit que toute suite faiblement convergente dans

E converge uniformément sur H; pour qu'une application linéaire de E dans un ELC F transforme parties faiblement compactes en parties compactes, il faut et il suffit qu'elle transforme suites faiblement convergentes en suites convergentes. (Ces deux énoncés sont équivalentes, grâce au Chap. 2, Nº 18, th. 12; démonstration immédiate par utilisation du théorème de Šmulian).

Soit $E = C_0(M)$. Pour qu'une partie de E' soit relativement compacte pour $\tau(E',E)$ il faut et il suffit qu'elle le soit pour $\sigma(E',E'')$; pour qu'une application linéaire u de E dans un ELC quasi-complet F soit faiblement compacte, il faut et il suffit qu'elle transforme parties faiblement compactes en parties compactes (utiliser 1., et l'exercice 9. N.B. Comparer avec le Nº suivant 5, prop. 3 et corollaires, et th. 2, et Nº 2, exercice 3,(3º,4º,5º).

<u>Exercice</u> <u>12</u>. Soit E un espace de Banach. Montrer que les deux conditions suivantes sont équivalentes:

a. Toute application linéaire continue de E dans un ELC quasi-complet <u>séparable</u>, est faiblement compacte.

b. Toute suite (x_i) de E' qui converge faiblement vers 0, converge vers 0 pour $\sigma(E',E'')$.

(Pour a $\longrightarrow$ b, on considère l'application

$$x \longrightarrow (\langle x, x_i \rangle)$$

de E dans c_0 définie par la suite envisagée, pour prouver que cette dernière est relativement compacte pour $\sigma(E',E'')$; pour b $\longrightarrow$ a il suffit de prouver que l'image d'une partie équicontinue de E' par la transposée u' est relativement $\sigma(E',E'')$-compacte, pour ceci on utilise le théorème d'Eberlein, en notant que d'une suite équicontinue du dual de F' on peut extraire une suite faiblement convergente).

2. Soit K un espace compact <u>stonien</u>, i.e. tel que $C(K)$ soit un lattice complet. Prouver que $C(K)$ possède les propriétés envisagées dans 1º. (On admetra que $C(K)$ est un facteur direct de l'espace $\ell^\infty(K)$. (Comparer Chap. 3, Nº 3, exercice 8, c)), ce qui ramène au cas $E = \ell^\infty(K) = C(\hat{K})$ (K ensemble d'indices donné, K son compactifié de Stone). Il suffit de montrer que la suite (x_i) est relativement compacte pour $\sigma(E',E'')$, pour ceci on applique le critère e. de l'exercice 9, en notant qu'on peut y supposer les O_i à la fois ouverts et fermés, K étant totalement discontinu. En procédant comme dans Chap. 3, Nº 3, ex. 8, a., se ramener au cas où I est l'ensemble des entiers et $O_i = \{i\}$, puis achever au moyen de Chap. 3, Nº 7, ex. 2, c).

3. Un espace de Banach séparable isomorphe à un quotient d'un espace $C(K)$, K compact stonien, est réflexif (utiliser 2). En conclure que si M est un espace localement compact infini de type dénombrable, alors $C_0(M)$ n'est pas facteur direct dans son bidual. (Noter que le dual de $E=C_0(M)$ étant isomorphe à un espace L^1 exercice 2 - son bidual est isomorphe à un espace L^∞, donc à un $C(K)$ avec K compact stonien. D'autre part E est séparable, et ne peut donc être isomorphe à un quotient de E'' puisque E n'est pas réflexif). Ceci généralise Chap. 3, Nº 7, ex. 2, d.

<u>Exercice 13</u>. Soit M un espace localement compact muni d'une mesure positive μ, E un espace localement convexe séparé, E' son dual. Une application f de M dans E est dite <u>strictement faiblement sommable</u> si elle est scalairement sommable, et si pour toute $\varphi \in L^{\infty}$, l'intégrale faible $\int \varphi f \, d\mu$ (qui à priori est une forme linéaire sur E') est un élément de E. Alors f définit donc une application linéaire u_f de L^{∞} dans E, $u_f(\varphi) = \int \varphi f \, d\mu$ qui est continue pour la topologie faible $\sigma(L^{\infty}, L^1)$ et $\sigma(E', E)$, donc transforme la boule unité de L^{∞} en une partie <u>faiblement compacte</u> de E.

1. Si f est une application strictement faiblement sommable de M dans E, l'application u_f transforme la boule unité de L^{∞} en une partie limitée (voir § 3, Nº 3, exercice supplémentaire 3, 3º) de E. (Il faut montrer que toute suite faiblement convergente (x'_i) dans E' converge uniformément sur la partie envisagée de E ou encore que la suite des $u'_f x'_i$ est une suite fortement convergente dans L^1. En vertu de prop. 2, corollaire 1, il suffit de montrer que c'est une suite dans L^1 faiblement relativement compacte que converge en chaque point).

2. En conclure que u_f est une application compacte dans chacun des cas suivants: E est séparable; ou un espace de Banach réflexif ou plus généralement le dual F' d'un espace F du type $(\mathcal{F})$, avec la topologie $\tau(F', F)$; ou un espace L^1 construit sur une mesure quelconque; ou f est fortement mesurable. (Sauf le dernier cas, sous chacune des con-

ditions précedentes les parties limitées de E sont précompactes, en vertu de § 3, Nº 3, exercice suppl. 3, eº et exercice suppl. 5; dans le dernier cas, se ramener au cas où E est un espace de Banach - en utilisant § 3, Nº 2, exercice 3, puis au cas où M est dénombrable à l'infini, enfin au cas où E est séparable, en notant qu'on peut supposer que f prend ses valeurs dans un sous-espace séparable de E). N.B. On ignore si u_f est compacte dans tous les cas. On peut se ramener facilement au cas où E est l'espace de Banach ℓ^∞ et où M est compact, en procédant comme plus haut. Cela permet aussi de se ramener au cas où M est métrisable, et même où M est le segment $(0,1)$ avec la mesure de Lebesgue, et on peut enfin supposer f bornée en utilisant Nº 2, exercice supplementaire 4, 3º.

