

Chapter II

Fundamental groupoids of genus zero moduli spaces and braided tensor categories

II.0. Introduction

Over the last few years, it has become clear that by applying a certain circle of ideas usually associated with mathematical physics, namely those concerning quantum groups, quasi-Hopf algebras, their relations with knot theory and invariants of 3-dimensional manifolds, and topological and conformal field theories, one can give at least partial solutions of deep questions arising naturally in algebraic number theory, connected with the geometry of curves. This text has two distinct goals. The first and more modest one is to give the complete construction of a very natural object in the geometry of moduli spaces, whose structure is closely related to a braided tensor category; namely the *genus zero Teichmüller tower*, which is the collection of all the fundamental groupoids of the moduli spaces of Riemann spheres equipped with marked points, linked by certain natural groupoid homomorphisms.* The second goal is to present some ideas and results concerning the program of Grothendieck and Drinfel'd, which aims to use the deep relations between the structure of a braided tensor category and the geometry of moduli spaces of curves to obtain new geometric and combinatorial information on the absolute Galois group $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$.

Nous décrivons tout d'abord l'origine des idées abordées dans ce texte et la nature des résultats visés. Dans l'article [Dr] de 1991, Drinfel'd définit le *groupe de Grothendieck-Teichmüller*, noté \widehat{GT} , comme le groupe de transformations d'une quasi-algèbre de Hopf qui modifient les contraintes d'associativité et de commutativité sans modifier les autres données. Les relations entre les quasi-algèbres de Hopf et les groupes de tresses d'Artin B_n l'ont conduit à remarquer que \widehat{GT} agit aussi comme groupe d'automorphismes des complétés profinis \widehat{B}_n des B_n . En particulier, cette action sur \widehat{B}_3 passe à une action sur \widehat{B}_3 modulo son centre, qui est isomorphe au complété profini de $\text{PSL}_2(\mathbb{Z})$. Or, dans son manuscrit [G] de 1984 intitulé *Esquisse d'un Programme*, Grothendieck suggère de déterminer des propriétés combinatoires du groupe de Galois absolu $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ en étudiant son action sur certains groupes ou groupoïdes fondamentaux (algébriques) de variétés

* We indicate that a very general related tower has been constructed by V. Lyubashenko [L]. This tower describes groupoids whose structures are generalisations of braided tensor categories; the generalisation concerns the passage from genus 0 to higher genus. These groupoids are closely related (though we do not know if they are isomorphic) to the fundamental groupoids of moduli spaces in arbitrary genus with an arbitrary number of marked points, equipped with base points at infinity.

algébriques définies sur \mathbb{Q} , et en tout premier lieu, celui du domaine modulaire, à savoir le groupe profini $\widehat{\mathrm{PSL}}_2(\mathbb{Z})$. A partir de ces idées, Drinfel'd esquisse un programme de comparaison de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ avec le groupe de Grothendieck-Teichmüller qui peut se résumer comme suit. Il suggère de construire une tour de groupoïdes fondamentaux d'espaces des modules à la Grothendieck, mais basés en des voisinages de points de dégénérescence maximale des espaces des modules, et reliés par certains homomorphismes naturels, de telle façon que le groupe $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ agisse naturellement sur un complété convenable de cette tour en respectant toutes les structures. Drinfel'd suggère de se servir du fait que la structure des groupoïdes fondamentaux des espaces des modules basés en les voisinages des points de dégénérescence maximale ressemble étroitement à celle des braided tensor categories munies de contraintes d'associativité et de commutativité, et que l'on comprend bien l'action de \widehat{GT} sur ces dernières, pour démontrer que \widehat{GT} agit aussi sur la tour et même en est le groupe complet d'automorphismes vérifiant certaines conditions simples. Nous citons ici le paragraphe pertinent de l'article de Drinfel'd (cf. [Dr], p. 846), qui donne en même temps une idée du travail qui reste à faire pour bien cerner les objets et résultats mentionnés, et une idée de l'extraordinaire densité de l'article tout entier.

It is proposed in [G] to consider, for any g and ν , the “Teichmüller groupoid” $T_{g,\nu}$, i.e. the fundamental groupoid of the module stack $\mathcal{M}_{g,\nu}$ of compact Riemann surfaces X of genus g with ν distinguished points x_1, \dots, x_ν . The fundamental groupoid differs from the fundamental group in that we choose not one, but several distinguished points. In the present case it is convenient to choose the distinguished points “at infinity” (see §15 of [De]) in accordance with the methods of “maximal degeneration” of the set (X, x_1, \dots, x_ν) . Since degeneration of the set (X, x_1, \dots, x_ν) results in decreasing g and ν , the groupoids $T_{g,\nu}$ for different g and ν are connected by certain homomorphisms. The collection of all $T_{g,\nu}$ and all such homomorphisms is called in [G] the Teichmüller tower. It is observed in [G] that there exists a natural homomorphism $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}) \rightarrow G$, where G is the group of automorphisms of the profinite analogue of the Teichmüller tower (in which $T_{g,\nu}$ is replaced by its profinite completion $\widehat{T}_{g,\nu}$). It is also stated in [G], as a plausible conjecture, that $\widehat{T}_{0,4}$ and $\widehat{T}_{1,1}$ in a definite sense generate the whole tower $\{\widehat{T}_{g,\nu}\}$ and that all relations between generators of the tower come from $\widehat{T}_{0,4}$, $\widehat{T}_{1,1}$, $\widehat{T}_{0,5}$ and $\widehat{T}_{1,2}$. This conjecture has been proved, apparently, in Appendix B of the physics paper [MS]. In any case, it is easily seen that $\widehat{T}_{0,4}$ generates the subtower $\{\widehat{T}_{0,\nu}\}$, and that all relations in $\{\widehat{T}_{0,\nu}\}$ come from $\widehat{T}_{0,4}$ and $\widehat{T}_{0,5}$. It can be shown that \widehat{GT} is the automorphism group of the tower $\{\widehat{T}_{0,\nu}\}$ [...] Grothendieck's conjecture implies that the group of automorphisms of the tower $\{\widehat{T}_{g,\nu}\}$ that are compatible with the natural homomorphism $\widehat{T}_{0,4} \rightarrow \widehat{T}_{1,1}$ (to a quadruple of points on \mathbb{P}^1 is assigned the double covering of \mathbb{P}^1 ramified at these points) is also equal to \widehat{GT} .

Une fois ce programme réalisé, l'injectivité de l'homomorphisme $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}) \rightarrow \widehat{GT}$ suivrait comme conséquence du théorème de Belyi, et il deviendrait raisonnable de se

concentrer sur la comparaison de ces deux groupes. Or, Ihara (cf. [I1], [I2]) a trouvé une façon géométrique vraiment simple pour exprimer les éléments de $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ sous la même forme que ceux de \widehat{GT} , et à partir de cette description il a donné une démonstration complète et explicite de l'existence d'un monomorphisme $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}) \hookrightarrow \widehat{GT}$ sans suivre le programme esquissé dans cette citation. Une nouvelle démonstration basée sur la même écriture géométrique des éléments de $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ se trouve dans [LS2], et une interprétation différente de l'injection dans [HS]. Mais le programme de Drinfel'd vise à montrer la nature géométrique du groupe \widehat{GT} , et par là des similarités plus profondes entre \widehat{GT} et $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$; c'est pourquoi il nous semble très important de poursuivre sa réalisation. Nous pouvons résumer ses étapes comme suit:

- construire les groupoïdes de Teichmüller en generalisant à tous les espaces des modules en genre zéro la notion de point base à l'infini (ou "tangential") introduite dans le cas de genre zéro et quatre marked points par Deligne (qui se restreint à ce cas par lassitude, cf. [De]);
- expliciter les relations entre la structure de ces groupoïdes et la structure de braided tensor category;
- définir les complétés profinis de ces groupoïdes de façon à obtenir un objet sur lequel $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ et \widehat{GT} agissent;
- relier la collection des groupoïdes par des homomorphismes convenables respectés par ces actions;
- point crucial, démontrer que \widehat{GT} lui-même est le groupe complet des automorphismes de la tour.
- generaliser toute la construction aux espaces des modules en genre supérieur.

Le but de ce cours est de commencer la réalisation de ce programme; nous traitons les trois premiers points. Au II.1 nous rappelons les définitions de braided tensor category et de groupoïde fondamental; au II.2, nous construisons une braided tensor category \mathcal{C} d'arbres trivalents. Au II.3, nous rappelons les définitions des groupes de tresses et des groupes modulaires et les relient à la catégorie \mathcal{C} ; au II.4 nous rappelons quelques propriétés des espaces des modules en genre 0 et de leurs groupes fondamentaux. Le II.5 est consacré à l'explicitation des points base à l'infini des espaces des modules en genre 0, en se basant sur la présentation donnée au I.2, ce qui permet de définir les *groupoïdes de Teichmüller*, qui sont les groupoïdes fondamentaux des espaces des modules basés aux points base à l'infini. La section II.6 forme le cœur du cours; nous y interprétons les groupoïdes de Teichmüller comme des quotients de certains sous-groupoïdes canoniques de la braided tensor category \mathcal{C} construite au II.2. Dans les trois dernières sections II.7-II.9, nous abordons l'étude des actions de $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ et du groupe de Grothendieck-Teichmüller \widehat{GT} sur les groupoïdes de Teichmüller profinis.

II.1. Groupoïdes fondamentaux et catégories tensor braided

Un *groupoïde* est une catégorie dont tous les morphismes sont des isomorphismes, c'est-à-dire que pour chaque morphisme de la catégorie il existe un morphisme inverse appartenant à la catégorie. En particulier, pour tout objet P d'une telle catégorie, $\text{Hom}(P, P)$ forme un groupe.

Soit X un espace topologique connexe. Pour un point quelconque P de X , nous notons $\pi_1(X; P)$ le groupe fondamental de X basé au point P , c'est-à-dire l'ensemble des classes d'homotopie de lacets basés au point P . Si P et Q sont deux points de X , alors $\pi_1(X; P) \simeq \pi_1(X; Q)$, un isomorphisme étant donné par conjugaison des éléments de $\pi_1(X; Q)$ par la classe d'homotopie d'un chemin quelconque allant de P à Q .

Si \tilde{P} désigne une région simplement connexe de X contenant un point P_0 , nous écrivons $\pi_1(X; \tilde{P})$ pour le groupe des classes d'homotopie des chemins dont les deux extrémités se trouvent dans la région \tilde{P} . Ce groupe est canoniquement isomorphe à $\pi_1(X; P_0)$. Un isomorphisme peut être obtenu en utilisant des chemins γ_P allant de P_0 à chaque point P de \tilde{P} , et contenus dans la région \tilde{P} ; pour chaque P , le chemin γ_P est unique à homotopie près puisque \tilde{P} est simplement connexe. Si δ part du point $P \in \tilde{P}$ et arrive au point $Q \in \tilde{P}$, on peut identifier δ au lacet $\gamma_Q^{-1}\delta\gamma_P \in \pi_1(X; P_0)$; ceci donne l'isomorphisme $\pi_1(X; \tilde{P}) \xrightarrow{\sim} \pi_1(X; P_0)$ (voir la figure 1).

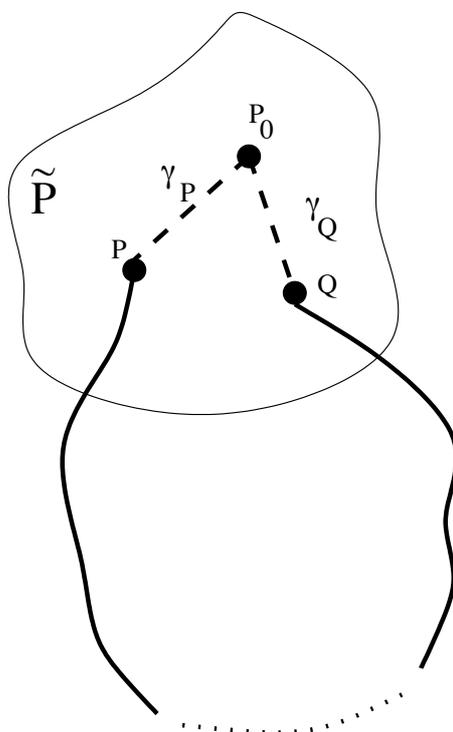


Figure 1

Désormais, l'expression "point base" d'un groupe ou groupoïde fondamental d'un espace topologique X désignera une région simplement connexe de X , et un ensemble de points base sera un ensemble de régions simplement connexes et disjointes de X .

Définition 1. Le *groupoïde fondamental* $\pi_1(X; A)$ de X basé en un ensemble A de points base est l'ensemble des classes d'homotopie de chemins sur X dont les deux extrémités appartiennent à A , c'est-à-dire à deux (ou une seule) des régions simplement connexes appartenant à A .

Nous constatons que le groupoïde fondamental $\pi_1(X; A)$ est bien un groupoïde selon la définition donnée ci-dessus. Les objets sont les points base et si P et $Q \in A$, alors $\text{Hom}(P, Q)$ est l'ensemble des classes d'homotopie de chemins de P à Q . L'ensemble des morphismes du groupoïde est l'ensemble des classes d'homotopie des chemins, et deux morphismes sont composables si et seulement si le point (objet) de départ du deuxième est le même que le point d'arrivée du premier. Tout morphisme est bien inversible puisqu'il suffit de parcourir le chemin en sens inverse; il existe un chemin identité de chaque point à lui-même, et les "groupes locaux" $\pi_1(X; P)$ pour chaque $P \in A$ sont effectivement des groupes. L'espace X étant supposé connexe, le groupoïde fondamental $\pi_1(X; A)$ possède la propriété que les groupes $\text{Hom}(P, P) = \pi_1(X; P)$ pour $P \in A$ sont tous isomorphes.

Rappelons les définitions de catégorie tensorielle et catégorie tensorielle tressée (nous renvoyons au livre [K] pour plus de détails). La notion de catégorie tensorielle a été introduite par Bénabou [Bé], et les contraintes d'associativité par Mac Lane [M]. La définition d'une braided tensor category avec la contrainte de commutativité non involutive est due à Joyal et Street [JS].

Définition 2. Soit \mathcal{C} une catégorie et f un morphisme de \mathcal{C} ; nous notons $D(f)$ et $A(f)$ les objets de départ et d'arrivée de f . Un *produit tensoriel* sur une catégorie \mathcal{C} est un foncteur $\otimes : \mathcal{C} \times \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$, dit *tensoriel* par généralisation du cas des catégories d'espaces vectoriels. Le fait que \otimes soit un foncteur entraîne les propriétés suivantes:

- (i) il associe à tout couple d'objets (V, W) de \mathcal{C} un objet noté $V \otimes W$ de \mathcal{C} ;
- (ii) il associe au couple (f, g) un morphisme $f \otimes g : D(f) \otimes D(g) \rightarrow A(f) \otimes A(g)$;
- (iii) si f, f', g et g' sont des morphismes de \mathcal{C} tels que $D(f') = A(f)$ et $D(g') = A(g)$, alors $(f' \otimes g')(f \otimes g) = (f'f) \otimes (g'g)$;
- (iv) pour tout couple d'objets (V, W) de \mathcal{C} , on a $\text{id}_{V \otimes W} = \text{id}_V \otimes \text{id}_W$.

Définition 3. Une *contrainte d'associativité* sur une catégorie munie d'un produit tensoriel est un ensemble d'isomorphismes $a_{U, V, W} : (U \otimes V) \otimes W \rightarrow U \otimes (V \otimes W)$ pour chaque triplet (U, V, W) d'objets de \mathcal{C} tel que le diagramme suivant commute pour tout triplet (f, g, h) de morphismes de \mathcal{C} avec $D(f) = U$, $D(g) = V$, $D(h) = W$, $A(f) = U'$, $A(g) = V'$ et

$A(h) = W'$:

$$\begin{array}{ccc}
 (U \otimes V) \otimes W & \xrightarrow{a_{U,V,W}} & U \otimes (V \otimes W) \\
 \downarrow (f \otimes g) \otimes h & & \downarrow f \otimes (g \otimes h) \\
 (U' \otimes V') \otimes W' & \xrightarrow{a_{U',V',W'}} & U' \otimes (V' \otimes W').
 \end{array}$$

Une contrainte d'associativité satisfait à *l'axiome du pentagone de Mac Lane* (ou simplement "au pentagone") si pour tout quadruplet d'objets (U, V, W, X) de \mathcal{C} , le diagramme suivant commute:

$$\begin{array}{ccccc}
 & & ((U \otimes V) \otimes W) \otimes X & & \\
 & \swarrow & & \searrow & \\
 & a_{U \otimes V, W, X} & & a_{U, V, W} \otimes \text{id}_X & \\
 (U \otimes V) \otimes (W \otimes X) & & & & (U \otimes (V \otimes W)) \otimes X \\
 \downarrow a_{U, V, W \otimes X} & & & & \downarrow a_{U, V \otimes W, X} \\
 U \otimes (V \otimes (W \otimes X)) & \xleftarrow{\text{id}_U \otimes a_{V, W, X}} & & & U \otimes ((V \otimes W) \otimes X).
 \end{array}$$

Soit I un objet d'une catégorie \mathcal{C} munie d'un produit tensoriel. Une *contrainte d'unité à gauche* (resp. à droite) par rapport à I est un ensemble d'isomorphismes

$$l_V : I \otimes V \rightarrow V \quad (\text{resp. } r_V : V \otimes I \rightarrow V)$$

pour chaque objet V de \mathcal{C} tels que le diagramme suivant commute, pour tout morphisme f de \mathcal{C} avec $D(f) = V$ et $A(f) = V'$:

$$\begin{array}{ccc}
 I \otimes V & \xrightarrow{l_V} & V \\
 \downarrow \text{id}_I \otimes f & & \downarrow f \\
 I \otimes V' & \xrightarrow{l_{V'}} & V'
 \end{array}
 \quad \left(\text{resp. } \begin{array}{ccc}
 V \otimes I & \xrightarrow{r_V} & V \\
 \downarrow f \otimes \text{id}_I & & \downarrow f \\
 V' \otimes I & \xrightarrow{r_{V'}} & V' \end{array} \right).$$

L'objet I est appelé *l'objet unité* de \mathcal{C} . Si \mathcal{C} est munie d'une contrainte d'associativité et de contraintes d'unités à gauche et à droite par rapport à un objet unité I , on dit que ces contraintes satisfont à *l'axiome du triangle* (ou "au triangle") si le diagramme suivant

commute pour tout couple (V, W) d'objets:

$$\begin{array}{ccc}
 (V \otimes I) \otimes W & \xrightarrow{a_{V,I,W}} & V \otimes (I \otimes W) \\
 \searrow r_V \otimes \text{id}_W & & \swarrow \text{id}_V \otimes l_W \\
 & & V \otimes W
 \end{array}$$

Définition 4. Une *catégorie tensorielle* est une catégorie munie d'un produit tensoriel, d'un objet I (l'unité de la catégorie), et de contraintes d'associativité, d'unité à gauche et d'unité à droite par rapport à I satisfaisant au pentagone et au triangle.

Définition 5. Soit \mathcal{C} une catégorie tensorielle. Une *contrainte de commutativité* sur \mathcal{C} est une collection, pour tout couple (U, V) d'objets de \mathcal{C} , d'isomorphismes $c_{U,V} : U \otimes V \rightarrow V \otimes U$ tel que le diagramme suivant commute, pour tout couple de morphismes (f, g) de \mathcal{C} avec $D(f) = V$, $D(g) = W$, $A(f) = V'$ et $A(g) = W'$:

$$\begin{array}{ccc}
 V \otimes W & \xrightarrow{c_{V,W}} & W \otimes V \\
 \downarrow f \otimes g & & \downarrow g \otimes f \\
 V' \otimes W' & \xrightarrow{c_{V',W'}} & W' \otimes V'
 \end{array}$$

La contrainte de commutativité satisfait aux *axiomes des deux hexagones* (ou simplement "aux deux hexagones") si les deux diagrammes suivants commutent pour tout triplet (U, V, W) d'objets de \mathcal{C} :

$$\begin{array}{ccc}
 (U \otimes V) \otimes W & \xrightarrow{a_{U,V,W}} & U \otimes (V \otimes W) & \xrightarrow{c_{U,V \otimes W}} & (V \otimes W) \otimes U \\
 \downarrow c_{U,V} \otimes \text{id}_W & & & & \downarrow a_{V,W,U} \\
 (V \otimes U) \otimes W & \xrightarrow{a_{V,U,W}} & V \otimes (U \otimes W) & \xrightarrow{\text{id}_V \otimes c_{U,W}} & V \otimes (W \otimes U)
 \end{array}$$

et

$$\begin{array}{ccc}
 (U \otimes V) \otimes W & \xrightarrow{c_{U \otimes V,W}} & W \otimes (U \otimes V) & \xrightarrow{a_{W,U,V}^{-1}} & (W \otimes U) \otimes V \\
 \uparrow a_{U,V,W}^{-1} & & & & \uparrow c_{U,W} \otimes \text{id}_V \\
 U \otimes (V \otimes W) & \xrightarrow{\text{id}_U \otimes c_{V,W}} & U \otimes (W \otimes V) & \xrightarrow{a_{U,W,V}^{-1}} & (U \otimes W) \otimes V
 \end{array}$$

Définition 6. Une *braided tensor category* est une catégorie munie d'un produit tensoriel, d'une contrainte d'associativité, de contraintes à gauche et à droite par rapport à un objet unité I de \mathcal{C} , et d'une contrainte de commutativité, satisfaisant au pentagone, au triangle et aux deux hexagones.

