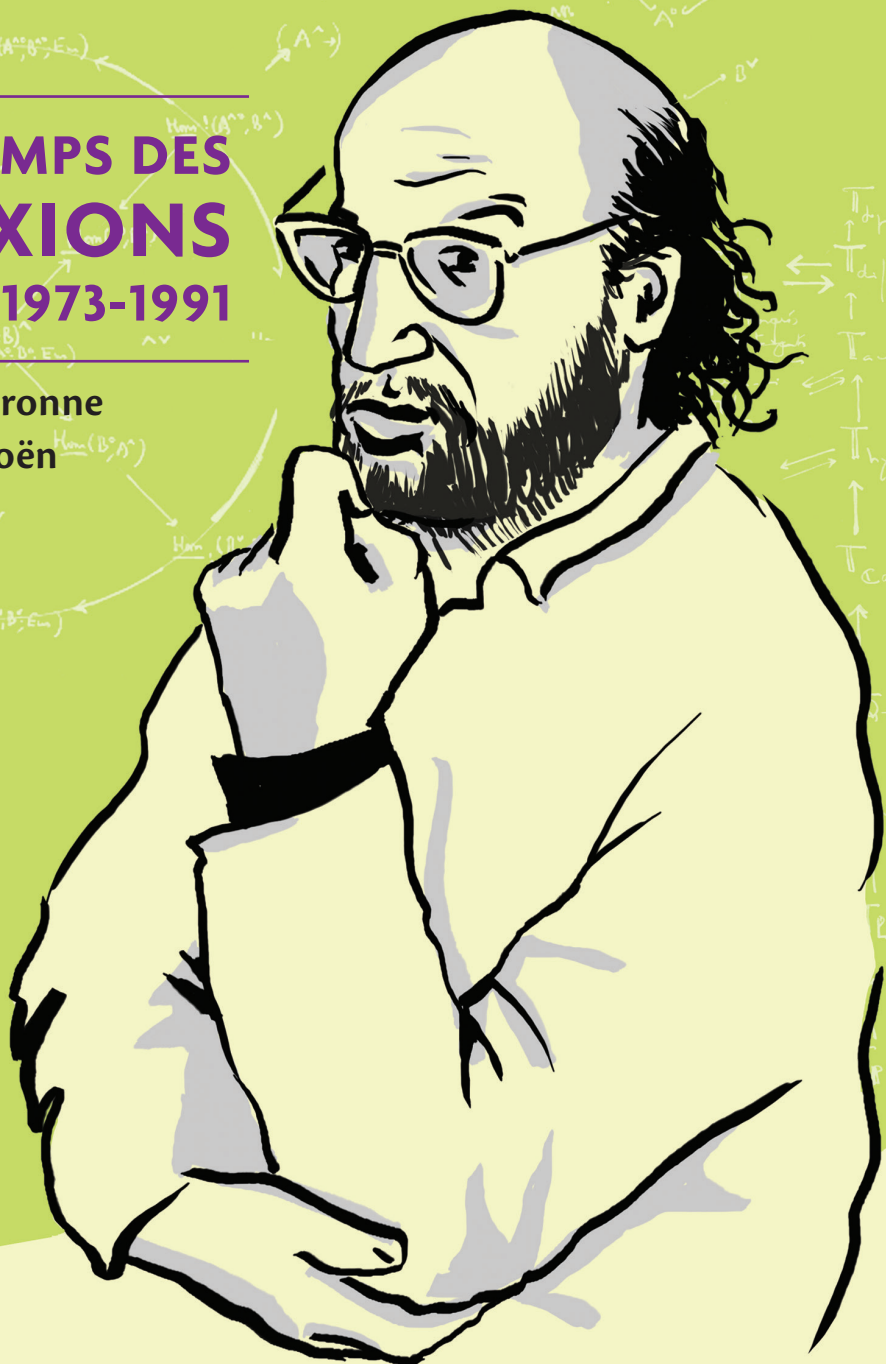


GROTHENDIECK

MATHÉMATICIEN

LE TEMPS DES RÉFLEXIONS 1973-1991

Sébastien Maronne
& Bertrand Toën



GROTHENDIECK

MATHÉMATICIEN

LE TEMPS DES RÉFLEXIONS

1973-1991



Auteurs :

Sébastien MARONNE et Bertrand TOËN
avec la collaboration de Damien CALAQUE

Ce livret est issu de l'exposition « Grothendieck mathématicien. Le temps des réflexions 1973-1991 » qui a été présentée à la Bibliothèque de l'Institut de Mathématiques de Toulouse du lundi 9 décembre 2024 au vendredi 31 janvier 2025.

Remerciements

- Centre International de Mathématiques et Informatique de Toulouse – LabEx CIMI
- Centre National de la Recherche Scientifique – CNRS
- Fédération occitane de mathématiques – OCCIMATH
- Institut de Mathématiques de Toulouse – IMT
- Institut Montpellierain Alexander Grothendieck – IMAG
- Université de Montpellier
- Université de Toulouse

Nous adressons nos chaleureux remerciements à Jean-François Barraud, Dominique Barrère, Etienne Fieux, Johanna Grothendieck, Jean Malgoire, Frédéric Patras, Damian Rössler, Nicolas Saby et Joseph Tapia pour leur relecture et leurs commentaires durant la phase d'écriture.

Sources iconographiques

- Archives de l'IHES
- Archives de la Faculté de Sciences, © Université de Montpellier
- Archives Grothendieck, © Université de Montpellier
- Collection privée Jean Malgoire

L'invitation au voyage

*Heureux celui qui peut d'une aile vigoureuse
S'élancer vers les champs lumineux et sereins ;*

Charles Baudelaire,
Les Fleurs du mal, « Élévation »

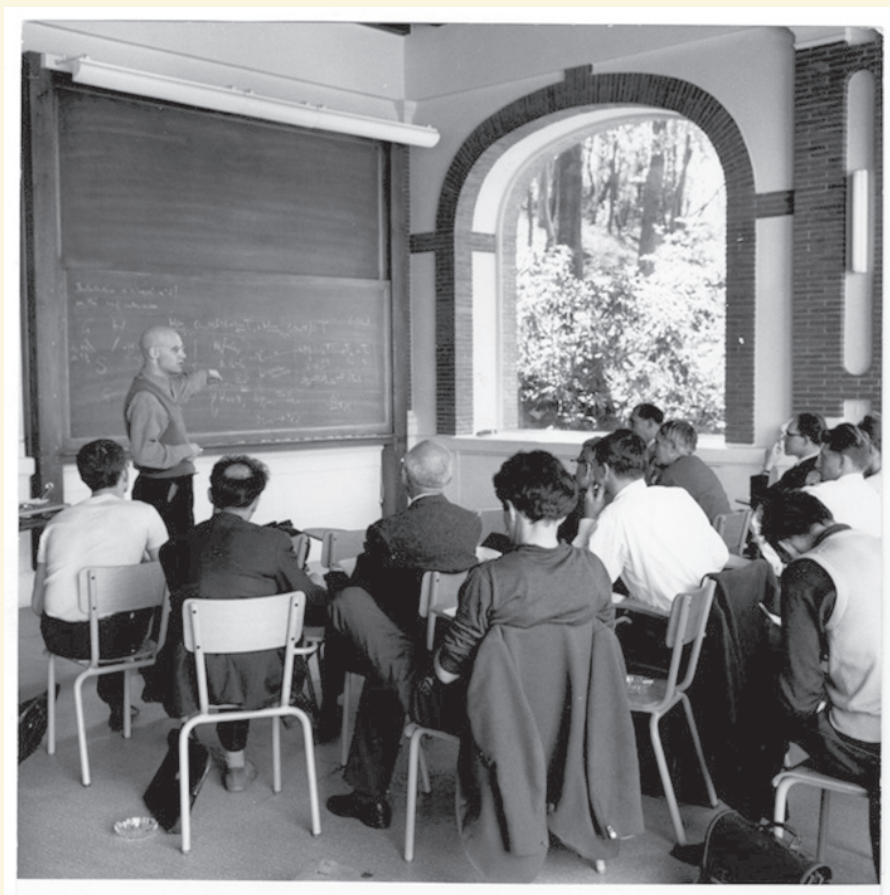
Il y avait un mathématicien qui au faîte de sa gloire abandonna la recherche scientifique pour prôner l'écologie radicale, devint professeur à l'Université de Montpellier, se livra à la méditation, fut regardé par les uns comme un prophète et par d'autres comme un exalté, puis disparut. On pourrait bâtir à partir de ces épisodes la biographie d'un « effrayant génie » et écrire des récits ornés d'anecdotes et des portraits pittoresques susceptibles de divertir l'amateur de savants illustres.

Notre approche est différente. C'est un portrait d'Alexandre Grothendieck mathématicien que nous avons voulu composer dans cette exposition en nous plaçant aussi loin qu'il était possible du tumulte biographique.

*

Les traces d'une activité perpétuelle de recherche mathématique entre 1973 et 1991 sont pourtant à la fois visibles et nombreuses, comme nous le montrent les milliers de pages écrites par Grothendieck entre son arrivée à Montpellier et son départ pour le village de Lasserre en Ariège. Ces pages confiées à Jean Malgoire, qu'on peut lire aujourd'hui sur le site web des Archives Grothendieck de l'Université de Montpellier, ont fourni l'essentiel de la documentation et de l'iconographie de cette exposition.

Ces textes procurent le matériau sans cesse renouvelé de « réflexions mathématiques » dont *La Longue Marche à travers la théorie de Galois* (1981), *Pursuing stacks* (1983) et *Esquisse d'un programme* (1984) sont autant d'« échantillons » que nous avons examinés. Quant à *Récoltes et Semailles* (1984-1986), dans lequel Grothendieck propose à nouveau des « réflexions » mais aussi un « témoignage sur un passé de mathématicien », il advint après ces échantillons et finit par se substituer à eux et à ceux annoncés qui ne virent jamais le jour.



On a pu faire valoir que les mathématiques baroques et provinciales écrites par Grothendieck dans un « style renouvelé » entre 1973 et 1991 formaient la queue d'une comète observée dans tout son éclat entre 1955 et 1970 : la comète de la géométrie algébrique des schémas et des topos, classique et urbaine, écrite dans le style formel d'un membre de Bourbaki.

Ce jugement est contredit par les textes mathématiques de cette période et leur postérité, mais aussi par Grothendieck lui-même dans la réflexion rétrospective qu'il propose au sujet de la « géométrie arithmétique » et de l'« algèbre topologique ». En effet, ces sciences nouvelles se déploient et se répartissent, suivant un équilibre nécessaire, sur les deux périodes. Quant à son style d'expression mathématique, s'il concède que celui-ci a changé et se conforme dans *Pursuing Stacks* à celui d'un « journal de bord », il ne rejette pas « la rédaction en forme » assujettie au vénérable canon de la méthode axiomatique-déductive.

*

Nous sommes conscients des difficultés de lecture engendrées par une exposition mettant l'accent sur Grothendieck mathématicien. Il est vrai que celle-ci s'adresse plutôt à des personnes ayant reçu une formation mathématique universitaire. Nous ne prétendons pas résoudre ici ce problème inhérent à la diffusion des mathématiques. Malgré les défauts de cette première tentative, nous continuons néanmoins à penser qu'une analyse complexe de faits dignes d'intérêt respecte davantage le lecteur que des formules simples et donc trompeuses.

Nous espérons qu'en dépit de ces difficultés, celui-ci aura plaisir à suivre avec nous quelques fragments d'itinéraire d'une exploration mathématique accomplie naguère par Grothendieck. Les territoires de ce nouveau continent sont les théories mathématiques qu'il découvrit et les étapes de ce voyage, les textes qu'il écrivit.

Sébastien Maronne, Bertrand Toën
Toulouse, novembre 2024

Alexandre GROTHENDIECK

Éléments d'une biographie

“

Comme tu le sais, j'ai quitté «le grand monde» mathématique en 1970, à la suite d'une histoire de fonds militaires dans mon institution d'attache (IHES). Après quelques années de militantisme anti-militariste et écologique, style «révolution culturelle», dont tu as sans doute eu quelque écho ici et là, je disparaissais pratiquement de la circulation, perdu dans une université de province Dieu sait où.

La rumeur dit que je passe mon temps à garder des moutons et à forer des puits. La vérité est qu'à part beaucoup d'autres occupations, j'allais bravement, comme tout le monde, faire mes cours à la Fac (c'était là mon peu original gagne-pain, et ça l'est encore aujourd'hui).

