

FEUILLE DE TD 4

Exercice 1. Soit $A \in M_n(K)$ une matrice nilpotente. Montrer que $\det(X \cdot I_n - A) = X^n$.

Exercice 2. Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$ une matrice.

- (1) Supposons que A est nilpotente. Montrer que $\text{Tr}(A^k) = 0$ pour tout $k \geq 1$.
- (2) Réciproquement, supposons $\text{Tr}(A^k) = 0$ pour tout $k \geq 1$. Démontrer que A est nilpotente.
- (3) Peut-on relaxer l'hypothèse $\text{Tr}(A^k) = 0$ pour tout $k \geq 1$ en gardant la même conclusion ?

Exercice 3. Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ telle que $A^2 = -I_n$.

- (1) Calculer le polynôme minimal de A .
- (2) Montrer que n est pair.

Exercice 4. Montrer qu'il n'existe pas de matrice $B \in M_n(\mathbb{Q})$ telle que

$$B^2 = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Exercice 5. On considère la matrice $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$ telle que $a_{ij} = ij$ pour tout i, j .

- (1) Montrer que A est de rang 1, puis déterminer la dimension de $\text{Ker}(A)$.
- (2) Calculer $\text{Tr}(A)$. En déduire que A est diagonalisable.

Exercice 6. Soit $A \in M_4(\mathbb{C})$. On suppose que les valeurs propres de A sont $1, -1, i$ et $-i$.

- (1) Montrer que A est diagonalisable et inversible.
- (2) Exprimer A^{-1} en fonction de A .

Exercice 7. Soient

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in M_4(\mathbb{C})$$

et $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ la base canonique de \mathbb{C}^4 .

- (1) Pour $i = 1, 2, 3, 4$ calculer $J^2 e_i, J^3 e_i$ et $J^4 e_i$.
- (2) Écrire les matrices J^2, J^3, J^4 .
- (3) On suppose qu'il existe $A \in M_4(\mathbb{C})$ tel que $A^2 = J$. Que peut-on dire des valeurs propres de A ? Par conséquent, quel est le polynôme caractéristique de A ?
- (4) Appliquer alors le théorème de Cayley-Hamilton à A pour obtenir une contradiction. Qu'en conclut-on ?

Exercice 8. Soient V un K -espace vectoriel et φ un endomorphisme linéaire de V . Soient $d \geq 1$ un entier et $x \in V$ tels que $\varphi^d(x) = 0$ mais $\varphi^{d-1}(x) \neq 0$ (par définition, $\varphi^0 = \text{id}_V$). Montrer que la famille $\{x, \varphi(x), \varphi^2(x), \dots, \varphi^{d-1}(x)\}$ est libre.

Exercice 9. Soient V un K -espace vectoriel de dimension finie, f un endomorphisme linéaire de V et $\lambda \in K$. Démontrer qu'il existe un entier n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$ on ait

$$\text{Ker}(f - \lambda \text{id})^n = \text{Ker}(f - \lambda \text{id})^{n+1}.$$

Exercice 10. On considère une matrice non nulle

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a & c \\ 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

À quelle condition A est-elle semblable à la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{resp.} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} ?$$

Exercice 11. Étant donnés $a, b \in K^*$, calculer la décomposition de Dunford des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 2 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 12. Est-ce que

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

est la décomposition de Dunford de la matrice à gauche ?

Exercice 13. Calculer la décomposition de Dunford des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -3 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & -4 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -5 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 14. Calculer la décomposition de Dunford et puis l'exponentielle des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & -1 \\ -3 & 3 & 1 & -3 \\ -2 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 4 & 7 & -5 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & -3 & -2 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$