Nous espérons que le lecteur peu familier avec les définitions ci-dessus sera convaincu de leur pertinence par la version très explicite et très simple d'une braided tensor category construite au II.2, et aussi par leurs applications à l'étude de la tour de Teichmüller avec son aspect solidement géométrique.

II.2. Catégorie d'arbres

Dans son article fondateur [M], Mac Lane introduit la notion de catégorie tensorielle libre et engendrée par une famille d'objets. Dans la catégorie de Mac Lane, la contrainte de commutativité est involutive; la généralisation au cas d'une contrainte de commutativité non involutive a été étudiée par Joyal et Street [JS] et ultérieurement par d'autres auteurs. Nous donnons ici une description un peu différente de cette catégorie généralisée, basée sur l'utilisation des arbres trivalents.

Définition 7. Soit \mathcal{C} une catégorie tensorielle tressée. On dit que \mathcal{C} est *pure* si elle possède les propriétés suivantes:

- les contraintes d'unité sont des identités;
- il existe un ensemble dénombrable V_1, V_2, \dots , d'objets de \mathcal{C} tel que tout objet de \mathcal{C} est un produit tensoriel d'un nombre fini parmi les V_i (pas nécessairement distincts), de façon unique;
- les seuls morphismes de \mathcal{C} sont les composés des produits tensoriels formés des morphismes identité et les contraintes de commutativité et d'associativité, ainsi que leurs inverses;
- les seules relations entre les morphismes de \mathcal{C} proviennent du pentagone, du triangle, des deux hexagones et des carrés exprimant les diverses functorialités.

Avant d'aborder la géométrie des espaces des modules $\mathcal{M}_{0,n}$, nous construisons dans cette section une braided tensor category pure dont la structure sera proche de celle des groupoïdes fondamentaux basés en les points base à l'infini des $\mathcal{M}_{0,n}$. Les objets seront des arbres trivalents, c'est-à-dire que toutes les valences aux sommets sont égales à 1 ou à 3; nous précisons que dans cet article, une *feuille* d'un arbre est un sommet de valence 1.

Définition 8 (cette définition s'étend jusqu'à la définition 10 ci-dessous). Soit \mathcal{C} la braided tensor category définie comme suit.

* L'ensemble des *objets* de \mathcal{C} est l'ensemble des arbres trivalents munis

(i) d'un ordre cyclique sur les arêtes sortant de chaque sommet;

(ii) d'une numérotation des feuilles du type suivant: une feuille est distinguée et numérotée 0, et à chacune des autres feuilles de l'arbre on associe un indice qui est un entier strictement positif; les indices numérotant un arbre donné ne sont pas nécessairement ordonnés ni distincts.

Les arbres à une seule arête avec une feuille numérotée 0 à un bout et une autre feuille numérotée par un entier strictement positif quelconque à l'autre sont aussi des objets de \mathcal{C} , et comme objet identité, nous incluons également la feuille toute seule numérotée 0. *Les arbres à n feuilles sont appelés les “ $(n - 1)$ -objets” de \mathcal{C}* ; en particulier, les arbres à une seule arête (et deux feuilles) forment l'ensemble des 1-objets, et la feuille 0 est l'unique 0-objet. Pour un arbre quelconque, nous appelons *arête distinguée* l'arête sortant de la feuille 0, et si $n \geq 2$, nous appelons *sommet trivalent distingué* le sommet trivalent attaché à l'arête distinguée.

Définition 9. Soit T un objet de \mathcal{C} . Nous pouvons établir une liste ordonnée des indices des feuilles de T comme suit: on part de la feuille 0, on parcourt l'arête distinguée a jusqu'au sommet trivalent distingué, on parcourt ensuite l'arête b sortant de ce sommet et qui vient après a dans l'ordre cyclique des trois arêtes sortant de ce sommet, et on continue à parcourir tout l'arbre de la même façon. Chaque fois que l'on atteint une feuille on note son indice a_i dans la liste ordonnée des indices, on redescend l'arête attachée et on continue son parcours; on atteint ainsi toutes les feuilles, et on obtient une liste ordonnée $(0, a_1, \dots, a_{n-1})$ des indices que l'on appelle *l'ordre cyclique* des feuilles de T . Dans le cas où les n feuilles de T sont indexés par l'ensemble $\{0, 1, \dots, n - 1\}$, cette liste détermine une permutation $\omega_T \in S_{n-1}$ par la formule $\omega_T^{-1}(i) = a_i$; nous appelons aussi cette permutation *l'ordre cyclique de T* .

Nous appelons *branche*, la partie d'un arbre déterminée par la donnée d'un sommet et d'une arête qui en sort; la branche associée est toute la partie de l'arbre sortant de l'autre bout de cette arête, et aussi l'arête elle-même et le sommet de départ. Si le sommet de départ est une feuille, alors il y a une unique arête qui en sort, et la branche est l'arbre tout entier; inversement, si on donne au départ un sommet et une arête dont l'autre sommet est une feuille, alors la branche se réduit à cette arête elle-même.

* Le *produit tensoriel* sur les objets de \mathcal{C} est défini de la façon suivante. Soient T et T' deux arbres de \mathcal{C} . Pour construire l'arbre noté $T \otimes T'$, on recolle les feuilles numérotées 0 de T et de T' et on ajoute une nouvelle arête avec une feuille numérotée 0 à ce sommet pour obtenir de nouveau un arbre trivalent. On munit ce nouveau sommet trivalent de l'ordre cyclique 0, T , T' ; ce sommet est le sommet trivalent distingué du nouvel arbre $T \otimes T'$. Le

produit tensoriel d'un arbre T avec l'objet unité de \mathcal{C} est T lui-même (comme il se doit).

Le produit tensoriel d'un n -objet avec un m -objet donne un $(n + m)$ -objet: en effet, si T a $n + 1$ feuilles et T' en a $m + 1$, et si on recolle deux feuilles et en rajoute une, on en obtient $(n + 1) + (m + 1) - 2 + 1 = n + m + 1$. Un exemple de produit tensoriel de deux arbres est représenté dans la figure 2 (l'ordre trigonométrique dans le plan représente l'ordre autour de chaque sommet).

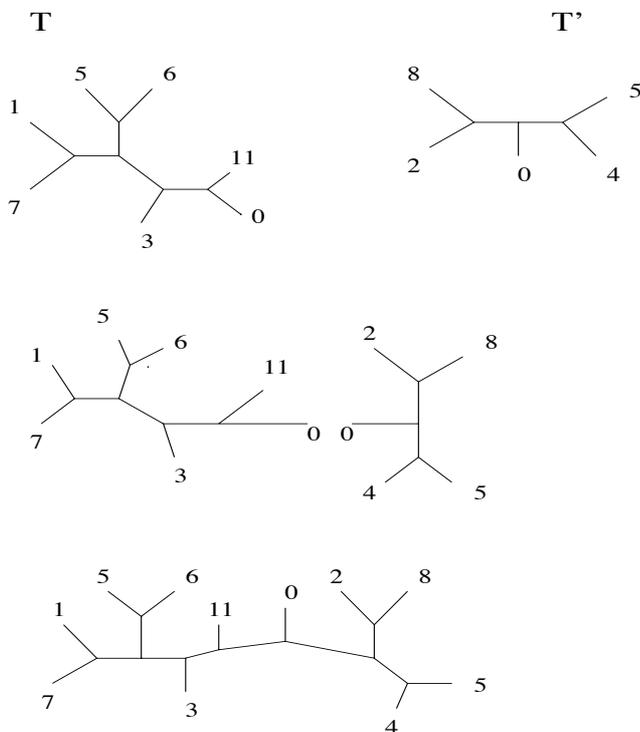


Figure 2

Lemme 1. *Tout n -objet de \mathcal{C} pour $n \geq 1$ se décompose de façon unique comme un produit tensoriel de n 1-objets, pas nécessairement distincts.*

PROOF. Nous démontrons ce lemme par récurrence. C'est évident pour les 1-objets, mais nous l'indiquons aussi pour les 2-objets, qui sont les arbres avec trois feuilles numérotées disons $(0, a, b)$ dans cet ordre cyclique autour d'un unique sommet trivalent. Cet arbre est par définition le produit tensoriel $a \otimes b$, où a (resp. b) désigne aussi l'arbre à une seule arête numérotée 0 à un bout et a (resp. b) à l'autre.

Soit maintenant $n > 1$ et supposons que pour $1 \leq m \leq n$, tout arbre à m feuilles, i.e. tout $m - 1$ -objet, s'écrit de façon unique comme produit tensoriel de $m - 1$ 1-objets. Soit T un n -objet, et soient $0, A, B$ les trois branches de T sortant du sommet trivalent distingué, données dans l'ordre cyclique associé à ce sommet. On a alors $T = A \otimes B$, et en utilisant la décomposition unique de A et B en 1-objets fournie par l'hypothèse de récurrence, on obtient celle de T . \diamond

* Tous les *morphismes* de \mathcal{C} sont obtenus en prenant des compositions et des produits tensoriels des trois types de morphismes fondamentaux: *les morphismes identité*, *les morphismes de commutativité élémentaires* et *les morphismes d'associativité élémentaires*, ainsi que leurs inverses, que nous allons définir.

Morphismes d'identité. Il existe un morphisme identité id_A pour chaque objet A de \mathcal{C} .

Morphismes de commutativité élémentaires. Le morphisme de commutativité élémentaire sur un arbre T ayant au moins trois sommets est une transformation de T en un autre arbre, obtenu en échangeant les deux branches A et B attachées au sommet trivalent distingué, i.e. en inversant l'ordre cyclique $0, A, B$ autour de ce sommet en $0, B, A$. Cette transformation se dessine dans le plan comme dans la figure 3 (nous identifions systématiquement l'ordre cyclique autour des arêtes avec l'ordre trigonométrique dans le plan). L'arbre T est le produit tensoriel $A \otimes B$, et le morphisme de commutativité, que l'on note $c(A, B)$, le transforme en $B \otimes A$. Attention: $c(B, A)c(A, B)$ est un morphisme non trivial de T à lui-même; nous construisons ici une catégorie *tressée*. Nous incluons l'ensemble des morphismes inverses $c(A, B)^{-1}$ dans l'ensemble des morphismes de \mathcal{C} .

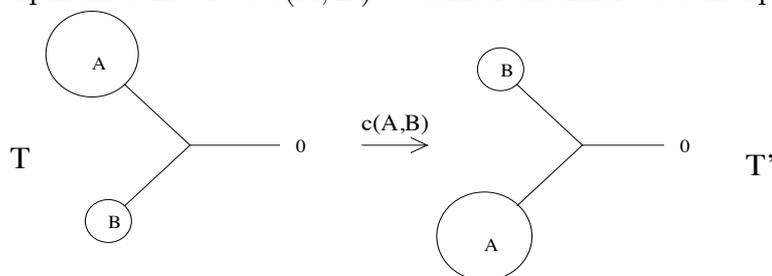


Figure 3

Morphismes d'associativité élémentaires. Soit T un objet de \mathcal{C} ayant au moins trois sommets, et appelons C' et C les deux branches sortant du sommet trivalent distingué, de telle sorte que l'ordre cyclique autour de ce sommet est donné par $0, C', C$, i.e. $T = C' \otimes C$. Le morphisme d'associativité n'est défini que si C' possède plus d'une arête, de façon à pouvoir l'écrire $C' = A \otimes B$ pour deux branches A et B uniquement déterminées, auquel cas $T = (A \otimes B) \otimes C$.

Le morphisme d'associativité élémentaire, que l'on note $a(A, B, C)$, transforme T en l'arbre $T' = A \otimes (B \otimes C)$. Cette transformation est représentée dans la figure 4.

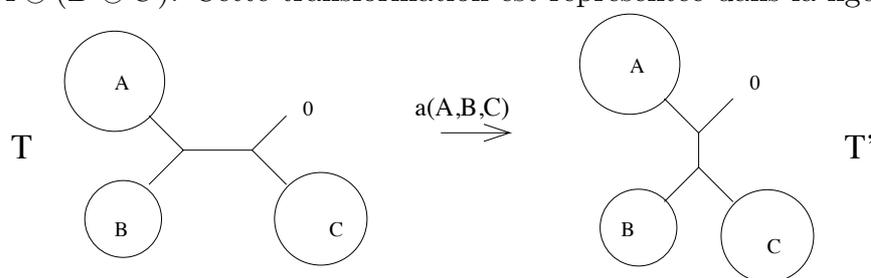


Figure 4

La transformation $a(A, B, C)$ s'appelle *une transformation HI* en théorie des nœuds, ce qui se comprend bien visuellement. Le morphisme d'associativité élémentaire préserve l'ordre cyclique des feuilles de T . Nous incluons aussi dans les morphismes de \mathcal{C} les morphismes d'associativité inverses, qui sont définis seulement si la branche C (au lieu de C') possède plus d'une seule arête.

Par définition, tous les morphismes de \mathcal{C} sont obtenus des morphismes d'identité et des morphismes élémentaires par compositions, inverses et produits tensoriels. On peut définir de cette façon des morphismes de commutativité et d'associativité *generalisés*, qui gardent un sens même quand la feuille 0 est remplacée par une branche non triviale.

Morphismes de commutativité generalisés. Soit T un arbre de \mathcal{C} ayant au moins un sommet trivalent, soit s un sommet trivalent quelconque de T , et soient A, B et C les trois branches sortant de s , dans cet ordre cyclique. Une seule des trois branches contient la feuille 0; on suppose que c'est C . Alors le morphisme de commutativité generalisé transforme T en l'arbre T' obtenu de T en changeant uniquement l'ordre cyclique des arêtes sortant de s de A, B, C en B, A, C . On note cette transformation $c_T(A, B)$.

Soit $\tilde{T} = A \otimes B$; alors \tilde{T} est une branche de T . Il existe donc une suite de branches disjointes T_1, \dots, T_r de T , avec $\tilde{T} = T_i$ pour un des indices i , tel que T soit un produit tensoriel de T_1, \dots, T_r dans cet ordre; il s'agit bien d'"un" et non "du" produit tensoriel puisque ce produit n'est pas associatif et l'ordre dans lequel on tensorise les couples d'objets est important; préciser cet ordre équivaut à donner un parenthésage (voir I.2) sur les objets T_1, \dots, T_r (par exemple $(\dots(T_1 \otimes T_2) \otimes T_3) \dots T_r$). Le morphisme de commutativité generalisé est donné par

$$c_T(A, B) = \text{id}_{T_1} \otimes \dots \otimes \text{id}_{T_{i-1}} \otimes c(A, B) \otimes \text{id}_{T_{i+1}} \otimes \dots \otimes \text{id}_{T_r}.$$

Morphismes d'associativité generalisés. Soit T un arbre, et soit a une arête intérieure de T , c'est-à-dire une arête dont les deux sommets sont trivalents. Alors a sépare T en quatre branches notées A, B, C et D , telles que A et B aboutissent à un sommet de a , et C et D à l'autre; on suppose les branches nommées de telle sorte que les ordres cycliques autour de ces deux sommets sont donnés par A, B, a et C, D, a respectivement. Le morphisme d'associativité generalisé $a_T(A, B, C)$ transforme T en l'arbre T' contenant une arête intérieure a' et les mêmes quatre branches A, B, C et D que T , sauf que D et A aboutissent à un sommet de a' avec l'ordre cyclique D, A, a' et B et C à l'autre avec l'ordre cyclique B, C, a (comme sur la figure 4 en remplaçant la feuille 0 par la branche D).

Ecrivons le morphisme d'associativité generalisé comme produit tensoriel de morphismes élémentaires. Quitte à renommer les branches par $A \mapsto C, B \mapsto D, C \mapsto A, D \mapsto B$, on peut supposer que la feuille 0 est contenue soit dans A , soit dans D . Si elle

appartient à D , écrivons $\tilde{T} = (A \otimes B) \otimes C$; alors comme ci-dessus, il existe une suite T_1, \dots, T_r de branches de T telle que \tilde{T} soit égal à T_i pour un $i \in \{1, \dots, r\}$ et T soit un produit tensoriel de T_1, \dots, T_r . On définit alors le morphisme d'associativité généralisé $a_T(A, B, C)$ par

$$a_T(A, B, C) = \text{id}_{T_1} \otimes \dots \otimes \text{id}_{T_{i-1}} \otimes a(A, B, C) \otimes \text{id}_{T_{i+1}} \otimes \dots \otimes \text{id}_{T_r}.$$

Si la feuille 0 est contenue dans A , c'est $\tilde{T} = B \otimes (C \otimes D)$ qui apparaît comme T_i dans un produit tensoriel de branches T_1, \dots, T_r égal à T , et on pose

$$a_T(B, C, D)^{-1} = \text{id}_{T_1} \otimes \dots \otimes \text{id}_{T_{i-1}} \otimes a^{-1}(B, C, D) \otimes \text{id}_{T_{i+1}} \otimes \dots \otimes \text{id}_{T_r}.$$

Il n'y a pas de différence intrinsèque entre les morphismes d'associativité et leurs inverses; étant donnée une arête intérieure, on la "met dans l'autre sens", donc si T consiste en les quatre branches A, B, C et D reliées par l'arête intérieure a avec A proche de D et B proche de C , on a $a_T(A, B, C)^{-1} = a_T(B, C, D)$.

* Les *relations* de \mathcal{C} . Pour décrire complètement \mathcal{C} , il nous faut décrire toutes les suites finies des morphismes de \mathcal{C} qui sont égales au morphisme identité d'un objet de \mathcal{C} à lui-même. Puisque l'on veut que \mathcal{C} soit une catégorie pure, nous n'imposons pas d'autres relations entre les morphismes de commutativité et d'associativité que celles provenant des axiomes du pentagone et des deux hexagones de la définition d'une braided tensor category, et des carrés commutatifs exprimant les diverses functorialités. Pour tout objet V de \mathcal{C} on a $V \otimes I = V$, et on prend comme contraintes d'unité à droite et à gauche $r_V = l_V = \text{id}_V$; l'axiome du triangle est donc aussi trivialement vérifié dans \mathcal{C} , et \mathcal{C} est bien une braided tensor category.

Il découle du théorème de Mac Lane ([M]) la propriété suivante que nous citons de [K, p.291]: *in a tensor category, any diagram built from the constraints a, l, r and the identities by composing and tensoring, commutes. In other words, the commutation of all such diagrams is equivalent to the commutation of the pentagon and of the triangle.* La braided tensor category \mathcal{C} possède donc la propriété que tout diagramme bâti avec des morphismes d'identité et d'associativité commute; en d'autres termes, si on a deux suites de morphismes d'associativité qui transforment un objet T en T' , ces deux suites définissent le même morphisme de \mathcal{C} . Désormais, nous appellerons *morphisme d'associativité* toute suite de morphismes bâtis avec des produits tensoriels de morphismes d'identité et de morphismes d'associativité élémentaires.

Nous avons vu plus haut que les morphismes d'associativité préservent l'ordre cyclique; on va conclure cette section avec un résultat sur la transitivité de cette action.

Définition 10. Pour tout $n \geq 4$, on note \mathcal{C}_n le sous-groupeïde de \mathcal{C} dont les objets sont tous les arbres à n feuilles indexées par l'ensemble $\{0, 1, \dots, n-1\}$, et dont les morphismes sont tous les morphismes de \mathcal{C} entre ces objets.

Proposition 2. Soient T et T' deux objets de \mathcal{C}_n ayant même ordre cyclique sur les feuilles. Alors il existe un unique morphisme d'associativité de \mathcal{C}_n transformant T en T' .

PROOF. Soit T un objet de \mathcal{C}_n , et soit $0, a_1, \dots, a_{n-1}$ l'ordre cyclique sur les feuilles de T . Soit A l'arbre représenté dans la figure 5, ayant même ordre cyclique sur les feuilles que T .

