Vol. 50, No. 2 DUKE MATHEMATICAL JOURNAL © June 1983

ZEROS D'UN CHAMP DE VECTEURS ET CLASSES CHARACTERISTIQUES EQUIVARIANTES

NICOLE BERLINE ET MICHÈLE VERGNE

Introduction. Soit M une variété différentiable, munie d'une action d'un groupe de Lie T. Soit $\mathfrak{t}$ l'algèbre de Lie de T. Dans [2] nous avons introduit des espaces de cohomologie équivariante $H(X)$, pour $X \in \mathfrak{t}$, pour lesquels on a une propriété de localisation: supposons M et T compacts; si $\mu \in H(X)$ alors $\int_M \mu$ ne dépend que de la restriction de μ à la variété des points fixes du groupe à un paramètre $\exp tX$. Lorsque ces points fixes sont non dégénérés, (donc en nombre fini), nous obtenons une formule explicite (théorème 1–6) par une méthode inspirée de R. Bott [3]: en dehors des points fixes, la forme μ est une forme exacte $d\nu$, et on calcule $\int_M \mu$ par la formule de Stokes. (Le cas où la variété des points fixes est de dimension > 0 sera traité dans un autre article).

Lorsque M est une variété symplectique, et que l'action de T est hamiltonienne, un élément remarquable de $H(X)$ est fourni par la forme (non homogéne) $J_X - (\sigma/2i\pi)$, où J_X est le moment de X et σ la 2-forme symplectique. Dans [2] nous retrouvions par cette méthode la formule de Duistermaat–Heckman [4] pour $\int_M e^{iJ_X}(\sigma^n/n!)$.

Lorsque M est une orbite de la représentation coadjointe du groupe de Lie T, munie de sa structure symplectique canonique, on a $J_X(m) = -\langle m, X\rangle$ pour $m \in M \subset \mathfrak{t}^*$. Si T est simplement connexe et si M est entière, il y a sur M un fibré en droites canonique, muni d'une connexion canonique, et la forme σ coïncide avec la courbure de cette connexion [6].

Revenons au cas d'une variété M quelconque, munie d'une action à gauche d'un groupe de Lie T. Soit P un fibré principal de base M, de fibre un groupe de Lie G. Supposons que T opère sur P en préservant une connexion ω. Notons Ω la courbure de ω et X^* le champ de vecteurs sur P associé à X. Nous définissons une application "moment" $J: P \to \mathfrak{t}^* \otimes \mathfrak{g}$ par $J_X(p) = \omega(X^*)(p)$, pour X dans $\mathfrak{t}$ et p dans P. Nous considerons la forme (non homogène) sur P, à valeurs dans d'algebre de Lie de G, $J_X - (\Omega/2\pi)$. A l'aide de cette forme, nous construisons des éléments de $H(X)$ en suivant la méthode de Chern–Weil pour les classes caractéristiques ordinaires (ceci fait l'objet du chapitre 2).

Ces classes caractéristiques équivariantes permettent de transformer des formules de points fixes en intégrales sur M de formes dans $H(X)$. Nous appliquons ceci à une généralisation du théorème 2 de [3], et à la formule de Riemann–Roch.

Received January 7, 1983.

1. Points fixes et chomologie equivariante.

1.1. Soit M une variété qu'on supposera orientée. On note $\mathscr{A}(M) = \oplus \mathscr{A}^r(M)$ l'algèbre sur C des formes différentielles sur M. Si ξ est un champ de vecteurs sur M, on note $C(\xi)$ la contraction $\mathscr{A}(M) \to \mathscr{A}(M)$ définie par $(C(\xi)\mu)(\xi_1, \ldots, \xi_r) = \mu(\xi, \xi_1, \ldots, \xi_r)$ pour $\mu \in \mathscr{A}^r(M)$. On note $\mathscr{L}(\xi)$ la dérivation de Lie.

Soit d la dérivation extérieure. Rappelons les formules

1.1.(a) d et $C(\xi)$ sont des antidérivations de l'algèbre $\mathscr{A}(M)$ et $d \circ d = 0$, $C(\xi) \circ C(\xi) = 0$.

1.1.(b) $\mathscr{L}(\xi)$ est une dérivation de $\mathscr{A}(M)$ et $\mathscr{L}(\xi) = d \circ C(\xi) + C(\xi) \circ d$.

