Université Paris 7 - Denis Diderot
UFR de Mathématiques


**Feuille d'exercices n°3**

# Surfaces de Riemann compactes
# Fibrés en droites

**Exercice 1.** Soit $X$ un surface de Riemann. Le faisceau $\mathcal{O}_X$ des fonctions holomorphes sur $X$ est défini en associant, à tout ouvert $U \subset X$ l'anneau $\mathcal{O}_X(U)$ des fonctions holomorphes sur $U$.

La fibre $\mathcal{O}_{X,x}$ de ce faisceau en un point $x \in U$ est définie comme la limite inductive $\mathcal{O}_{X,x} = \lim_{\to} \mathcal{O}_X(U)$, indexée par les voisinages ouverts $U$ de $x \in X$.

Montrer qu'à l'aide d'une carte $z\colon U \to \mathbb{C}$ centrée en $x \in X$, on peut identifier $\mathcal{O}_{X,x}$ à un sous-anneau de l'anneau des séries formelles complexes $\mathbb{C}[[T]]$.

Que se passe-t-il dans le cas du faisceau $\mathcal{M}_X$ des fonctions méromorphes sur $X$ ?

**Exercice 2. Diviseurs.** Soit $X$ une surface de Riemann compacte. On note $\mathbb{C}[X]$ l'anneau des fonctions holomorphes sur $X$ et $\mathbb{C}(X)$ le corps des fonctions méromorphes sur $X$.

On définit le groupe $\mathrm{Div}(X)$ des *diviseurs* de $X$ comme le groupe libre sur l'ensemble $X$.

a) Soit $f \neq 0$ une fonction méromorphe. Pour tout $x \in X$, on définit

$$v_x(f) = \begin{cases} n & \text{si } x \text{ est un zéro de } f \text{ de multiplicité } n \\ -n & \text{si } x \text{ est un pôle de } f \text{ de multiplicité } n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

À $f$, on associe le diviseur $(f) := \sum_{x \in X} v_x(f).x$

Pourquoi $(f)$ est-il bien un diviseur ? Un tel diviseur est dit *principal*.

b) Vérifier qu'on obtient ainsi un morphisme de groupes, dont on précisera le noyau.

c) Si $L \subset \mathbb{C}$ est un réseau, quel est le diviseur $(\wp'_L) \in \mathrm{Div}(\mathbb{C}/L)$ de la dérivée de la fonction $\wp_L : \mathbb{C}/L \to \mathbb{C}$ de Weierstrass ?

d) À tout diviseur $D = \sum_{x \in X} n_x.x \in \mathrm{Div}(X)$, on associe son degré $\deg D = \sum_{x \in X} n_x$.

Vérifier que l'application deg est un morphisme de groupes. Quel est le degré d'un diviseur principal ?

**Exercice 3. Faisceau associé à un diviseur.**

Soit $D = \sum_{x \in X} n_x.x$ un diviseur sur une surface de Riemann compacte. Son faisceau associé $\mathcal{O}_X(D)$ est le sous-faisceau de $\mathcal{M}_X$ dont les sections sur un ouvert $U \subset X$ sont les fonctions méromorphes $f : U \to \mathbb{C}$ telles que $\forall x \in X$, $v_x(f) \geqslant -n_x$.

a) Décrire les fibres du faisceau $\mathcal{O}_X(D)$.

b) Montrer qu'un tel faisceau est un $\mathcal{O}_X$*-module inversible* (on dit aussi *localement libre de rang* 1) : pour tout ouvert $U \subset \mathbb{C}$, $\mathcal{O}_X(D)(U)$ possède une structure naturelle de $\mathcal{O}_X(U)$ module et, si $U$ est suffisamment petit, c'est un module libre de rang 1.

c) Montrer que pour $D' = \sum_{x \in X} n'_x.x \geqslant D = \sum_{x \in X} n_x.x$ (i.e. $\forall x \in X$, $n'_x \geqslant n_x$), $\mathcal{O}_X(D)$ est un sous-faisceau de $\mathcal{O}_X(D')$. Décrire le faisceau quotient $\mathcal{O}_X(D')/\mathcal{O}_X(D)$.

d) En admettant que tout $\mathcal{O}_X$-module inversible est isomorphe à un faisceau de la forme $\mathcal{O}_X(D)$, montrer qu'il existe une suite exacte

$$1 \to \mathbb{C}^* \to \mathcal{M}(X)^* \to \mathrm{Div}(X) \to \mathrm{Pic}(X) \to 1$$

où $\mathrm{Pic}(X)$ désigne l'ensemble des $\mathcal{O}_X$-modules inversibles à isomorphisme près. (On tiendra pour acquis le fait que le produit tensoriel de $\mathcal{O}_X$-modules munit $\mathrm{Pic}(X)$ d'une structure de groupe pour laquelle l'application $D \mapsto \mathcal{O}_X(D)$ est un morphisme de groupes.)

e) En utilisant le fait que les groupes de cohomologie $H^i(X, \mathcal{L})$ des faisceau localement libre $\mathcal{L}$ de type fini sur $X$ (donc en particulier des $\mathcal{O}_X$-module inversibles) sont de dimension finie et sont nuls pour $i \geqslant 2$, en déduire qu'en tout point $x \in X$ et pour tout entier $n \geqslant 1$, il existe une fonction méromorphe sur $X$ ayant un unique pôle (éventuellement multiple) en $x$.