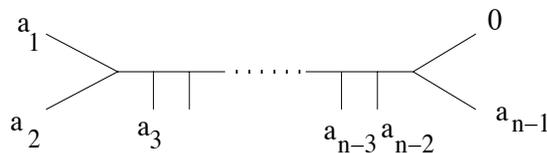


Figure 5

Pour démontrer la proposition, il suffit de construire une suite de morphismes d'associativité transformant T en A . En effet, si T et T' sont deux objets de \mathcal{C}_n ayant même ordre cyclique sur les feuilles, et si une suite S de morphismes d'associativité transforme T en A et une autre suite S' transforme T' en A , la composition $S'^{-1}S$ transforme T en T' , montrant la transitivité de l'action des morphismes d'associativité. L'unicité découle du résultat de Mac Lane cité ci-dessus.

Montrons donc comment transformer T en A par des morphismes d'associativité. Partons de la feuille de T numérotée a_1 . La première chose à faire est de s'arranger par des morphismes d'associativité pour que la feuille a_2 aboutisse au même sommet que a_1 . Si c'est déjà le cas, on ne fait rien, sinon on effectue une série de morphismes d'associativité sur la série d'arêtes rencontrées successivement en partant de la feuille a_1 , en parcourant l'arête attachée jusqu'à son sommet trivalent, en passant à l'arête suivante dans l'ordre cyclique autour de ce sommet, et ainsi de suite (comme dans la définition de l'ordre cyclique des feuilles de T), jusqu'à ce que l'on arrive sur la feuille a_2 . Comme résultat, on trouve un arbre où la feuille a_2 aboutit au même sommet que a_1 .

L'algorithme continue de la même façon: à partir de la feuille a_2 , on parcourt les arêtes comme avant en faisant un morphisme d'associativité sur toutes les arêtes intérieures de T qui séparent a_2 de a_3 sauf la première, car on ne peut pas demander que a_2 aboutisse au même sommet que a_3 , l'arbre étant trivalent; on veut que a_2 et a_3 ne soient séparées que par une seule arête intérieure, comme pour A . Ceci fait, on continue en rapprochant a_3 de a_4 jusqu'à ce qu'elles ne soient séparées que par une seule arête intérieure, et ainsi de suite. Cette procédure aboutit à un arbre de la forme de A ; on transforme T en A feuille par feuille dans l'ordre cyclique, ce qui démontre la proposition. \diamond

Cette description abracadabrante ne vaut pas une figure. Nous donnons donc un exemple de l'algorithme dans la figure 6, où l'ordre cyclique sur les arêtes autour de chaque sommet est représenté comme d'habitude par l'ordre cyclique autour du sommet dans le sens trigonométrique dans le plan. Ici $n = 9$ et l'ordre cyclique des feuilles $0, a_1, \dots, a_8$ est

donné par 0, 1, 6, 7, 4, 3, 5, 8, 2. On marque à chaque stade par un petit losange l'arête sur laquelle on s'apprête à faire un morphisme d'associativité. Les deux premiers morphismes d'associativité effectuent la première étape de l'algorithme, dont le but est de rapprocher $a_2 = 6$ de $a_1 = 1$.

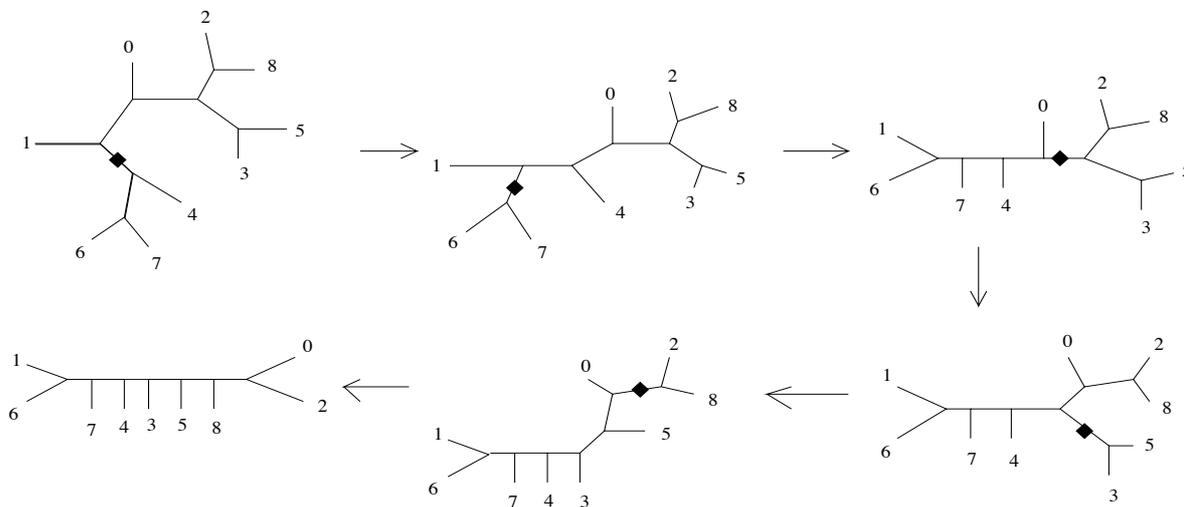


Figure 6

II.3. Groupes de tresses et groupes modulaires

Rappelons maintenant brièvement les définitions des groupes de tresses et des *groupes modulaires* (ou *groupes de Teichmüller*, *mapping class groups* en anglais); le livre [B] de J. Birman est une excellente référence de base. Notons que nous dessinons la composition des tresses de haut en bas, et l'écrivons de droite à gauche.

Pour $n \geq 2$, soit B_n le groupe des tresses d'Artin engendré par $\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}$ avec les relations $\sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1}$ et $\sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i$ pour $|i - j| \geq 2$. Ces generateurs et leurs relations sont exactement ceux qu'il faut pour que les éléments du groupe d'Artin correspondent réellement aux tresses que l'on obtient en tressant n fils suspendus au plafond par des clous. Dans la figure 7, on a représenté le generateur σ_i , qui croise le i -ième brin devant le $(i + 1)$ -ième, puis la relation de tresses et finalement la tresse composée de σ_i et σ_j avec $|i - j| \geq 2$; on voit immédiatement sur cette dernière figure pourquoi σ_i et σ_j commutent.

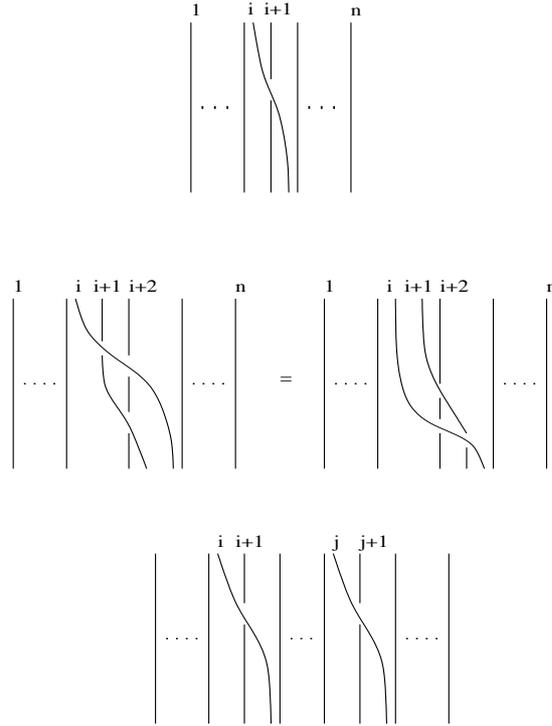


Figure 7

On a une surjection $B_n \rightarrow S_n$ sur le groupe de permutations de n lettres, obtenue en quotientant B_n par les σ_i^2 , ce qui revient à ne regarder, pour une tresse, que la permutation des indices obtenue en considérant l'endroit où arrive chaque brin par rapport à sa position de départ. Soit K_n le noyau de cette surjection; c'est le sous-groupe de tresses telles que chaque brin revient à sa place. Le groupe K_n est engendré par les éléments

$$x_{ij} = \sigma_{j-1} \cdots \sigma_{i+1} \sigma_i^2 \sigma_{i+1}^{-1} \cdots \sigma_{j-1}^{-1}$$

pour $1 \leq i < j \leq n$. Soit $M(0, n)$ le *groupe de Teichmüller* (aussi appelé *groupe modulaire* ou *mapping class group*); c'est le quotient de B_n par les deux relations suivantes:

- (i) $\sigma_{n-1} \cdots \sigma_1^2 \cdots \sigma_{n-1} = 1$ (relation de la sphère);
- (ii) $(\sigma_{n-1} \cdots \sigma_1)^n = 1$ (relation du centre).

Ces relations sont représentées dans la figure 8. La première décrit la différence entre des tresses sur des brins attachés à un plan (le plafond) et dont les extrémités du bas sont attachés à un autre plan (le sol), et des tresses sur des brins attachés à la paroi intérieure d'une sphère, et dont les extrémités inférieures seraient attachées à la paroi extérieure d'une sphère plus petite, contenue dans la première; un brin peut "faire le tour en passant derrière la sphère", et c'est exactement ce qui est exprimé par la relation de la sphère. Le centre de B_n est cyclique engendré par $(\sigma_{n-1} \cdots \sigma_1)^n$ (cf. [B], Corollary 1.8.4), et la relation (ii) le fait simplement disparaître.

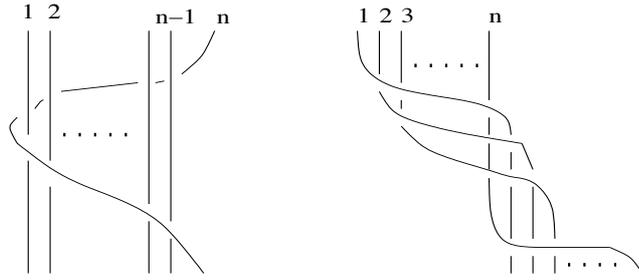


Figure 8

Rappelons que le groupe $M(0, n)$ est engendré, comme B_n , par $\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}$, mais ces deux groupes sont également engendrés par les deux éléments σ_1 et le “cycle” $\sigma_{n-1} \cdots \sigma_1$ (qui correspond à la tresse qui fait passer le premier brin devant tous les autres vers la droite), puisqu’en conjuguant σ_1 successivement par les différentes puissances du cycle on obtient tous les σ_i . La surjection $B_n \rightarrow S_n$ passe à une surjection $M(0, n) \rightarrow S_n$; si $\alpha \in M(0, n)$, nous écrivons $[\alpha]$ pour son image dans S_n .

Soit $K(0, n)$ l’image de K_n dans $M(0, n)$. Le groupe $K(0, n)$ est engendré par les $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ éléments x_{ij} pour $1 \leq i < j \leq n-1$, (il suffit même de prendre un sous-ensemble quelconque de $\frac{1}{2}(n-1)(n-2) - 1$ de ces éléments, cf. [LS1, Appendix]). Un autre système de generateurs, parfois plus utile, est donné par les tresses de deux paquets adjacents de brins (cf. [LS3]). Dans la figure 9 nous dessinons deux tresses qui seront extrêmement utiles pour la suite; à gauche $\sigma_{i \dots j, j+1 \dots k}$ et à droite $x_{i \dots j, j+1 \dots k}$.

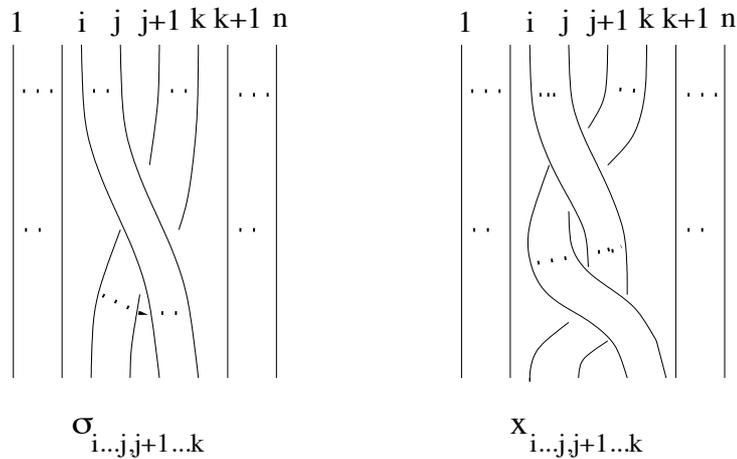


Figure 9

L’ensemble des $\sigma_{i \dots j, j+1 \dots k}$ pour $1 \leq i \leq j < k \leq n$ engendre B_n puisque tous les σ_i y appartiennent. De même, l’ensemble des $x_{i \dots j, j+1 \dots k}$ est un système (très redondant) de generateurs de K_n , puisque l’on retrouve les generateurs habituels par la formule $x_{ij} = x_{i \dots j-1, j} x_{i+1 \dots j-1, j}^{-1}$.

Il y a une relation étroite entre groupes de tresses et catégories tensor braided; *plus précisément, entre le groupe de tresses et l'ensemble des morphismes de \mathcal{C} transformant un arbre donné T_0 en un autre arbre obtenu de T_0 en permutant les indices des feuilles différents de 0*. Pour bien la comprendre, il faut visualiser chaque objet de \mathcal{C} comme étant muni d'un fil qui pend de chaque feuille sauf 0, ce qui permet de visualiser les morphismes de \mathcal{C} de façon concrète. Un morphisme d'associativité généralisé appliqué à T_0 change la forme de l'intérieur de T_0 – mais sans avoir aucun effet sur l'ordre des feuilles ni sur les fils qui en dépendent. Par contre, si U et V sont deux branches de T_0 aboutissant au même sommet, un morphisme de commutativité $c_{T_0}(U, V)$ peut s'interpréter comme la tresse faisant passer le paquet de fils qui pend de la branche U devant le paquet qui pend de la branche V , comme dans la figure 10.

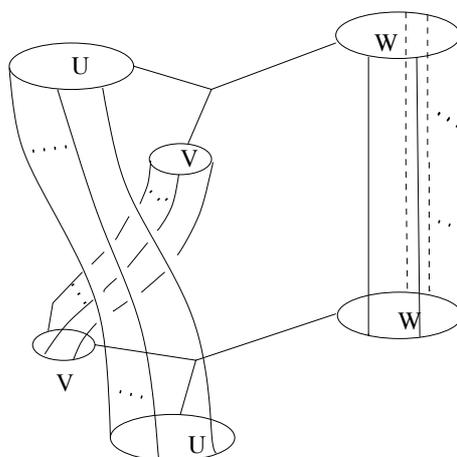


Figure 10

La feuille 0 appartient forcément à la branche W puisque les morphismes de commutativité, même généralisés, définis au II.2 ne concernent jamais cette feuille. En suivant l'ordre cyclique des feuilles à partir de 0 (et sans le compter), on peut numéroter les fils de 1 à $n - 1$. Si la branche U contient les fils i, \dots, j et la branche V les fils $j + 1, \dots, k$, alors la tresse correspondant à $c_{T_0}(U, V)$ est la tresse $\sigma_{i\dots j, j+1\dots k}$ représentée à gauche de la figure 9, et la tresse $x_{i\dots j, j+1\dots k}$ de la figure 9 correspond au “morphisme de commutativité au carré”, c'est-à-dire au morphisme $c_{T'_0}(V, U)c_{T_0}(U, V) \in \text{Hom}(T_0, T_0)$, où T'_0 est l'arbre obtenu de T_0 par le morphisme $c_{T_0}(U, V)$. Soit $\tau = [\sigma_{i\dots j, j+1\dots k}]$ la permutation associée à la tresse $\sigma_{i\dots j, j+1\dots k}$. Alors l'arbre T'_0 obtenu de T_0 par le morphisme $c_{T_0}(U, V)$ a le même ordre cyclique sur les feuilles que l'arbre $\tau(T_0)$ obtenu en permutant les indices selon la formule

$$a_i \mapsto a_{\tau^{-1}(i)}. \quad (1)$$

Cette formule exprime de manière générale l'action d'une permutation dans S_{n-1} sur un arbre d'ordre cyclique $0, a_1, \dots, a_{n-1}$.

Chaque morphisme de commutativité généralisé sur T_0 correspond donc à une tresse croisant deux paquets de fils adjacents. Mais l'inverse n'est pas tout à fait vrai; si on veut représenter la tresse $\sigma_{i\dots j, j+1\dots k}$ comme morphisme de commutativité sur T_0 , il faut que les deux paquets $i\dots j$ et $j+1\dots k$ correspondent à deux branches de T_0 aboutissant au même sommet, ce qui n'est pas nécessairement le cas. Toutefois, il existe toujours un arbre \tilde{T}_0 (et même plusieurs) ayant même ordre cyclique sur les feuilles que T_0 et la propriété que les paquets de feuilles $i\dots j$ et $j+1\dots k$ correspondent effectivement à deux branches U et V de \tilde{T}_0 qui aboutissent au même sommet. De plus, par la proposition 2 il existe un unique morphisme d'associativité A_1 transformant T_0 en \tilde{T}_0 . Soit \tilde{T}'_0 l'arbre obtenu de \tilde{T}_0 par le morphisme $c_{\tilde{T}_0}(U, V)$; alors l'ordre cyclique de \tilde{T}'_0 est le même que celui de l'arbre T'_0 obtenu de T_0 en renumérotant les indices $0, a_1, \dots, a_{n-1}$ par $0, a_1, \dots, a_{i-1}, a_{j+1}, \dots, a_k, a_i, \dots, a_j, a_{k+1}, \dots, a_{n-1}$; c'est-à-dire que $T'_0 = \tau(T_0)$ où τ est la permutation associée à la tresse $\sigma_{i\dots j, j+1\dots k}$. Il existe donc un unique morphisme d'associativité A_2 transformant \tilde{T}'_0 en T'_0 . On associe la tresse $\sigma_{i\dots j, j+1\dots k}$ au morphisme $A_2 c_{\tilde{T}_0}(U, V) A_1$. *En un mot, les morphismes de commutativité permettent de tresser les paquets de fils correspondant à des branches aboutissant au même sommet, et les morphismes d'associativité permettent de rapprocher en branches aboutissant au même sommet deux paquets adjacents de feuilles quelconques; les combinaisons des deux opérations correspondent aux tresses.* Nous avons esquissé ici la correspondance entre morphismes de \mathcal{C} et tresses du type $\sigma_{i\dots j, j+1\dots k}$; la correspondance complète est décrite dans la proposition suivante.

Proposition 3. *Soit $n \geq 4$. Soit $T_0 \in \mathcal{C}_n$ et soit \mathcal{T} l'ensemble des arbres de \mathcal{C}_n obtenus de T_0 en permutant les indices différents de 0. Alors il existe une application bijective d'ensembles*

$$\Psi : \text{Hom}(T_0, \mathcal{T}) = \coprod_{T \in \mathcal{T}} \text{Hom}(T_0, T) \xrightarrow{\sim} B_{n-1},$$

qui induit une structure de groupe sur $\text{Hom}(T_0, \mathcal{T})$ et devient donc un isomorphisme de groupes. La restriction de Ψ à $\text{Hom}(T_0, T_0)$ induit un isomorphisme de groupes $\text{Hom}(T_0, T_0) \xrightarrow{\sim} K_{n-1}$ compatible avec les lois de composition usuelles de ces deux groupes.

PROOF. Définissons une application d'ensembles $\Psi : \text{Hom}(T_0, \mathcal{T}) \longrightarrow B_{n-1}$. Soit S une suite de morphismes de commutativité et d'associativité telle que le morphisme associé \overline{S} appartient à $\text{Hom}(T_0, \mathcal{T})$, et posons $T = \overline{S}(T_0)$. On écrit $S = M_r \cdots M_2 M_1$ où chaque M_l est soit un morphisme d'associativité généralisé soit un morphisme de commutativité généralisé, et les morphismes sont composés de droite à gauche. Pour $1 \leq l \leq r$, soit T_l l'arbre obtenu de T_{l-1} par le morphisme M_l , et notons $0, a_{l,1}, \dots, a_{l,n-1}$ l'ordre cyclique des feuilles de T_l .

On va envoyer successivement chaque M_l à une tresse α_l dans B_{n-1} . On procède comme suit. Si M_l est un morphisme d'associativité ou l'inverse d'un tel morphisme, on

lui associe la tresse triviale. Si M_l est un morphisme de commutativité transformant T_{l-1} en T_l , on écrit $M_l = c_{T_{l-1}}(U, V)$ où U et V sont deux branches de T_{l-1} , ne contenant pas 0 et aboutissant au même sommet; supposons que $a_{l-1,i} \cdots a_{l-1,j}$ est le paquet de feuilles appartenant à U et $a_{l-1,j+1} \cdots a_{l-1,k}$ celui des feuilles appartenant à V . On associe au morphisme M_l la tresse $\sigma_{i \cdots j, j+1 \cdots k}$ représentée à gauche de la figure 9. Si M_l est l'inverse d'un tel morphisme de commutativité, on lui associe la tresse $\sigma_{i \cdots j, j+1 \cdots k}^{-1}$. L'image de la suite $S \in \text{Hom}(T_0, T)$ est la tresse $\alpha_r \cdots \alpha_2 \alpha_1$.