1.2. Soit T un groupe de Lie agissant sur M à gauche. On note $\mathfrak{t}$ l'algèbre de Lie de T. Pour $X \in \mathfrak{t}$, on note X^* le champ de vecteurs sur M engendré par l'action de T, i.e., pour une fonction f sur M:

$$(X^*f)(m) = \frac{d}{d\epsilon} f(\exp \epsilon X \cdot m)\Big|_{\epsilon=0}$$

On note $\mathscr{A}_X$ la sous-algèbre des formes $\mu \in \mathscr{A}(M)$ telles que $\mathscr{L}(X^*)\mu = 0$. Nous modifions par un facteur $2i\pi$ les définitions de [2].

L'opérateur $d - 2i\pi C(X^*)$ est une antidérivation de $\mathscr{A}(M)$, qui respecte la graduation en formes paires et impaires.

On pose

$$Z(X) = \operatorname{Ker}(d - 2i\pi C(X^*))$$

et

$$B(X) = (d - 2i\pi C(X^*)) \cdot \mathscr{A}_X .$$

On a $(d - 2i\pi C(X^*))^2 = -2i\pi \mathscr{L}(X^*)$, d'où

$$B(X) \subset Z(X) \subset \mathscr{A}_X .$$

On note $H(X)$ l'algèbre $Z(X)/B(X)$. Il est clair que pour $X = 0$, $H(0)$ est l'algèbre de cohomologie ordinaire de la variété M. Si $h \in T$, on a $h^* \cdot H(X) = H(adh \cdot X)$.

1.3. Si $\mu = \sum \mu^{[i]}$ est une forme sur M et N une sous-variété compacte orientée de M, on écrit $\int_N \mu$ pour $\int_N \mu^{[\dim N]}$. Si m est un point de M, on pose $\mu(m) = \mu^0(m)$.

1.4. Proposition. *Si N est une sous-variété compacte orientée de M, invariante par le groupe à un paramètre $\exp tX$, et si $\mu \in B(X)$, alors $\int_N \mu = 0$. L'application $\mu \to \int_N \mu$ est donc bien définie sur $H(X)$.*

1.5. Soit $m \in M$ un zéro du champ de vecteurs X^*. La dérivation de Lie $\mathscr{L}(X^*)$ induit un endomorphisme noté $L_m(X)$ de l'espace tangent $T_m(M)$.

Le champ X^* sera dit non dégénéré si $L_m(X)$ est inversible pour tout zéro m de X^*.

Supposons que le groupe T soit compact. Si $X \in \mathfrak{t}$, et si m est un zéro de X^* tel que $L_m(X)$ soit inversible, il existe une base $e_1, e_2, \ldots, e_{2n-1}, e_{2n}$ de $T_m M$ telle que

$$L_m(X)e_{2j-1} = \lambda_j e_{2j}$$

$$L_m(X)e_{2j} = -\lambda_j e_{2j-1}$$

on suppose cette base d'orientation positive. Alors, le produit $\lambda_1 \ldots \lambda_n$ ne dépend pas du choix d'une telle base. On pose

$$\chi(L_m(X)) = i^{-n}\lambda_1\lambda_2 \ldots \lambda_n .$$

1.6. Théorème. *Soit T un groupe de Lie compact agissant sur une variété compacte orientée M de dimension $2n$. Soit $X \in \mathfrak{t}$, tel que le champ de vecteurs X^* sur M soit non dégénéré. Soit $\mu \in H(X)$, alors*

$$\int_M \mu = \sum_{\textit{zéros de } X^*} \frac{\mu(m)}{\chi(L_m(X))} .$$

Rappelons le principe de la démonstration [2].