3. Soit f une application scalairement sommable de M dans l'espace complet E. Montrer que pour que f soit strictement faiblement sommable, il faut et il suffit que l'application de E' dans $L^1(\mu)$ définie par f transforme parties équicontinues en parties faiblement relativement compactes de L^1, et qu'on puisse trouver une partie totale H du dual faible L^∞ de L^1, telle que $\int \varphi f \, d\mu \in E$ pour toute $\varphi \in H$. (Noter que u_f est alors une application de L^∞ dans le dual algébrique E'^* de E' continue pour $\tau(L^\infty, L^1)$ et la topologie de la convergence équicontinue sur E' appliquant le sous-espace vectoriel dense engendré par H dans le sous-espace complet donc fermé E de E'^*). N.B. On ignore si la deuxième condition énoncée plus haut n'est pas superflue.

Pour cette question, on peut encore immédiatement se ramener au cas où E est un espace de Banach, M compact et enfin (grâce à Nº 2, exercice supplémentaire 4, 3º) f scalairement essentiellement bornée.

Nº 2. Application du critère de Dunford-Pettis.

Proposition 3. Soit E un espace localement convexe, $\mathfrak{S}$ un ensemble de parties bornées de E, $\mathfrak{S}'$ l'ensemble des parties de E' qui sont disquées, équicontinues et compactes pour $\sigma(E',E'')$. Les hypothèses suivantes sur $(E,\mathfrak{S})$ sont équivalentes:

a) Toute application linéaire continue u de E dans un ELC séparé F, qui transforme parties bornées en parties faiblement relativement compactes, transforme les $A \in \mathfrak{S}$ en des parties relativement compactes.

b) Les $A \in \mathfrak{S}$ sont précompacts pour la $\mathfrak{S}'$-convergence.

c) Les $A' \in \mathfrak{S}'$ sont précompacts pour la $\mathfrak{S}$-convergence.

Signalons tout de suite que dans la définition de il était inutile de supposer les A' disquées (conséquence facile du th. de Krein, § 3, Nº 3).

Démonstration absolument standart: a) implique b), car prenant pour F le complété de E pour la $\mathfrak{S}'$-convergence, et u l'application identique de E (avec sa topologie donné) dans F, u satisfait aux conditions de a. en vertu de Chap. 2, Nº 18, th. 13 (la transposée u' transforme en effet une partie équicontinue de F' en ensemble contenu dans un ensemble de $\mathfrak{S}'$, donc équicontinu et $\sigma(E',E'')$-compact), donc transforme les A en des parties relativement compactes de F, i.e. les $A \in \mathfrak{S}$ sont précompacts pour la $\mathfrak{S}'$-convergence. b) implique c), en vertu de Chap. 2, Nº 18, th. 12 appliqué à l'application u précédente de E dans F. Enfin c) implique a), en vertu du même théorème appliqué à la transformation u envisagée dans a. (On trouve que u transforme les $A \in \mathfrak{S}$ en des parties <u>précompactes</u> de F, mais comme elles sont aussi faiblement relativement compactes en vertu de l'hypothèse sur u, A étant borné, elles seront même relativement compactes - Chap. 2, Nº 18, prop. 37, corollaire 1).

<u>Corollaire 1. Soit</u> E <u>un ELC quasi-tonnelé</u>, E' <u>son dual fort, supposons que</u> E' <u>satisfasse aux conditions de la proposition 3, quand</u> $\mathfrak{S}'$ <u>y désigne l'ensemble des parties</u> $\sigma(E',E'')$-<u>compactes de</u> E'. <u>Alors</u> E <u>satisfait a la condition analogue</u> (relativement à l'ensemble des parties faiblement compactes de E).

Consertons les notations de la proposition 3. L'hypothèse sur E' signifie aussi (quand on prend l'énoncé b. de la proposition qu'on applique à $(E',\mathfrak{S}')$) que les $A' \in \mathfrak{S}'$ sont précompacts pour la topologie de la convergence uniforme sur l'ensemble $\mathfrak{S}''$ des parties A" de E" qui sont équicontinues et $\sigma(E'',E''')$ - compactes. Mais une $A \in \mathfrak{S}$ i.e. une partie faiblement compacte de E, appartient aussi à $\mathfrak{S}''$

Manifestement (car E étant quasi-tonnelé, est un sous-espace vectoriel topologique de E'' fort), donc à fortiori les $A' \in \mathfrak{S}'$ sont précompacts pour la $\mathfrak{S}$-convergence, ce qui n'est autre que la condition b. de la proposition 3, pour le couple $(E,\mathfrak{S})$.

Corollaire 2. Soit E *un espace* $(\mathcal{F})$, $\mathfrak{S}$ *l'ensemble des parties faiblement compactes de* E. *Pour que les conditions de la proposition 3 soient satisfaites, il* (faut et il) *suffit que toute suite faiblement convergente vers* 0 *dans* E, *converge uniformément sur tout* $A' \in \mathfrak{S}'$.

On prendra les conditions de prop. 3 sous la forme b. Nécessité triviale. Pour la suffisance, on doit montrer que toute partie disquée faiblement compacte A de E est précompacte pour la $\mathfrak{S}'$-convergence. Or (th. de Šmulian), on pourra de la suite donné extraire une suite faiblement convergente qui convergera donc aussi pour la $\mathfrak{S}'$ - convergence d'après l'hypothèse.

Corollaire 3. Soit E *un espace localement convexe,* $\mathfrak{S}$ *l'ensemble des parties de* E *qui sont l'ensemble des éléments d'une suite de Cauchy faible. Alors les conditions de la proposition 3 équivalent aussi aux suivantes:*

a) bis. *Toute application linéaire continue* u *de* E *dans un ELC séparé* F, *qui transforme parties bornées en parties faiblement relativement compactes, transforme suites de Cauchy faibles en suites convergentes.*

b) *bis. Toute suite de Cauchy faible dans* E *est aussi suite de Cauchy pour la* $\mathfrak{S}'$*-convergence.*

Si ces conditions sont vérifiées, et si E est du type $(\mathfrak{F})$, alors les conditions de prop. 3 sont encore vérifiées si $\mathfrak{S}$ y désigne l'ensemble des parties faiblement compactes de E.

Il est en effet immédiat que a) bis resp. b) bis ne sont qu'une autre façon d'exprimer a) resp. b). Enfin, la dernière partie du corollaire résulte aussitôt du corollaire 2.

