FEUILLE DE TD 1

Exercice 1. Écrire la composée et l'inverse des permutations suivantes :

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 4 & 6 & 8 & 3 & 5 & 1 & 7 \end{pmatrix}, \quad \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 3 & 4 & 8 & 6 & 2 & 7 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 2. Écrire la table de multiplication de S_3.

Exercice 3. Étant donnée une permutation $\sigma \in \mathrm{S}_n$ on considère l'application linéaire

$$\varphi_\sigma \colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n, \qquad e_i \longmapsto e_{\sigma(i)}.$$

(1) Est-ce que φ_σ est bijective ?

(2) Pour $n = 2, 3$ écrire la matrice de φ_σ pour tout $\sigma \in \mathrm{S}_n$.

(3) Montrer que $\varphi_\sigma \circ \varphi_\tau = \varphi_{\sigma\circ\tau}$ pour tout $\sigma, \tau \in \mathrm{S}_n$.

Exercice 4. Pour chacune des permutations suivantes, déterminer l'écriture comme produit de cycles de supports disjoints, puis la signature :

$$\tau_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 5 & 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \qquad \tau_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 1 & 8 & 9 & 7 \end{pmatrix},$$

$$\tau_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 8 & 1 & 3 & 6 & 5 & 7 & 4 & 2 \end{pmatrix}, \qquad \tau_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 5 & 8 & 9 & 2 & 1 & 4 & 3 & 6 & 7 \end{pmatrix},$$

$$\tau_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 6 & 4 & 5 & 1 & 8 & 7 & 2 \end{pmatrix}, \qquad \tau_6 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 3 & 5 & 4 & 1 & 7 & 10 & 2 & 6 & 9 & 8 \end{pmatrix}.$$

Exercice 5. On considère les permutations suivantes :

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 7 & 6 & 3 & 5 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

(1) Calculer $\sigma\tau$.

(2) Déterminer la décomposition en cycles et la signature de σ et τ.

(3) Quel est le plus petit entier $n \geqslant 1$ tel que $\sigma^n = \mathrm{id}$?

(4) Calculer σ^{2024}.

Exercice 6. On considère la permutation suivante

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 4 & 5 & 6 & 9 & 7 & 3 & 8 & 2 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{S}_9.$$

(1) Soit $\tau \in \mathrm{S}_n$ le r-cycle $(i_1 \cdots i_r)$. Pour toute permutation $\sigma \in \mathrm{S}_n$ montrer que $\sigma\tau\sigma^{-1}$ est le r-cycle $(\sigma(i_1) \cdots \sigma(i_r))$.

(2) Montrer que $\sigma\tau = \tau\sigma$ si et seulement s'il existe $i \geqslant 0$ tel que $\sigma(x) = \tau^i(x)$ pour tout x dans le support de τ.

(3) Écrire la décomposition $\alpha = \alpha_1 \cdots \alpha_p$ de α en cycles à supports disjoints.

(4) Soit $\sigma \in \mathrm{S}_9$. Montrer que $\sigma\alpha = \alpha\sigma$ si et seulement si $\sigma\alpha_i = \alpha_i\sigma$ pour tout $i = 1, \ldots, p$.

(5) Combien sont les permutations $\sigma \in \mathrm{S}_9$ telles que $\sigma\alpha = \alpha\sigma$?