Soit α une forme sur M, sans terme de degré 0, alors $1 + \alpha$ est inversible dans $\mathscr{A}(M)$, d'inverse

$$(1+\alpha)^{-1} = 1 - \alpha + \cdots + (-1)^k \alpha^k + \cdots .$$

Soit M' le complémentaire dans M de l'ensemble des zéros de X^*. Soit α une 1-forme sur M' telle que

$$\alpha(X^*) = -\frac{1}{2i\pi} \quad \text{et} \quad \mathscr{L}(X^*)\alpha = 0. \tag{1.7}$$

Soit $\mu \in \mathscr{A}(M')$ une forme telle que $(d - 2i\pi C(X^*))\mu = 0$, alors

$$C(X^*)\left\{ \mu - d\left(\alpha(1 + d\alpha)^{-1}\mu\right)\right\} = 0. \tag{1.8}$$

On choisit sur M une métrique T invariante $g(\ ,\ )$. La forme

$$\alpha(Y) = -\frac{1}{2i\pi}\frac{g(X^*, Y)}{g(X^*, X^*)}$$

vérifie (1.7). Il résulte de (1.8) que, si on pose

$$\nu = \left(\alpha(1 + d\alpha)^{-1}\mu\right)^{[2n-1]},$$

alors $\mu^{[2n]}|_{M'} = d\nu|_{M'}$.

On applique alors le théorème de Stokes:

$$\int_M \mu = \lim_{\epsilon \to 0} \int_{M_\epsilon} \mu = \lim_{\epsilon \to 0} \int_{M_\epsilon} d\nu = \lim_{\epsilon \to 0} \int_{\partial M_\epsilon} \nu,$$

M_ϵ étant le fermé obtenu en retirant de M une petite boule de rayon ϵ autour de chaque zéro de X^*. On calcule facilement un développement limité de la forme ν au voisinage de chaque zero m, et on obtient ainsi le théorème 1.6.

2. Classes Caracteristiques equivariantes. Nous allons maintenant montrer comment une action de T sur un fibré principal P de base M admettant une connexion T-invariante fournit des éléments $\Phi(X, P) \in H(X)$. Cette construction suit de près la méthode de Chern–Weil pour définir des formes représentant les classes caractéristiques ordinaires.

2.1. Soient P une variété, E un espace vectoriel complexe, $\mathscr{A}(P) \otimes E$ l'espace des formes sur P à valeurs dans E. Etant donnés deux espaces vectoriels E_1, E_2 et une application bilinéaire $f: E_1 \times E_2 \to E$, on définit une application bilinéaire $(\mathscr{A}(P) \otimes E_1) \times (\mathscr{A}(P) \otimes E_2) \to \mathscr{A}(P) \otimes E$ comme suit:

si $\varphi = \sum \varphi_i \otimes a_i \in \mathscr{A}(P) \otimes E_1$, $\Psi = \sum \Psi_j \otimes b_j \in \mathscr{A}(P) \otimes E_2$ on pose $f(\varphi, \Psi) = \sum \varphi_i \Psi_j \otimes f(a_i, b_j)$.

2.2. Soit G un groupe de Lie d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$. Soit $P \xrightarrow{\pi} M$ un fibré principal de fibre G, sur lequel G agit à droite. Quand ce sera utile on notera R l'action de G

$$R(g)p = pg$$

Pour $U \in \mathfrak{g}$ on notera par la même lettre le champ de vecteurs sur P engendré par l'action de G:

$$(Uf)(p) = \frac{d}{d\epsilon} \varphi(p \exp \epsilon U)\Big|_{\epsilon=0}$$

Soit ω une 1-forme de connexion sur P, i.e., une 1-forme sur P à valeurs dans $\mathfrak{g}$, telle que

2.3. $\omega(U) = U$ pour tout $U \in g$ et $R(\mathfrak{g})^*\omega = (adg)^{-1} \cdot \omega$ pour tout $g \in G$.

On note D la dérivation covariante associée à la connexion ω et $\Omega = D\omega$ sa courbure. Rappelons les identités:

2.4

(1) $$\Omega = d\omega + \tfrac{1}{2}[\omega, \omega]$$

(2) $$D\Omega = 0$$

On suppose que P est muni d'une action à gauche du groupe de Lie T. Cette action de T commute donc à l'action de G, et induit une action de T sur M. Pour

$X \in \mathfrak{t}$, on note X^* le champ de vecteurs sur P engendré par l'action de T:

$$(X^*f)(p) = \frac{d}{d\epsilon} f(\exp \epsilon X p)\Big|_{\epsilon=0}$$

On définit l'application $J : P \to \mathfrak{t}^* \otimes \mathfrak{g}$ par $J_X(p) = \omega(X^*)(p)$ pour X dans $\mathfrak{t}$ et p dans P. Il est clair que J est $T \times G$ equivariante. Par analogie avec le cas symplectique, on appelle J_X le moment de X; si (M, σ) est une variété symplectique, L un fibre en droites T equivariant muni d'une connexion de courbure σ, les deux notions de moment coïncident bien. Le lemme suivant démontre de façon standard.