Théorème 2. Soit E *un espace* $L^1(\mu)$ *ou* $C_0(M)$, u *une application de* E *dans un ELC séparé* F *qui transforme parties bornées en parties faiblement relativement compactes. Alors* u *transforme des parties faiblement compactes en des parties relativement compactes et les suites de Cauchy faibles en des suites convergentes.*

La première assertion signifie que E satisfait aux conditions de prop. 3 quand $\mathfrak{S}$ y désigne l'ensemble des parties faiblement compactes de E. D'ailleurs, comme le dual L^∞ d'un espace L^1 est isomorphe à un espace $C(K)$ (Kakutani, Stone), cette assertion sur les espaces L^1 sera déjà établie si nous la prouvons pour les espaces $C_0(M)$ (grâce au corollaire 1 de prop. 3). Alors, la deuxième assertion sera aussi prouvée pour le cas $E = L^1$, puisque dans L^1, une suite de Cauchy faible est faiblement convergente (th.1, corollaire 3). On est ramené donc au cas $E = C_0(M)$.

D'ailleurs en vertu du corollaire 3 de prop. 3, il suffit de prouver la deuxième assertion du théorème, qui peut s'énoncer aussi. Soit (f_i) une suite de Cauchy faible dans $E = C_o(M)$, A' une partie $\sigma(E',E'')$-compacte dans E', prouver que (f_i, μ) converge uniformément quand μ parcourt A'. S'il n'en était pas ainsi, on pourrait trouver $\varepsilon > 0$, extraire de A' une suite (μ_j) et trouver une suite strictement croissante (i_j) d'indices, telles que

$$|\langle f_{i_{j+1}} - f_{i_j}, \mu_j \rangle| \geqslant \varepsilon .$$

Cela nous ramène au cas où A est une suite faiblement relativement compacte. Mais on sait qu'il existe alors une mesure positive bornée unique μ telle que toutes les μ_i soient absolument continues par rapport à μ (p.ex.

$$\mu = \sum_i 2^i \frac{|\mu_i|}{\|\mu_i\|}$$

i.e. s'identifient à des éléments de $L^1(\mu)$. Comme $L^1(\mu)$ est un sous-espace normé de l'espace $\mathcal{M}^1(M) = E'$ des mesures bornées sur E, donc fermé (puisque complet) et par suite aussi fermé pour $\sigma(E',E'')$ la suite A' est aussi faiblement relativement compacte dans $L^1(\mu)$. D'autre part (f_i), étant une suite de Cauchy faible, est bornée dans $C_o(M)$, et de plus converge en chaque point, et à fortiori converge en mesure sur tout compact au sens de μ. En vertu de prop. 1, il s'ensuit bien que $\langle f_i, \mu \rangle$ converge uniformément quand parcourt A'. c.q.f.d.

Corollaire 1. Soient E, F, G trois espaces localement convexes, u une application bilinéaire continue de $E \times F$ dans G. On suppose que E est un espace isomorphe à un espace L^1 ou à un espace $C_0(M)$. Alors pour toute partie faiblement compacte A de E et B de F, la restriction de u à $A \times B$ est continue pour le produit des topologies faibles sur $A \times B$ et la topologie faible sur G (En particulier, $u(A \times B)$ est une partie faiblement compacte de G).

On est aussitôt ramené au cas où u est une forme bilinéaire continue. En vertu de Chap. 2, Nº 18, th. 12, il suffit de prouver que l'application linéaire v de E dans F' définie par u transforme les parties faiblement compactes A en des parties de F' compactes pour $\tau(E',E)$. Or v est une application faiblement compacte quand on munit F' de $\tau(F',F)$, d'où la conclusion en vertu du théorème 2. On voit de même:

Corollaire 2. Sous les conditions du corollaire 1, soit (x_i) une suite de Cauchy faible dans E, (y_i) une suite de Cauchy faible dans F, alors $(u(x_i,y_i))$ est une suite de Cauchy faible dans G.

(Se ramener encore au cas où u est une forme, qu'on interprète comme une application linéaire de F dans E').

L'application la plus importante du théorème 2 consiste dans le

<u>Théorème 3</u>. (<u>Dunford-Pettis-Philipps</u>). <u>Soit</u> M <u>un espace localement compact muni d'une mesure positive</u> μ, E <u>un espace de Banach</u>, u <u>une application linéaire faiblement compacte de</u> $L^1(\mu)$ <u>dans</u> E. <u>Alors il existe une application mesurable</u> f <u>de</u> M <u>dans</u> E, <u>telle que</u>

$$\| f(t) \| \leqslant \| u \|$$

<u>pour tout</u> t, <u>et que</u>

$$u.\varphi = \int \varphi(t)\ f(t)\ d\,\mu(t)$$

<u>pour toute</u> $\varphi \in L^1(\mu)$ (noter que le produit φf sera automatiquement intégrable, ce qui donne un sens à cette formule - voir Bourbaki, Intégration). <u>Cette</u> f <u>est unique modulo les fonctions localement négligeables</u>.

L'unicité est immédiate et bien connue dans un contexte bien plus général. Il en résulte qu'il suffit de prouver le théorème quand M est compact: car alors pour tout compact $K, \subset M$ on aura une classe F_K de fonctions mesurables et bornées f sur K à valeurs dans E, $\| f(t) \| \leqslant \| u \|$ pour presque tout $t \in K$, de telle façon que (1) sera vérifiée pour les φ qui sont nulles dans $\complement K$; et l'unicité prouve que $K \subset K'$ implique que F_K est la restriction de $F_{K'}$; d'après un lemme bien connu dû à Godement, inventé spécialement pour des questions de ce genre, il existe alors une application f de M dans E qui induit sur chaque K la classe F_K. Et on vérifie alors tout de suite que cette application f satis fait aux conditions voulues ($\|f(t)\| \leqslant \|u\|$ loc. p.p. seulement, mais une modification de f sur un ensemble localement négligeable permet d'obtenir la même inégalité partout).