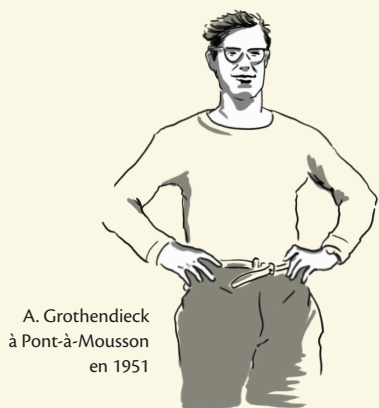
Il m'arrivait même ici et là, pendant quelques jours, voire quelques semaines ou quelques mois, de refaire des maths à brin de zinc - j'ai des cartons pleins avec mes gribouillis, que je dois être le seul à pouvoir déchiffrer. Mais c'était sur des choses très différentes, à première vue du moins, de ce que j'avais fait dans le temps.

Entre 1955 et 1970, mon thème de prédilection avait été la cohomologie, et plus particulièrement, la cohomologie des variétés en tous genres (algébriques, en particulier). Je jugeais en avoir assez fait dans cette direction-là pour que les autres se débrouillent sans moi, et tant qu'à faire des maths, il était temps que je change de disque...

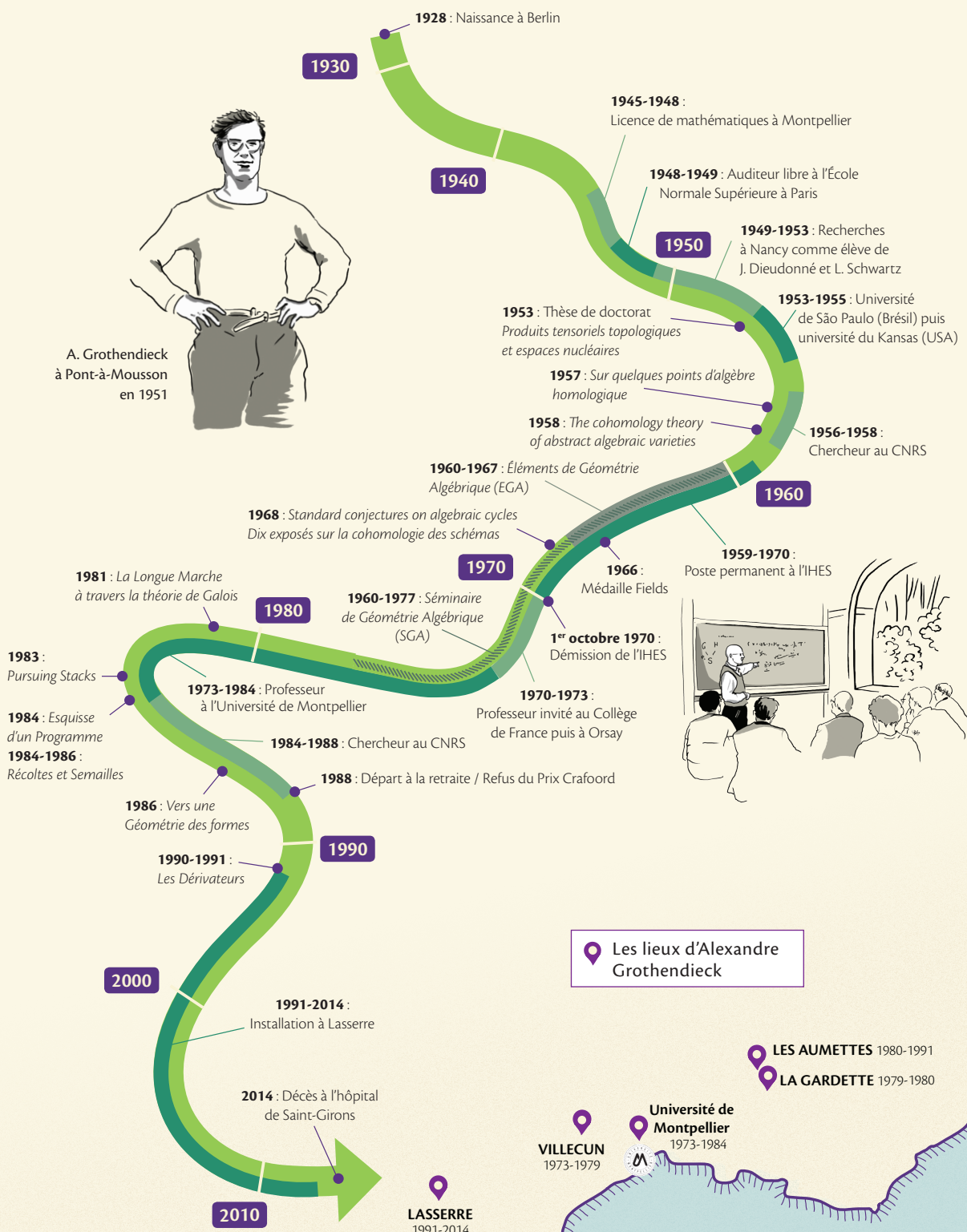


Aux Aumettes
dans les années 1980

Récoltes et Semailles, « Une lettre », mai 1985, p. L3



A. Grothendieck
à Pont-à-Mousson
en 1951



Les lieux d'Alexandre Grothendieck

LES AUMETTES 1980-1991
LA GARDETTE 1979-1980

VILLECUN 1973-1979
Université de Montpellier 1973-1984

LASERRRE 1991-2014

Mer Méditerranée

Les Pyrénées

THÈMES

Parmi les nombreux points de vue nouveaux que j'ai dégagés en mathématique, il en est douze, avec le recul, que j'appellerais des "grandes idées".

Récoltes et Semailles, « Promenade à travers une œuvre », janvier 1986, p. P21

Dans *Récoltes et Semailles*, Grothendieck dresse un bilan de son œuvre mathématique et énumère en particulier **12 thèmes ou « grandes idées »** :

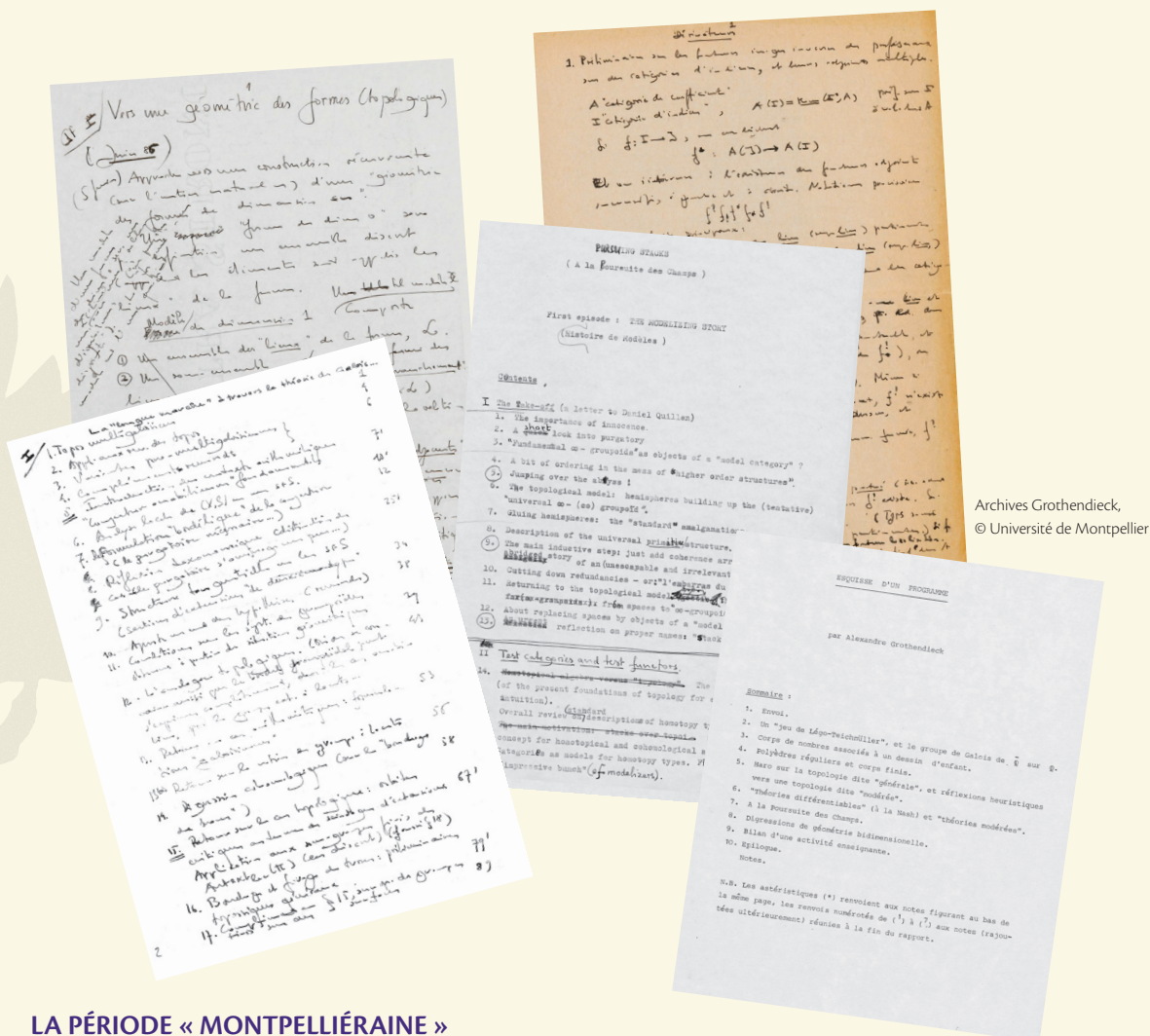
12 THÈMES

QUELQUES TEXTES



“ Il en est trois [les thèmes 10-11-12] (et non des moindres à mes yeux) qui, apparus seulement après mon départ de la scène mathématique, restent encore à l'état embryonnaire ; “officiellement” ils n'existent même pas, puisqu'aucune publication en bonne et due forme n'est là pour leur tenir lieu de certificat de naissance.

Récoltes et Semailles, « Promenade à travers une œuvre », janvier 1986, p. P21-22



LA PÉRIODE « MONTPELLIÉRAINE »

La période de l'œuvre mathématique de Grothendieck, située entre **1955** et **1970**, est notamment connue. C'est celle d'un âge d'or de la géométrie algébrique avec la découverte des schémas, des topos, ... et la publication des milliers de pages des EGA et SGA.

La période « montpelliéraine » étudiée ici l'est moins. Les travaux mathématiques accomplis entre **1973** et **1991** occupent pour une part importante des 18 000 pages d'archives numérisées par l'Université de Montpellier. Celles-ci sont accessibles en ligne depuis 2017. D'autre part, Grothendieck insiste sou-

vent sur la profonde continuité entre ces deux périodes d'activité mathématique.

Les trois derniers **thèmes 10 à 12** sont développés seulement après 1973 tandis que le **thème 9** opère la jonction entre les deux périodes. Ces thèmes présentés dans *Esquisse d'un programme* en 1984 firent ensuite l'objet de communications informelles entre mathématiciens. Certaines **visions** de Grothendieck furent ainsi concrétisées par la communauté mathématique. D'autres continuent encore aujourd'hui à être explorées.

GÉOMÉTRIE ARITHMÉTIQUE

Let V be a variety without singular points, of dimension n , defined over a finite field k with q elements. Let N_r be the number of rational points on V over the extension k_r of k of degree r . Then we have

$$\sum_1^{\infty} N_r U^{r-1} = \frac{d}{dU} \log Z(U),$$

where $Z(U)$ is a rational function in U , satisfying a functional equation

$$Z\left(\frac{1}{q^n U}\right) = \pm q^{n\chi/2} U^{\chi} Z(U),$$

with χ equal to the Euler-Poincaré characteristic of V (intersection number of the diagonal with itself on the product $V \times V$). Furthermore, we have:

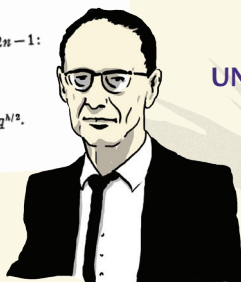
$$Z(U) = \frac{P_1(U)P_3(U) \cdots P_{2n-1}(U)}{P_0(U)P_2(U) \cdots P_{2n}(U)},$$

with $P_0(U) = 1 - U$, $P_{2n}(U) = 1 - q^n U$, and, for $1 \leq h \leq 2n-1$:

$$P_h(U) = \prod_{i=1}^{h/2} (1 - \alpha_{hi} U)$$

where the α_{hi} are algebraic integers of absolute value $q^{h/2}$.