Pour vérifier que nous avons bien construit une application de $\text{Hom}(T_0, T)$ vers B_{n-1} , il faut vérifier que si deux suites S et S' correspondent au même morphisme \bar{S} de $\text{Hom}(T_0, T)$, on leur associe la même tresse. Mais si S et S' correspondent au même morphisme, il est possible de transformer S en S' en appliquant des substitutions provenant des carrés, du pentagone et des deux hexagones; il suffit donc de montrer que les suites de morphismes correspondant à ces diagrammes s'envoient toutes sur la tresse triviale. Pour le pentagone et les deux hexagones, il suffit de faire le dessin, en associant la tresse triviale aux morphismes d'associativité (donc en particulier tous les morphismes concernés dans le pentagone) et la tresse $\sigma_{i \cdots j, j+1 \cdots k}$ comme elle est représentée dans la figure 10 pour les morphismes de commutativité. C'est fait dans la figure 11, où chaque paquet est représenté comme un brin un peu épais.

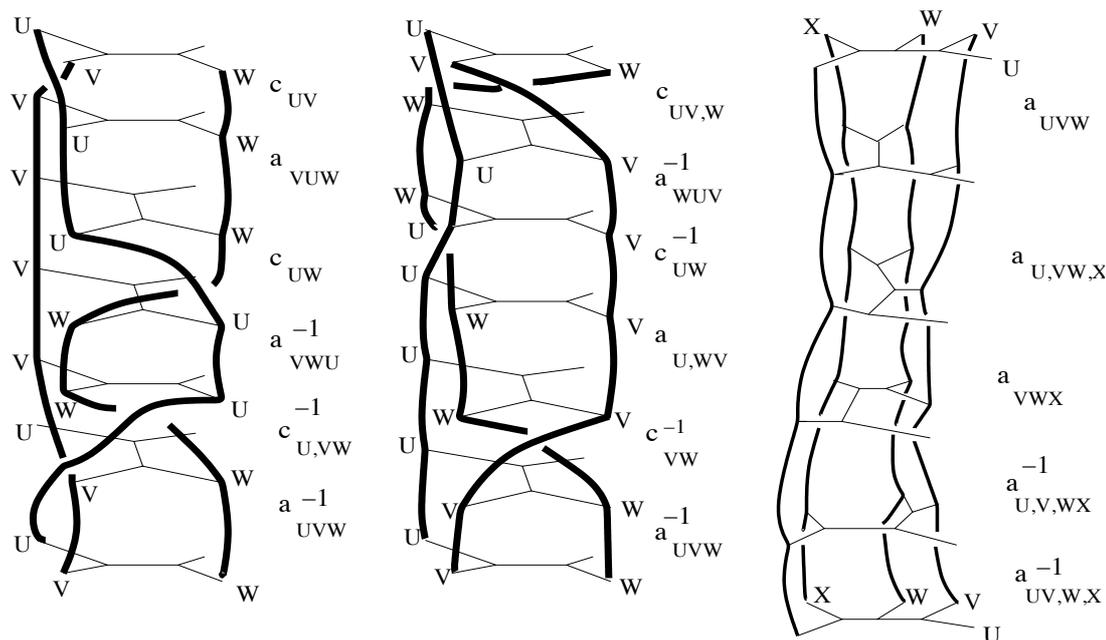


Figure 11

On constate immédiatement à partir de la figure que les trois tresses associées aux trois diagrammes hexagonaux et pentagonal sont triviales. Considérons le diagramme carré

concernant la commutativité: il dit que si $f : U \rightarrow U'$ et $g : V \rightarrow V'$ et si $T = U \otimes V$, alors on a l'égalité de morphismes

$$f \otimes g = c(U', V')^{-1}(g \otimes f)c(U, V).$$

La tresse associée au membre de droite de cette égalité se dessine comme dans la figure suivante:

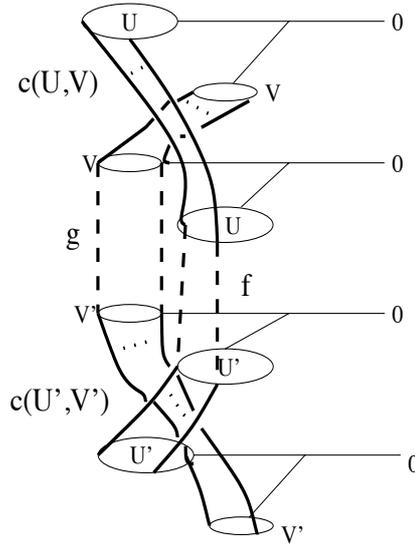


Figure 12

Dans cette figure, la tranche du milieu (en pointillé) représente le morphisme $g \otimes f$, que nous n'avons pas besoin de connaître explicitement. Le point important est que ce morphisme ne mélange pas les fils d'un paquet avec les fils de l'autre, ce qui fait que la tresse associée est égale à la tresse correspondant à $f \otimes g$. Il est encore plus facile de vérifier que la tresse correspondant au diagramme carré concernant l'associativité est triviale, car ce diagramme dit que

$$(f \otimes g) \otimes h = a(U', V', W')^{-1}(f \otimes (g \otimes h))a(U, V, W),$$

et d'après la définition de notre application, les morphismes d'associativité s'envoient à la tresse triviale, donc les deux membres de cette égalité correspondent à la même tresse.

On a ainsi une application d'ensembles Ψ de $\text{Hom}(T_0, \mathcal{T})$ vers B_{n-1} . Montrons que Ψ est surjective. Pour chaque $T \in \mathcal{T}$, notons $0, a_{1,T}, \dots, a_{n-1,T}$ l'ordre cyclique de ses feuilles. Choisissons pour chaque $i = 1, \dots, n-2$ un arbre T_{i,T_0} ayant les propriétés suivantes: l'ordre cyclique de T_{i,T_0} est le même que celui de T_0 et les feuilles adjacentes $a_{i,T_{i,T_0}}$ et $a_{i+1,T_{i,T_0}}$ de T_{i,T_0} aboutissent au même sommet. Notons que l'on a $a_{j,T_{i,T_0}} = a_{j,T_0}$ pour $1 \leq j \leq n-1$, ce qui permet d'alléger les notations. Chaque $T \in \mathcal{T}$ s'écrit de façon unique

$T = \tau(T_0)$ pour $\tau \in S_{n-1}$, où τ agit selon la formule (1); posons $T_{i,T} = T_{i,\tau(T_0)} = \tau(T_{i,T_0})$ pour tout $T \in \mathcal{T}$ et $1 \leq i \leq n-2$. L'arbre $T_{i,T}$ a le même ordre cyclique que T et les i -ième et $(i+1)$ -ième feuilles aboutissent au même sommet; les arbres $T_{i,T}$ pour un i donné sont tous identiques aux indices près.

Rappelons que l'on note $[\alpha]$ la permutation associée à une tresse $\alpha \in B_{n-1}$. La permutation associée à $\sigma_i \in B_{n-1}$ est la transposition $(i, i+1)$; ainsi, $[\sigma_i](T)$ désigne l'arbre obtenu de T en permutant les indices $a_{i,T}$ et $a_{i+1,T}$. La remarque importante est que l'arbre $[\sigma_i](T_{i,T}) = T_{i,[\sigma_i](T)}$ est l'arbre obtenu de $T_{i,T}$ en appliquant le morphisme de commutativité $c_{T_{i,T}}(a_{i,T}, a_{i+1,T})$, puisque ces deux arêtes aboutissent au même sommet. Notons $A_{i,T}$ l'unique morphisme d'associativité transformant T en $T_{i,T}$. Posons $\Sigma_{i,T} = A_{i,[\sigma_i](T)}^{-1} c_{T_{i,T}}(a_{i,T}, a_{i+1,T}) A_{i,T}$; c'est un morphisme de \mathcal{C}_n qui transforme T en $[\sigma_i](T)$. Nous allons nous servir des morphismes $\Sigma_{i,T}$ pour montrer que $\Psi : \text{Hom}(T_0, \mathcal{T}) \rightarrow B_{n-1}$ est surjective. En effet, soit $\alpha \in B_{n-1}$; alors on peut écrire α comme un mot $\alpha = \sigma_{j_m} \cdots \sigma_{j_2} \sigma_{j_1}$ dans les generateurs usuels σ_i de B_{n-1} , avec $j_k \in \{1, \dots, n-2\}$. Pour $1 \leq k \leq m$, posons $T_k = [\sigma_{j_k} \cdots \sigma_{j_1}](T_0)$; posons

$$\Sigma = \Sigma_{j_m, T_{m-1}} \cdots \Sigma_{j_3, T_2} \Sigma_{j_2, T_1} \Sigma_{j_1, T_0}.$$

Σ est un morphisme de \mathcal{C}_n qui transforme T_0 en $T_m = [\sigma_{j_m} \cdots \sigma_{j_1}](T_0) = [\alpha](T_0)$, et par la construction de Ψ , l'image de Σ dans B_{n-1} est exactement α . Nous avons donc démontré que Ψ est surjective.

Démontrons maintenant que Ψ est injective. On dit qu'un morphisme de commutativité est *simple* s'il n'échange que deux arêtes (aboutissant au même sommet) d'un arbre. Nous aurons besoin du fait que tout morphisme de commutativité peut se décomposer en une suite de morphismes d'associativité et de morphismes de commutativité simples. En effet, soit $c_T(A, B)$ un morphisme de commutativité qui n'est pas simple, et supposons que la branche A contient plus d'une feuille. Alors on peut écrire $A = U \otimes V$ et appliquer le deuxième diagramme hexagonal pour écrire $c_T(A, B)$ comme une suite de cinq morphismes, dont trois d'associativité et deux de commutativité concernant les branches U et B , resp. V et B . Les branches U et V comportent strictement moins de feuilles que A . Par récurrence, et en se servant du premier diagramme hexagonal pour décomposer la deuxième branche, on aboutit après un nombre fini de substitutions à une suite ne comportant que des morphismes d'associativité et des morphismes de commutativité simples.

Démontrons maintenant que les morphismes $\Sigma_{i,T}$ définis plus haut vérifient les deux relations suivantes:

$$\Sigma_{j,[\sigma_i](T)} \Sigma_{i,T} = \Sigma_{i,[\sigma_j](T)} \Sigma_{j,T} \quad \forall T \in \mathcal{T}, |i-j| \geq 2 \quad (*)$$

et

$$\Sigma_{i,[\sigma_{i+1}\sigma_i](T)} \Sigma_{i+1,[\sigma_i](T)} \Sigma_{i,T} = \Sigma_{i+1,[\sigma_i\sigma_{i+1}](T)} \Sigma_{i,[\sigma_{i+1}](T)} \Sigma_{i+1,T} \quad (**).$$

L'équation (*) est une conséquence immédiate de la formule définissant un morphisme de commutativité généralisé donné au II.2. Pour le (**), on considère le diagramme suivant de morphismes dans \mathcal{C}_n . Dans ce diagramme, chaque flèche non étiquetée représente l'unique morphisme d'associativité entre deux arbres de même ordre cyclique; nous avons aussi simplifié les expressions des morphismes de commutativité simples en indiquant seulement les indices des deux arêtes (voisines) échangées. Il représente la décomposition explicite en morphismes de commutativité simples et d'associativité de la relation (**), le membre de gauche (resp. de droite) correspondant au côté gauche (resp. droite) du diagramme. Or, il est connu que ce diagramme commute dans \mathcal{C}_n car il se bâtit à partir des deux hexagones (voir [K, p. 317] pour les détails), ce qui démontre l'égalité (**).

$$\begin{array}{ccc}
& & T \\
& & \downarrow \\
& & T_{i,T} \\
& c_{i,i+1} \swarrow & \searrow \\
[\sigma_i](T_{i,T}) = T_{i,[\sigma_i]}(T) & & T_{i+1,T} \\
& \downarrow & \downarrow c_{i+1,i+2} \\
& T_{i+1,[\sigma_i]}(T) & [\sigma_{i+1}](T_{i+1,T}) = T_{i+1,[\sigma_{i+1}]}(T) \\
& \downarrow c_{i+1,i+2} & \downarrow \\
[\sigma_{i+1}](T_{i+1,[\sigma_i]}(T)) = T_{i+1,[\sigma_{i+1}\sigma_i]}(T) & & T_{i,[\sigma_{i+1}]}(T) \\
& \downarrow & \downarrow c_{i,i+1} \\
& T_{i,[\sigma_{i+1}\sigma_i]}(T) & [\sigma_i](T_{i,[\sigma_{i+1}]}(T)) = T_{i,[\sigma_i\sigma_{i+1}]}(T) \\
& \downarrow c_{i,i+1} & \downarrow \\
[\sigma_i](T_{i,[\sigma_{i+1}\sigma_i]}(T)) = T_{i,[\sigma_i\sigma_{i+1}\sigma_i]}(T) & & T_{i+1,[\sigma_i\sigma_{i+1}]}(T) \\
& \searrow & \swarrow c_{i+1,i+2} \\
& T_{i+1,[\sigma_{i+1}\sigma_i\sigma_{i+1}]}(T) & \\
& \downarrow & \\
& [\sigma_i\sigma_{i+1}\sigma_i]T &
\end{array}$$

Nous avons maintenant les outils nécessaires pour démontrer l'injectivité de Ψ . Soit $\bar{S} \in \text{Hom}(T_0, T)$ un morphisme tel que $\Psi(\bar{S})$ est triviale, et soit S une suite de morphismes de commutativité et d'associativité correspondant à \bar{S} . Quitte à décomposer S , on peut supposer qu'elle ne comporte que des morphismes de commutativité simples. Modifions S de la façon suivante; après chaque morphisme de commutativité (simple) apparaissant dans S , on intercale un morphisme d'associativité ramenant l'arbre obtenu à un arbre appartenant à \mathcal{T} , suivi de son inverse. On découpe S de cette façon en une chaîne de

sous-suites de morphismes, où chaque sous-suite comporte un seul morphisme de commutativité simple et transforme un arbre de \mathcal{T} en un autre. Par unicité des morphismes d'associativité, chaque sous-suite est équivalente à un des morphismes $\Sigma_{i,T}$ définis ci-dessus, et S est donc équivalente à une chaîne de la forme $\Sigma_{j_m, T_{m-1}} \cdots \Sigma_{j_1, T_0}$. L'image $\sigma_{j_m} \cdots \sigma_{j_1}$ de S correspond donc par hypothèse à la tresse triviale. Ceci implique que l'on peut ramener le mot $\sigma_{j_m} \cdots \sigma_{j_1}$ à 1 par une suite finie de substitutions provenant des relations $\sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1}$ et $\sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i$ pour $|i - j| \geq 2$ définissant B_{n-1} . Or, les égalités (*) et (**) ci-dessus permettent d'imiter ces substitutions successives dans la suite $S = \Sigma_{j_m, T_{m-1}} \cdots \Sigma_{j_1, T_0}$, pour aboutir à l'identité, ce qui montre que \overline{S} est le morphisme trivial id_{T_0} , et termine la démonstration. \diamond

II.4. Espaces des modules de courbes en genre 0

Rappelons très brièvement la structure de l'espace des modules $\mathcal{M}_{0,n}$ des sphères de Riemann à n marked points ordonnés, qui a été étudiée au chapitre I. Les points de ces espaces des modules sont des classes d'isomorphisme de sphères de Riemann avec n marked points. Comme les isomorphismes des sphères de Riemann sont donnés par les éléments de $\text{PSL}_2(\mathbb{C})$ agissant par $(az+b)/(cz+d)$, il existe toujours un unique isomorphisme envoyant les n marked points d'une sphère sur n autres dont les trois derniers sont $0, 1$ et ∞ ; c'est ce que l'on appellera la *forme standard*. En d'autres termes, il existe un représentant unique de chaque classe d'isomorphisme de sphères à n marked points tel que les marked points ordonnés sont donnés par $(x_1, \dots, x_{n-3}, 0, 1, \infty)$, où les $x_i \in \mathbb{C}$ sont deux à deux distincts et distincts de $0, 1$ et ∞ . Ceci donne l'isomorphisme

$$\mathcal{M}_{0,n} \simeq (\mathbb{P}^1\mathbb{C} - \{0, 1, \infty\})^{n-3} - \Delta,$$

où Δ est l'union des hypersurfaces définies par $x_i = x_j, i \neq j$ (voir I.2.2).

Soit $\tau \in S_n$; alors τ envoie chaque sphère à n points marked ordonnés sur une autre en permutant l'ordre des marked points selon l'expression

$$\tau(x_1, \dots, x_n) = (x_{\tau^{-1}(1)}, \dots, x_{\tau^{-1}(n)}). \quad (2)$$

Chaque permutation τ induit de cette façon un automorphisme de l'espace des modules $\mathcal{M}_{0,n}$ envoyant x à τx . Pour $n > 4$, on a exactement $\text{Aut}(\mathcal{M}_{0,n}) \simeq S_n$ (cf. [T]). Le cas $n = 4$ est un peu différent (cf. I.2.3). En effet, le sous-groupe K d'ordre 4 engendré par les produits de deux transpositions de supports disjoints dans S_4 agit trivialement sur $\mathcal{M}_{0,4}$, car si une sphère à 4 marked points est donnée sous forme standard par $(x_1, 0, 1, \infty)$, et si on applique un produit de deux transpositions, le point reste fixe. Par exemple, en appliquant (12)(34), on obtient $(0, x_1, \infty, 1)$; remettant cette sphère sous forme standard

via l'élément de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$ qui agit par $z \mapsto (z-x_1)/(z-1)$, on réobtient le point $(x_1, 0, 1, \infty)$. Le groupe des permutations S_4 agit donc sur $\mathcal{M}_{0,4}$ à travers son quotient par K , et on a en fait un isomorphisme $\mathrm{Aut}(\mathcal{M}_{0,4}) \simeq S_4/K \simeq S_3$; on peut identifier S_3 avec les permutations des trois derniers des quatre marked points, i.e. $0, 1, \infty$ sous forme standard.

Pour $n \geq 4$, le groupe fondamental de l'espace $\mathcal{M}_{0,n}$ basé en un point quelconque est isomorphe au groupe de Teichmüller coloré $K(0, n)$ défini au II.3. On peut generaliser cet isomorphisme à une application du groupe $M(0, n)$ vers l'ensemble de chemins sur l'espace $\mathcal{M}_{0,n}$ partant d'un point donné $x \in \mathcal{M}_{0,n}$. C'est un peu délicat, car l'existence d'automorphismes non triviaux de certains points de $\mathcal{M}_{0,n}$ fait que cette application est parfois loin d'être une bijection (le groupe d'automorphismes d'un point de $\mathcal{M}_{0,n}$ est le sous-groupe de $\mathrm{Aut}(\mathcal{M}_{0,n}) = S_n$ qui fixe x). Montrons comment procéder dans le cas où x est un point réel de $\mathcal{M}_{0,n}$ (un point de $\mathcal{M}_{0,n}$ est dit *réel* si tous les marked points de la sphère en forme standard correspondant sont réels).

Définition 11. Soit $x \in \mathcal{M}_{0,n}$ un point réel, représenté par une sphère X en forme standard à marked points réels $(x_1, \dots, x_{n-3}, x_{n-2} = 0, x_{n-1} = 1, x_n = \infty)$. Comme les x_i sont réels, il existe une unique permutation $\omega_x \in S_{n-1}$ telle que $x_{\omega_x^{-1}(1)} < x_{\omega_x^{-1}(2)} < \dots < x_{\omega_x^{-1}(n-1)}$. L'*ordre cyclique* de x est la permutation $\omega_x \in S_{n-1}$. Le fait que $0 < 1$, i.e. $x_{n-2} < x_{n-1}$ implique la condition $\omega_x(n-2) < \omega_x(n-1)$; ainsi, l'ensemble des ordres cycliques des points réels $x \in \mathcal{M}_{0,n}$ correspond à une moitié des permutations de S_{n-1} . Nous considérons parfois $\omega_x \in S_n$ en posant $\omega_x(n) = n$, et pour tout $\tau \in S_n$, on pose

$$\tau(x) = (\omega_x^{-1} \tau^{-1} \omega_x)x. \quad (3)$$

Notre application de $M(0, n)$ vers les classes d'homotopies de chemins sur $\mathcal{M}_{0,n}$ est basée sur l'interprétation géométrique classique du groupe H_n des tresses de la sphère, qui est le quotient de B_n par la relation de la sphère $\sigma_{n-1} \cdots \sigma_1^2 \cdots \sigma_{n-1} = 1$. Soit (x_1, \dots, x_n) un n -uple de points distincts de \mathbb{P}^1 avec $x_n = \infty$ et ordre cyclique ω_x ; posons $y_i = x_{\omega_x^{-1}(i)}$, de façon à avoir $y_1 < \dots < y_{n-1}$. Soit $\Pi(x_1, \dots, x_n)$ l'ensemble des n -uples $\Gamma = (\gamma_1(t), \dots, \gamma_n(t))$ où:

- $\gamma_i : [0, 1] \rightarrow \mathbb{P}^1$ paramétrise un chemin pour $1 \leq i \leq n$;
- il existe une permutation $\tau = \tau_\Gamma \in S_n$ telle que $\gamma_i(0) = x_i$ et $\gamma_i(1) = x_{\tau^{-1}(i)}$ pour $1 \leq i \leq n$;
- pour tout $t_0 \in [0, 1]$, $\gamma_i(t_0) \neq \gamma_j(t_0)$ quand $i \neq j$.