2.6. LEMME. *Pour tout X dans* $\mathfrak{t}$, *on a*

(a) $$DJ_X = dJ_X + [\omega, J_X]$$

(b) $$DJ_X + C(X^*)\Omega = \mathscr{L}(X^*) \cdot \omega$$

2.6. COROLLAIRE. *Si ω est T-invariante, on a*

$$DJ_X + C(X^*)\Omega = 0.$$

(*Réciproquement, si T est connexe, cette condition implique que ω est T-invariante*).

2.8. On suppose désormais que la connexion ω est T-invariante et on considère la forme (paire, mais non homogène) sur P à valeurs dans $\mathfrak{g}_{\mathbf{C}}$.

$$J_X - \frac{\Omega}{2i\pi}$$

D'après 2.7 elle vérifie

$$(D - 2i\pi C(X^*)) \cdot \left(J_X - \frac{\Omega}{2i\pi}\right) = 0$$

De plus c'est une forme tensorielle.

Nous allons définir à l'aide de cette forme une application analogue à l'homomorphisme de Weil, cf. [5, chap. XII].

2.9. Soit $T(\mathfrak{g}^*) = \bigotimes_k (\bigotimes^k \mathfrak{g}^*_{\mathbf{C}})$ l'algèbre tensorielle de $\mathfrak{g}^*_{\mathbf{C}}$. Un élément $\Phi \in \bigotimes^k \mathfrak{g}^*$ est une application multilinéaire de $\mathfrak{g}_{\mathbf{C}} \times \cdots \times \mathfrak{g}_{\mathbf{C}}$ dans $\mathbf{C}$. Si $\varphi_1, \ldots, \varphi_k$ sont des formes sur P à valeurs dans $\mathfrak{g}$ on a défini en 2.1 la forme $\Phi(\varphi_1, \ldots, \varphi_k) \in \mathscr{A}(P)$.

Pour abréger on écrira quelquefois $\Phi(\varphi, \ldots, \varphi) = \Phi(\varphi)$.

Soit $S(\mathfrak{g}^*)$ l'algèbre des fonctions polynômiales sur $\mathfrak{g}_{\mathbf{C}}$. On identifie $S(\mathfrak{g}^*)$ au quotient de $T(\mathfrak{g}^*)$ par l'idéal engendré par les éléments de la forme

$$f_1 \otimes f_2 - f_2 \otimes f_1 \qquad \text{pour} \quad f_1, f_2 \in \mathfrak{g}^*$$

Soit $T(\mathfrak{g}^*)^G$ la sous-algèbre graduée des tenseurs G-invariants. Son image dans $S(\mathfrak{g}^*)$ est égale à l'algèbre $I(\mathfrak{g}^*)$ des fonctions polynomiales G-invariantes sur $\mathfrak{g}$.

2.10. Soient $\varphi_1, \ldots, \varphi_k$ des formes sur P à valeurs dans $\mathfrak{g}_{\mathbf{C}}$ qui vérifient

$$R_g^* \varphi_j = (adg)^{-1} \varphi_j \qquad \text{pour tout} \quad g \in G.$$

Si $\Phi \in (\bigotimes^k \mathfrak{g}^*)^G$ alors

$$R_g^* \Phi(\varphi_1, \ldots, \varphi_k) = \Phi(\varphi_1, \ldots, \varphi_k) \qquad \text{pour tout} \quad g \in G.$$

2.11. Pour $\Phi \in (\bigotimes^k \mathfrak{g}_{\mathbf{C}}^*)^G$ on pose

$$\Phi(X, \omega) = \Phi\Big(J_X - \frac{\Omega}{2i\pi}, \ldots, J_X - \frac{\Omega}{2i\pi}\Big)$$

2.12. LEMME.
i(i) *$\Phi(X,\omega)$ ne dépend que de l'image de Φ dans $S(\mathfrak{g}^*)$.*
(ii) *$\Phi(X,\omega)$ se projette en une forme sur M, qu'on note encore $\Phi(X,\omega)$.*

Démonstration. Comme $J_X - (\Omega/2i\pi)$ est paire on a, pour $f_1, f_2 \in \mathfrak{g}^*$,

$$(f_1 \otimes f_2 - f_2 \otimes f_1)\Big(J_X - \frac{\Omega}{2i\pi}, J_X - \frac{\Omega}{2i\pi}\Big) = 0$$

d'où (i).