L'énoncé des conjectures de Weil dans l'article
*Number of solutions of equations
in finite fields* (1949)



André Weil (1906-1998)

LES CONJECTURES DE WEIL

André Weil publie ses célèbres conjectures sur les variétés algébriques à coefficients dans un corps fini en 1949. En progressant dans la géométrie algébrique des corps finis, véritable « plaque tournante » d'un « **texte trilingue** » qui contient aussi la géométrie analytique complexe et la théorie des nombres, il s'agit de compléter la colonne médiane de ce texte encore lacunaire, avec pour horizon la démonstration de **l'hypothèse de Riemann**.

“

Depuis la thèse d'Artin, les algébristes de l'école allemande exploraient les analogies entre corps de nombres et corps de fonctions sur les corps finis ; à ce diptyque j'avais ajouté pour mon usage un troisième volet, la théorie riemannienne classique [...] j'aimais à voir là un « texte trilingue » la « pierre de Rosette » [...] dont les trois colonnes devaient s'éclairer l'une l'autre, mais dont avant tout il s'agissait de combler les lacunes.

André Weil, *Cœuvres Scientifiques I*, p. 546

UNE GÉOMÉTRIE NOUVELLE

Les conjectures de Weil constituent pour Grothendieck « le premier embryon de cette vision d'une « **géométrie arithmétique** » » car Weil met l'accent sur des **invariants topologiques** dans ses énoncés.

Les notions fondamentales de cette géométrie nouvelle sont celles de **schéma** et de **topos** qui généralisent les notions classiques de variété algébrique et d'espace.

Ces notions nouvelles vont permettre à Grothendieck d'élaborer des théories cohomologiques aptes à démontrer les conjectures de Weil. Il n'y réussira qu'en partie. **Pierre Deligne** démontrera l'analogue de l'hypothèse de Riemann réputée la plus difficile en 1974 en incorporant de nouvelles idées.

“

[Ces] conjectures absolument époustouflantes, à vrai dire, [...] faisaient entrevoir, pour ces nouvelles « variétés » (ou « espaces ») de nature discrète, la possibilité de certains types de constructions et d'arguments qui jusque là ne semblaient pensables que dans le cadre des seuls « espaces » considérés comme dignes de ce nom par les analystes – savoir les espaces dit « topologiques ».

Récoltes et Semailles, « Promenade à travers une œuvre », janvier 1986, p. P30

La vision était celle d'une "géométrie arithmétique", synthèse de la topologie, de la géométrie (algébrique et analytique), et de l'arithmétique, dont j'ai trouvé un premier embryon dans les conjectures de Weil.

Récoltes et Semailles, « Une lettre », mai 1985, p. L6

STANDARD CONJECTURES ON ALGEBRAIC CYCLES

By A. GROTHENDIECK

1. Introduction. We state two conjectures on algebraic cycles, which arose from an attempt at understanding the conjectures of Weil on the ζ -functions of algebraic varieties. These are not really new, and they were worked out about three years ago independently by Bombieri and myself.

De manière plus ambitieuse, Grothendieck s'adonne au rêve des **motifs** qui constitueraient le « dénominateur commun » de ces cohomologies. Il énonce en 1968 les « **conjectures standard** » plus générales mais surtout, d'après lui, plus géométriques, et donc conformes à sa vision.

GÉOMÉTRIE OU THÉORIE DES NOMBRES ?

Selon Grothendieck, la géométrie arithmétique doit réunir les domaines jusqu'à présent séparés du nombre entier et de la grandeur continue en se fondant sur une nouvelle théorie de la forme. D'où la nécessité d'une **algèbre topologique**, « "soutien logistique" dans le développement de cette géométrie nouvelle ».

Cette vision est bien différente de celle de Weil qui insiste sur la fécondité d'analogies mystérieuses entre des domaines séparés et hiérarchisés et n'entend pas soumettre la théorie des nombres à la géométrie.

Standard conjectures on
algebraic cycles (1968)

En 1978, Deligne rebaptise son séminaire à l'IHES « séminaire de géométrie arithmétique ». Il souhaite ainsi mettre l'accent sur l'arithmétique et faire place à d'autres outils que ceux issus de la « machine » de Grothendieck, provenant par exemple du **programme de Langlands**.

« UNE "SECONDE NATURE" TOUJOURS VIVANTE EN MOI ! »

La vision de la géométrie arithmétique irradie les mathématiques de la période montpelliéraine. Elle réapparaît avec les thèmes de la **géométrie anabélienne** et de la **théorie de Galois-Teichmüller** que Grothendieck développe à partir de 1977. Ces thèmes constituent une partie névralgique de la géométrie arithmétique au côté de la théorie des motifs.

Rapport d'activité

(1^{er} octobre - 15 décembre 1984)

Archives Grothendieck, © Université de Montpellier

depuis 1978. En termes imagés, on peut dire que ces deux courants d'idées, le courant "abélien" incarné par la notion de motif, et le courant "anabélien" exemplifié par la structure géométrico-arithmétique de la "tour de Teichmüller", sont à la "géométrie arithmétique" dans son enfance, ce que les deux courants "complexes de cochaines - catégories dérivées commutatives" et "champs en tous genres - catégories homotopiques non commutatives" sont à l'algèbre topologique (encore in utero). La différence essentielle entre ces deux disciplines ne se situe cependant nullement dans leur état d'avancement relatif, circonstance des plus contingentes, apte à changer radicalement en l'espace de quelques années, ne serait-ce que par la vertu de l'écriture de "Pursuing Stacks". Elle se situe plutôt dans une différence de profondeur. Comme c'était

UN « ENSEIGNEMENT DE RECHERCHE »

PROFESSEUR À MONTPELLIER

Nommé professeur à l'Université de Montpellier à la rentrée 1973, Grothendieck propose un enseignement original fondé sur l'intuition topologique des surfaces avec des prérequis à dessein modestes. Il est ainsi conduit à renouveler ses propres thèmes de recherche en faisant porter sa réflexion sur des objets élémentaires plutôt que sur des objets de **généralité maximale**, comme auparavant.



Le déjeuner mathématique sur l'herbe (1979)
Illustration inspirée d'une photographie de Jean Malgoire

LES ELÈVES

Des élèves accompagnent Grothendieck dans les élans qui le ramènent, à intervalles réguliers, à la recherche mathématique. Dans *Esquisse d'un programme*, il en compte une vingtaine à qui il s'est efforcé de transmettre avec exigence les « rudiments du métier de mathématicien ».

Un groupe clairsemé se consacre ainsi au thème mathématique du moment dans son bureau avant un déjeuner pris en commun. Grothendieck est le plus souvent l'orateur et ne se place qu'avec difficultés dans la position de l'auditeur.

Grothendieck voit aussi dans ses élèves des collaborateurs. En dirigeant la thèse d'état d'**Yves Ladegaillerie** de 1974 à 1976,

UNIVERSITÉ DES SCIENCES & TECHNIQUES

Séance de JUIN 1976

DU LANGUEDOC

MATHÉMATIQUES

C4 - MATH. PURES

Cours Option

Théorie des surfaces topologiques.

Essayer de donner un aperçu de quelques résultats et de quelques problèmes typiques de topologie, liés à la théorie des surfaces. Il n'est pas indispensable de faire un rapport systématique, mais il est recommandé de donner, dans la mesure du possible, des formulations suffisamment claires pour être comprises par une personne qui n'aurait pas participé au cours (en s'aidant au besoin de dessins).

Le sujet d'examen du cours de maîtrise

« Théorie des surfaces topologiques » (1976)

Archives de la Faculté des Sciences, © Université de Montpellier

« Plutôt que de cours au sens courant du terme, il s'agit de séances de réflexion, menées en commun avec les étudiants sur des sujets de leur choix, que chacun approfondit par un travail personnel au cours de l'année. Il n'y a aucune limitation préalable sur les thèmes de réflexion admissibles [...], au point souvent de nous prendre complètement au dépourvu, devant des situations où l'étudiant souvent a dès le départ, ou développe en cours de route, une intuition très sûre, voire profonde. De telles situations, clairement perçues par tous, bousculent de façon bien salutaire la distribution des rôles "actif-passif" de rigueur dans l'institution enseignante.

Cette vision pédagogique n'a pas toujours été concrétisée de l'aveu même des protagonistes...

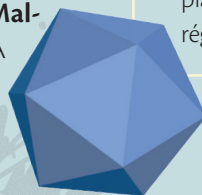
Rapport d'activité

Archives Grothendieck,
© Université de Montpellier

Il m'avait semblé important de partir d'un bagage intuitif commun ...

Esquisse d'un programme, janvier 1984, p. 2

il apprend avec celui-ci des théorèmes clefs de topologie des surfaces tout en lui faisant développer quelques « grothendieckerries typiques ». Il confie également des travaux de **fondements** liés aux cartes topologiques à **Jean Malgoire** et **Christine Voisin** dans un DEA en 1976 puis une thèse de troisième cycle soutenue en 1979.



L'icosaèdre régulier est un des cinq solides platoniciens. Les vingt faces de ce polyèdre régulier sont des triangles équilatéraux.

POLYÈDRES RÉGULIERS

Un des thèmes privilégiés de l'enseignement d'initiation à la recherche proposé par Grothendieck à l'ensemble de ses étudiants est celui des **polyèdres réguliers**. Il s'intéresse en particulier à l'icosaèdre.

En parallèle, Grothendieck consacre des travaux de recherche à une théorie générale des polyèdres réguliers, en tant que réalisations géométriques de cartes combinatoires, sur un anneau quelconque.

UN CONSTAT D'ÉCHEC

Lors de la rédaction d'*Esquisse d'un programme* en janvier 1984, Grothendieck dresse un constat d'échec « clair et net » dans son enseignement de recherche à Montpellier. Il attribue cet échec à une incapacité chez lui d'écoute et de transmission et à la formation mathématique de ses élèves qu'il juge trop modeste.

Cet **isolement** latent va s'accroître avec le détachement au CNRS en 1984 et le départ de l'Université de Montpellier. C'est le début d'une période de travaux en solitaire, entrecoupés par la correspondance résultant de

Cours DEA 1977/78 de A. Grothendieck
Géométrie arithmétique des polygones réguliers

Ce "cours" se fera dans l'esprit d'une investigation en commun de multiples facettes de la notion de polygone régulier au-dessus d'un corps de base, puis d'un anneau de base quelconque. Ce sera une occasion stimulante pour nous familiariser avec les notions de base de géométrie vectorielle, affine, projective - avec ou sans métrique - en dimensions un, deux et trois, et avec les phénomènes particuliers à ces dimensions, ainsi qu'avec les aspects parfois imprévus que prennent des notions familières (comme celle de réflexion, ou de centre d'un polygone régulier) sur les corps de caractéristique positive, et notamment sur les corps finis. Le besoin d'une géométrie sur des anneaux de base généraux (tel l'anneau "sur lequel s'écrit" le n -polygone régulier "le plus général") se fera sentir en cours de route, et nous amènera sans doute à affleurer quelques points de fondements de géométrie algébrique. Si le temps le permet et si d'autres investigations ne nous retiennent, nous tenterons, dans la volée, de construire l'icosaèdre régulier "général" sur un anneau de base convenable, fini sur l'anneau $\mathbb{Z}$ des entiers, ayant des corps résiduels de toutes caractéristiques. (La caractéristique deux donnera sans doute du fil à retordre !).

Cours de DEA « Géométrie arithmétique
des polygones réguliers » (1977-78)
Archives Grothendieck, © Université de Montpellier

la diffusion de *Récoltes et Semailles*, durant laquelle Grothendieck va peu à peu s'éloigner des mathématiques.

RÉFLEXIONS MATHÉMATIQUES

DES RÉFLEXIONS PRIVÉES

Malgré la concurrence de nombreuses autres activités, dont la méditation à partir d'octobre 1976, Grothendieck ne délaisse jamais entièrement la recherche et se consacre de manière sporadique et compulsive à des **réflexions mathématiques privées**. Celles-ci constituent un « travail de prospection » des richesses du monde mathématique.

“ La façon évidente de “résoudre” une telle frustration, [...] c’est de faire moi-même au moins une partie de ces choses que je désespérais de voir empoigner à la fin des fins par l’un ou l’autre de mes élèves. C’est d’ailleurs ce que j’ai fait tant soit peu ici et là, que ce soit par une réflexion occasionnelle de quelques heures, voire de quelques jours, en marge et à l’occasion de mon activité enseignante, ou pendant des périodes de grosse fringale mathématique (qui survenaient parfois comme de véritables explosions...), pouvant durer des semaines ou des mois.