Deux n -uples $(\gamma_1(t), \dots, \gamma_n(t))$ et $(\gamma'_1(t), \dots, \gamma'_n(t))$ de $\Pi(x_1, \dots, x_n)$ sont *homotopes* s'il existe des fonctions continues $\Gamma_i(t, u) : [0, 1]^2 \rightarrow \mathbb{P}^1$ pour $1 \leq i \leq n$, telles que pour tout $(t_0, u_0) \in [0, 1]^2$, $\Gamma_i(t_0, u_0) \neq \Gamma_j(t_0, u_0)$ quand $i \neq j$, et telles que $\Gamma_i(t, 0) = \gamma_i(t)$ et

$\Gamma_i(t, 1) = \gamma'_i(t)$. Le quotient $\Pi(x_1, \dots, x_n)$ modulo homotopie est le groupe fondamental $\pi_1(B_{0,n}S^2)$ (basé en (x_1, \dots, x_n)), où $B_{0,n}S^2$ désigne l'espace des configurations de n points distincts ordonnés de la sphère S^2 . On a l'isomorphisme suivant (cf. [B, th. 1.11]):

$$H_n \simeq \pi_1(B_{0,n}S^2). \quad (4)$$

Nous allons décrire explicitement cet isomorphisme dans le cas où le point base (x_1, \dots, x_n) de $\pi_1(B_{0,n}S^2)$ est réel avec $x_n = \infty$. Soit ω_x l'ordre cyclique de (x_1, \dots, x_n) , donc $x_{\omega_x^{-1}(1)} < \dots < x_{\omega_x^{-1}(n-1)}$. Posons $y_i = x_{\omega_x^{-1}(i)}$. Alors l'isomorphisme (4) est donné en associant à σ_i (pour $1 \leq i \leq n-1$) la classe dans $\pi_1(B_{0,n}S^2)$ du n -uplet $(\gamma_{\omega_x(1)}^i(t), \dots, \gamma_{\omega_x(n-1)}^i(t), \gamma_n^i(t))$ où

$$\begin{cases} \gamma_j^i(t) = y_j & j \neq i, i+1 \\ \gamma_i^i(t) = \frac{y_{i+1}+y_i}{2} - \frac{y_{i+1}-y_i}{2} e^{i\pi t} \\ \gamma_{i+1}^i(t) = \frac{y_{i+1}+y_i}{2} + \frac{y_{i+1}-y_i}{2} e^{i\pi t}, \end{cases} \quad (5)$$

où t parcourt l'intervalle $[0, 1]$. Ce n -uplet est représenté dans la figure 13.

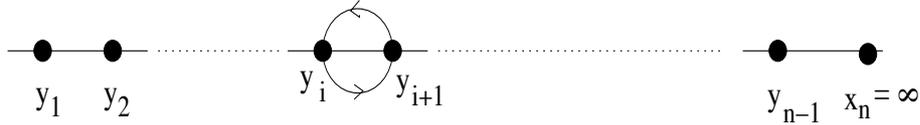


Figure 13

Proposition 4. Soit x un point réel de $\mathcal{M}_{0,n}$ et soit Δ_x l'ensemble des classes d'homotopie de chemins sur $\mathcal{M}_{0,n}$ partant de x et aboutissant à ${}^\tau x$ pour $\tau \in S_n$. Alors l'isomorphisme (4) induit une application d'ensembles

$$\delta_x : M(0, n) \rightarrow \Delta_x.$$

PROOF. Soit (x_1, \dots, x_n) un n -uplet de points réels distincts de \mathbb{P}^1 et soit x le point de $\mathcal{M}_{0,n}$ correspondant à la sphère à marked points (x_1, \dots, x_n) . On a une application évidente de $\pi_1(B_{0,n}S^2)$ basé en (x_1, \dots, x_n) vers Δ_x . En effet, chaque élément $\Gamma \in \Pi(x_1, \dots, x_n)$ paramétrise un chemin sur $\mathcal{M}_{0,n}$ qui part de x et aboutit à $({}^\tau \Gamma)x$, et les éléments de $\pi_1(B_{0,n}S^2)$ basés en (x_1, \dots, x_n) correspondent exactement à des classes d'homotopie de chemins sur $\mathcal{M}_{0,n}$. On déduit de (4) et (5) une application $\delta_x : H_n \rightarrow \Delta_x$, associant à tout $\alpha \in H_n$ une classe d'homotopie de chemins partant de x et aboutissant à $[\alpha](x)$ (voir formule (3)); on note cette classe d'homotopie $\delta_x(\alpha)$. Il nous reste seulement à montrer que l'application δ_x se factorise par le quotient $M(0, n)$ de H_n par son centre, qui est engendré par l'élément $\omega_n = (\sigma_{n-1} \cdots \sigma_1)^n$; c'est-à-dire qu'il faut montrer que $\delta_x(\omega_n) = \text{id}_x \in \pi_1(\mathcal{M}_{0,n}; x)$.

Soit \tilde{H}_n le sous-groupe coloré de H_n ; l'élément ω_n engendre également le centre de \tilde{H}_n . Restreinte à ce sous-groupe, δ_x devient un homomorphisme de groupes $\delta_x : \tilde{H}_n \rightarrow$

$\pi_1(\mathcal{M}_{0,n}; x)$, la composition de tresses correspondant par définition à la composition de lacets. Or, on sait que le groupe $\pi_1(\mathcal{M}_{0,n}; x)$ est isomorphe à $K(0, n)$ et donc en particulier n'a pas de centre; on a donc forcément $\delta_x(\omega_n) = \text{id}_x$, ce qui termine la démonstration de la proposition. Désormais, δ_x désignera l'application $M(0, n) \rightarrow \Delta_x$. \diamond

Corollaire. *Si $x \in \mathcal{M}_{0,n}$ n'a pas d'automorphismes, c'est-à-dire si l'ensemble $\{\tau x \mid \tau \in S_n\} = \{\tau(x) \mid \tau \in S_n\}$ contient $n!$ points distincts, alors l'application $\delta_x : M(0, n) \rightarrow \Delta_x$ définie à la proposition 4 est une bijection. Δ_x hérite donc d'une structure de groupe; sa loi de multiplication est donnée par*

$$\delta_x(\beta\alpha) = \delta_{[\alpha](x)}(\beta) \cdot \delta_x(\alpha). \quad (6)$$

PROOF. Pour chaque $\tau \in S_n$, notons $\Delta_{x,\tau}$ l'ensemble de classes d'homotopie de chemins partant de x et aboutissant à $\tau(x)$ (voir formule (3)). Soit $\{\alpha_\tau\}$ un système de représentants de S_n dans $M(0, n)$; on a donc $[\alpha_\tau] = \tau$. Posons $\delta_\tau = \delta_x(\alpha_\tau) \in \Delta_{x,\tau}$. Alors tout autre élément $\gamma \in \Delta_{x,\tau}$ s'écrit de façon unique $\gamma = \delta_\tau \cdot \lambda$ avec $\lambda \in \pi_1(\mathcal{M}_{0,n}; x)$. L'association $\gamma \mapsto \lambda$ donne une bijection d'ensembles entre $\Delta_{x,\tau}$ et $\pi_1(\mathcal{M}_{0,n}; x)$.

Pour chaque $\tau \in S_n$, considérons la restriction de $\delta_x : M(0, n) \rightarrow \Delta_x$ à la classe $\alpha_\tau K(0, n)$. Cette restriction est une bijection entre $\alpha_\tau K(0, n)$ et l'ensemble $\delta_\tau \cdot \pi_1(\mathcal{M}_{0,n}; x) = \Delta_{x,\tau}$. L'application δ_x envoie donc la réunion disjointe des $n!$ classes $\alpha_\tau K(0, n)$, qui est égale au groupe $M(0, n)$ tout entier, surjectivement sur la réunion disjointe des $\Delta_{x,\tau}$, qui est égal à l'ensemble Δ_x . Si l'ensemble $\{\tau(x) \mid \sigma \in S_n\}$ contient $n!$ points distincts, alors tous les $\Delta_{x,\tau}$ sont distincts et δ_x est donc aussi injective. On a donc une bijection et Δ_x hérite de la structure de groupe de $M(0, n)$. La formule (6) est une traduction directe de la loi de multiplication de $M(0, n)$. \diamond

Remarque. Dans le cas où l'ensemble $\{\tau(x) \mid \tau \in S_n\}$ ne contient pas $n!$ points distincts, l'application $\delta_x : M(0, n) \rightarrow \Delta_x$ n'est pas injective, car les images $\Delta_{x,[\alpha]}$ et $\Delta_{x,[\beta]}$ de deux classes distincts $\alpha K(0, n)$ et $\beta K(0, n)$ de $M(0, n)$ sont égales si $[\alpha](x) = [\beta](x)$, même si $[\alpha] \neq [\beta]$. Dans ce cas, il n'est pas possible de mettre une structure de groupe sur Δ_x .

II.5. Points base à l'infini de $\mathcal{M}_{0,n}$

Les points de dégénérescence maximale dans la compactification stable de $\mathcal{M}_{0,n}$ ont été définis et énumérés au I.2; nous nous contenterons donc ici de quelques rappels.

D'après le théorème de Dehn et Lickorish, le groupe de Teichmüller $M(0, n)$ est isomorphe au *groupe des difféotopies* d'une sphère topologique à n marked points ordonnés; une difféotopie est une classe de difféomorphismes de la sphère permutant les marked points,

modulo ceux qui sont isotopes à l'identité. Le sous-groupe coloré $K(0, n)$ est isomorphe au groupe des difféotopies colorées, c'est-à-dire qui fixent chacun des marked points (cf. [B] pour tous les détails).

Une *découpe en pantalons* d'une sphère topologique avec n marked points ordonnés est un choix de $n - 3$ lacets simples et disjoints qui découpent la sphère en $n - 3$ sphères à trois trous, soit des points soit des trous à bord (ce sont les pantalons), modulo l'action sur la sphère du groupe des difféotopies colorées $K(0, n)$. Une sphère de Riemann avec n marked points *presque dégénérée* est une sphère telle qu'il existe une découpe en pantalons, où les lacets sont des géodésiques pour la métrique de Poincaré et au moins une de ces géodésiques est très courte. Une sphère *presque maximale dégénérée* est une sphère de Riemann telle qu'il existe une découpe en pantalons, chaque lacet étant géodésique, telle que tous les lacets soient très courts. Un *point de dégénérescence maximale* est un point de la compactification stable de $\mathcal{M}_{0,n}$ correspondant à une sphère telle que les longueurs des géodésiques pour une certaine découpe en pantalons sont toutes nulles. Un tel point est donc entièrement déterminé par la donnée d'une découpe en pantalons d'une sphère topologique avec n marked points ordonnés. Et ces découpes en pantalons peuvent être représentées combinatoirement par des arbres trivalents à n feuilles numérotées de 1 à n dans un ordre quelconque. Il ne faut pas considérer ces arbres comme étant munis de plongements dans le plan, malgré l'apparence des figures.

Le voisinage dans l'espace des modules $\mathcal{M}_{0,n}$ d'un point de dégénérescence maximale dans la compactification stable consiste en les points associés aux sphères de Riemann presque maximale dégénérées pour la découpe en pantalons associée au point. Dans la figure 14, nous donnons un exemple de découpe en pantalons d'une sphère à 8 marked points, l'allure d'une sphère presque maximale dégénérée pour cette découpe, et l'arbre trivalent numéroté qui correspond à la découpe. On voit que l'arbre s'obtient comme une espèce de squelette de la sphère, avec une arête traversant chaque géodésique.

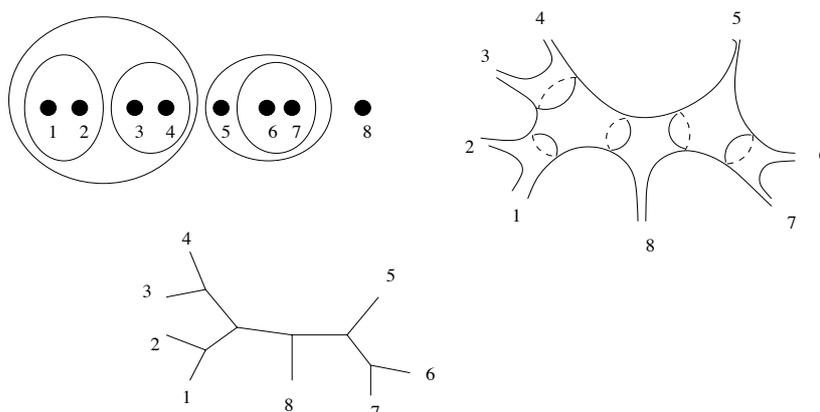


Figure 14

Il a été montré au paragraphe I.2.2 que les points de dégénérescence maximale de $\mathcal{M}_{0,n}$ sont en nombre fini et qu’il existe pour chacun un voisinage tubulaire dans $\mathcal{M}_{0,n}$, c’est-à-dire difféomorphe à D_*^{n-3} , le produit de $n-3$ exemplaires du disque pointé. Nous appelons “voisinage réel” le lieu réel du voisinage tubulaire de chacun des points de dégénérescence maximale, c’est-à-dire l’ensemble des points correspondant à des sphères sous forme standard dont les n marked points sont tous réels. D’après le paragraphe I.2.4, le voisinage réel de chacun des points de dégénérescence maximale consiste en 2^{n-3} morceaux simplement connexes, correspondant au fait qu’il faut ce nombre de morceaux simplement connexes pour couvrir un tore de dimension $n-3$ par des ouverts. Il est bon de garder en tête l’exemple de $\mathcal{M}_{0,4} \simeq \mathbb{P}^1 - \{0, 1, \infty\}$, où un voisinage tubulaire de l’infini consiste en trois petits disques pointés autour des trois points manquants, et le lieu réel de ce voisinage tubulaire consiste naturellement en six petits segments ouverts de l’axe réel (cf. I.2.3).

Définition 12. Pour tout $n \geq 4$, soit \mathcal{B}_n la réunion, pour tous les points de dégénérescence maximale de $\mathcal{M}_{0,n}$, des 2^{n-3} régions réelles simplement connexes contenues dans leurs voisinages tubulaires. L’ensemble \mathcal{B}_n s’appelle l’ensemble des *points base à l’infini* (ou *tangentiels*). Nous définissons le *groupoïde de Teichmüller* $T(0, n)$ comme étant le groupoïde fondamental

$$T(0, n) = \pi_1(\mathcal{M}_{0,n}; \mathcal{B}_n).$$

Dans le but d’expliquer la relation des $T(0, n)$ avec la structure de braided tensor category, nous commençons par décrire pour tout $n \geq 4$ un ensemble tout à fait combinatoire, en bijection avec \mathcal{B}_n , et qui rappellera également l’ensemble des objets de la braided tensor category \mathcal{C} construite au II.2.

Définition 13. Soit \mathcal{P}_n l’ensemble des arbres trivalents à n feuilles numérotées de 1 à n (dans un ordre quelconque). Soit \mathcal{A}_n l’ensemble des arbres trivalents numérotés à n feuilles, munis d’un ordre cyclique sur les trois arêtes sortant de chaque sommet trivalent, modulo la relation d’équivalence obtenue en inversant les ordres cycliques à tous les sommets. Soit \mathcal{A}_n^p l’ensemble des arbres trivalents numérotés à n feuilles munis d’un plongement dans le plan, modulo l’équivalence de la “symétrie miroir”, i.e. deux tels arbres sont équivalents si chacun est obtenu de l’autre en le retournant dans le plan. Notons \mathcal{A}_n^\pm l’ensemble des arbres de $n-2$ droites projectives à trois points distingués munis d’un choix de signe ± 1 à chaque intersection (ces objets ont été introduits au chapitre I.2).

Le théorème suivant fait le point sur les bijections entre les différents ensembles d’objets qui ont été introduits ici et au I.2.

Théorème 5. (i) *Les quatre ensembles suivants sont en bijection:*

- * *les points de dégénérescence maximale de la compactification stable de $\mathcal{M}_{0,n}$;*
- * *les découpes en pantalons d’une sphère moins n points numérotés;*

- * les arbres de $n - 2$ droites projectives à trois points distingués;
- * les arbres trivalents numérotés à n feuilles, i.e. les éléments de \mathcal{P}_n .

(ii) Les quatre ensembles \mathcal{A}_n^\pm , \mathcal{A}_n^p , \mathcal{A}_n et \mathcal{B}_n sont en bijection.

PROOF. Les bijections du (i) ont été établies au I.2.4. Notons en particulier que la bijection entre \mathcal{P}_n et l'ensemble de découpes est canonique, car un arbre détermine automatiquement une découpe (voir la figure 14); *a fortiori* la bijection entre \mathcal{P}_n et l'ensemble de points de dégénérescence maximale est canonique. Pour le (ii), les ensembles \mathcal{A}_n^p et \mathcal{A}_n sont en bijection, car il y a des applications évidentes de chacun de ces ensembles vers \mathcal{P}_n , qui sont surjectives et envoient exactement 2^{n-3} éléments sur chaque élément de \mathcal{P}_n . Il a été montré au I.2 que \mathcal{A}_n^\pm est en bijection avec \mathcal{B}_n et que \mathcal{B}_n est en bijection avec \mathcal{A}_n^p , ce qui établit toutes les bijections. \diamond

Dans le reste de ce chapitre, nous n'utiliserons que les ensembles \mathcal{P}_n , \mathcal{A}_n et \mathcal{B}_n ; les autres ensembles ont été introduits ici uniquement pour faire le lien avec les constructions combinatoires du chapitre I.2. La bijection entre \mathcal{A}_n et \mathcal{A}_n^p est canonique, obtenue en associant l'ordre cyclique des arêtes autour d'un sommet avec l'ordre trigonométrique dans le plan. Les bijections concernant \mathcal{A}_n^\pm ne sont pas canoniques.

La bijection entre \mathcal{A}_n et \mathcal{B}_n est canonique, défini via la notion d'ordre cyclique attachée naturellement aux éléments de ces deux ensembles. Rappelons de la définition 9 que l'ordre cyclique d'un objet T de \mathcal{C}_n est une permutation $\omega_T \in S_{n-1}$. Soit maintenant \bar{T} un objet de \mathcal{A}_n ; c'est un couple d'arbres T et T' qui sont images miroirs l'un de l'autre. Leurs ordres cycliques associés vérifient donc $\omega_{\bar{T}}^{-1} = \omega_{T'}$. L'ordre cyclique de l'objet \bar{T} de \mathcal{A}_n est défini comme étant la permutation $\omega \in \{\omega_T, \omega_{T'}\}$ telle que $\omega(n-2) < \omega(n-1)$.

L'ordre cyclique d'un point réel de $\mathcal{M}_{0,n}$ (définition 11) s'étend de façon évidente à un point base tangentiel. On peut donc définir la bijection explicite et canonique de \mathcal{A}_n vers \mathcal{B}_n comme suit. Soit \bar{T} un objet de \mathcal{A}_n . On lui associe un élément D de \mathcal{P}_n par l'application canonique qui consiste à oublier l'ordre cyclique autour des sommets. Par le théorème 5, D correspond canoniquement à un point de dégénérescence maximale de $\mathcal{M}_{0,n}$. On associe à \bar{T} l'unique point base $P \in \mathcal{B}_n$, voisin du point de dégénérescence maximale D et ayant même ordre cyclique que \bar{T} .

Cette bijection est un ingrédient nécessaire dans la comparaison de la catégorie d'arbres \mathcal{C}_n avec les groupoïdes de Teichmüller qui est le sujet de la section suivante.