Supposons donc M compact. Alors $L^{\infty} \subset L^{1}$, et la boule unité de L^{∞} est une partie faiblement compacte de L^{1} (p.ex. en vertu du théorème 1, corollaire 2), donc (théorème 2) elle est transformée en une partie relativement compacte de E. Soit E_1 le sous-espace vectoriel fermé engendré par cette dernière, c'est un espace de Banach séparable et comme L^{∞} est dense dans L^{1} et appliqué dans E_1, u applique aussi L^{1} dans E_1. Cela nous ramène à prouver le théorème quand de plus E est séparable, ce que nous supposons maintenant. Soit A l'adhérence de l'image de la boule unité de L^{1}. C'est une partie faiblement compacte de E, et comme E' est faiblement séparable (E étant séparable) A sera métrisable pour sa topologie faible. A est aussi la boule unité du dual de l'espace de Banach F obtenu (par passage au quotient et complétion) à partir de l'espace E' muni de la semi-norme jauge de A^{o}, et dans cette identification, les deux topologies faibles sont les mêmes. Comme A est compact métrisable pour sa topologie faible, il en résulte que F est séparable. Ainsi u devient une application linéaire de norme 1 de L^{1} dans le dual de l'espace de Banach séparable F. D'après le théorème de Dunford-Pettis sous sa forme classique (tel qu'il paraitra dans Bourbaki), u est définie par une application f scalairement mesurable de M dans la boule unité de F', par la formule d'intégration (1) (mais où il s' agit d'une intégrale faible dans F'). À fortiori, f est une application scalairement intégrable de M dans E, et la formule (1) est valable comme intégrale faible dans E. Il n'y a plus qu'à noter qu'en fait, f est même mesurable; il est en effet bien connu que pour une application à valeurs dans un espace de Banach <u>séparable</u>, scalairement mesurable implique mesurable. Enfin l'inégalité $\| f(t) \| \leqslant \| u \|$ est contenu dans le résultat plus précis $f(M) \subset A$ (vrai bien entendu, en vertu de la démonstration, sans supposer M compact ni E séparable). Comme première application intéressante, voir exercices 8, 9. Le th. 3 joue un rôle important dans la théorie des produits tensoriels topologiques.

<u>Exercice 1</u>. Prouver qu'on obtient une condition équivalente aux conditions envisagées dans la prop. 3, si on énonce b. en supposant que F est un espace de Banach ou même l'espace de Banach fixe ℓ^∞ (pour ce dernier,utiliser § 3, Nº 2, exercice 3).

<u>Exercice 2</u>. On dira qu'un espace localement convexe E est un espace DP (Dunford-Pettis) s'il satisfait aux conditions de prop. 3, $\mathfrak{S}$ étant l'ensemble des ses parties faiblement compactes.

1. Si E est DP il en est de même de tout facteur direct de E. Le résultat analogue est faux pour les sous-espaces et quotients (se rappeler que <u>tout</u> espace de Banach est isomorphe à un sous-espace d'un espace C(K) et à un espace quotient d'un espace L^1, voir Chap. 1, Nº 14, exercice 1 et

Chap. 2, Nº 17, prop. 30, corollaire).

2. Un espace de Banach réflexif DP est de dimension finie. (Prouver que sa boule unité est précompacte).

3. Un espace de Banach réflexif de dimension infinie n'est pas isomorphe à un facteur direct d'un espace L^1 ou d'un espace $C_o(M)$ (conjugues 1 et 2). Utilisant les remarques à la fin de 1º, en déduire des exemples de sous-espaces vectoriels dans $C(K)$ ou L^1 qui n'ont pas de supplémentaire topologique.

Exercice 3. Soit u une application d'un espace uniforme E dans un espace topologique séparé F. Si u transforme les suites de Cauchy en des suites convergentes, elle transforme les parties précompactes et métrisables en des parties relativement compactes de F. (Montrer que u se prolonge par continuité au complété de la partie précompacte métrisable envisagée). Corollaire: Soit u une application d'un espace uniforme E dans un autre F, transformant suites de Cauchy en suites de Cauchy, alors u est uniformément continue sur toute partie précompacte métrisable, qu'elle transforme donc en une partie précompacte. (Se ramener au cas où F est séparé et complet, alors d'après ce qui précède u se prolonge par continuité au complété de la partie précompacte envisagée, d'où la conclusion).

2. Cas particulier de 1º. Soit u une application linéaire d'un ELC F séparé, transformant suites de Cauchy faibles en suites convergentes, alors u transforme les parties bornées faiblement métrisables en des parties relative-

ment compactes.

3. En particulier, si dans F les suites de Cauchy faibles convergent faiblement, alors toute application linéaire faiblement continue de E dans F transforme parties bornées faiblement métrisables en parties faiblement relativement compactes. En particulier (prennant alors $E = F$, u application identique de F sur F) toute partie bornée faiblement métrisable de F est faiblement relativement compacte. Si le dual fort de E est séparable, toute application linéaire faiblement continue de E dans F transforme parties bornées en parties faiblement relativement compactes.

<u>Exercice 4</u>. 1. Une partie bornée faiblement métrisable d'un espace L^1 est faiblement relativement compacte (Utiliser th. 1, corollaire 3 et exercice 3, 3º).

2. Soit E un espace $C_o(M)$ de dimension infinie. Montrer qu'il existe dans E des suites de Cauchy faibles non faiblement convergentes (à fortiori donc, des parties bornées faiblement métrisables non faiblement relativement compactes), et des suites faiblement convergentes non convergentes. (Procéder soit par construction directe, en se ramenant au cas M métrisable par passage à un quotient; soit en notant que si l'affirmation était en défaut l'application identique de E sur lui-même serait faiblement compacte en vertu de Nº 1, exercice 5, c. critère 3º et exercice 10 critère d.; donc E serait réflexif, ce qui exige que E soit de dimension finie.

3. Conclure de 1. et 2. qu'un espace $C_o(M)$ de dimension infinie n'est pas isomorphe à un sous-espace vectoriel

topologique d'un espace $L^1(\mu)$, ni un espace L^1 de dimension infinie isomorphe à un quotient d'un espace $C_o(M)$ (le deuxième énoncé est transformé du premier par dualité; on peut aussi commencer par démontrer ce dernier, en utilisant Nº 1, exercice 6, b).