Récoltes et Semailles, mars 1984, p. 133

CONTINUITÉ ET RENOUVELLEMENT

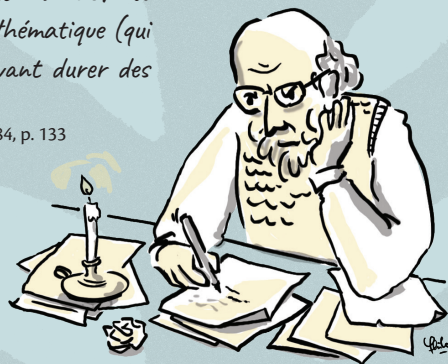
Les nouveaux **thèmes de réflexion** de Grothendieck trouvent leur origine dans la topologie des surfaces, mais ils n’en restent pas moins profondément liés aux thèmes du son passé mathématique, comme il le constate après coup.

La géométrie anabélienne et la théorie de Galois-Teichmüller intègrent au côté du « yoga des motifs » **la géométrie arithmétique**, « science nouvelle », tandis que l’algèbre homotopique et la topologie modérée complètent l’algèbre homologique et la théorie des topos au sein d’une **algèbre topologique** qui sert de langage et d’outil à cette science.

ESQUISSE D’UN PROGRAMME

L’Esquisse d’un programme que Grothendieck écrit en janvier 1984 à l’occasion d’une candidature au CNRS est vouée à décrire les différents thèmes mathématiques qu’il a abordés durant les années précédentes.

Grothendieck souhaite en effet développer et **communiquer** les visions qu’il a couchées sur des milliers de pages manuscrites, estimant être le seul à même de déchiffrer ce qu’il qualifie de « **gribouillis** » ou bien de « **scratchworks** ».



These two volumes are the first in a planned, considerably wider series of “Réflexions Mathématiques” in which the author intends to present, among other things, some “naive ideas” about two “new continents”, eager to be discovered and explored. One stems from

Extrait d'un texte de présentation des *Réflexions mathématiques* copié par Ronnie Brown, décembre 1983
Archives Grothendieck, © Université de Montpellier

... une rédaction d'ensemble tout au moins provisoire,
à l'intention de la communauté mathématique.

Esquisse d'un programme, janvier 1984, p. 1

RÉFLEXIONS MATHÉMATIQUES

L'entreprise des *Réflexions mathématiques* a précisément pour but de publier ces « **idées-force** » du présent et du passé dans une série de plusieurs volumes faute d'interlocuteur et de relais, à l'image de ce que fut naguère **Jean-Pierre Serre**.

Il s'agit de transmettre ces idées à des mathématiciens « dans le coup » qui pourront les exploiter et accomplir les grandes tâches de **fondements** que Grothendieck ne veut à présent plus que suggérer ou esquisser.

Au printemps 1983, le premier volume de *Pursuing Stacks*, « The Modelizing Story », donne l'impulsion initiale au projet.

Table des matières de
Digressions combinatoires
annoncées pour le tome 4
des *Réflexions mathématiques*

Archives Grothendieck, © Université de Montpellier

S. Milne, Arthur Ogus, Kuang-yen Shih.) Je compte poursuivre cette parti de mon programme, au cours des deux ou trois années qui suivent, dans les deux ou trois volumes des *Réflexions Mathématiques* faisant suite aux deux volumes dont je suis en train de terminer la préparation. Ceci fait, je prévois de me consacrer prioritairement au programme de géométrie algébrique anabélienne - d'une part, tracer à grands traits les principales idées, ~~et~~ conjectures et résultats déjà obtenus, et d'autre part, entreprendre une étude géométrico-arithmétique minutieuse de la "tour de Teichmüller", et plus particulièrement, de ses deux premiers étages.

Signé le 10.12.1984

Alexandre Grothendieck

Rapport d'activité (1^{er} octobre - 15 décembre 1984)
Archives Grothendieck, © Université de Montpellier

“ Also, the idea is in the air for the last few months – since I decided to publish these informal notes on stacks or whatever it will turn out to be – that I may well go on the same way, writing up and publishing informal notes on other topics, including tame topology and anabelian algebraic geometry.

Pursuing Stacks, 27 mai 1983, p. 194

Digressions combinatoires (pour *Réflexions* t. 4)

Chap. 1. Axiomatique des mon de cardinal $\leq \aleph_1$
NB. Point de vue des formules et des LA

Chap. 2. L'isomorphisme $\text{Hom}(A, B) \cong \text{Hom}(A, B)$ en théorie des catégories
Quotient $\text{Hom}(A, B) \cong \text{Hom}(A, B)$ d'après la loi des projections

Chap. 3. Bicoassociativité : les trois projections
NB. $\text{Hom}(A, B) \cong \text{Hom}(A, B)$

Chap. 4. Dualité des hexagones
NB. $\text{Hom}(A, B) \cong \text{Hom}(A, B)$

1. L'auto-dualité $\text{Hom}(A, B) \cong \text{Hom}(A, B)$ via $\text{Aut}(B) \cong \text{Aut}(B)$

Application aux groupes d'endomorphisme des bicoassociativité et isom.

2. Structure bicoassociative par échange des entiers

3. L'auto-dualité (trois perspectives)

a) $\forall s \in B, s' \in S^s \quad S \times S \cong S' \times S'$

b) $R \in \text{An}(S) \times \text{An}(S)$

c) $\mathbb{P}_{3,3}(S) \cong \mathbb{P}_{3,3}(S')$

UN PROJET INABOUTI

En juin 1983, Grothendieck rédige quatre paragraphes d'une introduction à *Pursuing Stacks* au ton plus personnel. Il s'agit des premières lignes écrites de **Récoltes et Semailles** dont la rédaction va absorber Grothendieck du mois de février 1984 jusqu'au printemps 1986.

Le plan des *Réflexions mathématiques* ne cessera pas d'évoluer au gré de la « croissance exponentielle » de ce « témoignage sur un passé de mathématicien », tandis que les textes de **spéculation mathématique** initialement projetés et constamment repoussés ne verront jamais le jour.

UN NOUVEAU STYLE D'EXPRESSION

LE STYLE BOURBAKI



Jean Dieudonné (1906-1992)

Grothendieck accomplit sa formation mathématique sous l'égide d'**Henri Cartan**, **Jean Dieudonné** et **Laurent Schwartz**, tous membres du groupe **Bourbaki**. Ses textes mathématiques publiés de la période 1955-1970, comme les *Éléments de Géométrie Algébrique* rédigés avec la collaboration de Dieudonné, portent ainsi la marque du style d'écriture de Bourbaki.

Éléments de Géométrie Algébrique,
« Nouveau EGA V » (non publié),
tapuscrit annoté par Grothendieck pour Dieudonné
Archives Grothendieck,
© Université de Montpellier

Arrivé à ce point admissible de généralité, je m'aperçois malheureusement que ces développements sont encore trop particuliers, et qu'au lieu d'un sous-préschéma défini par une seule section de $\mathcal{O}_X$, il y a lieu de considérer celui défini par m sections, ou ce qui revient au même, par un homomorphisme $E \rightarrow \mathcal{O}_X$, où E est un Module loc libre de rang m . Je te laisse le soin de décider s'il y a lieu dès le début de commencer avec le cas général, suivant le principe qu'il faut procéder du général au particulier.

Les mathématiciens du groupe Bourbaki revendiquent pour modèle la **méthode axiomatique hilbertienne**. Ils adoptent une présentation systématique et formelle des concepts mathématiques, procèdent du général au particulier, et ne dévoilent que rarement les motivations à l'origine de leurs choix. Le caractère impersonnel d'un tel style est accentué par la succession des **rédactions** et des lectures critiques **collectives**.

Grothendieck quittera à la fin des années 1950 le groupe Bourbaki. Dans *Récoltes et Semailles*, il prétendra avoir participé de manière un peu distante et critiquera le « rigide "canon" d'une "rigueur" de pure façade ».

Le caractère collectif des mathématiques durant cette période s'incarne dans la notion de rédaction. Il arrive ainsi que Grothendieck confie à d'autres mathématiciens ses résultats de recherche sous forme de notes assez détaillées. Celles-ci fournissent la matière d'un séminaire qui donne ensuite lieu à une publication en bonne et due forme.

Armand Borel et Jean-Pierre Serre,
Le théorème de Riemann-Roch (1958)

LE THÉORÈME DE RIEMANN-ROCH

PAR

ARMAND BOREL et JEAN-PIERRE SERRE

(d'après des résultats inédits de A. GROTHENDIECK).

INTRODUCTION.

Ce qui suit constitue les notes d'un séminaire tenu à Princeton en automne 1957 sur les travaux de GROTHENDIECK; les résultats nouveaux qui y figurent sont dus à ce dernier; notre contribution est uniquement de nature rédactionnelle.

Pas de ciseaux ni de colle pour préparer laborieusement un manuscrit "définitif" (qui surtout ne doit rien laisser transparaître de la démarche qui y a abouti)...

Récoltes et Semaines, mars 1984, p. 1, note 1

« UN STYLE RENOUVELÉ »

Lorsqu'il se lance dans la publication des *Réflexions mathématiques* en 1983, Grothendieck choisit d'employer un « **style renouvelé** » d'expression. Il juge en effet que ses idées n'ont été transmises ni par ses écrits, en raison du style formel qu'il employait, ni par ses **exposés oraux** de séminaire ou ses « **communications privées** », dont la mémoire serait perdue.

27.5.

68. It has been over six weeks now that I didn't write down any notes. The reason for this is that I felt the story of asphericity structures and canonical modelizers was going to come now without any problem, almost as a matter of routine to write it down with some care - therefore I started doing some scratchwork on a few questions which had been around but kept in the background since the beginning, ^{and} which were a lot less clear in my mind. Some reflection ~~on these~~ was needed anyhow, before it would make much sense to start writing down anything on these. Finally it took longer than expected, as usual, - partly because (as usual ^I too) a few surprises would turn up on my way. Also, I finally allowed myself to become distracted by some reflection on the "Lego-Teichmüller construction game", ^{and pretty much is during} especially last week. The occasion was a series of ~~talks~~ informal talks Y. has been giving in Molino's seminar, on Thurston's ~~work on the~~ hyperbolic geometry game and his compactification of Teichmüller space.

Le nouveau style de Grothendieck se manifeste notamment à travers des descriptions de son quotidien mathématique. *Pursuing stacks*, p. 191

Archives Grothendieck, © Université de Montpellier

« Il ne s'agirait plus pour moi, désormais, de présenter des fondations méticuleuses et à quatre épingles pour quelque nouvel univers mathématique en gésine. Ce seraient des "carnets de bord" plutôt, où le travail se poursuivrait au jour le jour, sans rien en cacher et tel qu'il se poursuit vraiment, avec ses ratés et ses foirages, ses insistants retours en arrière et aussi ses soudains bonds en avant - un travail tiré en avant irrésistiblement jour après jour (et nonobstant les incidents et imprévus innombrables), comme par un invisible fil - par quelque vision évasive, tenace et sûre.

Récoltes et Semaines, « Une Lettre », mai 1985, p. L17

Néanmoins, Grothendieck ne rejette pas le style d'écriture mathématique classique axiomatique-déductif qu'il continue à pratiquer et à enseigner. Il souhaite simplement révéler à son lecteur le processus de la découverte ainsi que le rôle crucial et positif des erreurs que le travail de « **rédaction en forme** » oblitère.

Cette écriture d'apparence spontanée, présentée comme celle d'un « **cahier de bord** » visant à transmettre la passion mathématique, s'appuie néanmoins sur un matériau. Des notes préparatoires, les « *scratchworks* », s'intercalent entre les phases d'écriture proprement dite et ne sont pas exhibées.

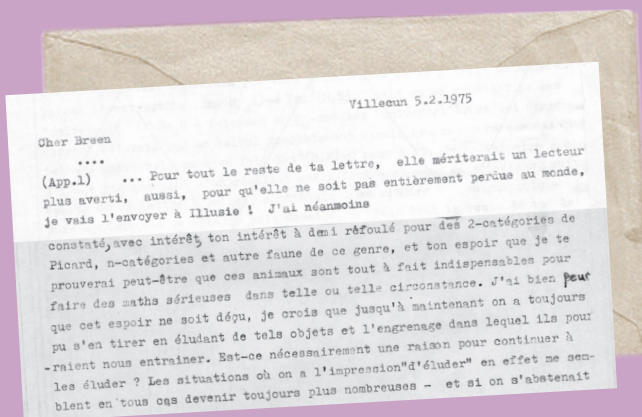
« But whatever I am going to write in mathematics, I believe a major part of it will be "speculation" or "fiction", going hand in hand with painstaking, down-to-earth work to get hold of the right kind of notions and structures, to work out comprehensive pictures of still misty landscapes. The notes I am writing up lately [*Pursuing Stacks*] are in this spirit [...].