II.6. Groupoïdes de Teichmüller et catégories tensor braided

Rappelons que pour chaque $n \geq 4$, le *groupoïde de Teichmüller* $T(0, n)$ est le groupoïde fondamental $\pi_1(\mathcal{M}_{0,n}; \mathcal{B}_n)$ de l'espace des modules $\mathcal{M}_{0,n}$, basé en l'ensemble \mathcal{B}_n des voisi-

nages réels simplement connexes des points de dégénérescence maximale dans la compactification stable $\overline{\mathcal{M}}_{0,n}$ de $\mathcal{M}_{0,n}$ (cf. I.2 et II.5). Dans cette section, nous établissons de façon précise le lien entre les groupoïdes de Teichmüller et les catégories tensor braided; le théorème suivant présente le résultat central de ce cours, nécessaire à la poursuite du programme de Drinfel'd. Rappelons que \mathcal{C}_n désigne le n -sous-groupoïde canonique de la catégorie d'arbres \mathcal{C} (cf. II.2).

Théorème 6. *Il existe un épimorphisme de groupoïdes $\Phi_n : \mathcal{C}_n \rightarrow T(0, n)$.*

PROOF. Nous démontrons ce théorème en quatre étapes, qui permettront d'exhiber explicitement l'épimorphisme. On commence par définir un épimorphisme $\Phi_n : \mathcal{C}_n \rightarrow T(0, n)$ en donnant les images par Φ_n des objets de \mathcal{C}_n (première étape) et de chacune des trois sortes de morphismes de \mathcal{C}_n : identité, associativité, commutativité (deuxième étape). On démontre ensuite que Φ_n est un homomorphisme de groupoïdes (troisième étape) et finalement qu'il est surjectif (quatrième étape).

Première étape: définition de Φ_n sur les objets. On identifie pendant toute cette démonstration l'ensemble des objets \mathcal{B}_n de $T(0, n)$ avec l'ensemble \mathcal{A}_n via les ordres cycliques, comme à la fin du II.5. Il y a une application évidente de l'ensemble des objets de \mathcal{C}_n vers \mathcal{A}_n , qui consiste à renuméroter avec l'indice n la feuille 0 de chaque arbre de \mathcal{C}_n , et ensuite à quotienter par la relation d'équivalence identifiant deux arbres symétriques. ■

Deuxième étape: définition de Φ_n sur les morphismes.

Morphismes d'identité. Soit T un objet de \mathcal{C}_n . Nous posons $\Phi_n(\text{id}_T) = \text{id}_{\Phi_n(T)}$; c'est la classe d'homotopie du lacet identité basé au point base de \mathcal{B}_n correspondant à $\Phi_n(T) \in \mathcal{A}_n$.

Morphismes d'associativité. Soit T_P et T_Q deux objets de \mathcal{C}_n , et notons P et Q les deux points base tangentiels correspondants. Supposons que T_P et T_Q ont même ordre cyclique sur les feuilles; il existe par la proposition 2 un unique morphisme d'associativité $a_{T_P, T_Q} : T_P \rightarrow T_Q$ dans \mathcal{C}_n . Or, comme remarqué au I.2.6, l'ensemble des points réels de $\mathcal{M}_{0,n}$ correspondant aux sphères sous forme standard ayant un ordre cyclique donné forme une région simplement connexe de $\mathcal{M}_{0,n}$. Si P et Q sont deux points base de \mathcal{B}_n ayant même ordre cyclique, il existe donc un chemin (unique à homotopie près) de P à Q contenu entièrement dans cette région simplement connexe. On définit $a_{P, Q} = \Phi_n(a_{T_P, T_Q})$ comme la classe d'homotopie de ce chemin.

Morphismes de commutativité. Soit T_P un objet de \mathcal{C}_n et P le point base tangentiel correspondant dans \mathcal{B}_n . Appelons A , B et C les trois branches aboutissant à un sommet trivalent de T_P , et supposons que la feuille 0 appartient à C . Soit T_Q l'arbre obtenu de T_P par le morphisme de commutativité généralisé $c_T(A, B)$ et soit Q le point base tangentiel

correspondant à T_Q . Nous allons définir un chemin sur l'espace des modules de P à Q correspondant au morphisme $c_T(A, B)$. Soit $0, a_1, \dots, a_{n-1}$ l'indexation en l'ordre cyclique des feuilles de T_P et $0, b_1, \dots, b_{n-1}$ celle de T_Q ; soit $\tau \in S_{n-1}$ la permutation défini par $a_{\tau^{-1}(i)} = b_i$. Par la proposition 2, il existe un unique morphisme d'associativité $a_{T_Q, \tau(T_P)} : T_Q \rightarrow \tau(T_P)$. Le morphisme $a_{T_Q, \tau(T_P)} \cdot c_T(A, B)$ envoie T_P sur $\tau(T_P)$ et appartient donc à $\text{Hom}(T_P, \mathcal{T})$ où \mathcal{T} est l'ensemble des arbres obtenus de T_P par une permutation des indices non nuls. Rappelons que Δ_P désigne l'ensemble des classes d'homotopie de chemins sur $\mathcal{M}_{0,n}$ partant de P et aboutissant à $\tau(P)$ pour tout $\tau \in S_n$. On a la suite d'applications

$$\text{Hom}(T_P, \mathcal{T}) \xrightarrow{\sim} B_{n-1} \rightarrow M(0, n) \xrightarrow{\delta_P} \Delta_P, \quad (7)$$

où la première application est l'isomorphisme de la proposition 3, la deuxième est l'homomorphisme canonique $B_{n-1} \rightarrow M(0, n)$ défini par $\sigma_i \mapsto \sigma_i$ pour $1 \leq i \leq n-2$ (il est bien connu que le noyau de cet homomorphisme est exactement le centre de B_{n-1}), et la troisième est l'application de la proposition 4. Soit $\alpha \in M(0, n)$ l'image du morphisme $a_{T_Q, \tau(T_P)} \cdot c_T(A, B) \in \text{Hom}(T_P, \mathcal{T})$; nous lui associons la classe d'homotopie de chemins $\delta_P(\alpha)$, ce qui conduit à la définition

$$\Phi_n(c_T(A, B)) = a_{Q, \tau(P)}^{-1} \cdot \delta_P(\alpha).$$

Troisième étape: Φ_n est un homomorphisme de groupoïdes. Il suffit de vérifier que les images des morphismes de \mathcal{C}_n par Φ_n vérifient les mêmes relations que les morphismes eux-mêmes, c'est-à-dire le triangle, le pentagone, les deux hexagones et les carrés. Soit comme d'habitude \mathcal{T} l'ensemble des objets de \mathcal{C}_n obtenus de T_P en permutant les indices non nuls. On déduit immédiatement de la définition de Φ_n sur les morphismes d'associativité et de commutativité que *restreint à l'ensemble de morphismes $\text{Hom}(T_P, \mathcal{T})$, Φ_n est donné par la composition d'applications (7).* Or, on sait par la proposition 3 que si une suite de morphismes de \mathcal{C}_n est équivalente à id_T , elle s'envoie sur l'identité de B_{n-1} . A fortiori, elle s'envoie par Φ_n , c'est-à-dire par l'application composée (7), à id_P .

Quatrième étape. Φ_n est surjectif. On montre d'abord que quels que soient P et Q dans \mathcal{B}_n , il existe toujours un chemin dans l'image de \mathcal{C}_n dans $T(0, n)$, qui va de P à Q . Pour ce faire, il suffit de montrer qu'il existe toujours un morphisme de T_P à T_Q dans \mathcal{C}_n . Nous utilisons le résultat de la proposition 2 et le fait que le groupe des permutations S_{n-1} est engendré par les transpositions $\tau_i = (i, i+1)$ qui agissent sur l'ordre cyclique de T_P en échangeant les indices a_i et a_{i+1} . On peut donner une suite de morphismes transformant T_P en T_Q comme suit. Soit $\tau \in S_{n-1}$ une permutation qui amène l'ordre cyclique de T_P sur celui de T_Q . On construit un morphisme $C : T_P \rightarrow \tau(T_P)$ comme dans la démonstration de la proposition 3 (en écrivant τ comme un produit des τ_i et en se servant des $\Sigma_{i,T}$).

Soit a l'unique morphisme d'associativité envoyant $\tau(T_P)$ à T_Q (proposition 2). Alors le morphisme $a \cdot C$ envoie T_P à T_Q .

Dans l'image de \mathcal{C}_n dans $T(0, n)$ il y a donc au moins un chemin de P à Q pour chaque $P, Q \in \mathcal{B}_n$. Pour montrer que l'homomorphisme Φ_n de \mathcal{C}_n à $T(0, n)$ est surjectif, il suffit donc de montrer qu'il est surjectif sur chacun des groupes locaux $\pi_1(\mathcal{M}_{0,n}; P)$. En effet, tous les chemins d'un point base P à un autre Q sont donnés par un seul tel chemin précomposé avec tous les lacets de $\pi_1(\mathcal{M}_{0,n}; P)$. Il suffit d'ailleurs de le montrer pour un seul point base P puisque tous les groupes locaux sont isomorphes (via la conjugaison par un chemin). Fixons donc un point base P , et supposons que l'ordre cyclique des feuilles de P est donné par $1, \dots, n$. Le groupe $\pi_1(\mathcal{M}_{0,n}; P)$ est isomorphe au groupe $K(0, n)$, et comme on l'a vu au II.3, ce groupe est engendré par les éléments $x_{i\dots j, j+1\dots k}$. Soit T l'unique objet de \mathcal{C}_n au-dessus de P , ayant ordre cyclique $1, \dots, n-1, 0$.

Nous allons construire un morphisme f de $\text{Hom}(T, T)$ tel que $\Phi_n(f) = x_{i\dots j, j+1\dots k}$. Soit T' un objet de \mathcal{C}_n avec le même ordre cyclique que T , mais tel que le paquet de feuilles i, \dots, j et le paquet $j+1, \dots, k$ forment les bouts de deux branches U et V aboutissant au même sommet. Par la proposition 2 il existe un unique morphisme d'associativité $a : T \rightarrow T'$. Soit T'' l'arbre obtenu de T' par le morphisme $c_{T'}(U, V)$. Par construction, l'image du morphisme $a^{-1}c_{T''}(V, U)c_{T'}(U, V)a$ par Φ_n est exactement la tresse $x_{i\dots j, j+1\dots k}$, ce qui achève de démontrer que Φ_n est surjectif. \diamond

Paramétrisation explicite des chemins de $T(0, n)$. La démonstration du théorème 6 et les calculs de tresses aux propositions 3 et 4 permettent de paramétrer explicitement des chemins d'associativité et de commutativité sur $\mathcal{M}_{0,n}$ partant d'un point base quelconque à l'infini, ce qui est très utile en pratique (voir par exemple la démonstration du théorème 9). Nous indiquons ici les trois notions clés permettant de le faire. Tout d'abord, s'il s'agit de paramétrer un chemin partant d'un point base $P \in \mathcal{B}_n$, il faut choisir une sphère X_P explicite à marked points (x_1, \dots, x_n) telle que le point $x \in \mathcal{M}_{0,n}$ associé à X_P appartienne à P . On peut le faire par la méthode des "constellations" introduite au I.2.6; il s'agit d'inscrire l'arbre T associé à P dans un cercle représentant l'axe réel sur $\mathbb{P}^1\mathbb{C}$, et d'associer des nombres réels aux feuilles en tenant compte de leur distance (en nombre d'arêtes) du centre de l'arbre, selon la règle suivante: la différence des valeurs associées à deux feuilles consécutives doit être de l'ordre de ε^d , où ε est un petit nombre réel positif et d est le minimum des distances des deux feuilles du centre de l'arbre. Par exemple, si T est l'arbre standard de la figure 5, on peut procéder comme dans la figure 15, où $m = (n-3)/2$; si n est pair il faut effacer l'arête de valeur 0.

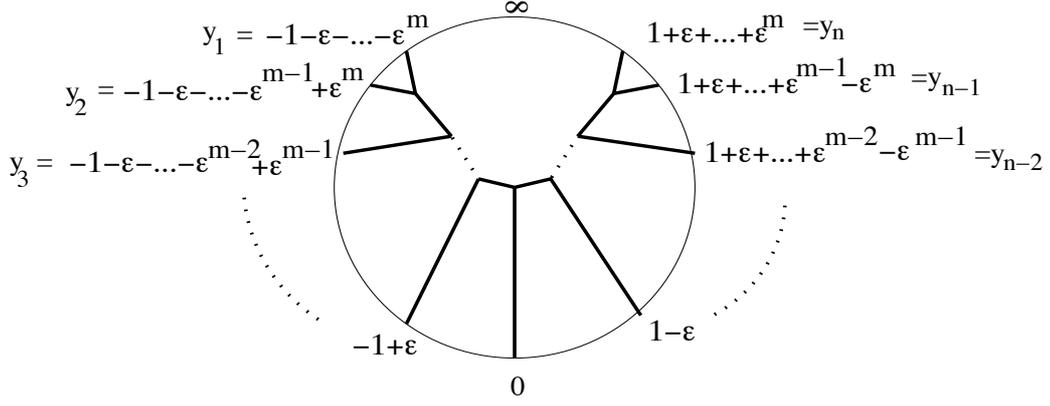


Figure 15

Notons que si la sphère à marked points (x_1, \dots, x_n) correspond à un point $x \in \mathcal{M}_{0,n}$ qui appartient au point base P , alors la translation $(x_1 + x, \dots, x_n + x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ correspond à un point $x' \in \mathcal{M}_{0,n}$ qui appartient également à P .

Soit maintenant T un objet de \mathcal{C}_n et P le point base correspondant. Soit X une sphère à marked points (x_1, \dots, x_n) construite à partir de T par la méthode des constellations, telle que le point $x \in \mathcal{M}_{0,n}$ correspondant appartienne à P . Si ω_T est l'ordre cyclique de T , posons $y_i = x_{\omega_T^{-1}(i)}$ et $y_n = x_n$. Soit T' est un objet de \mathcal{C}_n ayant même ordre cyclique que T ; soit P' le point base correspondant. Le principe pour paramétrer un chemin d'associativité de P à P' sur $\mathcal{M}_{0,n}$ est très simple. On choisit d'abord une sphère X' à marked points (x'_1, \dots, x'_n) correspondant à P' et on pose $y'_i = x'_{\omega_T^{-1}(i)}$ et $y'_n = x'_n$. Moyennant une translation, on peut supposer que $y'_1 = y_1$. On réalise alors un chemin d'associativité de P à P' comme une suite de $n-1$ chemins, qui font glisser successivement y_i jusqu'à y'_i le long de l'axe réel pour $2 \leq i \leq n$ sans que y_i traverse aucun autre des points y_j . En paramétrant ces glissades le long de l'axe réel, on obtient un chemin explicite $A_{P,P'}$ appartenant à la classe d'homotopie $a_{P,P'}$.

Soit T un objet de \mathcal{C}_n , U et V deux branches de T aboutissant au même sommet et ne contenant pas la feuille 0, et T' l'objet obtenu de T par le morphisme de commutativité $c_T(U, V)$. Soit $\tau \in S_n$ telle que $\tau(T)$ ait même ordre cyclique que T . La notion clé pour la paramétrisation d'un chemin dans la classe d'homotopie $\Phi_n(c_T(U, V))$ est qu'il est naturel de paramétrer d'abord un chemin appartenant à la classe $a_{P',\tau(P)} \cdot \Phi_n(c_T(U, V))$, et d'obtenir la paramétrisation d'un chemin de $\Phi_n(c_T(U, V))$ ensuite en composant avec un chemin $A_{\tau(P),P'}^{-1}$ construit comme ci-dessus. En d'autres termes, il est naturel de paramétrer les images par Φ_n des morphismes de $\text{Hom}(T, T)$. En effet, on peut toujours décomposer un tel morphisme en une suite de morphismes du type $\Sigma_{i,\tilde{T}}$ (voir II.3), où les \tilde{T} appartiennent tous à \mathcal{T} et les morphismes $\Sigma_{i,\tilde{T}}$ sont formés d'un morphisme d'associativité, un morphisme de commutativité simple (échangeant deux arêtes consécutives i et $i+1$) et de nouveau un morphisme d'associativité. Or, on a donné une paramétrisation de

$\Sigma_{i, \tilde{T}}$ à l'équation (5) (voir figure 13). La paramétrisation d'un chemin dans la classe de $a_{P', \tau(P)} \circ c_T(U, V)$ par cette méthode revient à envoyer les points y_i, \dots, y_j correspondant aux feuilles de la branche U aux points y_{k-j+i}, \dots, y_k respectivement par des demi-cercles dans l'hémisphère inférieure de $\mathbb{P}^1\mathbb{C}$, et les points y_{j+1}, \dots, y_k correspondant aux feuilles de V aux points $y_i, \dots, y_{k-j-1+i}$ respectivement par des demi-cercles dans l'hémisphère supérieure. *De manière générale, étant donné un n -uplet $(\gamma_1(t), \dots, \gamma_{n-1}(t), x_n)$ dans $\Pi(x_1, \dots, x_n)$, on retrouve visuellement la tresse associée comme suit: on épaissit la surface de la sphère et on paramétrise cette épaisseur de $t = 0$ (surface extérieure) à $t = 1$ (surface intérieure). Les chemins voyagent alors depuis la surface extérieure à travers la paroi épaissie jusqu'à la surface intérieure; les brins tracés par les chemins, qui sont disjoints, forment la tresse désirée.* Nous y reviendrons dans la démonstration du théorème 9 (voir par exemple figures 16 et 19).

II.7. Action galoisienne sur les groupoïdes de Teichmüller

Une des questions ouvertes les plus fondamentales de la théorie des nombres est celle de déterminer la structure du groupe de Galois absolu, sa définition comme groupe d'automorphismes de la clôture algébrique de \mathbb{Q} ne donnant à peu près aucune prise sur une éventuelle description combinatoire, ou par generateurs et relations. C'est Alexandre Grothendieck qui a suggéré, dans son manuscrit inédit *Esquisse d'un Programme**, d'essayer d'obtenir de nouveaux renseignements sur la structure de $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ en considérant son action, non pas sur les nombres algébriques, mais sur des objets de nature beaucoup plus géométrique et même combinatoire; le premier exemple qu'il suggère est l'ensemble des classes de conjugaison de sous-groupes d'indice fini du groupe libre à 2 generateurs (associés aux "dessins d'enfants"), sur lequel $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ agit puisque ces classes correspondent à des revêtements finis de \mathbb{P}^1 non ramifiés en dehors de $0, 1, \infty$, qui sont tous définis sur $\overline{\mathbb{Q}}$. Plus généralement, $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ agit sur tout groupoïde fondamental algébrique d'une variété définie sur \mathbb{Q} basé en un ensemble de $\overline{\mathbb{Q}}$ -points de la variété qui est stable sous $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$. Donnons quelques précisions sur cette action.

Définition 14. Soit X une variété algébrique définie sur \mathbb{C} et soit \mathcal{C}_R la catégorie des revêtements finis étales de X ; nous notons (Y, p) le revêtement $p : Y \rightarrow X$. Soit a un point de X , et soit F_a le foncteur "fibre en a " de \mathcal{C}_R dans la catégorie \mathcal{C}_E des ensembles finis. Le foncteur F_a est défini sur les objets de \mathcal{C}_R par $(Y, p) \mapsto p^{-1}(a)$ et sur les morphismes de \mathcal{C}_R comme suit. Soit f un morphisme de revêtements $f : (Y, p) \rightarrow (Z, q)$. Alors $F_a(f)$ est défini par $F_a(f) : p^{-1}(a) \rightarrow q^{-1}(a)$ via $F_a(f)(x) = f(x)$ pour tout $x \in p^{-1}(a)$; comme

* Daté de 1984, publié dans *Geometric Galois Actions*, London Math. Soc. Lecture Notes **242**, Cambridge University Press, 1997.

$p = qf$, on a en effet $f(x) \in q^{-1}(a)$. Si a et b sont deux points de X , une *transformation naturelle* du foncteur fibre F_a dans le foncteur fibre F_b est la donnée d'une "fonction" γ qui associe à tout objet (Y, p) de \mathcal{C}_R un morphisme $\gamma_{(Y,p)}$ de $F_a((Y, p)) = p^{-1}(a)$ dans $F_b((Y, p)) = p^{-1}(b)$ dans \mathcal{C}_E , de façon à ce que pour tout morphisme $f : (Y, p) \rightarrow (Z, q)$ de \mathcal{C}_R , le diagramme

$$\begin{array}{ccc} F_a((Y, p)) & \xrightarrow{F_a(f)} & F_a((Z, q)) \\ \gamma_{(Y,p)} \downarrow & & \downarrow \gamma_{(Z,q)} \\ F_b((Y, p)) & \xrightarrow{F_b(f)} & F_b((Z, q)) \end{array}$$

commute (cf. [G1], 1.2). Une transformation naturelle inversible s'appelle un isomorphisme (ou un automorphisme).

