Université P. et M. Curie (Paris VI), Michel Waldschmidt
Deuxième semestre 2004/2005

Master de sciences et technologies 1ère année - Mention : Mathématiques et applications
Spécialité : Mathématiques Fondamentales MO11 : Théorie des nombres (12 ECTS)

Examen écrit: `6 Juin 2005`

Durée: 3 heures
Seul document autorisé: le polycopié

1.
a) Quel est le polynôme cyclotomique Φ_8?
b) Soit p un nombre premier impair. Quel est, suivant la classe de p modulo 8, l'ordre de l'image de p dans $(\mathbf{Z}/8\mathbf{Z})^\times$?
c) Soit p un nombre premier. Quels sont les degrés des facteurs irréductibles de $\Phi_8(X)$ dans $\mathbf{F}_p[X]$?
d) Soit f un polynôme irréductible de $\mathbf{Z}[X]$. Peut-on affirmer qu'il existe un nombre premier p tel que l'image de f dans $\mathbf{F}_p[X]$ soit irréductible? *(Justifier la réponse, bien sûr!).*

2. Soit F le corps

$$F = \mathbf{Q}\left(\sqrt{2},\ \sqrt{7},\ \sqrt{3+\sqrt{2}}\right).$$

a) Montrer que F est une extension galoisienne de $\mathbf{Q}$.
b) Montrer qu'il existe trois automorphismes α, β, γ de F vérifiant

$$\begin{array}{lll}
\alpha(\sqrt{2}) = \sqrt{2} & \alpha(\sqrt{7}) = \sqrt{7} & \alpha(\sqrt{3+\sqrt{2}}) = -\sqrt{3+\sqrt{2}} \\
\beta(\sqrt{2}) = \sqrt{2} & \beta(\sqrt{7}) = -\sqrt{7} & \beta(\sqrt{3+\sqrt{2}}) = \sqrt{3+\sqrt{2}} \\
\gamma(\sqrt{2}) = -\sqrt{2} & \gamma(\sqrt{7}) = \sqrt{7} & \gamma(\sqrt{3+\sqrt{2}}) = \sqrt{3-\sqrt{2}}.
\end{array}$$

c) Montrer que l'on a

$$\alpha^2 = 1, \quad \beta^2 = 1, \quad \gamma^2 = 1, \quad \beta\gamma = \alpha\gamma\beta, \quad \alpha\beta = \beta\alpha, \quad \alpha\gamma = \gamma\alpha.$$

d) Donner la liste des éléments du groupe de Galois de F sur $\mathbf{Q}$.

3. Soit $\mathbf{Z}_k$ l'anneau des entiers du corps quadratique imaginaire $k = \mathbf{Q}(\sqrt{-23})$.
a) Quel est le discriminant de $\mathbf{Z}_k$?
b) Donner une base de $\mathbf{Z}_k$ comme $\mathbf{Z}$-module.
c) Quelles sont les unités de $\mathbf{Z}_k$?
d) Écrire la décomposition de l'idéal (2) de $\mathbf{Z}_k$ en idéaux premiers.
e) Soit $\mathfrak{p}$ un idéal premier de $\mathbf{Z}_k$ contenant 2.
Quelle est la norme de $\mathfrak{p}$?
Quel est le corps résiduel de $\mathfrak{p}$?
Expliciter une uniformisante pour la valuation ultramétrique $v_{\mathfrak{p}}$.
Calculer $v_{\mathfrak{p}}(\sqrt{-23})$.
f) Quel est nombre de classes de k?

4.
a) Soit t un nombre réel. Quelle est l'abscisse de convergence de la série de Dirichlet

$$\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n + n^t}{n^s}$$

et quelle est son abscisse de convergence absolue ?
b) Soit

$$\sum_{n\geq 1} \frac{a_n}{n^s}$$

une série de Dirichlet. On note σ_c son abscisse de convergence et σ_a son abscisse de convergence absolue. Démontrer

$$\sigma_c \leq \sigma_a \leq \sigma_c + 1.$$