Lettre d'Alexandre Grothendieck à Ronnie Brown, 14 juin 1983

À LA POURSUITE DES CHAMPS

UN THÈME ENRACINÉ DANS LE PASSÉ

On trouve les origines de *Pursuing Stacks* dans les travaux cohomologiques de Grothendieck. Durant les années soixante, celui-ci éprouve le besoin d'une synthèse entre les approches homologiques et homotopiques qui serait accomplie par une science nouvelle, l'« **algèbre topologique** », au service de la **géométrie arithmétique**.



Lettre à Breen, 5 février 1975

Archives Grothendieck, © Université de Montpellier

“ Il s'agit d'une vaste synthèse des idées provenant de l'algèbre homologique [...], de l'algèbre homotopique, de la “topologie générale” version *topos*, et enfin de la théorie (dans les limbes depuis les années soixante) des ∞ -catégories (non strictes), ou, comme je préfère dire maintenant, des ∞ -champs.

Récoltes et Semailles, 4 décembre 1984, p. 637

À cette époque, Grothendieck est confronté à de sérieux problèmes techniques engendrés par la notion de **catégorie triangulée**. Pour les dépasser, il envisage le formalisme des **n-catégories** et des **n-champs**.

Ne parvenant pas à « placer » son programme auprès d'autres mathématiciens, Grothendieck finira par s'atteler à la tâche en proposant une « **esquisse de fondements** » de la **théorie de l'homotopie** dans *Pursuing Stacks* en 1983.

DIALOGUES INTERMITTENTS

Grothendieck expose longuement les **motivations** et les enjeux **géométriques** de son programme d'algèbre topologique dans une lettre à **Larry Breen** de 1975.

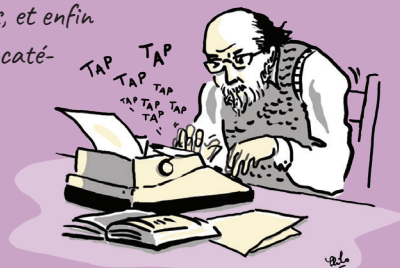
À partir de février 1982, il correspond

« à bâtons rompus » avec **Ronnie Brown** sur le thème des **n-groupoïdes** et des **n-catégories**.

Grothendieck comprend un an plus tard que la notion promue par Brown est celle d' **∞ -groupoïde strict**. Celle-ci ne permettant pas de modéliser les **types d'homotopie** des espaces, il décide alors de se lancer lui-même « à la poursuite des champs ».

Grothendieck écrit ainsi quelques jours plus tard une lettre à **Daniel Quillen** qui formera les premières pages de *Pursuing Stacks*. Il ébauche dans cette lettre pour la première fois la définition d' **∞ -groupoïde faible**.

Daniel Quillen (1940-2011),
auteur d'*Homotopical Algebra* (1967),
texte fondateur du domaine



Et on prévoit pas mal d'emmerdement pour définir de façon raisonnable une n -catégorie pas stricte...

Lettre de Grothendieck à Breen du 5 février 1975

UN VOYAGE INTERMINABLE

Pursuing Stacks est l'exemplaire frappant du nouveau style d'expression revendiqué par Grothendieck dans *Récoltes et Semailles*. Ce « "journal de bord" d'un voyage de découverte » accompli entre le 19 février et le 12 novembre 1983 se transforme parfois en journal intime.

Grothendieck s'y met en scène dans le rôle d'un explorateur et s'efforce de communiquer au lecteur ses émotions en ne cachant rien des ratés et des imprévus qui émaillent la découverte mathématique.

Dans la première partie de *Pursuing Stacks*, « Histoire de Modèles », de nombreuses digressions interrompent le récit d'une recherche consacrée aux modèles des types d'homotopie. Cette première partie inachevée sera la seule rédigée et les volumes suivants qui devaient porter sur les champs ne verront pas le jour. La vision géométrique initiale dévoilée à Breen ne sera donc pas concrétisée par Grothendieck.

La première page de *Pursuing Stacks* :
la lettre à Quillen du 19 février 1983
Archives Grothendieck, © Université de Montpellier

Dans une page datée du 7 septembre 1983, Grothendieck commente une conversation téléphonique avec Luc Illusie. Ce dernier invalide une hypothèse importante que Grothendieck tentait de démontrer et brise une « image idyllique ». Grothendieck ne revient sur ce « coup de théâtre » que le 26 septembre.

Pursuing Stacks, p. 490

Archives Grothendieck, © Université de Montpellier

7.9.

116. For ten days I hav'nt written any notes, and the time when I stopped looks a lot more remote still. For two days still after I last wrote on the notes, I kept pondering about schematization of homotopy types - it were rather lively days, First day I found the amazingly simple description of the homotopy groups in the schematic set-up, which got me quite excited; next day, from a phone call to Illusie, it turned out that the key assumption in all my ponderings on schematization, namely the "abelianization theorem" (sic) asserting isomorphism between discrete and schematic (namely quasi-coherent) cohomology (or equivalently, cohomology) invariants, was definitely false; consequently, the canonical functor from schematic to discrete homotopy types turns out definitely not to be an equivalence. This completely overthrows the idyllic picture in my mind about the relationship between schematic and discrete homotopy types - but the reflection on schematic homotopy types

Chapter I : TAKE - OFF

A letter to

(followed by an Appendix: Three letters to Larry Breen)

Lu Annulet 19.2.1983

Dear ~~Murphy~~ ---

1. Last year Ronnie Brown from Bangor sent me a heap of reprints and preprints by him and a group of friends, on various foundational matters of homotopical algebra. I did not really dig through any of this, as I kind of lost contact with the technicalities of this kind (I was never too familiar with the homotopy techniques, I confess) - but this reminded me of a few letters I had exchanged with Larry Breen in 1975⁽¹⁾, where I had developed an outline of a kind of "topological algebra", viewed as a synthesis of homotopical and homological algebra, with special emphasis on topoi - most of the basic intuitions in this program arising from various backgrounds in algebraic geometry. Some of those intuitions we discussed, I believe, at IHES eight or nine years before, ~~then, at the time when you had just written~~ ^{then, at the time when you had just written}

Once $\mathcal{C}_0$ is constructed, we will get the higher order categories $\mathcal{C}_1$ (primary), $\mathcal{C}_2$ etc by an inductive process of successively adding arrows. The category $\mathcal{C}_\infty$ will then be defined as the direct limit of the categories $\mathcal{C}_n$, having same objects ~~therefore~~ as $\mathcal{C}_0$, with

$$\text{Hom}_\infty(X, Y) = \varinjlim_n \text{Hom}_n(X, Y)$$

for any two objects. This being done, giving a structure of ∞ -groupoid in any ~~category~~ category $\mathcal{C}$, will amount to giving a functor

$$\mathcal{C}_\infty \rightarrow \mathcal{C}_{\text{fibered}}$$

commuting with the standard fiber products. This can be reexpressed, as

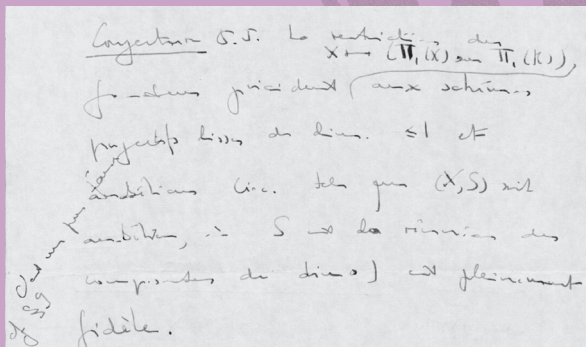
La définition d' ∞ -groupoïde faible dans la lettre à Quillen, *Pursuing Stacks*, p. 9
Archives Grothendieck, © Université de Montpellier

LA THÉORIE DE GALOIS-TEICHMÜLLER

LA LONGUE MARCHÉ À TRAVERS LA THÉORIE DE GALOIS

Grothendieck jette les bases de la **géométrie anabélienne** et de la **théorie de Galois-Teichmüller** dans *La Longue Marche à travers la théorie de Galois*. Ce manuscrit de 1 300 pages est rédigé entre janvier et juin 1981 durant une « longue période de **frénésie mathématique** ».

Ce texte, qui n'était pas destiné à être publié, révèle déjà certains des traits du nouveau style d'expression qui devait faire son apparition publique avec *Pursuing Stacks* deux ans plus tard. Grothendieck incorpore des **commentaires spéculatifs** et des corrections pour lui-même au sein d'une **présentation axiomatique-déductive** classique.



Grothendieck énonce la conjecture principale de sa « géométrie anabélienne », toujours ouverte de nos jours. Dans la marge, on lit « C'est un peu faux, voir §9 ». Dans les pages qui suivent, il revient sur cette conjecture pour la raffiner et pour en corriger les hypothèses.

La Longue Marche à travers la théorie de Galois, p. 9, verso
Archives Grothendieck, © Université de Montpellier

UN NOUVEAU RÊVE MATHÉMATIQUE

Grothendieck souhaite donner corps à un « **rêve** » rejoignant celui des **motifs** qui débute en 1977 dans le sillage des « grothendieckeries » sur la topologie des surfaces en lien avec la thèse de Yves Ladegaillerie. En juin 1978, il présente ses idées sur les « **dessins d'enfants** » à **Pierre Deligne** et **Barry Mazur** lors

d'une visite à l'IHES avec **Jean Malgoire**.

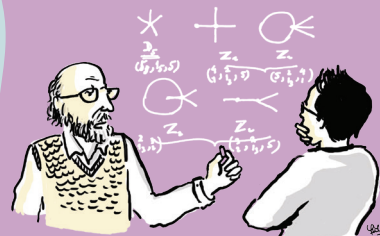
Grothendieck décide de se lancer dans la rédaction de *la Longue Marche* trois ans plus tard, n'ayant trouvé personne parmi ses élèves ou ses collègues pour entamer le « voyage de prospection de ce "monde nouveau" ». Ce **leit-motiv** accompagnera toute la période montpelliéraine.

« [...] la «**géométrie algébrique anabélienne**», dont le point de départ est justement une étude [...] de l'action de groupes de Galois «**absolus**» [...] sur des groupes fondamentaux géométriques (profinis) de variétés algébriques [...], et plus particulièrement (rompant avec une tradition bien enracinée) des groupes fondamentaux qui sont très éloignés des groupes abéliens (et que pour cette raison je nomme «**anabéliens**»).

Esquisse d'un programme, janvier 1984, p. 14

Un aboutissement ultime de la théorie de Galois, et dans l'esprit sans doute de Galois.

Récoltes et Semailles, février 1984, p. 16



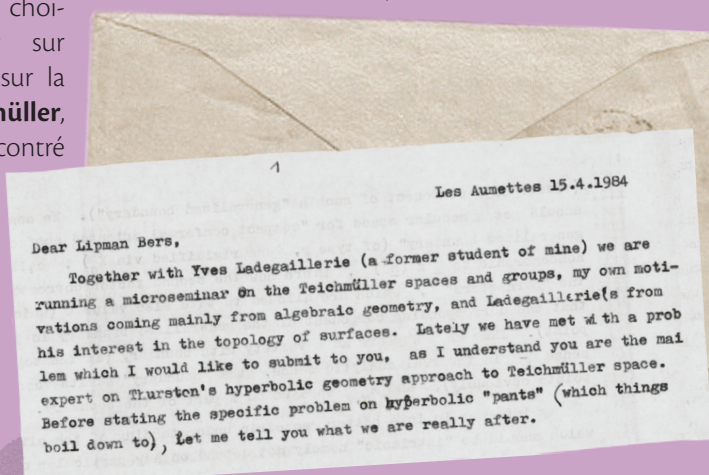
LE YOGA DE GALOIS-TEICHMÜLLER

Au sein du programme de **géométrie anabélienne**, Grothendieck choisit rapidement de se concentrer sur l'action du **groupe de Galois absolu** sur la « tour » des **groupoïdes de Teichmüller**, « l'objet le plus fascinant qu'[il] ait rencontré en mathématique ».

Au printemps 1983, des exposés de séminaire donnés par son élève **Yves Ladegaillette** lui font découvrir des liens entre ses recherches et les travaux de **William Thurston** en **géométrie hyperbolique** sur les espaces de Teichmüller.