Dans le cas où $a = b$, chaque élément $\gamma \in \pi_1(X; a)$ induit un automorphisme de F_a dans lui-même. En effet, γ induit naturellement un morphisme $\gamma : p^{-1}(a) \rightarrow p^{-1}(a)$, c'est-à-dire une permutation de la fibre $p^{-1}(a)$, en associant à chaque point $a' \in p^{-1}(a)$ l'autre extrémité du relèvement de γ à un chemin (à homotopie près) sur Y partant de a' . Mais on peut dire plus: l'ensemble des automorphismes de F_a dans lui-même forme un groupe qui est isomorphe au complété profini $\widehat{\pi}_1(X; a)$ de $\pi_1(X; a)$ (cf. le début du II.8 pour quelques brefs rappels sur les complétés profinis).

De même, chaque classe d'homotopie de chemins de a à b sur X induit un isomorphisme de F_a dans F_b ; notons $\widehat{\pi}_1(X; a, b)$ l'ensemble complet des isomorphismes de F_a dans F_b . Cet ensemble ne forme pas un groupe, mais on voit toutefois qu'il est non canoniquement en bijection avec $\widehat{\pi}_1(X; a)$, car si on fixe une fois pour toutes une classe d'homotopie de chemins γ de a à b , qui induit un isomorphisme de F_a dans F_b , alors chaque élément de $\widehat{\pi}_1(X; a, b)$ s'écrit de façon unique comme un automorphisme de F_a dans lui-même composée avec γ . On appelle *pro-lacet* un élément de $\widehat{\pi}_1(X; a)$ et *pro-chemin* de a à b un élément de $\widehat{\pi}_1(X; a, b)$.

Faits bien connus. (1) (cf. [SGA 1] ou [EL],[I2]) Supposons maintenant X défini sur \mathbb{Q} et a et b des points de $X(\mathbb{Q})$. Alors il existe une action de $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ sur l'ensemble $\widehat{\pi}_1(X; a, b)$. En effet, σ définit un foncteur de \mathcal{C}_R dans lui-même; on définit l'isomorphisme $\sigma(\gamma)$ de F_a dans F_b en associant à chaque (Y, p) dans \mathcal{C}_R le morphisme de $p^{-1}(a)$ en $p^{-1}(b)$ donné par la composition

$$p^{-1}(a) \xrightarrow{\sigma} (p^\sigma)^{-1}(a) \xrightarrow{\gamma^\sigma} (p^\sigma)^{-1}(b) \xrightarrow{\sigma^{-1}} p^{-1}(b).$$

En particulier, il existe $f \in \widehat{\pi}_1(X; a)$ tel que $\sigma(\gamma) = \gamma \cdot f$. Ces notions ont des traductions valables dans la situation où a et b appartiennent à \mathcal{B}_n : ces points base déterminent des foncteurs fibres F_a et F_b , et comme de plus ils sont définis sur \mathbb{Q} dans un sens précis,

l'ensemble $\widehat{\pi}_1(X; a, b)$ des isomorphismes de F_a dans F_b est muni d'une $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ -action (cf. [I2], [IM], et surtout [Ma]).

(2) Le groupoïde formé par la réunion disjointe des $\widehat{\pi}_1(X; a, b)$ avec $a, b \in \mathcal{B}_n$ est isomorphe au complété profini $\widehat{T}(0, n)$ du groupoïde de Teichmüller $T(0, n)$, c'est-à-dire le groupoïde obtenu de $T(0, n)$ en remplaçant tous les groupes locaux par leurs complétés profinis.

Grothendieck suggère d'utiliser cette action de $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ sur les groupoïdes fondamentaux algébriques des espaces des modules pour essayer de donner une nouvelle définition de $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$, de nature géométrique et combinatoire, sans référence directe à la théorie des nombres algébriques. Dans les deux sections suivantes, nous abordons cette idée en démontrant que le groupe de Grothendieck-Teichmüller défini par Drinfel'd, qui contient $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ comme sous-groupe, est un groupe d'automorphismes de chacun des groupoïdes de Teichmüller profinis $\widehat{T}(0, n)$.

II.8. Le groupe de Grothendieck-Teichmüller

Nous donnons ici la définition du groupe \widehat{GT} de Grothendieck-Teichmüller introduit par Drinfel'd dans [Dr]. Rappelons que le complété profini \widehat{G} d'un groupe discret G est la limite inverse de ses quotients finis. Soit $x \in \widehat{G}$ et $\alpha \in \widehat{\mathbb{Z}}$; alors x est une collection $(x_N \in G/N)$ où N parcourt les sous-groupes distingués d'indice fini de G , et de même α est une collection $(\alpha_n \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$. Pour chaque N , notons $n(N)$ l'ordre du groupe fini G/N . Alors l'expression x^α désigne la collection $(x_N^{\alpha_{n(N)}})$ qui appartient aussi à \widehat{G} .

Rappelons que le groupe libre F_2 à deux générateurs est isomorphe au groupe $K(0, 4)$. Soit $f \in \widehat{F}_2$; pour tout a, b dans un groupe profini \widehat{G} , on écrit $f(a, b)$ pour l'image de f par l'homomorphisme $\widehat{F}_2 \rightarrow \widehat{G}$ qui envoie x à a et y à b , où x et y désignent les générateurs de \widehat{F}_2 . En particulier, sous l'homomorphisme identité on a $f = f(x, y)$; cette notation doit être interprétée non comme une substitution de variables dans f , mais comme les images de f par de différents homomorphismes. Pour tout groupe G , on note G' son sous-groupe dérivé, au sens topologique si G est un groupe topologique.

Définition 15. Soit \widehat{GT} le monoïde des couples $(\lambda, f) \in \widehat{\mathbb{Z}}^* \times \widehat{F}'_2$, satisfaisant aux trois relations suivantes. Les deux premières ont lieu dans $\widehat{F}_2 \simeq \widehat{K}(0, 4)$ et la troisième dans $\widehat{K}(0, 5)$.

$$(I) f(y, x)f(x, y) = 1;$$

$$(I) f(z, x)z^m f(y, z)y^m f(x, y)x^m = 1, \text{ où } m = \frac{1}{2}(\lambda - 1) \text{ et } z = (xy)^{-1}.$$

$$(II) f(x_{34}, x_{45})f(x_{15}, x_{12})f(x_{23}, x_{34})f(x_{45}, x_{15})f(x_{12}, x_{23}) = 1.$$

Cet ensemble forme un monoïde (cf. [Dr] ou [LS1]) sous la multiplication donnée par:

$$(\lambda_1, f_1(x, y))(\lambda_2, f_2(x, y)) = (\lambda_1\lambda_2, f_1(x, y)f_2(x^{\lambda_1}, f_1(y, x)y^{\lambda_1}f_1(x, y))).$$

Soit \widehat{GT} le groupe des éléments inversibles de \widehat{GT} . Une première propriété essentielle des éléments de \widehat{GT} , contenant en plus l'explication de cette règle de multiplication en l'interprétant comme composition d'automorphismes, est donnée au lemme suivant.

Lemme 7. *Chaque élément (λ, f) de \widehat{GT} induit un automorphisme du complété profini \widehat{B}_n du groupe des tresses d'Artin B_n en agissant comme suit sur les generateurs σ_i :*

$$(\lambda, f)(\sigma_i) = f(y_i, \sigma_i^2)^{-1} \sigma_i^\lambda f(y_i, \sigma_i^2),$$

où $y_i = \sigma_{i-1} \cdots \sigma_1^2 \cdots \sigma_{i-1}$. Cette même action passe à un automorphisme du complété profini $\widehat{M}(0, n)$ de $M(0, n)$, et se restreint aux sous-groupes colorés \widehat{K}_n et $\widehat{K}(0, n)$ (ces sous-groupes étant caractéristiques).

Pour une démonstration de ce lemme n'utilisant que la théorie des groupes, voir [LS1]. On y calcule de plus, tout à fait directement, que sous l'action de (λ, f) on a $y_i \mapsto y_i^\lambda$ pour chaque i et que $\omega_n \mapsto \omega_n^\lambda$, où $\omega_n = (\sigma_{n-1} \cdots \sigma_1)^n$ engendre le centre de \widehat{B}_n ; rappelons que $M(0, n) \simeq B_n / \langle \omega_n, y_n \rangle$.

Dans la proposition suivante, on reprend l'approche originale de Drinfel'd qui lui a permis de découvrir la définition de \widehat{GT} . L'on trouvera dans [BN] des résultats analogues concernant l'interprétation du groupe \widehat{GT} via son action sur les braided tensor categories.

Proposition 8. *Soit \mathcal{C} la catégorie d'arbres introduit au II.2, et soit $\widehat{\mathcal{C}}$ la catégorie profinie obtenue de \mathcal{C} en remplaçant chaque groupe local par son complété profini. Pour des objets U, V et W de $\widehat{\mathcal{C}}$, notons*

$$\begin{cases} T & = (U \otimes V) \otimes W \\ T_1 & = (V \otimes U) \otimes W \\ T_2 & = U \otimes (V \otimes W) \\ T_3 & = U \otimes (W \otimes V) \\ x_{UV}^T & = c_{T_1}(V, U)c_T(U, V) \\ x_{VW}^T & = a(U, V, W)^{-1}c_{T_3}(W, V)c_{T_2}(V, W)a(U, V, W). \end{cases}$$

Soit $(\lambda, f) \in \widehat{GT}$. Alors (λ, f) induit un automorphisme F de $\widehat{\mathcal{C}}$ comme suit. L'action de F fixe les objets de $\widehat{\mathcal{C}}$ et respecte le produit tensoriel. F agit sur la contrainte de commutativité c de $\widehat{\mathcal{C}}$ par

$$F(c_T(U, V)) = c_T(U, V)(x_{UV}^T)^m = (x_{VU}^{T_1})^m c_T(U, V)$$

où $m = (\lambda - 1)/2$, et sur la contrainte de associativité a par

$$F(a(U, V, W)) = a(U, V, W)f(x_{UV}^T, x_{VW}^T).$$

Remarque. Les morphismes x_{UV}^T et x_{VW}^T appartiennent à un groupe local de $\widehat{\mathcal{C}}$, qui est isomorphe à \widehat{K}_n quand l'objet T à $n + 1$ feuilles; ces deux morphismes s'identifient avec des tresses de deux paquets adjacents (voir les figures 9 et 10), et $f(x_{UV}^T, x_{VW}^T)$ s'identifie donc à une tresse colorée profinie de \widehat{K}_n .

PROOF. Pour que F agisse bien comme un automorphisme de la catégorie, il faut et il suffit que les relations entre les morphismes soient respectées; or ces relations sont entièrement données par les carrés, les deux hexagones et le pentagone. Il est très facile de montrer que F respecte les deux hexagones et le pentagone, car les relations (I), (II) et (III) ont été dégagées pour cela; en effet, si on écrit explicitement les contraintes sur λ et f imposées par l'exigence que ces trois diagrammes restent commutatifs quand c et a sont remplacés par $F(c)$ et $F(a)$, on trouve que les relations (I) et (II) sont nécessaires et suffisantes pour que les nouvelles contraintes $F(c)$ et $F(a)$ vérifient les deux hexagones, et la relation (III) assure la commutativité du pentagone. On laisse ce calcul comme exercice au lecteur (qui trouvera aussi tous les détails dans [Dr, §4]).

Les relations (I)-(III) ne sont pas nécessaires pour démontrer que F respecte les carrés; il suffit d'utiliser le fait que F respecte le produit tensoriel, c'est-à-dire que $F(g \otimes h) = F(g) \otimes F(h)$. Notons aussi que par la définition de l'action de F , deux morphismes g et $F(g)$ ont les mêmes objets de départ et d'arrivée. Soit $g : U \rightarrow U'$, $h : V \rightarrow V'$ et $k : W \rightarrow W'$ trois morphismes de $\widehat{\mathcal{C}}$; posons $T = (U \otimes V) \otimes W$, $T_1 = (V \otimes U) \otimes W$, $T' = (U' \otimes V') \otimes W'$ et $T'_1 = (V' \otimes U') \otimes W'$. Alors le morphisme $F((g \otimes h) \otimes k) = (F(g) \otimes F(h)) \otimes F(k)$ est bâti de partir de morphismes d'associativité et de commutativité tous concernant des fils à l'intérieur des trois branches U , V et W , mais qui ne croisent jamais les fils d'une branche avec les fils d'une autre (voir la figure 12, avec 0 remplacé par W). On a donc les propriétés de commutativité

$$\left\{ \begin{array}{l} (x_{U'V'}^{T'})^m (F(g) \otimes F(h)) = (F(g) \otimes F(h)) (x_{UV}^T)^m \\ x_{U'V'}^{T'} ((F(g) \otimes F(h)) \otimes F(k)) = ((F(g) \otimes F(h)) \otimes F(k)) x_{UV}^T \\ x_{V'W'}^{T'} ((F(g) \otimes F(h)) \otimes F(k)) = ((F(g) \otimes F(h)) \otimes F(k)) x_{VW}^T. \end{array} \right. \quad (8)$$

Le carré de commutativité affirme que $(h \otimes g)c_T(U, V) = c_{T'}(U', V')(g \otimes h)$. F respecte ce carré grâce au calcul suivant:

$$\begin{aligned} F(h \otimes g)F(c_T(U, V)) &= (F(h) \otimes F(g))(x_{VU}^{T_1})^m c_T(U, V) \\ &= (x_{V'U'}^{T'_1})^m (F(h) \otimes F(g))c_T(U, V) \quad (\text{première égalité de (8)}) \\ &= (x_{U'V'}^{T'})^m c_{T'}(U', V')(F(g) \otimes F(h)) \quad (\text{par le carré}) \\ &= F(c_{T'}(U', V'))F(g \otimes h). \end{aligned}$$

Le carré associatif affirme que $a(U', V', W')^{-1}(g \otimes (h \otimes k))a(U, V, W) = (g \otimes h) \otimes k$. Des deuxième et troisième égalités de (8) on déduit que

$$f(x_{U', V'}^{T'}, x_{V', W'}^{T'})((F(g) \otimes F(h)) \otimes F(k)) = ((F(g) \otimes F(h)) \otimes F(k))f(x_{UV}^T, x_{VW}^T). \quad (9)$$

On constate alors que F respecte le carré grâce au calcul suivant:

$$\begin{aligned} & F(a(U', V', W'))^{-1} \cdot F(g \otimes (h \otimes k)) \cdot F(a(U, V, W)) \\ &= f(x_{U', V'}^{T'}, x_{V', W'}^{T'})^{-1} a(U', V', W')^{-1} (F(g) \otimes (F(h) \otimes F(k))) a(U, V, W) f(x_{UV}^T, x_{VW}^T) \\ &= f(x_{U', V'}^{T'}, x_{V', W'}^{T'})^{-1} ((F(g) \otimes F(h)) \otimes F(k)) f(x_{UV}^T, x_{VW}^T) \quad (\text{par le carré}) \\ &= ((F(g) \otimes F(h)) \otimes F(k)) \quad (\text{par (9)}). \end{aligned}$$

On a montré donc que F respecte les diagrammes carrés, ce qui termine la démonstration de la proposition 8. \diamond

Il a été indiqué par Drinfel'd et démontré par Ihara (cf. [I1], [I2]) qu'il existe une injection de $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ dans \widehat{GT} . Cette injection provient du fait fondamental que \widehat{GT} agit comme $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ sur certains objets algébrico-géométriques, en premier lieu les groupes de tresses profinis, interprétés comme groupes fondamentaux de certains espaces de configuration définis sur \mathbb{Q} et munis de ce fait d'une action canonique extérieure de $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$, et en deuxième lieu les groupoïdes de Teichmüller au grand complet. L'existence de l'injection mène tout naturellement à la question suivante:

Question. $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}) \simeq \widehat{GT}$?

C'est vers une réponse partielle ou complète à cette question, où plus généralement, une ou plusieurs descriptions de $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ complètement nouvelles et sans référence directe aux nombres algébriques que tend la théorie esquissée ici, qui consiste essentiellement à observer des propriétés de $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ et à essayer de les démontrer pour \widehat{GT} . Le théorème 9 ci-dessous n'en est qu'un exemple parmi plusieurs (on peut consulter les articles de survey [N] ou [Sc] pour plus de renseignements). Mais c'est un exemple particulièrement pertinent ici, car sa démonstration fait appel à la relation entre la structure du groupoïde de Teichmüller et celle de braided tensor category qui est le sujet central de ce cours.

II.9. Action de \widehat{GT} sur les groupoïdes de Teichmüller profinis

Définition 16. Soit $n \geq 4$. Le groupoïde de Teichmüller profini $\widehat{T}(0, n)$ est le groupoïde de pro-chemins sur l'espace des modules $\mathcal{M}_{0, n}$ ayant comme extrémités les points base à l'infini de \mathcal{B}_n . Il est isomorphe au complété profini de $T(0, n)$, obtenu en remplaçant chacun des groupes locaux de $T(0, n)$ par son complété profini.

L'épimorphisme $\Phi_n : \mathcal{C}_n \rightarrow T(0, n)$ du théorème 6 s'étend naturellement à un épimorphisme (noté aussi Φ_n) des complétés profinis. Muni de cette observation et de la proposition 8, nous pouvons démontrer le résultat suivant.

Théorème 9. *Soit $n \geq 4$. Alors \widehat{GT} est un groupe d'automorphismes du groupoïde de Teichmüller profini $\widehat{T}(0, n)$.*

PROOF. On déduit de la proposition 8 que \widehat{GT} est un groupe d'automorphismes du complété profini de la catégorie d'arbres $\widehat{\mathcal{C}}$, et il est clair que ces automorphismes se restreignent à des automorphismes de chacun des sous-groupoïdes $\widehat{\mathcal{C}}_n$, puisque les objets sont fixés et l'ensemble des morphismes de $\widehat{\mathcal{C}}_n$ est défini comme l'ensemble des morphismes de $\widehat{\mathcal{C}}$ entre objets de $\widehat{\mathcal{C}}_n$.

Il faut montrer que cette action de \widehat{GT} respecte le passage au quotient $\Phi_n : \widehat{\mathcal{C}}_n \rightarrow \widehat{T}(0, n)$, en montrant que \widehat{GT} préserve le noyau de Φ_n . Le noyau d'un homomorphisme de groupoïde consiste en l'ensemble des morphismes qui sont envoyés sur un morphisme identité; il nous faut donc déterminer cet ensemble dans $\widehat{\mathcal{C}}_n$ et calculer les images de ses éléments sous l'action des éléments de \widehat{GT} . Pour alléger les notations, nous désignons par un \sim l'image par Φ_n de tout objet ou morphisme de $\widehat{\mathcal{C}}_n$. Il y a deux sortes de morphismes dans $\widehat{\mathcal{C}}_n$ qui sont susceptibles de s'envoyer sur un morphisme identité dans $\widehat{T}(0, n)$: ceux qui se trouvent dans un groupe local $\text{Hom}(T, T)$ de $\widehat{\mathcal{C}}_n$ et ceux qui envoient un objet sur un autre (dans cette démonstration, Hom désigne l'ensemble des homomorphismes dans le groupoïde profini $\widehat{\mathcal{C}}_n$). Nous traitons ces deux cas séparément. Soit T un objet de $\widehat{\mathcal{C}}_n$, \widetilde{T} son image dans $\widehat{T}(0, n)$.

Cas 1. Par les propositions 3 et 4 (appliquées au cas profini), on a une application

$$\text{Hom}(T, T) \xrightarrow{\sim} \widehat{B}_{n-1} \rightarrow \widehat{M}(0, n) \rightarrow \widehat{\Delta}_{\widetilde{T}},$$

qui se restreint à un épimorphisme de groupes

$$\text{Hom}(T, T) \xrightarrow{\sim} \widehat{K}_{n-1} \rightarrow \widehat{K}_{n-1}/Z \simeq \widehat{K}(0, n) \xrightarrow{\sim} \widehat{\pi}_1(\mathcal{M}_{0,n}, \widetilde{T}).$$

La deuxième surjection envoie le générateur $x_{i\dots j, j+1\dots k}$ de \widehat{K}_{n-1} sur le générateur correspondant de $\widehat{K}(0, n)$. Le noyau de Φ_n restreint à $\text{Hom}(T, T)$ est donc égal à son noyau, qui est donné par le centre $Z = \langle \omega_{n-1} \rangle$ de \widehat{K}_{n-1} . Mais on a vu dans la remarque après le lemme 7 qu'un élément (λ, f) de \widehat{GT} envoie ω_{n-1} à ω_{n-1}^λ , ce qui montre que quelque soit l'objet T de $\widehat{\mathcal{C}}_n$, le noyau de Φ_n restreint à $\text{Hom}(T, T)$ est préservé par l'action de \widehat{GT} .