<u>Exercice 5</u>. Soient E et F deux espaces de Banach, E isomorphe à un espace L^1 ou $C_o(M)$, u une forme bilinéaire faiblement compact sur $E \times F$, A une partie faiblement compacte de E, B la boule unité de F. Montrer que la restriction de u à $A \times B$ est continue pour le produit des topologies faibles. (Regarder u comme une application linéaire faiblement compacte de E dans l'espace de Banach F' fort, et appliquer le théorème 2). On peut aussi remplacer l'hypothése sur A par la suivante: A est borné et faiblement métrisable (utiliser exercice 3, 3º). Variante en supposant que F est un ELC quelconque; quelle est l'hypothèse à faire sur u? 2. Soient E, F deux espaces de Banach, isomorphes chacun à un espace $C_o(M)$ convenable. Soit u une forme bilinéaire continue sur $E \times F$, montrer que si A est une partie faiblement compacte, ou bornée et faiblement métrisable de E, B la boule unité de F, la restriction de u à $A \times B$ est continue pour le produit des topologies faibles. (Utiliser 1º et Nº 1, exercice 6, b).

<u>Exercice 6</u>. 1. Soit μ une mesure positive bornée sur un espace localement compact M. Soit E un sous-espace vectoriel de $L^\infty(\mu)$ fermé dans un espace L^p avec $1 \leq p < +\infty$.

Montrer que E est de dimension finie (Utilisant le théorème du graphe fermé, montrer que sur E la topologie induite par L^∞ ou L^p est la même si $p = 1$, cela permet de se ramener au cas $p > 1$; prouver alors que la boule unité de E induite par L^p est précompacte, en appliquant le th. 2 à l'application identique de L^∞ dans l'espace réflexif L^p).

2. Soit μ une mesure positive quelconque sur un espace M. Soit $1 \leqslant p < +\infty$, soit E un sous-espace vectoriel fermé de L^p et $f_0 \in L^p$, $f_0 \geqslant 0$, tels que toute $f \in L^p$ soit majorée par un multiple convenable de f_0. Prouver que E est de dimension finie. (Introduire la mesure bornée de densité $|f_0|^p$ par rapport à μ, et se ramener à 1º).

<u>Exercice 7</u>. Prouver le théorème 2 dans le cas où E est supposé un espace $(\mathcal{F})$. (Se ramener au cas d'un espace de Banach, grâce à Chap. 4, § 2, Nº 2, th. 1, corol. 2).

<u>Exercice 8</u>. Soit M un espace localement compact muni d'une mesure positive μ, f une application scalairement mesurable M dans un espace de Banach E, g une application fortement mesurable de M dans E, scalairement localement presque partout égale à f.

1. Montrer que f définit une application linéaire faiblement compacte de L^1 dans E, et appliquer le théorème 3. En particulier, toute application scalairement mesurable et localement bornée de M dans un espace de Banach <u>réflexif</u> E est scalairement loc. p.p. égale à une application fortement mesurable de M dans E. (N.B. Une étude un peu plus poussé

utilisant l'exercice supplémentaire 4, 3, plus bas, montrerait que ce résultat est encore vrai sans supposer l'application donné localement bornée, et si l'espace E est un espace ($\mathfrak{F}$) réflexif).

2. Conformément aux définitions génerales, une application f de M dans E est dite <u>faiblement mesurable</u> si pour tout compact $K \subset M$ et tout $\varepsilon > 0$, existe un compact $K' \subset K$ tel que $\mu(K \cap \complement K') \leq \varepsilon$ et que la restriction de f à K' soit faiblement continue. (Cela implique que f est scalairement mesurable, mais la réciproque est fausse). Prouver qu'une application faiblement mesurable de M dans E est déjà fortement mesurable. (Se ramener au cas où f est faiblement continue et M compact. Appliquer alors 1º, en notant qu'alors on a même $f(t) = g(t)$ presque partout et non seulement scalairement presque partout. Pour ce dernier point, on peut se ramener au cas où g est elle-même continue).

3. Cas particulier de 2º: Soit f une application faiblement continue d'un espace localement compact M dans un espace de Banach E, alors f est mesurable pour toute mesure μ sur M.

<u>Exercice 9</u>. Soient M, N deux espaces compacts, f une fonction numérique sur $M \times N$. Pour tout $s \in M$ soit $F(s)$ la fonction sur N donnée par $F(s)(t) = f(s,t)$.

1. Pour que l'application $s \longrightarrow F(s)$ soit une application faiblement continue de M dans l'espace de Banach C(N), il faut et il suffit que f soit bornée, et continue en chaque variable (Nécessité triviale; pour la suffisance, on

prouvera que $F(M)$ est une partie faiblement compacte de $C(N)$, en utilisant § 3, Nº 2, th. 3).

2. Supposons que l'application f soit continue en chaque variable. Prouver que pour tout mesure positive μ sur M, et tout $\varepsilon > 0$, existe un compact $K' \subset K$ tel que

$$\mu(K \cap \complement K') \leqslant \varepsilon ,$$

et que la restriction de f à $K' \times N$ soit continue. (Se ramener au cas où f prend ses valeurs dans le segment $(0,1)$, donc satisfait aux conditions de 1º; il suffit alors d'appliquer exercice 10, 3º).

3. f étant comme dans 2º, montrer que f est mesurable pour toute mesure positive μ sur $M \times N$. (Soit ρ l'image de μ par la projection de $M \times N$ sur M, appliquer le résultat de 2º à f et ρ). 2º et 3º sont encore valables si f prend ses valeurs dans un espace métrisable séparable P et si dans 3º on suppose seulement M et N localement compacts. (Plonger P dans le produit d'une suite de segments, ce qui ramène aussitôt au cas d'une fonction à valeurs dans un segment; dans 3º, si M et N sont seulement localement compacts, on se ramène aussitôt au cas compact).