Lettre à Lipman Bers, 15 avril 1984

Archives Grothendieck, © Université de Montpellier

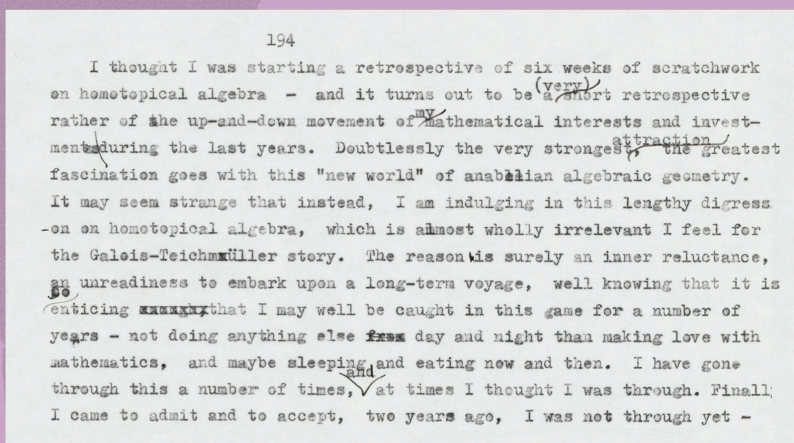


S'ÉLANCER DANS L'INCONNU ?

La fascination pour les thèmes de cette seconde **partie « névralgique »** de la **géométrie arithmétique** ne se démentira jamais. Elle se manifeste à travers des échanges de **lettres**, par exemple avec **Gerd Faltings** et **Lipman Bers**, et l'organisation de séminaires consacrés à la « tour de Teichmüller » entre 1981 et 1984.

Plusieurs centaines de pages de notes et de scratchworks concernent le yoga de Galois-Teichmüller. Pourtant, la partie des *Réflexions mathématiques* qui devait être consacrée à la géomé-

trie anabélienne ne sera jamais écrite. Il faut sans doute y voir la marque d'une résistance intérieure de la part de Grothendieck à un nouveau voyage mathématique au long cours.



Pursuing Stacks, p. 194
Archives Grothendieck,
© Université de Montpellier

TOPOLOGIES

FAUX PROBLÈMES ET PHÉNOMÈNES SAUVAGES

Dans *Esquisse d'un programme*, Grothendieck dresse le constat d'une **topologie générale** développée pour les besoins de l'analyse et inadaptée à la géométrie algébrique. Ce défaut dans les fondements de la topologie se manifeste par de faux problèmes et des **phénomènes sauvages**.

« Ce caractère inadéquat des fondements de la topologie se manifeste dès les débuts, par des "faux problèmes" (au point de vue au moins de l'intuition topologique des formes) [...] Aujourd'hui encore, comme aux temps héroïques où on voyait pour la première fois et avec inquiétude des courbes remplir allègrement des carrés et des cubes, quand on se propose de faire de la géométrie topologique dans le contexte technique des espaces topologiques, on se heurte à chaque pas à des difficultés parasites tenant aux phénomènes sauvages.

Une courbe plane continue remplissant un carré est décrite par **David Hilbert** dans un article des *Mathematische Annalen* de 1891. Il s'agit d'un des exemples les plus célèbres de ces phénomènes sauvages contraires à l'intuition qui accompagnent la naissance de la théorie des ensembles.

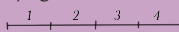


Fig. 1.



Fig. 2.

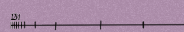


Fig. 3.

La courbe de Hilbert définie par un procédé itératif, *Mathematische Annalen* (1891)

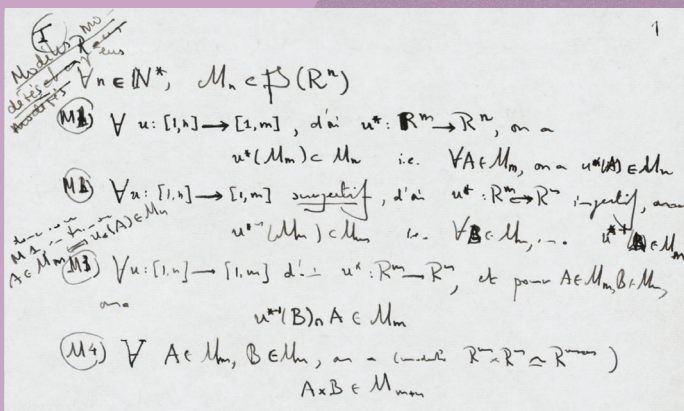
Esquisse d'un programme, janvier 1984, p. 29

UNE TOPOLOGIE MODÉRÉE

Les « réflexions heuristiques » concernant une topologie dite modérée « propre à exprimer avec aisance l'intuition topologique des formes » occupent une douzaine de pages d'*Esquisse d'un programme*.

On trouve quelques traces des essais d'**axiomatisation** effectués par Grothendieck dans deux manuscrits de Montpellier occupant moins d'une centaine de pages, mais pas de réflexion développée à l'image de celle de la *Longue Marche*. Cette théorie est censée pour tant produire une seconde « métamorphose de la notion d'espace » après celle accomplie par les topos.

La démarche de Grothendieck pour fonder à nouveaux frais une « **topologie géométrique** » paraît faire écho aux considérations de son aîné et ami **Claude Chevalley** sur le style axiomatique.



Une première version de la définition de « structure modérée » [1973-1978 ?]

Archives Grothendieck, © Université de Montpellier

Haro sur la topologie dite "générale"...

Esquisse d'un programme, janvier 1984, Sommaire

« [...] la constitution de domaines exactement adaptés à certaines opérations permet, dans ces domaines, de donner des énoncés généraux sur les objets qu'on étudie. [...] Grâce à cela, le mathématicien n'a plus, comme au lendemain de la découverte des fonctions sans dérivée et autres appareilles bizarreries, l'impression de progresser sur un terrain semé d'embûches ; tout au contraire, il se trouve en présence de théories fortement charpentées dans lesquelles un certain nombre de démarches peuvent être faites en toute liberté, les autres se trouvant exclues parce qu'elles perdent toute signification.



Claude Chevalley
(1909-1984)

Claude Chevalley, *Variations du style mathématique* (1935), p. 382

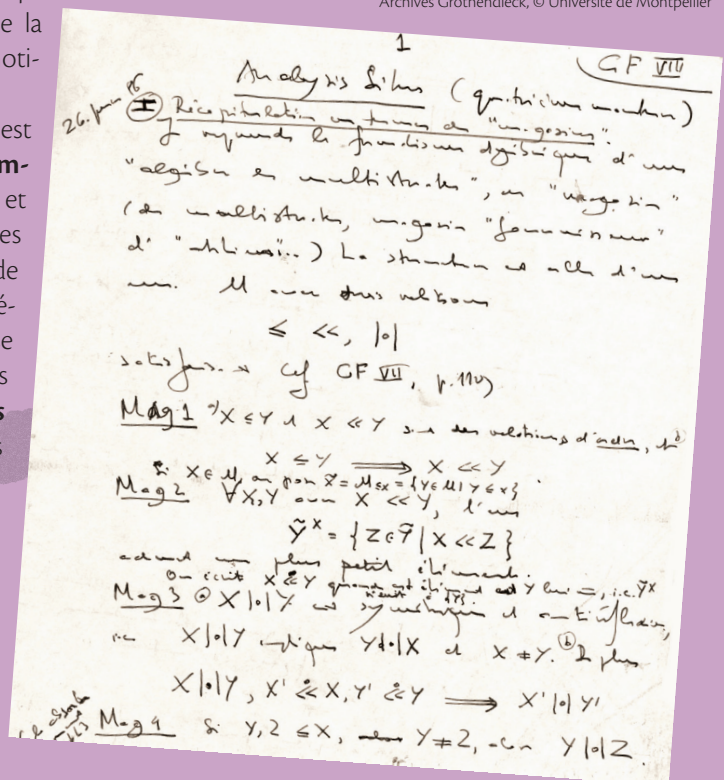
VERS UNE GÉOMÉTRIE DES FORMES

Vers une Géométrie des formes est écrite durant quelques semaines entre le 5 juin et le 15 juillet 1986. Dans ce texte méconnu de près de 700 pages, Grothendieck propose une ultime vision de la topologie et de la **forme** sans vraiment dévoiler ses motivations.

L'approche employée est axiomatique. Le point de vue **combinatoire** adopté est élémentaire et convient à l'étude de figures classiques comme les **polyèdres**, objets d'étude privilégiés de la période montpelliéraine. Une litanie d'axiomes sans cesse remaniée dans les quatre moutures successives d'une **Analysis situs** définit des notions inédites aux noms insolites : « ateliers », « contrées », « disjoncteurs », « magasins », « spatios »...

Axiomes des magasins,
Vers une Géométrie des formes (1986), VII.
Analysis situs (quatrième mouture), p. 1

Archives Grothendieck, © Université de Montpellier



DE LA TOPOLOGIE DES SURFACES AUX DESSINS D'ENFANTS

CARTES

Grothendieck étudie avec ses élèves les **surfaces** selon un point de vue purement **topologique** et aborde avec eux des questions de plongements de graphes. Par exemple, de combien de manières peut-on dessiner un graphe donné sur une surface fixée ?

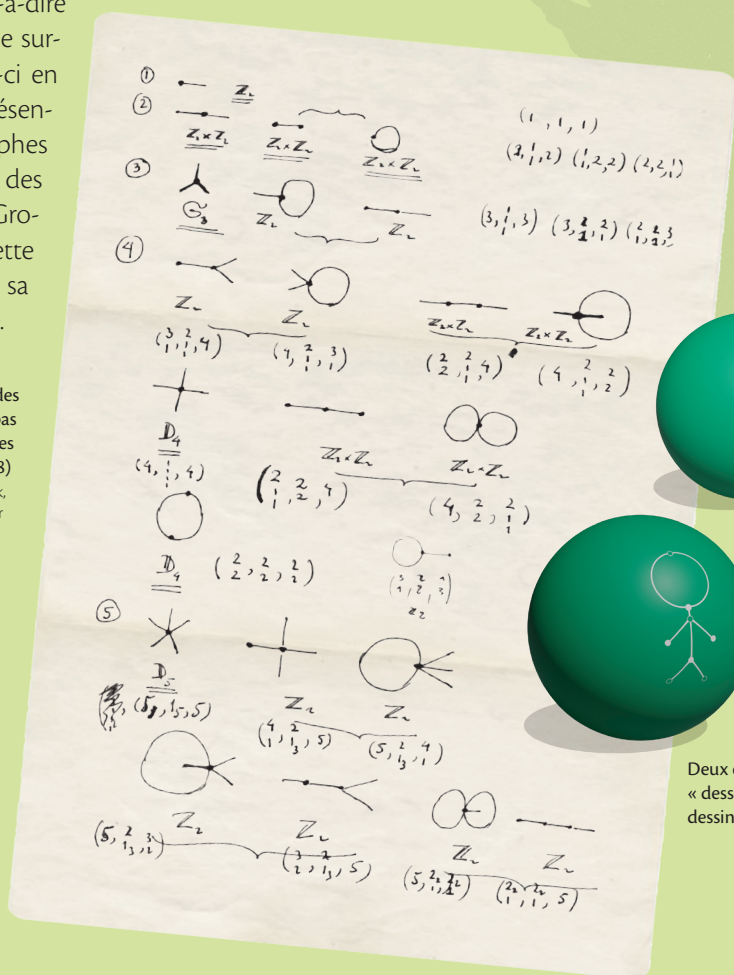
Il s'intéresse notamment à la notion de « **carte** » c'est-à-dire aux graphes tracés sur une surface qui découpent celle-ci en secteurs simples. La représentation visuelle de ces graphes peut faire penser à des « **dessins d'enfants** ». Grothendieck conservera cette expression imagée dans sa terminologie de la théorie.

Grothendieck explore des dessins d'enfants « en bas degrés » et leurs symétries (1976-1978)

Archives Grothendieck,
© Université de Montpellier

“ Je ne crois pas qu'un fait mathématique m'ait jamais autant frappé que celui-là, et ait eu un impact psychologique comparable. Cela tient sûrement à la nature tellement familière, non technique, des objets considérés ...

Esquisse d'un programme, janvier 1984, p. 12



Deux exemples de « dessins d'enfants » dessinés sur une sphère

... dont tout dessin d'enfant griffonné sur un bout de papier...
donne un exemple parfaitement explicite.