Cas 2. Soit T' un objet de $\widehat{\mathcal{C}}_n$ différent de T , et soit $g \in \text{Hom}(T, T')$ un morphisme qui s'envoie sur $\text{id}_{\widetilde{T}}$. Alors T' est égal à l'arbre obtenu de T en inversant les ordres cycliques à tous les sommets trivalents; c'est le seul objet de \mathcal{C}_n différent de T qui s'envoie sur \widetilde{T} .

L'épimorphisme de groupoïdes $\Phi_n : \widehat{\mathcal{C}}_n \rightarrow \widehat{T}(0, n)$ envoie $\text{Hom}(T, T')$ à $\widehat{\pi}_1(\mathcal{M}_{0,n}; \widetilde{T})$. Or, l'ensemble $\text{Hom}(T, T')$ est donné par un seul morphisme de $\text{Hom}(T, T')$, précomposé avec tous les morphismes de $\text{Hom}(T, T)$. En particulier, si g est un morphisme de $\text{Hom}(T, T')$ qui s'envoie sur $\text{id}_{\widetilde{T}}$, alors l'ensemble des morphismes de $\text{Hom}(T, T')$ qui s'envoie sur $\text{id}_{\widetilde{T}}$ est donné par $g\langle\omega_{n-1}\rangle$, où ω_{n-1} appartient au groupe local $\text{Hom}(T, T)$. On doit montrer que cet ensemble est préservé sous l'action des éléments $(\lambda, f) \in \widehat{GT}$.

On commence par supposer que T est un arbre de la forme standard de la figure 5 (avec ordre cyclique quelconque à partir de la feuille 0). Soit \widetilde{T} le point base correspondant à T , et soit X la sphère à marked points (x_1, \dots, x_n) de la figure 15, choisie par la méthode des constellations. Le point correspondant $x \in \mathcal{M}_{0,n}$ appartient à \widetilde{T} . Soit ω_T l'ordre cyclique de T défini par $\omega_T^{-1}(i) = a_i$; alors $\omega_x = \omega_T$. Posons comme d'habitude $y_i = x_{\omega_x^{-1}(i)}$ et $y_n = x_n$; on a alors $y_i = -y_{n-i+1}$ pour $1 \leq i \leq n$. Soit β la tresse de "demi-rotation" représentée dans la figure suivante.

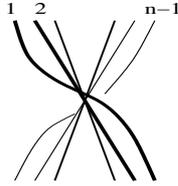


Figure 16

La permutation $\tau = [\beta]$ est donnée par

$$\tau = \begin{cases} (1, n-1)(2, n-2) \cdots ((n-1)/2, (n+1)/2) & \text{si } n \text{ est impair} \\ (1, n-1)(2, n-2) \cdots ((n-2)/2, (n+2)/2) & \text{si } n \text{ est pair.} \end{cases}$$

Posons $T_1 = T$ et pour $1 \leq k \leq n-2$, soit T_k l'arbre représenté dans la figure suivante; on a $T_{n-1} = T'$.

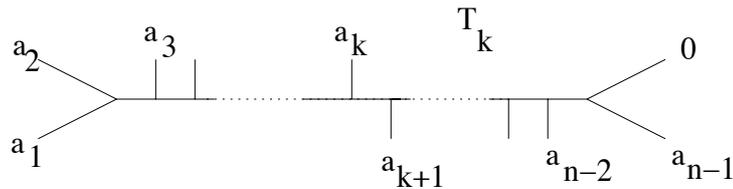


Figure 17

Lemme 10. Posons

$$g = c_{T_{n-2}}(a_{n-2} \cdots a_1, a_{n-1}) \cdots c_{T_2}(a_2 a_1, a_3) c_{T_1}(a_1, a_2). \quad (10)$$

Soit $b \in \text{Hom}(T, T)$ le morphisme correspondant à β sous la bijection $\text{Hom}(T, T) \simeq \widehat{B}_{n-1}$ de la proposition 3; alors $b(T) = \tau(T)$ et son ordre cyclique est le même que celui de $T' = T_{n-1} = g(T)$. On a

- (i) $g = a_{\tau(T), T'} b$;
- (ii) $\Phi_n(g) = \tilde{g} = \text{id}_{\tilde{T}}$;
- (iii) Tout $(\lambda, f) \in \widehat{GT}$ agit trivialement sur g .

Avant de démontrer ce lemme, nous montrons comment l'utiliser pour terminer la démonstration du théorème 9. D'abord, on déduit du lemme que (λ, f) préserve le noyau de Φ_n dans $\text{Hom}(T, T')$, car ce noyau est donné par $g\langle\omega_{n-1}\rangle$, où $\langle\omega_{n-1}\rangle$ est considéré dans $\text{Hom}(T, T)$. Il nous reste donc seulement à montrer que Φ_n préserve le noyau de Φ_n dans $\text{Hom}(T_0, T'_0)$ pour tout objet T_0 de \mathcal{C}_n . Soit T l'arbre de la figure 5 ayant même ordre cyclique que T_0 . Soient $a_{T_0, T}$ et $a_{T'_0, T'}$ les morphismes d'associativité entre ces arbres, et posons $g_0 = a_{T'_0, T'}^{-1} g a_{T_0, T} \in \text{Hom}(T_0, T'_0)$. On a $\Phi_n(g_0) = \Phi_n(a_{T'_0, T'}^{-1}) \Phi_n(g) \Phi_n(a_{T_0, T}) = a_{\tilde{T}_0, \tilde{T}}^{-1} a_{\tilde{T}_0, \tilde{T}} \tilde{g} = \text{id}_{\tilde{T}}$, donc le noyau de Φ_n restreint à $\text{Hom}(T_0, T'_0)$ est égal à $g_0\langle\omega_{n-1}\rangle$ comme ci-dessus, où ici on considère $\langle\omega_{n-1}\rangle \in \text{Hom}(T_0, T_0)$. Soit F l'automorphisme de \mathcal{C}_n correspondant à (λ, f) . Si on écrit $F(a_{T_0, T}) = \mathcal{F} \cdot a_{T_0, T}$ avec $\mathcal{F} \in \text{Hom}(T, T)$, alors on a $F(a_{T'_0, T'}) = \mathcal{F}' a_{T'_0, T'}$ où $\mathcal{F}' \in \text{Hom}(T', T')$ est défini par $g\mathcal{F} = \mathcal{F}'g$. On calcule alors

$$F(g_0) = F(a_{T'_0, T'}^{-1} g a_{T_0, T}) = a_{T'_0, T'}^{-1} \mathcal{F}'^{-1} g \mathcal{F} a_{T_0, T} = g_0,$$

donc F préserve $g_0\langle\omega_{n-1}\rangle$, ce qui termine la démonstration du théorème 9.

DÉMONSTRATION DU LEMME 10. (i) Puisque $T' = g(T)$, la composition $a_{T', \tau(T)} g$ appartient à $\text{Hom}(T, \tau(T)) \subset \text{Hom}(T, T)$ et correspond donc à une tresse. En appliquant la bijection explicite décrite à la proposition 3 – c'est-à-dire en dessinant selon la figure 10 – on constate que cette tresse fait passer le $n-1$ -ième fil derrière le $n-2$ -ième vers la gauche, puis ces deux fils en parallèle derrière le $n-3$ -ième et ainsi de suite; c'est exactement la demi-rotation β .

Pour démontrer le (iii), on se sert du fait que puisque g s'écrit comme une suite de morphismes de commutativité, seul λ intervient dans l'action de (λ, f) sur g . Par la proposition 8, on a

$$F(c_{T_{k-1}}(a_{n-1-k}, a_{n-1} \cdots a_{n-k})) = (x_{a_{n-1} \cdots a_{n-k}, a_{n-k-1}}^{T_k})^m c_{T_{k-1}}(a_{n-k-1}, a_{n-1} \cdots a_{n-k})$$

avec $m = (\lambda - 1)/2$. Par la définition de $x_{UV}^{T_k}$ (voir proposition 8), on a la règle de commutativité suivante pour tout $1 \leq j \leq k$:

$$\begin{aligned} c_{T_{k-1}}(a_{n-k-1}, a_{n-1} \cdots a_{n-k}) (x_{a_{n-j-1}, a_{n-1} \cdots a_{n-j}}^{T_{k-1}})^m \\ = (x_{a_{n-1} \cdots a_{n-j}, a_{n-j-1}}^{T_k})^m c_{T_{k-1}}(a_{n-k-1}, a_{n-1} \cdots a_{n-k}). \end{aligned} \tag{11}$$

On constate donc que

$$\begin{aligned}
F(g) &= (x_{a_{n-1}, a_{n-2} \cdots a_1}^{T_{n-1}})^m c_{T_{n-2}}(a_{n-2} \cdots a_1, a_{n-1}) (x_{a_{n-2}, a_{n-3} \cdots a_1}^{T_{n-2}})^m c_{T_{n-3}}(a_{n-3} \cdots a_1, a_{n-2}) \\
&\quad \cdots (x_{a_3, a_2 a_1}^{T_3})^m c_{T_2}(a_2 a_1, a_3) (x_{a_1, a_2}^{T_2})^m c_{T_1}(a_2, a_1) \\
&= (x_{a_{n-1}, a_{n-2} \cdots a_1}^{T_{n-1}})^m \cdots (x_{a_3, a_2 a_1}^{T_{n-1}})^m (x_{a_1, a_2}^{T_{n-1}})^m \cdot \\
&\quad c_{T_{n-2}}(a_{n-2} \cdots a_1, a_{n-1}) \cdots c_{T_2}(a_2 a_1, a_3) c_{T_1}(a_2, a_1) \quad \text{by (11)} \\
&= (x_{a_{n-1}, a_{n-2} \cdots a_1} \cdots x_{a_3, a_2 a_1} x_{a_1, a_2})^m g,
\end{aligned} \tag{12}$$

où dans la dernière égalité, tous les paquets de tresses x_{UV} appartiennent à $\text{Hom}(T_{n-1}, T_{n-1}) = \text{Hom}(T', T')$ et commutent entre eux.

L'application $x_{a_i \cdots a_j, a_{j+1} \cdots a_k} \mapsto x_{i \cdots j, j+1 \cdots k}$ des generateurs de $\text{Hom}(T', T')$ au groupe de tresses $K(0, n)$ est un isomorphisme de façon évidente, qui s'étend aux complétés profinis. Or, dans $\widehat{K}(0, n)$, on a l'identité standard

$$x_{n-1, 12 \cdots n-2} \cdots x_{3, 12} x_{1, 2} = (\sigma_{n-2} \cdots \sigma_1)^{1-n} = 1;$$

on conclut de cette identité et de (12) que $F(g) = g$.

Démontrons maintenant le (ii). Pour commencer, considérons le chemin Γ sur $\mathcal{M}_{0, n}$ partant de x (le point de la figure 15) et paramétré par des demi-cercles comme dans la figure suivante.

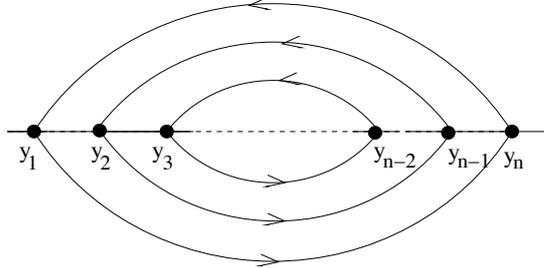


Figure 18

Une paramétrisation explicite de Γ est donné par le n -uplet $(x_1 e^{i\pi t}, x_2 e^{i\pi t}, \dots, x_n e^{i\pi t}) \in \Pi(x_1, \dots, x_n)$. Mais pour toute valeur $t_0 \in [0, 1]$, le point $(x_1 e^{i\pi t_0}, x_2 e^{i\pi t_0}, \dots, x_n e^{i\pi t_0})$ est $\text{PSL}_2(\mathbb{C})$ -équivalent au point (x_1, \dots, x_n) car il s'y ramène par la transformation $z \mapsto z/e^{i\pi t_0}$. Le chemin Γ est donc homotope à id_x , donc à $\text{id}_{\widetilde{T}}$.

Montrons maintenant que Γ est aussi homotope à un chemin dans la classe $\Phi_n(g) = \Phi_n(a_{\tau(T), T'}) \Phi_n(b) = a_{\tau(\widetilde{T}), \widetilde{T}} \widetilde{b}$. On utilise les indications sur la paramétrisation des chemins données à la fin du II.6. On peut paramétrer un chemin B dans la classe \widetilde{b} par les demi-cercles $(\beta_{\omega_x(1)}(t), \dots, \beta_{\omega_x(n-1)}(t), \beta_n(t))$ représentés dans la figure suivante, où $\beta_i(t)$ décrit le demi-cercle de y_i à y_{n-i} :

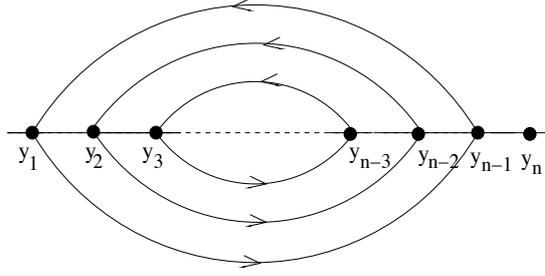


Figure 19

La tresse associée à ce chemin est la demi-rotation β (voir l'explication de la relation entre n -uples de $\Pi(x_1, \dots, x_n)$ et tresses à la fin du II.6). Maintenant, on peut paramétrer un chemin $A_{\tau(\tilde{T}), \tilde{T}}$ dans la classe $a_{\tau(\tilde{T}), \tilde{T}}$ comme à la fin du II.6, en laissant glisser les points le long de l'axe réel, paramétré par exemple par le n -uple $(\alpha_{\omega_x(1)}(t), \dots, \alpha_{\omega_x(n-1)}(t), \alpha_n(t))$ pour $t \in [0, 1]$, où

$$\alpha_i(t) = (y_{i+1} - y_i)t + y_i \quad 1 \leq i \leq n-1$$

$$\alpha_n(t) = \left(\frac{y_1 - y_n}{4t - 2} \right) + \left(\frac{y_1 + y_n}{2} \right),$$

qui fait glisser y_i à y_{i+1} et y_n à y_1 , le long de l'axe réel. Le chemin $\alpha_n(t)$ est homotope au demi-cercle

$$\gamma_n(t) = \left(\frac{y_n + y_1}{2} \right) + \left(\frac{y_n - y_1}{2} \right) e^{i\pi t} = y_n e^{i\pi t} = x_n e^{i\pi t}$$

(on a $y_n = -y_1 = x_n$). Pour $1 \leq i \leq n-1$, soit $\gamma_i(t)$ le chemin obtenu en composant $\beta_i(t)$ avec $\alpha_i(t)$; chaque $\gamma_i(t)$ fait décrire à y_i d'abord un demi-cercle vers y_{n-i} , et ensuite une glissade vers y_{n-i+1} . Par construction, le chemin Γ' sur $\mathcal{M}_{0,n}$ associé au n -uple $(\gamma_{\omega_x(1)}(t), \dots, \gamma_{\omega_x(n-1)}(t), \gamma_n(t))$ appartient à $a_{\tau(\tilde{T}), \tilde{T}} \tilde{b}$, c'est-à-dire à \tilde{g} .

Or, chaque chemin $\gamma_i(t)$ est homotope au demi-cercle de y_i à y_{n-i+1} paramétré par $y_i e^{i\pi t}$, et les n -uples

$$(x_1 e^{i\pi t}, \dots, x_n e^{i\pi t}) \quad \text{et} \quad (\gamma_{\omega_x(1)}(t), \dots, \gamma_{\omega_x(n-1)}(t), \gamma_n(t))$$

sont homotopes comme éléments de $\Pi(x_1, \dots, x_n)$. Les chemins Γ et Γ' correspondant aux deux n -uples sont donc homotopes sur $\mathcal{M}_{0,n}$. Mais on a vu que Γ est homotope à $\text{id}_{\tilde{T}}$ et Γ' appartient à la classe \tilde{g} ; on a montré donc que $\tilde{g} = \text{id}_{\tilde{T}}$. Ceci termine la démonstration du lemme 10, et donc du théorème 9. \diamond

Références

- [BN] D. Bar-Natan, On associators and the Grothendieck-Teichmüller group, preprint, 1996.
- [Bé] J. Bénabou, Catégories avec multiplication, *C.R. Acad. Sci. Paris, Sér. I, Math.* **256** (1963), 1887-1890.
- [B] J. Birman, *Braids, Links and Mapping Class Groups*, Ann. of Math. Studies, vol. **82**, Princeton Univ. Press, 1975.
- [De] P. Deligne, Le groupe fondamental de la droite projective moins trois points. In *Galois groups over \mathbb{Q}* , 79-298; Publ. MSRI no. 16, Springer-Verlag (1989), 79-297.
- [Dr] V.G. Drinfel'd, On quasitriangular quasi-Hopf algebras and a group closely connected with $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$, *Leningrad Math. J.* Vol. **2** (1991), No. 4, 829-860.
- [EL] M. Emsalem, P. Lochak, The action of the absolute Galois group on the moduli space of spheres with four marked points, in *The Grothendieck Theory of Dessins d'Enfants*, London Math. Soc. Lecture Notes **200**, Cambridge University Press, 1994.
- [G] A. Grothendieck, Esquisse d'un Programme, dans [GGA], vol. I, 5-48.
- [G1] A. Grothendieck, Sur quelques points d'algèbre homologique, *Tohoku Math. J.* **9** (1957), 119-221.
- [GGA] *Geometric Galois Actions* volumes I and II, London Math. Soc. Lecture Notes **242**, **243**, Cambridge University Press, 1997.
- [HS] D. Harbater, L. Schneps, Approximating Galois orbits of dessins, dans [GGA] vol. I, 205-230.
- [I1] Y. Ihara, Braids, Galois groups, and some arithmetic functions, Proceedings of the ICM, Kyoto, Japan, 1990, 99-120.
- [I2] Y. Ihara, On the embedding of $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ into \widehat{GT} , in *The Grothendieck Theory of Dessins d'Enfants*, London Math. Soc. Lecture Notes **200**, Cambridge Univ. Press, 1994.
- [IM] Y. Ihara, M. Matsumoto, On Galois Actions of Profinite Completions of Braid Groups, in *Recent Developments in the Inverse Galois Problem*, M. Fried et al. Eds., AMS, 1995.
- [JS] A. Joyal and R. Street, The geometry of tensor calculus, I. *Adv. Math.* **88** (1991), 55-112.
- [K] C. Kassel, *Quantum groups*, GTM 155, Springer-Verlag, New York 1995.

- [L] V. Lyubashenko, Ribbon Abelian Categories as Modular Categories, *J. Knot Theory and Ram.* **5**, no. 3 (1997), 311-403.
- [LS1] P. Lochak and L. Schneps, The Grothendieck-Teichmüller group and automorphisms of braid groups, in *The Grothendieck Theory of Dessins d'Enfants*, London Math. Soc. Lecture Notes **200**, Cambridge Univ. Press, 1994.
- [LS2] P. Lochak et L. Schneps, A cohomological interpretation of the Grothendieck-Teichmüller group, *Inv. Math.* **127** (1997), 571-600.
- [LS3] P. Lochak et L. Schneps, The universal Ptolemy-Teichmüller groupoid, dans [GGA] vol. II, 325-347.
- [M] S. Mac Lane, Natural associativity and commutativity, Rice Univ. Studies **49** (1963), 28-46; see also *Categories for the working mathematician*, GTM **5** (1971), Springer Verlag.
- [Ma] M. Matsumoto, Galois group $G_{\mathbb{Q}}$, Singularity E_7 , and moduli \mathcal{M}_3 , dans [GGA] vol. II, 179-218.
- [N] H. Nakamura, Galois rigidity of profinite fundamental groups, *Sugaku* **47** (1995), 1-17.
- [R] L. Ribes, Introduction to profinite groups and Galois cohomology, Queen's Papers in Pure and Applied Math. **24**, Queen's Univ., Kingston, Ont. (1970).
- [Sc] L. Schneps, The Grothendieck-Teichmüller group \widehat{GT} : a survey, dans [GGA] vol. I, 183-203.
- [SGA1] Revêtements étales et groupe fondamental, Springer Lecture Notes **224**, Springer-Verlag, 1971.
- [T] T. Terada, Quelques propriétés géométriques du domaine de F_1 et le groupe de tresses colorées, Publ. RIMS, Kyoto Univ., **17** (1981), 95-111.