(ii) résulte de ce que, puisque $J_X - (\Omega/2i\pi)$ est une forme tensorielle, la forme $\Phi(X,\omega)$ est, d'aprés 2.10, une forme sur P horizontale et G invariante.

On a donc défini une application $(X,\Phi) \to \Phi(X,\omega) = \Phi(J_X - (\Omega/2i\pi))$ de $\mathfrak{t} \times I(\mathfrak{g}^*)$ dans $\mathscr{A}(M)$

2.13. PROPOSITION.
(i) $(\Phi_1\Phi_2)(X,\omega) = \Phi_1(X,\omega)\Phi_2(X,\omega)$
(ii) $\Phi(adh\, X, \omega) = b^*\Phi(X,\omega)$ *pour* $h \in T$
(iii) $d\Phi(X,\omega) = 2i\pi C(X^*).\ \Phi(X,\omega)$, *autrement dit* $\Phi(X,\omega) \in Z(X)$.

Démonstration. (i) est évident, (ii) vient de ce que

$$J_{adh\, X} - \frac{\Omega}{2i\pi} = h^*\Big(J_X - \frac{\Omega}{2i\pi}\Big).$$

Quant à (iii) il suffit de montrer que la forme $\Phi(X,\omega)$ sur P vérifie $(D - 2i\pi C(X^*))\Phi(X,\omega) = 0$. Supposons Φ homogène de degré k. Comme D est une antidérivation de l'algèbre des formes horizontales sur P, on a

$$(D - 2i\pi C(X^*))\Phi\Big(J_X - \frac{\Omega}{2i\pi}, \ldots, J_X - \frac{\Omega}{2i\pi}\Big)$$

$$= \sum_{j=0}^{k} \Phi\Big(J_X - \frac{\Omega}{2i\pi}, \ldots, (D - 2i\pi C(X^*)) \cdot \Big(J_X - \frac{\Omega}{2i\pi}\Big), \ldots, J_X - \frac{\Omega}{2i\pi}\Big)$$

$= 0, \qquad$ d'après 2.8.

2.14. Nous allons maintenant montrer que la classe de $\Phi(X, \omega)$ dans $H(X) = Z(X)/B(X)$ ne dépend pas du choix de la connexion T-invariante ω.

Soient ω_0 et ω_1 deux connexions T-invariantes sur P. On pose $\alpha = \omega_1 - \omega_0$, $\omega_t = \omega_0 + t\alpha$, pour $0 \leqslant t \leqslant 1$. Il est clair que α est une forme tensorielle sur P à valeurs dans $\mathfrak{g}$, et que ω_t est une connexion T-invariante sur P. On note D_t la dérivation covariante et Ω_t la courbure de ω_t. On fixe $X \in \mathfrak{t}$ et on note

$$J_t = C(X^*)\omega_t = C(X^*)\omega_0 + tC(X^*)\alpha$$

le moment de X par rapport à la connexion ω_t.

On considère la forme suivante sur P:

$$T_t = \sum_{j=1}^{k} \Phi\left(J_t - \frac{\Omega_t}{2i\pi}, \ldots, \alpha, \ldots, J_t - \frac{\Omega_t}{2i\pi}\right)$$

où α est à la $j$ème-place.