4. Supposons la fonction numérique f sur le produit des compacts M et N, bornée et continue en chaque variable. Pour toute mesure μ sur M et ν sur N, f est intégrable pour $\mu \otimes \nu$ en vertu de 3º, posons

$$u_f(\mu, \nu) = \int_{M \times N} f \, d\mu \, d\nu$$

Montrer qu'on obtient ainsi une forme bilinéaire faiblement séparement continue sur le produit $\mathcal{M}(M) \times \mathcal{M}(N)$ des duals de $C(M)$ et $C(N)$, l'application de $\mathcal{M}(M)$ dans $C(N)$ qui lui correspondant étant

$$\mu \longrightarrow \int_M F\, d\mu$$

(intégrale faible dans $C(N)$). (Utiliser 1º). Réciproquement, toute forme bilinéaire faiblement séparément continue u sur $\mathcal{M}(M) \times \mathcal{M}(N)$ est définie par une f comme ci-dessus uniquement déterminée par $f(s,t) = u(\varepsilon_s, \varepsilon_t)$ (ε_s étant la masse $+1$ au point s, ε_t la masse $+1$ au point t). On a

$$\|u\| = \operatorname{Sup.}_{s,t} |f(s,t)|.$$

<u>Exercice</u> <u>10</u>. Soit U un ouvert de C^n, $f(z_1,\ldots,z_n)$ une fonction définie sur U, localement sommable ou localement bornée et holomorphe en chaque variable séparément. Montrer que f est holomorphe. (Si f est localement bornée, se ramener à démontrer que si f est définie sur le produit de deux ouverts $U \subset C^p$ et $V \subset C^q$, localement bornée et séparément holomorphe dans U et dans V, alors f est holomorphe. Comme elle est mesurable en vertu de exercice 11, 3º, elle sera localement sommable, on est donc ramené à ces cas. Considérer alors la distribuition T définie par f, montrer qu'elle satisfait à

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}_i} T = 0$$

pour tout i, donc d'après un théorème classique de Schwartz est définie par une fonction holomorphe g, p.p. égale à f. Prouver enfin $f = g$).

Exercices supplémentaires au § 4, Nº 2.

Ces exercices ne sont pas liés de façon si directe au texte, mais en utilisent les techniques.

Exercice 1. 1. Soit $E = L^1(\mu)$ construit sur une mesure dénombrable à l'infini. Soit H une partie convexe du dual $E' = L^\infty(\mu)$. Prouver que les conditions suivantes sont équivalentes:

a) H est faiblement fermé;

b) H est fermé par rapport aux suites faiblement convergentes;

c) H est fermé pour les suites bornées qui convergent p.p. (a) $\to$ b) trivialement; b) $\to$ c) parce que les suites envisagées dans c) sont faiblement convergentes en vertu du th. de Lebesgue. Pour prouver que c) $\to$ a), se ramener au cas où H est borné grâce au théorème de Banach-Dieudonné - Chap. 4, § 2, Nº 3, th. 2 - puis au cas où μ est bornée, en remplaçant μ par une mesure équivalente bornée, donc au cas où $L^\infty \subset L^1$. Montrer qu'alors H est une partie convexe fermée de L^1, donc faiblement fermée dans L^1, donc faiblement compact dans L^1 car déjà faiblement relativement compacte, d'où facilement que H est aussi faiblement compacte dans L^∞).

2. Soit E un espace <u>séparable</u>, A une partie convexe de E'. Pour que A soit faiblement fermée, il faut et il suffit qu'elle soit faiblement fermée pour les suites. (Utiliser le théorème de Banach-Dieudonné). (Cet exercice devrait être au Chapitre 4, § 2, Nº 3).

3. Soit f une application d'un espace localement compact mesuré M dans un espace localement convexe E. Montrer que le sous-espace H de E' formé des x' telles que $\langle f(t),x'\rangle$ soit mesurable est un sous-espace vectoriel, qui est fermé pour les <u>suites</u> faiblement convergentes. En conclure que si E est un espace $(\mathcal{F})$ séparable, ou si E est un espace L^1 construit sur une mesure dénombrable à l'infini, alors pour que f soit scalairement mesurable, il suffit qu'il existe une partie totale de E' formée de formes x' telles que $\langle f(t),x'\rangle$ soit mesurable. N.B. Ce résultat devient faux en faisant p.ex. $E = \ell^{\infty}$, ou $E = \ell^1(I)$ avec I non dénombrable.

4. Soit E un espace $C(K)$ construit sur un espace compact stonien (cr. exercice 12), p.ex. l'espace ℓ^{∞}. Soit H une partie convexe de E'. Pour que H soit fermé pour les suites faiblement convergentes il faut et il suffit que H soit <u>fortement</u> fermé. (Utiliser l'exercices 12, 2º). En particulier si dim. $E = \infty$ on peut trouver dans E' un hyperplan fermé pour les suites faiblement convergentes, mais non faiblement fermé, donc une forme linéaire continue pour les suites faiblement convergentes, mais non faiblement continue. (En effet E n'est pas réflexif).

5. Montrer que 1. devient faux quand on ne suppose plus μ dénombrable à l'infini. (Reprendre l'espace E de 4º, et se rappeler qu'un espace de Banach est toujours isomorphe à un quotient d'un espace $\ell^1(I)$ sur un ensemble d'indices I convenable).

Exercice 2. 1. Soit $E = L^1(\mu)$ construit sur une mesure μ dénombrable à l'infini. Soit u une forme linéaire sur E'; montrer que les conditions suivantes sont équivalentes:

a. u est faiblement continue;

b. u est continue pour les suites qui tendent faiblement vers 0;

c. u est continue pour les suites bornées dans L^∞ qui tendent vers 0 p.p.

(Utiliser exercice 1, 1º).

2. Soit $E = L^1(\mu)$ avec une mesure μ quelconque sur un espace localement compact M. Montrer qu'on peut trouver un espace localement compact $\hat{M}$ somme topologique d'une famille (M_i) d'espaces compactes non vides, et une mesure ρ sur $\hat{M}$ de support $\hat{M}$, de telle façon que $L^1(\rho)$ soit isomorphe, comme espace de Banach ordonné, à $L^1(\mu)$. On peut supposer I réduit à un élément ou non dénombrable, et la puissance de I est bien déterminée et appelé l'ordre à l'infini de la mesure μ. (Procéder comme dans Nº 1, exercice 2, b).

3. Avec les notations de 2º, soit p = puis. I = l'

ordre à l'infini de μ. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes:

a. Toute forme linéaire sur le dual de $L^1(\mu)$, continue pour les suites faiblement convergentes est faiblement continue;

b. Toute forme linéaire continue sur le dual $\ell^\infty(I)$ de $\ell^1(I)$, continue pour les suites faiblement convergentes, est faiblement continue.

c. Toute forme linéaire positive sur ℓ^∞ nulle sur c_o, continue pour les suites faiblement convergentes, est identiquement nulle.