**Exercice 4. Fibrés en droites.**

Soit $X$ une surface de Riemann. Un *espace fibré (holomorphe) en droites* au-dessus de $X$ est un espace topologique $E$, munie d'une application continue $p\colon E \to X$ et d'un atlas holomorphe dont

i. les cartes sont de la forme $\tilde{\varphi} : p^{-1}(U) \xrightarrow{\sim} \varphi(U) \times \mathbb{C} \subset \mathbb{C} \times \mathbb{C}$, où $\varphi\colon U \to \varphi(U) \subset \mathbb{C}$ est une carte de $X$ telle que $\mathrm{pr}_1 \circ \tilde{\varphi} = \varphi \circ p$ :

$$\begin{array}{ccc} p^{-1}(U) & \xrightarrow{\tilde{\varphi}} & \varphi(U) \times \mathbb{C} \subset \mathbb{C} \times \mathbb{C} \\ {\scriptstyle p}\downarrow & & {\scriptstyle \mathrm{pr}_1}\downarrow \\ U & \xrightarrow{\varphi} & \varphi(U) \subset \mathbb{C} \end{array}$$

ii. les changements de cartes sont de la forme

$$\begin{array}{ccc} \psi(W) \times \mathbb{C} & \xrightarrow{\tilde{\varphi} \circ \tilde{\psi}^{-1}} & \varphi(W) \times \mathbb{C} \\ (z, u) & \longmapsto & (f(z), \lambda(z)\, u) \end{array}$$

où $f$ est un changement de carte de $X$ et $\lambda\colon \psi(W) \to \mathbb{C}^*$ est une application (nécessairement holomorphe).

a) Vérifier qu'en tout point $x \in X$, la fibre $E_x := p^{-1}(x)$ d'un tel espace fibré est naturellement muni d'une structure de droite vectorielle.

b) Soit $\Gamma$ un groupe discret agissant librement et proprement sur $X$. Soit $j\colon \Gamma \times X \to \mathbb{C}^*$ une application. À quelle condition sur $j$ existe-t-il une action de $\Gamma$ sur $X \times \mathbb{C}$ telle que $\forall \gamma \in G, \forall (z, u) \in X \times \mathbb{C}, \gamma.(z, u) = (\gamma.z, j(\gamma, z)\, u)$ ?

Vérifier dans ce cas que $\Gamma \backslash (X \times \mathbb{C})$ est un espace fibré en droites sur $\Gamma \backslash X$.

c) Soit $k \in \mathbb{Z}$. Montrer que $j\colon \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \times \mathfrak{H} \to \mathbb{C}^*$ définie par $j(\gamma, z) := (c\, z + d)^k$ vérifie la condition précédente. Décrire les sections du fibré obtenu dans ce cas.

**Exercice 5. Faisceau associé à un espace fibré.**

Pour tout espace fibré (holomorphe) en droites $p\colon E \to X$ au-dessus d'une surface de Riemann $X$, on définit le faisceau $\mathcal{E}$ de ses sections (holomorphes) en associant, à tout ouvert $U \subset X$ l'ensemble de ses applications holomorphes $s\colon U \to E$ telles que $p \circ s = \mathrm{id}_U$ :

$$\begin{array}{ccc} E & & \\ {\scriptstyle p}\downarrow & \nwarrow^{s} & \\ X & \supset & U \end{array}$$

a) Lorsque $E$ est l'espace fibré en droites trivial, i.e. $E = X \times \mathbb{C}$, quel est ce faisceau ?

b) Montrer qu'un tel faisceau est un $\mathcal{O}_X$-*module inversible*.

**Exercice 6. Théorème de Riemann-Roch.**

Soit $X$ une surface de Riemann compacte. On note $h^i = \dim H^i(X, -)$. Le théorème de Riemann-Roch affirme que pour tout $\mathcal{O}_X$-module inversible sur une surface de Riemann compacte, $\chi(\mathcal{L}) := h^0(\mathcal{L}) - h^1(\mathcal{L}) = 1 - g + \deg \mathcal{L}$, où $g := h^1(\mathcal{O}_X)$ est le genre de $X$.

a) Établir cette formule dans le cas du faisceau $\mathcal{O}_X(-D)$, où $D \in \mathrm{Div}(X)$ est un diviseur effectif, i.e. $D \geqslant 0$.

b) Établir la formule dans le cas général.