2.15. LEMME.

$$\left(C(X^*) - \frac{D_t}{2i\pi}\right)T_t = \frac{d}{dt}\Phi\left(J_t - \frac{\Omega_t}{2i\pi}, \ldots, J_t - \frac{\Omega_t}{2i\pi}\right).$$

Démonstration. Les formes J_t, Ω_t, α sont horizontales, et $C(X^*) - (D_t/2i\pi)$ est une antidérivation de l'algèbre des formes horizontales, qui annule $J_t - (\Omega_t/2i\pi)$. On a donc

$$\left(C(X^*) - \frac{D_t}{2i\pi}\right)T_t = \sum_{j=1}^{k} \Phi\left(J_t - \frac{\Omega_t}{2i\pi}, \ldots, \left(C(X^*) - \frac{D_t}{2i\pi}\right)\cdot\alpha, \ldots, J_t - \frac{\Omega_t}{2i\pi}\right)$$

On obtiendra donc le lemme en vérifiant la relation

$$\frac{d}{dt}\left(J_t - \frac{\Omega_t}{2i\pi}\right) = \left(C(X^*) - \frac{D_t}{2i\pi}\right)\cdot\alpha.$$

On a

$$\frac{d}{dt}(J_t) = \frac{d}{dt}(C(X^*)\omega_t) = C(X^*)\alpha$$

$$\frac{d}{dt}(\Omega_t) = \frac{d}{dt}\left(d\omega_t + \frac{1}{2}[\omega_t, \omega_t]\right) = d\alpha + \frac{1}{2}([\alpha, \omega_t] + [\alpha, \omega_t]).$$

D'autre part, puisque α est une forme tensorielle, on a

$$D_t\alpha = d\alpha + \frac{1}{2}([\omega_t, \alpha] + [\alpha, \omega_t])$$

et on obtient la relation cherchée.

2.16. La forme T_t, horizontale et G-invariante, se projette en une forme $\overline{T}_t$ sur M qui vérifie, en vertu de 2.15,

$$\left(C(X^*) - \frac{d}{2i\pi}\right)\overline{T}_t = \frac{d}{dt}\Phi\left(J_t - \frac{\Omega_t}{2i\pi}\right)$$

on en déduit immédiatement

2.17. Proposition.

$$\Phi(X,\omega_1) - \Phi(X,\omega_2) = \left(C(X^*) - \frac{d}{2i\pi}\right)\left(\int_0^1 \overline{T}_t\, dt\right).$$

2.18. Théorème. *Si le fibré principal P admet une connexion T invariante, de courbure Ω, la classe de $\Phi(J_X - (\Omega/2i\pi))$ dans $H(X)$ est indépendante de la connexion choisie.*

On définit ainsi un homorphisme d'algèbres $\Phi \to \Phi(X,P)$ de $I(\mathfrak{g}^*)$ dans $H(X)$. On a

$$\Phi(adh\,X,P) = h^*\Phi(X,P) \qquad \text{pour} \quad h \in \mathfrak{t}$$

2.19. Il est clair que pour $X = 0$ on retrouve l'homomorphisme de Weil.

2.20. *Remarque.* Si T est compact, il existe toujours une connexion T-invariante sur P.

2.21. *Exemple.* Soit $P = M \times G$ un fibré trivial. Supposons qu'il existe un homomorphisme $f: T \to G$ tel que

$$h \cdot (m, g) = (hm, f(h)g) \qquad \text{pour} \quad h \in T, \quad m \in M, \quad g \in G$$

Soit ω la connexion plate sur P déduite de la forme de Maurer–Cartan sur G. Si on note aussi $f: \mathfrak{t} \to \mathfrak{g}$ la différentielle de f, on vérifie facilement que pour $\Phi \in I(\mathfrak{g}^*)$ la forme $\Phi(X,\omega)$ est la fonction constante égale à $\Phi(f(X))$.

2.22. Soit $\hat{I}(\mathfrak{g}^*)$ l'algèbre des germes de fonctions analytiques sur $\mathfrak{g}$. Pour $\Phi \in \hat{I}(\mathfrak{g}^*)$, on peut encore définir $\Phi(J_X - (\Omega/2i\pi))$: si Φ est analytique entière, c'est une forme sur M, dont les coefficients dépendent analytiquement de X, et l'homomorphisme $I(\mathfrak{g}^*) \to H(X)$ se prolonge à l'algèbre $\tilde{I}(\mathfrak{g}^*)$ des fonctions G-invariantes, analytiques entières sur $\mathfrak{g}$. Lorsque le rayon de convergence de Φ est fini, on peut définir la forme $\Phi(J_X - (\Omega/2i\pi))$ sur tout ouvert relativement compact de M, pour X suffisamment petit.