(a. $\rightarrow$ b. est facile sans plus, b. $\rightarrow$ a., l'est grâce à 1 et 2; pour montrer que c. implique b., on regarde la restriction v de u à c_o comme un élément de ℓ^1, i.e. une forme linéaire faiblement continue sur ℓ^∞, et on est ramené à montrer que $u-v$ nulle, ce qui ramène b. au cas d'une forme u nulle sur c_o. Interprétant $\ell^\infty(I)$ comme l'espace $C(\hat{I})$ ($\hat{I}$, compactifié de Stone de I) montrer que si la mesure μ sur I est une forme linéaire sur $\ell^\infty(I)$ continue pour les suites faiblement convergentes, il en est de même de $|u|$ (ce qui ramène au cas $u \geqslant 0$). Pour ceci, interprétant les formes linéaires continues sur $\ell^\infty(I)$ comme les "fonctions additives bornées d'ensembles" (définies sur la tribu de toutes les parties de E), les formes qui sont continues pour les suites faiblement convergentes deviennent les fonctions "<u>complètement</u> additives" d'ensembles, et notre assertion signifie que la "variation absolue" d'une fonction complètement additive d'ensemble est encore complétement additive, ce qui est assez classique, bien que honni par Bourbaki).

4. En langage de fonctions d'ensemble, l'hypothèse envisagée dans 3º, qui en fait ne porte que sur le cardinal p, signifie donc il n'existe par se fonction d'ensemble complètement additive positive définie sur la tribu de toutes les parties de I, attribuant une mesure nulle aux points et non identiquement nulle. On dit qu'un tel cardinal est un cardinal de mesure nulle. S'il existe un cardinal que n'est pas de mesure nulle, il en existe un premier p_o, (et tous les cardinaux qui le suivent sont non de mesure nulle). Montrer que la somme d'une famille de cardinaux de mesure nulle est de mesure nulle si la puissance de la famille d'indices est aussi de mesure nulle, alors le cardinal qui le suit l'est aussi, donc p_o, s'il existe, est un cardinal limite. Un cardinal est dit inaccessible, s'il est cardinal limite, et si pour toute famille de cardinaux strictement inférieurs, ayant un ensemble d'indices de puissance strictement inférieure, la somme est encore strictement inférieure. Donc p_o serait un cardinal inaccessible. Il semble plausible qu'on puisse ajouter, sans contradictions, aux axiomes de la théorie des ensembles, qu'il n'existe pas de cardinal inaccessible, et à fortiori que tout cardinal est de mesure nulle (Comparer Chap. 4, § 1, Nº 6, ex. 3, g).

Exercice 3. 1. Soit μ une mesure positive sur un espace localement compact; considérons $E = L^1(\mu)$ comme un es pace de Banach ordonné. Montrer que si H est un sous-espace vectoriel fermé qui est un sous-lattice, il existe une projection uniquement déterminée de E sur H, transformant éléments positifs en éléments positifs, et conservant la norme des éléments positifs; cette projection est de norme 1 se $H \neq 0$. (Se ramener au cas où M est un compact K puis en envisageant l'espace de Kakutani de $\mathcal{K}$, i.e. l'espace K tel que $L^{\infty}(\mu)$ soit isomorphe avec toutes ses structures à $C(K)$ - au cas où l'application naturelle $C(K) \longrightarrow L^{\infty}(\mu)$ est un isomorphisme sur. Grâce à la considération de

$$H \cap L^{\infty} = H \cap C(K),$$

montrer qu'on peut trouver une application φ de K sur un espace quotient séparé K' de K, de telle façon que, μ' désignant l'image de μ par φ (voir nº 1, exercice 4, b), H soit identique à l'ensemble des (classes de) fonction $f' \circ \varphi$ où $f' \in L^1(\mu')$. Identifiant $L^1(\mu)$ à l'espace des mesures sur K de base μ, montrer que si la mesure ρ sur K est dans $L^1(\mu)$ alors son image dans K' est dans $L^1(\mu')$. La projection cherchée s'obtient en composant les applications

$$\rho \longrightarrow \varphi(\rho) \quad \text{et} \quad f' \longrightarrow f' \circ \varphi).$$

2. Montrer que tout sous-espace séparable de $L^1(\mu)$ est contenu dans un facteur direct-séparable. (Considérer le sous-lattice vectoriel fermé engendré par le sous-espace donné). N.B. En vertu de exerce Nº 1, exercice 12, 3º, cette propriété vectorielle topologique des espaces L^1 n'est pas partagée par l'espace L^{∞}, (comme d'habitude !).

Exercice 4. Soit μ une mesure positive dénombrable à l'infini sur l'espace localement compact M. Soit $\hat{M}(\mu)$ l'ensemble des classes de fonc[illegible]ons réeles finis ou infinies mesurables sur M (qui a donc un plus grand élément $+\infty$ et un plus petit élément $-\infty$).

1. Soit H une partie filtrante croissante de $\hat{M}(\mu)$, montrer que le filtre des sections croissante sur H tend vers une limite pour la convergence en mesure sur tout compacte et que cette limite est une borne supérieure de H dans $\hat{M}(\mu)$. On peut trouver une suite dans H qui converge p.p. vers cette borne supérieure. Se ramener au cas où μ est bornée donc $L^{\infty} \subset L^{1}$, puis se ramener aux propriétés analogues classiques, pour les ensembles filtrants majorés dans L^{1}, en identifiant $\hat{M}$ à l'ensemble des classes de fonctions mesurables comprises entre 0 et 1, grâce à un homéomorphisme strictement croissant φ de $[-\infty,+\infty]$ sur $[0,1]$).

2. Soit H un ensemble des fonctions réelles finies mesurables sur M (et non de classes de fonctions) tel que pour tout $t \in M$, on ait $\sup_{t \in H} f(t) < +\infty$. Montrer qu'il existe une fonction réelle finie mesurable g sur M telle que $f \in H$ implique $f(t) \leqslant g(t)$ p.p. (Montrer, à l'aide de la dernière partie de 1º, que le sup. dans $\hat{M}$ de l'ensemble des classes des $f \in H$ est la classe d'une fonction p.p. finie.