Esquisse d'un programme, janvier 1984, p. 12

DESSINS D'ENFANTS

Grothendieck et ses élèves remarquent alors que la donnée d'un dessin d'enfant tracé sur une surface permet de reconstruire une équation de celle-ci vue à présent comme une **surface de Riemann**.



Deux dessins d'enfants tracés sur une même surface topologique (un tore) correspondant à deux équations différentes : $y^2 = x^3 - x$ et $y^2 = x^3 - 1$

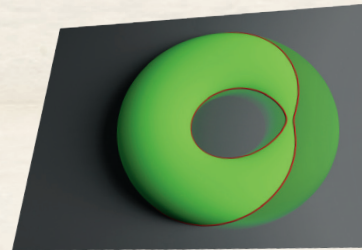
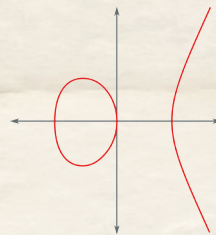
Sous leur apparence naïve, les dessins d'enfants apparaissent ainsi comme des objets mathématiques d'une grande profondeur qui révèlent une connexion nouvelle et inattendue entre le monde algébrique des équations et celui topologique des surfaces. En effet, de très nombreuses équations expriment une même surface. Pouvoir progresser « en sens inverse » constitue un fait tout à fait remarquable. Cette découverte frappera profondément Grothendieck.

L'ensemble des solutions d'une équation algébrique à deux variables $f(x, y) = 0$ se représente classiquement dans le plan réel cartésien comme une courbe plane formée par l'ensemble des points (x, y) à coordonnées réelles vérifiant l'équation $f(x, y) = 0$. Il suffit de penser aux vénérables coniques qui correspondent aux équations quadratiques.

Une telle courbe ne représente néanmoins qu'une petite partie des solutions de l'équation. Cette dernière possède en effet une multitude de solutions complexes ainsi que des solutions « à l'infini ».

L'ensemble de toutes ces solutions forment des étendues géométriques bidimensionnelles appelées **surfaces de Riemann**.

Les solutions réelles y sont représentées sous la forme d'une courbe unidimensionnelle.



Les solutions réelles de l'équation $y^2 = x^3 - x$ représentées en coordonnées cartésiennes

En vert, les solutions complexes de l'équation $y^2 = x^3 - x$, en rouge ses solutions réelles



Ici, la réalité mathématique est un peu plus complexe. Plus précisément, un dessin d'enfant correspond à une équation **et** à une fraction rationnelle particulière appelée **fonction de Belyi**.

DES DESSINS D'ENFANTS À LA THÉORIE DE GALOIS

LE THÉORÈME DE BELYI

C'est au cours de discussions informelles avec ses élèves que Grothendieck découvre une propriété arithmétique remarquable des équations algébriques associées aux dessins d'enfants : leurs coefficients sont des **nombre algébriques**. Il émet alors une hypothèse qu'il qualifie lui-même de « dingue ».

Cette hypothèse prédit que toutes les équations algébriques dont les coefficients sont des nombres algébriques peuvent-être associées à un dessin d'enfant. Elle témoignerait ainsi d'un lien profond unissant la **théorie de Galois** aux dessins d'enfant.

Soumise « aux compétences en la matière », cette hypothèse est accueillie avec circonspection, jusqu'à sa confirmation par le mathématicien soviétique **Gennadii Vladimirovich Belyi** en 1978 au moyen d'une démonstration d'une grande simplicité.



Gennadii Vladimirovich Belyi
(1951-2001)

VERS LA THEORIE DE GROTHENDIECK-TEICHMULLER

Le **groupe de Galois absolu**, qui opère par définition sur les nombres algébriques, peut donc être conçu comme un groupe de transformations des dessins d'enfants. La théorie des dessins d'enfants, motivée à l'origine par l'étude topologique des surfaces, réalise ainsi une jonction spectaculaire entre la topologie et la théorie de Galois. Cette théorie est développée par Grothendieck dans *La Longue Marche à travers la théorie de Galois* rédigée en 1981.

Le groupe des transformations du corps $\bar{\mathbb{Q}}$ des nombres algébriques est appelé **groupe de Galois absolu**. Il est noté $\text{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$. Ses éléments sont les permutations qui transforment un nombre algébrique en un autre nombre algébrique, tout en préservant addition et multiplication. Un nombre algébrique solution d'une équation $P(x) = 0$ est en outre transformé en une autre solution de l'équation. L'exemple le plus fondamental est celui de la conjugaison complexe qui transforme le nombre i en $-i$. Le groupe de Galois absolu constitue le cœur mystérieux de la théorie des nombres. L'élucidation de sa structure n'a toujours pas été accomplie malgré près de deux siècles d'efforts.



Un dessin d'enfant et deux nouveaux dessins obtenus par transformation par certains éléments du groupe de Galois

Cela montre que l'on peut encore démontrer des choses extraordinaires" à peu de frais.

Lettre de Grothendieck à Jean Malgoire, 25 août 1978

Un nombre est dit **algébrique** lorsqu'il est solution d'une équation à coefficients rationnels. $\sqrt{2}$ (solution de $x^2 - 2 = 0$), le nombre d'or φ (solution de $x^2 - x - 1 = 0$), le nombre imaginaire i (solution de $x^2 + 1 = 0$), ou bien les racines de l'unité $e^{2\pi i/n}$ (solutions de $x^n - 1 = 0$) sont des exemples bien connus de nombres algébriques. Les nombres e et π ne sont au contraire solutions d'aucune équation algébrique à coefficients rationnels: ils sont dits **transcendants**. Les nombres algébriques forment un corps noté $\mathbb{Q}$.

1. Topos multigaloisiens.

Prop. 1.1. Soit $\mathcal{E}$ une catégorie. Conditions équivalentes:

- $\mathcal{E}$ est un topos, et tout objet de $\mathcal{E}$ est loc. constant.
- $\mathcal{E}$ est équivalent à une catégorie $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}$ est un groupoïde.
- $\exists$ une famille $(G_i)_{i \in I}$ de groupes et une équivalence de catégories $\mathcal{E} \cong \prod_{i \in I} K^{\text{ns}}(G_i)$.

a) Conditions d'existence ad-hoc, du type de celles données dans SGA 1...

Dém. $b \Rightarrow b' \Rightarrow a$ immédiat. Pour $a) \Rightarrow b)$ pour nous même, peut être facile à exprimer $\mathcal{E}$ est loc. connexe, et qu'il est suffisant de se limiter à des fibres de $\mathcal{E}$ au-dessus d'un point.

Def. 1.1. Si les conditions équivalentes b) b') ci-dessus sont satisfaites, on dit que $\mathcal{E}$ est un topos multigaloisien (ou un topos multigaloisien).

« 1. Topos multigaloisiens »,
La Longue Marche à travers
la théorie de Galois (1981), p. 1
Archives Grothendieck,
© Université de Montpellier

LA THÉORIE DE GROTHENDIECK- TEICHMÜLLER

Afin de comprendre la nature profonde de l'action du groupe de Galois absolu sur les dessins d'enfants, Grothendieck entreprend d'étudier la manière dont les surfaces de Riemann sont permutées par une telle action. Celles-ci s'organisent classiquement en un espace qu'a étudié **Oswald Teichmüller** à la fin des années 1930. La théorie de Galois géométrique qui en a résulté est appelée aujourd'hui « **théorie de Grothendieck-Teichmüller** ».

ESPACES DE MODULES DE SURFACES DE RIEMANN

Les acteurs majeurs de cette théorie sont les espaces M_g qui paramètrent toutes les **surfaces de Riemann** de genre g .

Le **genre** d'une surface mesure sa complexité topologique en comptant son « nombre de trous ».



genre 0



genre 1

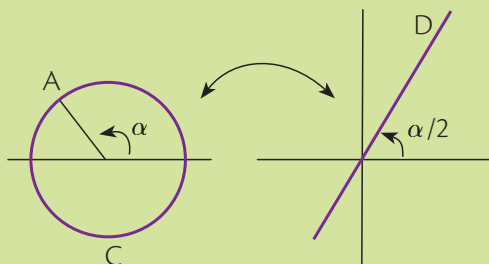


genre 2

Surfaces de genre 0, 1, 2

L'espace de modules des droites du plan passant par l'origine

Un **espace de modules** est un espace dont les points décrivent des objets ou des configurations géométriques. Par exemple, l'espace de modules des droites du plan passant par l'origine est un cercle : à tout point A du cercle C , repéré par l'angle α , correspond une et une seule droite D du plan passant par l'origine et formant un angle $\beta = \alpha/2$ avec l'horizontale.



Les points de ces espaces sont en correspondance biunivoque avec les surfaces de Riemann. Les espaces M_g offrent un exemple classique de ce que l'on nomme des **espaces de modules**.

Le groupe de Galois absolu permute donc les surfaces de Riemann en transformant les coefficients des équations des dessins d'enfants qui leur sont associées et opère ce faisant sur la géométrie des espaces M_g . Cette action géométrique constitue le cœur de la **théorie de Grothendieck-Teichmüller** et permet conjecturalement une description complète du groupe de Galois absolu.

I got involved a bit with recalling to mind the “Lego-Teichmüller construction game” for describing in a concrete, “visual” way the Teichmüller groups...

Pursuing Stacks, 14 mars 1983, p. 36

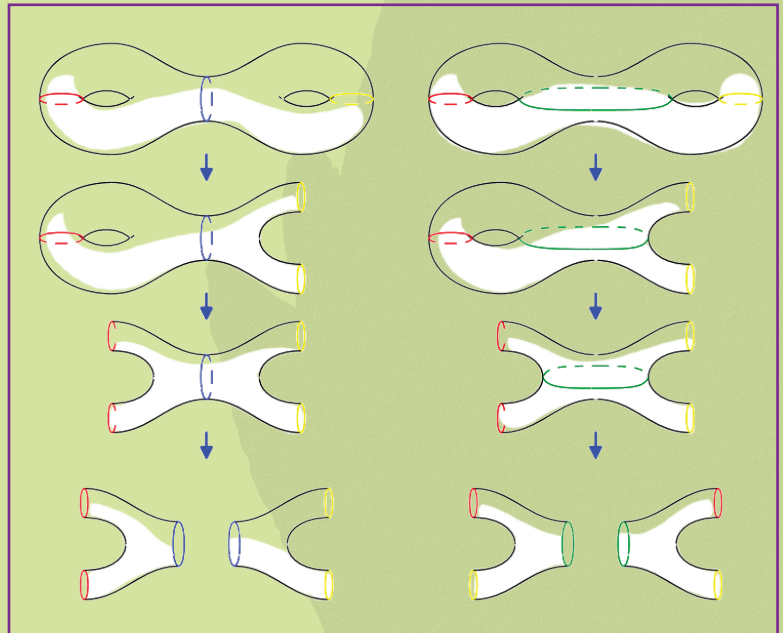
UN JEU DE LEGO

Les espaces M_g demeurent interconnectés lorsque le genre g varie grâce à un procédé de « **découpage en pantalons** ». Il s'agit d'une opération de simplification permettant de comprendre les surfaces d'un genre donné à l'aide de celles d'un genre inférieur. Grothendieck emploie le terme de « **jeu de Lego**

-Teichmüller » et prédit que la compréhension du groupe de Galois absolu nécessite uniquement l'étude des espaces M_0 et M_1 .

Les symétries de ce jeu de Lego forment le **groupe de Grothendieck-Teichmüller** ainsi nommé par **Vladimir Drinfeld** qui l'a introduit en 1991. De manière surprenante et sans doute imprévue pour Grothendieck, ce groupe intervient aussi en **physique théorique**.

Deux découpages en pantalons d'une surface de genre 2



“

La parenté de plus en plus manifeste entre le groupe de Grothendieck-Teichmüller d'une part, et le groupe de renormalisation de la Théorie Quantique des Champs n'est sans doute que la première manifestation d'un groupe de symétrie des constantes fondamentales de la physique, une espèce de groupe de Galois cosmique !