2.23. *Exemples.* Soient V un espace vectoriel complexe, et $\mathscr{V}$ un fibré vectoriel sur M de fibre type V. Soit $P(\mathscr{V})$ le fibré principal de fibre $\mathrm{GL}(V)$ associé à $\mathscr{V}$. Si le groupe T agit sur $\mathscr{V}$ en préservant une connexion linéaire, à tout élément $\Phi \in \tilde{I}(\mathfrak{gl}(V)^*)$ est associée une classe $\Phi(X,\mathscr{V}) \in H(X)$.

La classe associée à la fonction $A \to \operatorname{tr}\exp A$ est notée $\operatorname{ch}(X,\mathscr{V})$.

La classe associée à la fonction $A \to \text{dét}(A/(1-\exp(-A)))$ est notée $\text{Todd}(X, \mathscr{V})$.

3. Applications.

3.1. Soit ρ une représentation de G dans un espace vectoriel V. On forme le fibré vectoriel $\mathscr{V} = (P \times V)/G$ associé à ρ. L'espace $\Gamma(\mathscr{V})$ des sections de $\mathscr{V}$ s'identifie à l'espace des fonctions f C^∞ sur P à valeurs dans V qui satisfont

$$f(pg) = \rho(g)^{-1} f(p)$$

Le groupe T opère sur le fibré $\mathscr{V}$ et donc sur $\Gamma(\mathscr{V})$ par

$$(h \cdot f)(p) = f(h^{-1}p)$$

Pour $X \in \mathfrak{t}$, on note $\mathscr{L}^{\mathscr{V}}(X)$ l'opérateur sur $\Gamma(\mathscr{V})$ qui s'en déduit:

$$(\mathscr{L}^{\mathscr{V}}(X)f)(p) = \frac{d}{d\epsilon} f(\exp(-\epsilon X)\cdot p)\Big|_{\epsilon=0}$$

Si ξ est un champ de vecteurs sur M, on note ∇_ξ la dérivation covariante de $\Gamma(\mathscr{V})$ associée à la connexion.

Soit X_M^* le champ de vecteurs sur M engendré par X. Le lemme suivant résulte immédiatement de la définition de ∇:

3.2 Lemme.

$$(\mathscr{L}^{\mathscr{V}}(X)\cdot f)(p) = \rho(J_X(p))\cdot f(p) - (\nabla_{X_M^*} f)(p)$$

En particulier si $m \in M$ est un zéro de X_M^* on a

$$(\mathscr{L}^{\mathscr{V}}(X)f)(p) = \rho(J_X(p))\cdot f(p)$$

pour tout point $p \in P$ au dessus de m.

3.3. Soit m un zéro de X_M^*.

Notons $L_m^{\mathscr{V}}(X)$ l'endomorphisme de la fibre $\mathscr{V}_m$ induit par $\mathscr{L}^{\mathscr{V}}(X)$ (on a donc $L_m(X) = L_m^{TM}(X)$).

Soit p un point de P au-dessus de m. Le choix de p définit une bijection linéaire de V sur la fibre $\mathscr{V}_m$. Notons $\mathscr{L}_m^{\mathscr{V}}(X)_p$ l'endomorphisme de V qui s'en déduit. Le lemme 3.2 entraine immédiatement:

Proposition. *Soit m un zéro de X_M^* et $p \in P$ un point quelconque au dessus de m. Alors*

$$L_m^{\mathscr{V}}(X)_p = \rho(J_X(p))$$

et par suite, pour $\Phi \in \hat{I}(\mathfrak{gl}(V)^*)$, on a

$$\Phi\Big(\rho\Big(J_X - \frac{\Omega}{2i\pi}\Big)\Big)(m) = \Phi\big(L_m^{\mathscr{V}}(X)_p\big).$$

3.4. On voit ainsi que sous les hypothèses du théorème 1.6, on a le

THÉORÈME.

$$\int_M \Phi\left(\rho\left(J_X - \frac{\Omega}{2i\pi}\right)\right) = \sum_{\text{zéros de } X^*} \frac{\Phi(L_m^{\mathcal{V}}(X))}{\chi(L_m(X))}.$$

En particulier lorsque $\mathcal{V} = T_{\mathbf{C}}M$ *et* $\deg \Phi \leqslant (\dim M)/2$ *on retrouve le théorème 2 de* [3].

