Université Paris 7 - Denis Diderot
UFR de Mathématiques

Feuille d'exercices n°7

Opérateurs de Hecke

Exercice 1. Montrer que les séries d'Eisenstein $G_k : \Lambda \mapsto \sum'_{w\in\Lambda} \frac{1}{w^{2k}}$ $(k \geqslant 2)$ sont des formes propres pour les opérateurs de Hecke $T(n)$, ce dernier pour la valeur propre $\sigma_{2k-1}(n)$.

Exercice 2. Soit $\mathcal{M}_k(\mathbb{Z})$ l'ensemble des formes modulaires de poids $2\,k$ pour le groupe $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ ayant des coefficients de Fourier à l'infini entiers.

a) Montrer que $\mathcal{M}_k(\mathbb{Z})$ est un groupe abélien libre qui engendre l'espace des formes modulaires de poids $2\,k$.

b) En déduire que les valeurs propres des opérateurs de Hecke sur les formes modulaires pour $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ sont des entiers algébriques.

Exercice 3. Soit G un groupe et Γ un sous-groupe de G.

Lorsque X est un ensemble, on note $\mathbb{Z}[X] = \mathbb{Z}^{(X)} = \oplus_{x\in X}\ \mathbb{Z}\,x$ le groupe abélien libre construit sur X.

a) Montrer que la structure de groupe de $\mathbb{Z}[G]$ peut-être enrichie d'une manière unique en une structure d'anneau telle que l'inclusion canonique $\iota\colon G \to \mathbb{Z}[G]^\times$ définie par $\iota(g) = g$ est un morphisme de groupes dans le groupe multiplicatif de $\mathbb{Z}[G]$.

b) Définir une structure naturelle de $\mathbb{Z}[G]$-module à droite sur $\mathbb{Z}[\Gamma\backslash G]$.

c) Si M est un $\mathbb{Z}[G]$-module à droite, on note M^Γ le sous groupe de M formé des éléments invariants sous Γ.

Montrer que l'application $\delta\colon \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}[\Gamma\backslash G],\, M) \to M$ définie par $\varphi \mapsto \varphi(1)$ induit un isomorphisme de groupes $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z}[\Gamma\backslash G], M) \simeq M^\Gamma$.

d) En déduire que le sous-groupe M^Γ des invariants sous Γ est naturellement muni d'une structure de module à droite sur l'anneau $\mathcal{H} := \mathrm{End}_{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z}[\Gamma\backslash G])$.

e) Pour $g \in G$, on note $\Gamma_g := g^{-1}\,\Gamma\,g \cap \Gamma$. Montrer que l'application $\Gamma_g\backslash\Gamma \to \Gamma\backslash\Gamma\,g\,\Gamma$ définie par $\Gamma_g\,\gamma \mapsto \Gamma\,g\,\gamma$ est une bijection.

f) On note Δ le sous-ensemble de G formé des éléments g tels que le sous-groupe Γ_g est d'indice fini dans Γ.

Vérifier que Δ est un sous-ensemble de G contenant Γ et stable par produit.

g) Montrer que $\mathbb{Z}[\Gamma\backslash G]^\Gamma$ s'identifie au groupe abélien libre $\mathbb{Z}[\Gamma\backslash\Delta/\Gamma]$.

h) Si on identifie $\mathcal{H} := \mathrm{End}_{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z}[\Gamma\backslash G])$ à $\mathbb{Z}[\Gamma\backslash\Delta/\Gamma]$, montrer que son action sur M^Γ est décrite par la formule $m|\Gamma\,g\,\Gamma = \sum_{\Gamma h\in\Gamma g\Gamma}\ m\,h$.

i) Sous la même identification, montrer que la composition dans $\mathcal{H}$ est donnée par $\Gamma\,g\,\Gamma|\Gamma\,h\,\Gamma = \sum_{\Gamma k\Gamma\in\Gamma\backslash\tilde{G}/\Gamma}\ n_k\,\Gamma\,k\,\Gamma$ où $n_k := \#\{(i,j)\colon \Gamma\,k = \Gamma\,g_i\,h_j\}$, $\Gamma\,g\,\Gamma = \coprod_{i=1}^r\ \Gamma\,g_i$ et $\Gamma\,h\,\Gamma = \coprod_{j=1}^s\ \Gamma\,h_j$.

j) Lorsque Γ est distingué dans G, identifier $\mathcal{H}$ avec une algèbre de groupe.