Pierre Cartier, *Un pays dont on ne connaîtrait que le nom* (Grothendieck et les motifs) (2000), p. 21

Recto d'une lettre de Grothendieck
à Jean Malgoire, Villecun, 25.8.78,
© Jean Malgoire



Cher Jean,
 Je t'envoie ci-joint une lettre de Deligne,
 donnant la démonstration de Bieli de la conjecture sur
 les "nbs alg. spéciaux". Comme tu verras, c'est
 astucieux et tout simple - tu aurais certainement pu la trouver en t'y
 mettant par la honte, en t'y mettant !
 Il faut dire qu'on ne peut faire tout en
 même temps... Cela est un encouragement, car
 cela montre que l'on peut encore découvrir
 des choses "extraordinaires" à peu de frais.
 Si ça t'inspire, tu pourrais essayer d'adapter
 la démonstration pour prouver que si on a des $x_i \in \mathbb{P}^1(K)$, où K
 est une extension de degré de transcendance n des corps premiers ($\mathbb{Q}$ si la
 car. est nulle), $1 \leq i \leq N$, alors $\exists f : \mathbb{P}_K^1 \rightarrow \mathbb{P}_K^1$ non ramifié en dehors d'un
 ens. S de $n + 3$ points, et avec $f(x_i) \in S$, $\forall i$. D'où : toute courbe algébrique
 définie sur K est un rev. [revêtement] de $\mathbb{P}_K^1$ non ramifié en dehors de $n + 3$
 points.

Villecun, 25 août 1978

Cher Jean,

Je t'envoie ci-joint une lettre de Deligne, donnant la dém. de Bieli
 [Belyi] de la conjecture sur les « nbs alg. spéciaux ». Comme tu verras,
 c'est astucieux et tout simple - tu aurais certainement pu la trouver en t'y
 mettant ! Il faut dire qu'on ne peut faire tout en même temps... Cela est un
 encouragement, car cela montre que l'on peut encore découvrir des choses
 « extraordinaires » à peu de frais. Si ça t'inspire, tu pourrais essayer
 d'adapter la démonstration pour prouver que si on a des $x_i \in \mathbb{P}^1(K)$, où K
 est une extension de degré de transcendance n des corps premiers ($\mathbb{Q}$ si la
 car. est nulle), $1 \leq i \leq N$, alors $\exists f : \mathbb{P}_K^1 \rightarrow \mathbb{P}_K^1$ non ramifié en dehors d'un
 ens. S de $n + 3$ points, et avec $f(x_i) \in S$, $\forall i$. D'où : toute courbe algébrique
 définie sur K est un rev. [revêtement] de $\mathbb{P}_K^1$ non ramifié en dehors de $n + 3$
 points.

Bien cordialement

Alexandre Grothendieck

Une solitude peuplée

« Mais je sais bien [...] que les choses qui m'intéressent ne pourront manquer d'intéresser quelqu'un et même quelques-uns, que ce soit dans dix ans ou dans cent ans peu importe au fond. C'est cela qui donne un sens à mon travail, même si celui-ci se fait dans la solitude [...] La mathématique est une aventure collective se poursuivant depuis des millénaires. »

Alexandre Grothendieck, *Récoltes et Semailles*, février 1984, p. 126-127

Reprenons. En janvier 1984, Alexandre Grothendieck a sous le coude « deux volumineux cartons de notes manuscrites », soit quelques milliers de pages de réflexions mathématiques, qu'il évoque dans *Esquisse d'un Programme*. Ce texte est adressé au Comité National pour justifier une demande d'admission au CNRS mais aussi à quelques mathématiciens qui le liront et le feront lire. La demande est acceptée et Grothendieck redevient chercheur au CNRS jusqu'à sa retraite en 1988. Il se retire en 1992 à Lasserre, en Ariège, et meurt en 2014. Il ne publie pas ses *Réflexions Mathématiques*. Est-ce la fin de l'histoire ?

Les idées de Grothendieck circulèrent à travers les textes qui furent transmis à la communauté mathématique, comme *Pursuing Stacks*. Elles furent assimilées et développées durant les trente dernières années. Les notes mathématiques accumulées tout au long des années appartiennent à cet héritage mathématique. Récemment, des manuscrits inédits de la période 1987-1999 ont rejoint les collections de la BnF et complètent ceux de la période 1949-1991 disponibles sur le site web des Archives Grothendieck de l'Université de Montpellier. Qui lira donc ces textes ?

On pourrait s'étonner de l'intérêt porté par les mathématiciens à des manuscrits oubliés, quand bien même ils seraient l'œuvre d'un génie solitaire. Les mathématiques contemporaines, dont les progrès sont incessants, ont *a priori* peu à faire avec l'érudition qui est la marque de la désuétude en science, ou le romantisme d'un Chateaubriand voyant dans Pascal un « effrayant génie ». Aujourd'hui, sur un site web d'« archive ouverte » nommé arXiv, les mathématiciens du monde entier enrichissent chaque jour le corpus mathématique de nouveaux éléments. Ils écrivent pour être lus et pour que leurs travaux soient discutés et utilisés. C'était aussi l'intention de Grothendieck. L'apparente solitude du génie est vouée à être peuplée par ceux qui poursuivent l'aventure collective des mathématiques en lisant ses textes.

SOURCES (1973-1991)

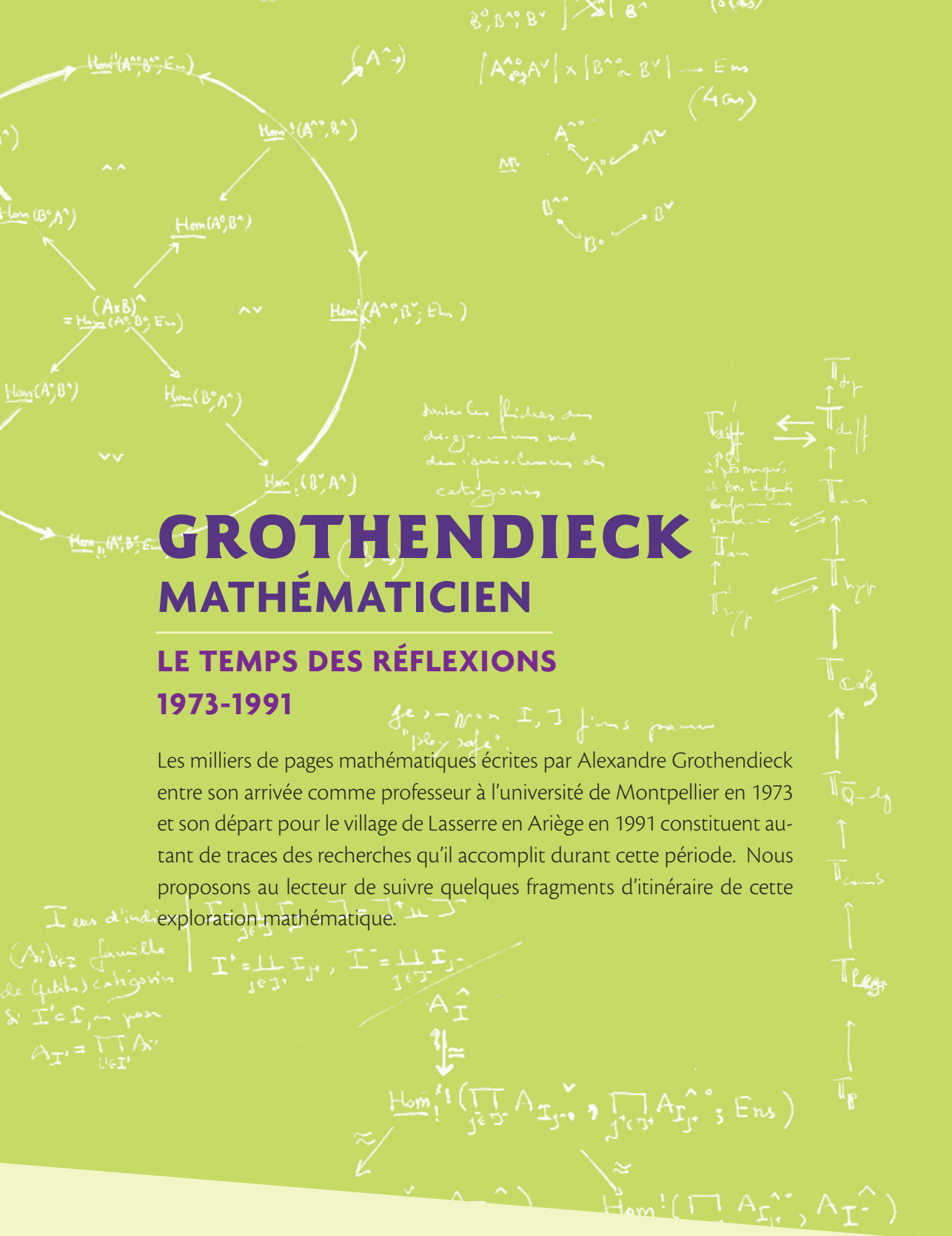
- Archives Grothendieck, IMAG, Université de Montpellier, <https://grothendieck.umontpellier.fr>
- *La Longue Marche à travers la théorie de Galois*, 1981, Archives Grothendieck, cote n° 140. Tome 1, §1-37, édité par J. Malgoire, Montpellier, Université de Montpellier II, 1995.
- *Pursuing Stacks*, 1983, cote n° 134. Vol. 1, chaps. 1-4, édité par G. Maltsinotis, Paris, Société Mathématique de France, 2022.
- *Esquisse d'un Programme*, 1984, Archives Grothendieck, cote n° 119. Édité par L. Schneps et P. Lochak in *Geometric Galois Actions, 1. Around Grothendieck's Esquisse d'un Programme*, Cambridge, Cambridge University Press, 1997, p. 5-48.
- *Récoltes et Semailles*, 1984-1986, Archives Grothendieck, cotes n°170-177. Paris, Gallimard, collection Tel, « version augmentée », 2023.
- *Vers une Géométrie des formes*, 1986, Archives Grothendieck, cote n° 156.
- *Les Dérivateurs* 1990-1991, Archives Grothendieck, cote n° 157. Manuscrit en cours d'édition par M. Künzer, J. Malgoire, et G. Maltsinotis, <https://webusers.imj-prg.fr/~georges.maltsinotis/groth/Derivateurs.html>.

AUTRES SOURCES CITÉES

- G.V. Belyi, « On Galois extensions of a maximal cyclotomic field », *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.*, 43(2), 1979, p. 267-276 ; *Math. USSR-Izv.*, 14(2), 1980, p. 247-256.
- A. Borel et J.-P. Serre, « Le théorème de Riemann-Roch », *Bulletin de la SMF*, t. 86, 1958, p. 97-136. http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1958__86__97_0.
- C. Chevalley, « Variations du style mathématique », *Revue de métaphysique et de morale*, t. 42(3), 1935, p. 375-384.
- A. Grothendieck, « Standard conjectures on algebraic cycles », in *Algebraic Geometry, Papers presented at the Bombay Colloquium 1968*, Tata Institute of Fundamental Research, Bombay, Oxford University Press, 1969, p. 193-199.
- A. Grothendieck, *Correspondance Grothendieck-Serre*, Paris, Société Mathématique de France, 2001.
- D. Hilbert, « Über die stetige Abbildung einer Linie auf ein Flächenstück », *Mathematische Annalen*, vol. 38, 1891, p. 459-460.
- A. Weil, « Number of solutions of equations in finite fields », *Bull. Amer. Math. Soc.*, 55(5), 1949, 497-508.
- A. Weil, *Œuvres scientifiques*, vol. I (1926-1951), corrected second printing, New York, Springer Verlag, 1980.

QUELQUES ÉTUDES

- P. Cartier, « Un pays dont on ne connaîtrait que le nom (Grothendieck et les “motifs”) », *Notes sur l'histoire et la philosophie des mathématiques IV*, IHES, novembre 2000, p. 2-33.
- A. Jackson, « Comme appelé du néant – as if summoned from the void : the life of Alexandre Grothendieck », *Notices Amer. Math. Soc.*, 51(9), 1038-1056 et 51(10), 1196-1212, 2004.
- F. Jaek (dir.), *Lectures Grothendieckiennes*, Paris, SMF-Spartacus, 2021.
- M. Panza, D. C. Struppa, J.-J. Szczeciniarz (éds.), *The mathematical and philosophical legacy of Alexander Grothendieck*, Cham, Birkhäuser, 2025.
- L. Schneps (éd.), *Grothendieck Circle. A website devoted to the life and works of Alexandre Grothendieck*, <https://www.grothendieckcircle.org>



GROTHENDIECK MATHÉMATICIEN

LE TEMPS DES RÉFLEXIONS 1973-1991

Les milliers de pages mathématiques écrites par Alexandre Grothendieck entre son arrivée comme professeur à l'université de Montpellier en 1973 et son départ pour le village de Lasserre en Ariège en 1991 constituent autant de traces des recherches qu'il accomplit durant cette période. Nous proposons au lecteur de suivre quelques fragments d'itinéraire de cette exploration mathématique.