3.5. Supposons M compacte.

Soient $(\mathcal{E}_k)_{0 \leqslant k \leqslant N}$ une suite de fibrés vectoriels sur M, $\Gamma(\mathcal{E}_k)$ l'espace des sections de $\mathcal{E}_k$, $\mathcal{D} = (d_k : \Gamma(E_k) \to \Gamma(E_{k+1}))$ un complexe elliptique d'opérateurs différentiels. Supposons qu'un groupe compact T agisse sur chaque fibré $\mathcal{E}_k$ de telle sorte que d_k commute à l'action de T dans $\Gamma(E_k)$ et $\Gamma(E_{k+1})$. Notons $h \to H^k(h)$ la représentation de T dans le k-ième espace de cohomologie du complexe. Soit $X \in \mathfrak{t}$ tel que le champ de vecteurs X^* sur M soit non dégénéré. Alors la formule des points fixes d'Atiyah–Bott [1] exprime, pour t petit, $\sum(-1)^k \operatorname{tr} H^k(\exp tX)$ en fonction des endomorphismes $L_m^{\mathcal{E}_i}(X), L_m(X)$ définis par X dans les fibres au dessus des zéros de X^*. Notre méthode permet, dans de nombreux cas de nature géométrique, de construire explicitement une forme $\varphi(X, \mathcal{D})$ sur la variété M, dépendant analytiquement de X, pour X assez petit, telle que

$$\int_M \varphi(X, \mathcal{D}) = \sum (-1)^k \operatorname{tr} H^k(\exp X).$$

Il est clair qu'alors indice $\mathcal{D} = \int_M \varphi(0, \mathcal{D})$

3.6. *Exemple.* Soient M une variété compacte complexe et $\mathcal{E}$ un fibré vectoriel holomorphe sur M. On considère le complexe de Dolbeaut:

$$\Omega^k = \Gamma\left(\Lambda^k(T^{*0,1}M) \otimes \mathcal{E}\right), \qquad \Omega^k \xrightarrow{d'' \otimes 1} \Omega^{k+1}.$$

La formule des points fixes s'écrit dans ce cas:

$$\sum (-1)^k \operatorname{tr} H^k(\exp X) = \sum_m \frac{\operatorname{tr}_{\mathbf{C}}\left(\exp L_m^{\mathcal{E}} X\right)}{\operatorname{dét}_{\mathbf{C}}(1 - \exp(-L_m X))}$$

D'après 3.3, le membre de gauche s'écrit

$$\sum_m \frac{\mu(m)}{\chi(L_m(X))},$$

si on prend $\mu = \operatorname{ch}(X, \mathcal{E}) \operatorname{Todd}(X, TM)$ (ces classes sont définies relativement à la structure complexe de $\mathscr{E}$ et de TM). On obtient donc

$$\sum(-1)^k \operatorname{tr} H^k(\exp X) = \int_M \operatorname{ch}(X,\mathscr{E}) \operatorname{Todd}(X, TM).$$

La formule limite lorsque X tend vers 0 est la formule de Riemann–Roch.

Bibliographie

1. M. F. Atiyah et R. Bott, *A lefschetz fixed point formula for elliptic complexes* I. Annal. of Math. **86** (1967), 374–407.
2. N. Berline and M. Vergne, "Fourier transforms of orbits of the coadjoint representation". Proceedings of the conference on "Representations of Reductive groups". Park City, Utah, 1982. A paraître dans: *Progress in Mathematics*, Birkhaüser, Boston.
3. R. Bott, *Vector fields and characteristic numbers*, Mich. Math. J. **14** (1967), 231–244.
4. J. J. Duistermaat and G. J. Heckman, *On the variation in the cohomology of the symplectic form of the reduced phase space*, A paraître.
5. S. Kobayashi and K. Nomizu, *Foundations of Differential Geometry*, II, 1969, J. Wiley and Sons, New York. London. Sydney.
6. B. Kostant, "Quantization and unitary representations" in *Modern Analysis and Applications*, Lecture notes in Math. Springer **170** (1970), 87–207.

Berline: Université de Rennes, France

Vergne: Department of Mathematics, Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, Massachusetts and CNRS, Paris, France