3. Soit f une application scalairement mesurable de M dans un ELC E, soit A une partie faiblement bornée

de E', montrer qu'on peut trouver une fonction réelle finie mesurable g sur M telle que pour toute $x' \in A$, on ait

$$|\langle f(t),x'\rangle| \leqslant g(t) \quad \text{p.p.}$$

On dit que f est scalairement essentiellement bornée si pour $x' \in E'$, la classe de la fonction $\langle f(t),x'\rangle$ est dans L^{∞}. Déduire de ce qui précède que si E est un espace de Banach (ou plus généralement un espace $(\mathfrak{F})$), pour tout compact $K \subset M$ et tout $\varepsilon > 0$, existe un compact $K' \subset K$ tel que

$$\mu(K \cap \complement K') \leqslant \varepsilon$$

et que la restriction de f à K' soit scalairement bornée.

4. Soit E un espace de Banach, supposons le couple (μ,E) tel que le théorème de Dunford-Pettis, caractérisant les applications linéaires continues de L^1 dans E', ou ce qui revient au même, de E dans L^{∞}, soit valable. (C'est le cas si E est séparable, ou M un espace de Kakutani etc.). Soit u une application linéaire continue de E dans $M(\mu)$. Pour que u puisse être définie par une application scalairement mesurable f de M dans E', par la formule usuelle ux classe de la fonction $\langle x,f(t)\rangle$, il faut et il suffit que l'image de la boule unité de E dans $M(\mu)$ soit latticiellement bornée. (Pour la nécessité, utiliser 3º; pour la suffisance, se ramener au cas où u applique la boule unité de E dans la boule unité de L^{∞}, en composant l'application donnée avec une application de multiplication convenable.

5. Supposons la mesure μ non discrète (p.ex. la mesure de Lebesgue sur $[0,1]$ pour fixer les idées). Montrer

que pour $1 \leqslant p < \infty$ il existe des applications linéaires continues de $E = L^1(\mu)$ dans $L^p(\mu)$ qui ne peuvent pas être obtenues par une application de M dans $E' = L^\infty(\mu)$ i. e. par un noyau-fonction mesurable sur $M \times M$. (Remplacer E par ℓ^1 en notant que ℓ^1 est isomorphe à un quotient de L^1. Puis montrer qu'il existe dans L^p des suites bornées, mais qui sont non latticillement bornées dans $M(\mu)$, et qui définissent des applications de ℓ^1 du type voulu).

Exercice 5. Soit M un espace localement compact muni d'une mesure positive μ, f une application strictement faiblement sommable de M dans un espace E du type $(\mathfrak{F})$ (voir Nº 1, exercice 13). On suppose que dans E, toute partie limitée est précompacte et que tout sous-espace séparable de E est contenu dans un facteur direct séparable (conditions vérifiées en particulier si E est un espace L^1 construit sur une mesure arbitraire en vertu de exercice 3, 2º et § 3, Nº 3, exercice supplémentaire 5). Alors il existe une application mesurable g de M dans E, scalairement localement p.p. égale à f. (En vertu de Nº 1, exercice 13, 1º, l'application u_f de L^∞ dans E définie par f est compacte, soit F un facteur direct séparable de E contenant l'image de L^∞ par u_f, soit p une projection continue de E sur F, on posera $g = p \circ f$. g est mesurable puisque g prend ses valeurs dans l'espace $(\mathfrak{F})$ séparable F. On notera que $u_f = u_g$, ce qui signifie que f est égale à g scalairement localement p.p.).

<u>Exercice 6</u>. Soit M un espace localement compact muni d'une mesure positive μ, E un espace localement convexe séparé tel que toute forme linéaire sur E' qui est continue pour les suites équicontinues faiblement convergentes soit continue (p.ex. E séparable et complet car alors les restrictions des formes envisagées aux parties équicontinues sont faiblement continues, puisque ces parties sont faiblement métrisables; ou E un espace L^1 construit sur une mesure μ' dont l'ordre à l'infini est de mesure nulle, voir exercice 2). Soit f une application scalairement mesurable et bornée de M dans E, et soit $\varphi \in L^1(\mu)$. Montrer que l'intégrale faible $\int \varphi f \, d\mu$ est dans E. (Il suffit de vérifier que c'est une forme continue pour les suites équicontinues faiblement convergentes, pour ceci on applique le théorème de Lebesgue).

2. Si on suppose de plus E métrisable et que dans E toute suite de Cauchy faible est faiblement convergente, alors on a le résultat plus fort: toute application scalairement sommable de M dans E est strictement faiblement sommable. (En vertu de Nº 1, exercice 13, 3º, il suffit de montrer que l'application de E' dans L^1 définie par f transforme parties équicontinues en parties faiblement relativement compactes de L^1, et que $\int \varphi f \, d\mu \in E$ pour toute fonction continue à support compact φ sur M; utilisant le théorème d'Eberlein, se ramener au cas où M est dénombrable à l'infini, puis utilisant la deuxième hypothèse sur E et l'exercice d, 3º se ramener au cas où M est compact et f scalaire

ment essentiellement bornée sur M. On est alors ramené à 1º).

Exercice 7. Soient M, M' deux espaces localement compacts munis respectivement de mesures positives μ, μ', soit $E = L^1(\mu')$. On suppose que l'ordre à l'infini de μ' est un cardinal de mesure nulle, ou que pour tout compact $K \subset M$, la puissance de K est un cardinal de mesure nulle (voir exercice 2). Soit f une application scalairement mesurable de M dans E; montrer qu'il existe une application mesurable g de M dans E qui est scalairement sommable, elle est strictement faiblement sommable (cf. Nº 1, exercice 13). (Montrer qu'on peut supposer M compact, en utilisant le lemme de Godement dans le premier cas, et en procédant comme dans l'exercice précédent, 2º dans le deuxième. Cela permet de supposer qu'on est dans le cas où l'ordre à l'infini de μ' est de mesure nulle, en remplaçant autrement μ' par

$$\mu'' = \operatorname*{Sup.\,Inf}_{t\in M} |f(t)\mu'|.$$

La deuxième assertion résulte alors de l'exercice 6. Pour la première se ramener grâce à exercice 4, 3º au cas où f est scalairement essentiellement bornée; alors f est scalairement sommable, donc strictement faiblement sommable, et on peut appliquer l'exercice 5).